Astrofísica Computacional

Proyecto 09. Un primer modelo de la Hidrodinámica. Estrella de Juguete 1-Dimensional

Este problema esta basado en el artículo [2]:

J. J. Monaghan and D. J. Price. Toy stars in one dimension. Mon. Not. R. Astron. Soc. 350, 1449–1456 (2004). [doi:10.1111/j.1365-2966.2004.07748.x]

El conjunto de ecuaciones que se considera es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = - \vec{\nabla} P + \vec{f} - \eta \vec{v} \tag{2}$$

$$P = \kappa \rho^{\gamma} \tag{3}$$

donde ρ representa la densidad de masa, $\vec{v}$ la velocidad del fluido, P la presión interna, $\vec{f}$ representará la fuerza gravitacional, η es el coeficiente de viscosidad cinemático en un modelo simplificado, y con κ y γ dos constantes que definen la ecuación de estado del fluido descrito.

Considerando el caso particular de un sistema unidimensional, la ecuación de movimiento, en el sistema de Lagrange, se convierte en

$$\rho \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} + f - \eta v. \tag{4}$$

En cuanto a la ecuación de estado, se asumirá la politrópica

$$P = \kappa \rho^2, \tag{5}$$

de tal manera que la ecuación de movimeinto será

$$\rho \frac{dv}{dt} = -2\rho\kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} + f - \eta v \tag{6}$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} + g - \nu v, \tag{7}$$

donde se identifica la aceleración gravitacional como $g = \frac{f}{\rho}$ y $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ es el coeficiente de viscosidad dinámico.

La Fuerza Gravitacional 1D

La fuerza que se considerará en este ejercicio será lineal en las coordenadas. Esta forma funcional fue estudiada por Newton, quien mostró que si dos partículas interactuan mediante una fuerza lineal, se moverán como si fueran atraidas en dirección del centro de masa del par (ver proposición LXIV de Newton en [3] o la discusión moderna de Chandrasekhar en [1]).

En este modelo, la aceleración gravitacional tendrá la forma

$$g = -\lambda x, \tag{8}$$

donde λ es una constante.

El objetivo de este proyecto será resolver numéricamente las ecuaciones del fluido para encontrar las funciones $\rho(t,x)$, $P(t,x)$ y $v(t,x)$ en la región espacial $x \in [-1,1]$. Para integrar el sistema, considere las condiciones iniciales

$$\begin{cases} \rho(t=0,x) = & 1 \\ v(t=0,x) = & 0. \end{cases} \tag{9}$$

Adicionalmente, considere los valores $\kappa = 0.1$ para la ecuación de estado, $\lambda = 2.01$ para la fuerza gravitacional y $\nu = 1$ para el coeficiente de viscosidad dinámico.

NOTA: De ser el caso, modifique los parámetros y condiciones propuestos para ver diferentes comportamientos.

Referencias

[1] Subrahmanyan Chandrasekhar. *Newton's Principia for the common reader*. Oxford University Press, 2003.

[2] J. J. Monaghan and D. J. Price. Toy stars in one dimension. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 350(4):1449–1456, 06 2004.

[3] Isaac Newton. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. England, 1687.