

Proyecto 2. Coalescencia de un Sistema Binario Newtoniano

Los sistemas binarios compuestos por objetos compactos (agujeros negros o estrellas de neutrones) eventualmente pierden energía orbital debido a la emisión de ondas gravitacionales. En este proceso, tanto la energía como el momento angular son transportados por las ondas gravitacionales y al perderse del sistema, los componentes del binario se acercarán y en algún momento se fusionarán.

Un sistema binario, con vector de separación $\mathbf{x}(t)$ y masas m_1 y m_2 , tiene un tensor de cuadrupolo reducido dado por

$$q_{ij} = \mu \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x_k x_k \right),$$

donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida del sistema. En la aproximación cuadrupolar, una onda gravitacional que se desplaza a lo largo del eje z esta descrita por las funciones

$$h_+ = \frac{1}{r} (\ddot{q}_{xx} - \ddot{q}_{yy})$$

$$h_\times = \frac{2}{r} \ddot{q}_{xy},$$

que representan las dos polarizaciones de la onda gravitacional.

La razón con la que la onda transporta la energía¹ es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} \left(\frac{\partial^3 q_{ij}}{\partial t^3} \right)^2$$

y la razón con la que transporta el momento angular es

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{2G}{5c^5} \epsilon_{zjk} \left(\frac{\partial^2 q_{jm}}{\partial t^2} \frac{\partial^3 q_{km}}{\partial t^3} \right).$$

El movimiento de un sistema binario moviéndose en una órbita elíptica puede ser descrito con la ecuación cónica

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - e \cos \varphi(t)},$$

con p el semi-latus rectum y e la excentricidad de la órbita. La conexión entre estas cantidades y la energía por unidad de masa y el momento angular por unidad de masa,

$$E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{r}$$

$$L = r^2 \dot{\varphi},$$

se presenta a través de las ecuaciones

$$p = \frac{L^2}{GM}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GM)^2}}$$

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema.

El objetivo final de este proyecto es calcular numéricamente la órbita del sistema binario que se fusiona, al igual que el patrón de la onda gravitacional emitida en este proceso.

¹Ver ecuaciones (3.98) y (3.99) de Maggiore, M. *Gravitational Waves* Vol. I.