## Astrofísica Computacional

Ejercicios 02. Métodos Numéricos Básicos II

### A. Ley de Desplazamiento de Wien

La ley de radiación de Planck establece que la intensidad $I$ de la radiación por unidad de área y por unidad de longitud de onda $\lambda$ de un cuerpo negro con una temperatura $T$ es

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{1}$$

donde $h$ es la constante de Planck, $c$ es la rapidez de la luz en el vacio y $k_B$ es la constante de Boltzmann.

1. Escriba una función que grafique la intensidad de Planck en función de $\lambda$ para una temperatura $T$ dada.
2. Utilice la derivada de esta expresión para mostrar que la longitud de onda $\lambda_m$ en la que se tiene el máximo de la intensidad satisface la ecuación

$$5e^{-\frac{hc}{\lambda_m k_B T}} + \frac{hc}{\lambda_m k_B T} - 5 = 0. \tag{2}$$

3. Realice la sustitución $x = \frac{hc}{\lambda_m k_B T}$ para mostrar que la longitud de onda correspondiente al máximo de intensidad satisface la *Ley de Desplazamiento de Wien*,

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \tag{3}$$

   donde $b = \frac{hc}{k_B x}$ y $x$ es la solución de la ecuación no-lineal

$$5e^{-x} + x - 5 = 0. \tag{4}$$

4. Escriba un programa que resuelva la ecuación para $x$ con una tolerancia de $\epsilon = 10^{-6}$ utilizando el método de busqueda binaria (bisección) y con ello encuentre el coeficiente $b$ en la ley de desplazamiento.

### B. El Punto de Lagrange $L_1$

El punto de Lagrange $L_1$ del sistema Tierra-Luna es aquel lugar en el que la atracción gravitacional de estos dos cuerpos actuando sobre una partícula de prueba se combina de tal manera que se logra un equilibrio con la fuerca centrípeta que mantiene la partícula en su orbita (ver Figura).

1. Asuma que las orbitas son circulares y que la masa de la Tierra es mucho mayor que la de la Luna (y que la de la partícula de prueba) para mostrar que la distancia $r$ desde el centro de la Tierra hasta el punto $L_1$ satisface la ecuación

$$\frac{GM}{r^2} - \frac{Gm}{(R-r)^2} = \omega^2 r, \tag{5}$$

   donde $R$ es la distance entre la Tierra y la Luna, $M$ y $m$ son las masas de la Tierra y de la Luna, respectivamente, y $\omega$ es la velocidad angular de la Luna y la partícula alrededor de la Tierra.

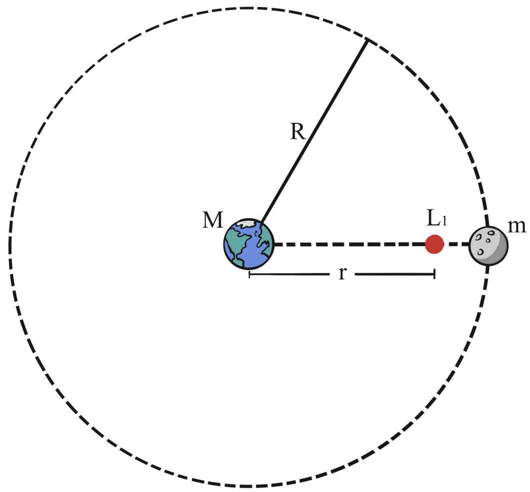


Figura 1: Punto de Lagrange $L_1$ en el sistema Tierra-Luna.

Claramente esta ecuación es un polinomio de orden 5 en $r$ y por ello su solución debe encontrarse en forma numérica. Escriba un programa que utilice el método de la secante (o Newton-Raphson) para resolver esta ecuación y encontrar la ubicación del punto $L_1$. Para ello considere los siguientes parámetros:

- $G = 6{,}674 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$
- $M = 5{,}974 \times 10^{24}$ kg
- $m = 7{,}348 \times 10^{22}$ kg
- $R = 3{,}844 \times 10^{8}$ m
- $\omega = 2{,}662 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$

**C. Periodicidad de las Manchas Solares**
En el archivo adjunto llamado 'ManchasSolares.txt' contiene un conjunto de datos con dos columnas: la primera cuenta los meses iniciando en enero de 1749 y la segunda contiene el número de manchas solares mensuales observadas.

1. Escriba un programa que lea el conjunto de datos y grafique la información contenida. El número de manchas es un indicador de actividad solar. Con ayuda de este gráfico, intente estimar el periodo del ciclo de actividad solar en meses.

2. Escriba una función que calcule la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de los datos leidos y realice un gráfico de la magnitud de los coeficientes de Fourier $|c_k|^2$ contra el número $k$. Este gráfico se denomina *Espectro de Potencias* de la señal de manchas solares. Identifique el máximo en el gráfico, el cual corresponde a la frecuencia que presenta la mayor amplitud dentro de la serie de Fourier.

3. Encuente el valor de $k$ correspondiente al máximo y determine el periodo correspondiente a esta frecuencia. El periodo hallado debe ser similar al que estimó a partir de la gráfica de los datos originales.

4. Repita el mismo procedimiento utilizando la Transformada Rápida de Fourier FFT (recomiedo que no cree la función sino que utilice una de las implementaciones de la FFT incorporadas en su lenguaje de programación de preferencia).

**PUNTO OPCIONAL. Rejillas de Difrección**

En un ejercicio anterior se encontró el patrón de difracción producido en una pantalla por radiación electromagnética con longitud de onda $\lambda$ incidente en una rejilla de difracción con ancho total $w$ y enfocada por una lente de longitud focal $f$.La función correspondiente es

$$I(x) = \left| \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \sqrt{q(u)} \exp\left(\frac{2\pi i x u}{\lambda f}\right) du \right|^2, \tag{6}$$

donde $x$ es la distancia sobre la pantalla desde el eje central del sistema y $q(u)$ es la función de transmisión de intensidad de la rejilla a una distancia $u$ del eje central (esta función representa la fracción de luz incidente que la rejilla deja atravesar).

En aquel ejercicio se evaluó esta expresión utilizando los métodos usuales de calculo numérico de integrales. Sin embargo, el mismo resultado puede obtenerse de una forma más eficiente al notar que la integral es en realidad una transformada de Fourier. En efecto, al aproximar la integral utilizando la regla del trapezoide con $n$ nodos ($N = n - 1$ sub-intervalos) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \sqrt{q(u)} \exp\left(\frac{2\pi i x u}{\lambda f}\right) du =& \frac{w}{N} \exp\left(-\frac{i\pi w x}{\lambda f}\right) \sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{q(u_j)} \exp\left(\frac{i2\pi w x j}{\lambda f N}\right) && (7) \\ =& \frac{w}{N} e^{-i\pi k} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \exp\left(\frac{i2\pi k j}{N}\right) && (8) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} u_j =& \frac{jw}{N} - \frac{w}{2}, && (9) \\ k =& \frac{wx}{\lambda f} && (10) \end{aligned}$$

y $y_j = \sqrt{q(u_j)}$. Comparando con la definición de la DFT se comprueba que la sumatoria corresponde al complejo conjugado $c_k^*$. De esta forma, la intensidad del patrón de interferencia se puede escribir en la forma

$$I(x_k) = \frac{w^2}{N^2} \left| c_k \right|^2, \tag{11}$$

donde

$$x_k = \frac{\lambda f}{w} k. \tag{12}$$

Esta relación muestra que el patrón de intensidad en el punto $x_k$ se encuentra mediante una DFT. Sin embargo, es importante notar que los valores de $k$ son enteros $k = 0, 1, 2, ..., N - 1$ y por lo tanto los puntos $x_k$ en los cuales se evaluará la intensidad están separados por intervalos de tamaño $\frac{\lambda f}{w}$ en la pantalla. Este espaciado puede ser muy ancho para obtener una buena representación del patrón de difracción. Por ejemplo, al tomar los datos del ejercicio anterior; $\lambda = 500\,\text{nm}$, $f = 1$ m y $w = 200\ \mu$m; se tiene un espaciamiento de puntos de $\frac{\lambda f}{w} = 2{,}5$ mm que en una pantalla de 10 cm de ancho corresponde a solo 40 puntos para graficar.

Una de las formas de para ajustar este inconveniente es incrementar el ancho de la rejilla de $w$ a $W > w$ con lo que el espaciado entre los puntos en la pantalla será mucho menor. Por ejemplo, al tomar $W = 10w$ se incrementará en un factor de 10 el número de puntos en el patrón de difracción. Ahora bien, el espacio agregado a la rejilla debe ser opaco para que no se cambien las propiedades del sistema físico original. Por esta razón, los valores de la función de transferenica en esta nueva región debe ser $y_j = 0$.

De esta forma, en términos del nuevo ancho de la rejilla se tienen las expresiones

$$I(x_k) = \frac{W^2}{N^2} \left| c_k \right|^2 , \tag{13}$$

donde

$$x_k = \frac{\lambda f}{W} k \tag{14}$$

y

$$c_k = \sum_{j=0}^{N-1} y_j \exp\left( \frac{i 2\pi k j}{N} \right) . \tag{15}$$

1. Escriba un código que utilice la FFT para calcular el patrón de difracción para una rejilla con la función de transmisión $q(u) = \sin^2(\alpha u)$ con una separación entre slits de 20 $\mu$m y con los siguientes parámetros: $\lambda = 500\,\text{nm}$, $f = 1$ m, $w = 200\ \mu$m, $W = 10w = 2$ mm y una pantalla con un ancho total de 10 cm. Elija un número de puntos, $n$, adecuado para obtener una buena aproximación de la función de transmisión y realice un gráfico del patrón de intensidad en la pantalla en función de la posición $x$ en el rango $-5$ cm $\leq x \leq 5$ cm. Este patrón debe ser el mismo obtenido en los Ejercicios 01.