



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propuesta de tesis de maestría

# Método de detección de exoplanetas en sistemas circumbinarios usando microlentes gravitacionales

**Juan Sebastián Rodríguez Camero**

Director(a): Eduard Alexis Larrañaga Rubio  
Ph.D. Física

Línea de Investigación:  
Astrofísica

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional  
Bogotá D.C., Colombia  
2023



# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Detección de exoplanetas . . . . .	1
1.2	Microlensing . . . . .	2
1.2.1	Ecuación de las lentes . . . . .	3
1.2.2	Magnificación . . . . .	4
1.2.3	Método de la resultante . . . . .	5
1.3	IA en la detección de exoplanetas . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>9</b>
2.1	Objetivo general . . . . .	9
2.2	Objetivos específicos . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Metodología</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Cronograma</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Presupuesto</b>	<b>16</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>18</b>



# 1 Introducción

## 1.1. Detección de exoplanetas

En el año 1992 fue publicado el descubrimiento del primer sistema planetario fuera del Sistema Solar, el cual dio una extraña sorpresa puesto que no se trataría de una estrella, sino que sería un púlsar (*PSR B1257+12*), el cuerpo ubicado en el centro de este sistema [1]. Desde entonces, la cifra de exoplanetas detectados ha crecido considerablemente, al punto que a la fecha de redacción de esta propuesta hay alrededor de 5500 de ellos confirmados [2].

Para llegar a la detección y confirmación de tal número de cuerpos planetarios se puede hacer uso de distintas técnicas y herramientas, ya sea desde la superficie terrestre o en el espacio. Algunos de los métodos más utilizados son el método de las velocidades radiales, donde se presta atención a posibles patrones en la variación del redshift de una estrella [3]; el método de tránsito, en el cual se toman las curvas de luz (diagramas de flujo de luz vs. tiempo) de las estrellas y se buscan atenuaciones periódicas de características similares; mediante el fenómeno de microlensing, en el cual también se estudian curvas de luz pero en este caso para buscar incrementos en el flujo de luz, principalmente de una estrella de fondo con el sistema planetario pasando en la línea de visión con la Tierra; el método de astrometría que se basa en la medición de la posición relativa de una estrella a sus vecinas en busca de diferencias de estas posiciones en el tiempo y la fotografía directa\*. De los anteriormente mencionados, el método más prolífico ha sido el de tránsito, con una cuenta superior a los cuatro mil exoplanetas descubiertos, seguido del método de velocidades radiales que suma más de mil detecciones. Los exoplanetas restantes se reparten entre las demás técnicas y algunas otras que no fueron mencionadas [2]<sup>†</sup>.

Debido a las limitaciones propias de las técnicas de detección utilizadas, se ha generado un sesgo con respecto a las características de los exoplanetas detectados tal que, del total presentado, apenas un aproximado del 4 % corresponde a planetas por debajo del tamaño de *Super-Tierras* (planetas con al menos cuatro veces el tamaño del nuestro) [2]. Sin embargo, el método de microlensing puede presentar una solución al sesgo que existe en relación a las características de los exoplanetas que han sido detectados, puesto que tendría una sensibilidad a planetas de masas menores al promedio y con distancias a su estrella anfitriona

---

\*<https://exoplanets.nasa.gov/discovery/exoplanet-catalog/>

†<https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/>

mayores a las observadas con otros métodos, llegando incluso a límites como el de la línea de congelación del sistema<sup>‡</sup> o la detección de exoplanetas errantes [5]. Debido a que este método está basado en el fenómeno de las lentes gravitacionales, las curvas de luz correspondientes presentan picos que pueden llegar a caracterizarse a partir de parámetros asociados a los cuerpos involucrados en la lente, siendo el principal la relación de la masa entre la estrella y el exoplaneta [6].

## 1.2. Microlensing

El modelamiento de las lentes gravitacionales atraviesa por la consideración de diversos factores que pueden tener influencia en la magnificación de la lente y que determinan las características del arreglo. Un primer factor es la cantidad de lentes que hay en el sistema, pues las ecuaciones de la lente y de magnificación esperada dependerán de más o menos parámetros según este número de cuerpos<sup>§</sup> [7]. Para este trabajo se estudiará el caso de un sistema de tres lentes. En este caso en el que se consideran múltiples fuentes, podría tomar un rol importante la disposición que tienen las lentes en el espacio en la naturaleza de las curvas de luz que obtendría el observador, lo cual ha sido estudiado por Daněš et al. (2019) [8]. Otro factor relevante es la manera en que la lente curva el espacio, que no necesariamente es la misma en todos los casos y que definirá la métrica a través de la cual el ángulo de deflexión puede ser determinado; lo cual también tiene una estrecha relación con la aproximación de puntual o de objeto extendido que se le esté dando al cuerpo que defleca la luz [9].

Las microlentes gravitacionales son un tipo específico de lente gravitacional en el cual las imágenes generadas tienen una distancia angular tan pequeña (en el orden de los milisegundos de arco o menor) que no es posible resolver cada una de estas por separado [10]. Esto no es necesariamente un obstáculo en el caso de la detección de exoplanetas, pues en el análisis de las curvas de luz solo es necesario conocer que ha existido un incremento en el flujo de luz a causa del evento de la lente, es decir una *magnificación* [5].

En este proyecto se plantea una opción teórica para el modelamiento de posibles detecciones mediante el método de microlensing en el caso particular de sistemas que estén conformados por dos estrellas y al menos un planeta (llamados sistemas *circumbinarios*). Para esto, se realizará un desarrollo teórico de la ecuación de las lentes en conjunto con la magnificación esperada, estudiando inicialmente el caso más sencillo como lo es el de un observador, una lente y una fuente de luz en el espacio euclídeo, para luego ir aumentando el grado de generalidad y pasar de allí a los pormenores del sistema de tres lentes puntuales distribuidas en el espacio. Esto permitiría relacionar la magnificación esperada (el aumento del flujo

---

<sup>‡</sup>La línea de congelación de un sistema estelar hace referencia a la distancia desde la estrella a partir de la cual el agua y otras moléculas volátiles pueden encontrarse en estado sólido. Para el caso del agua en el Sistema Solar es de unas 5 unidades astronómicas [4].

<sup>§</sup>por ejemplo, en el caso de dos lentes pueden ser descritas en términos de dos parámetros solamente, mientras que en tres lentes no puede reducirse de 5

de luz que se detecta con respecto al caso en que no hay una lente gravitacional) con la ubicación espacial de la fuente con respecto a la línea de visión para la lente. Al encontrar esta ubicación en función de tiempo, se tendría un modelo para las curvas de luz.

### 1.2.1. Ecuación de las lentes

En el caso más sencillo<sup>¶</sup>, el cual es un arreglo constituido por una lente  $L$ , una fuente de luz  $S$  y un observador  $O$ ; es posible definir una línea imaginaria de referencia  $OL$  que irá sobre la línea de visión que tenemos hacia la lente. A partir de esta referencia, se pueden definir dos planos perpendiculares a ella que contengan uno a  $S$  y otro a  $L$ . Con el arreglo escrito de esta manera, se puede encontrar una relación entre las posiciones angulares de la fuente  $\beta$  y de la imagen generada  $\theta$ , conociendo el ángulo de deflexión  $\alpha$ , que es la diferencia entre la dirección en que el rayo de luz salió de la fuente y aquella en que llegó al observador.

Tomando la definición para el parámetro de impacto,  $\alpha$  resulta ser:

$$\alpha = \frac{2R_S}{b}, \quad (1-1)$$

siendo  $R_S$  el radio de Schwarzschild y  $b$  el parámetro de impacto del evento. Así, es posible escribir la ecuación de las lentes en el caso descrito como

$$\theta = \beta + \frac{2R_S}{b} \frac{D_{LS}}{D_S}, \quad (1-2)$$

teniendo en cuenta que  $D_{LS}$  es la distancia entre los dos planos construidos y  $D_S$  es la distancia desde el observador hasta el plano de la fuente. Esta ecuación puede reformularse a partir de la introducción del ángulo de Einstein (el ángulo en el cual se predice que la imagen formará un anillo),

$$\theta_E = \frac{2R_S}{b} \frac{D_{LS}}{D_S}, \quad (1-3)$$

resultando en

$$u = y - y^{-1}, \quad \text{con } u = \frac{\beta}{\theta_E}, \quad y = \frac{\theta}{\theta_E}. \quad (1-4)$$

---

<sup>¶</sup>El desarrollo que se muestra en las secciones 1.2.1 a 1.2.3 está basado en el de Brett et al. [6]

La anterior ecuación tiene como solución la función:

$$y = \frac{1}{2} \left( u \pm \sqrt{u^2 + 4} \right). \quad (1-5)$$

Al realizar la generalización al caso de  $N$  lentes, esta expresión se convierte en

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} - \sum_i^N \epsilon_i \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}_i}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_i|^2}, \quad (1-6)$$

definiendo  $\epsilon_i \equiv m_i/M$  con  $M$  la masa total de todos los cuerpos que actúan como lentes.

### 1.2.2. Magnificación

La ecuación de las lentes ofrece una relación entre las posiciones angulares de la imagen generada y la fuente de luz. Esto por sí solo no presenta una conexión directa con la contraparte observacional que es la curva de luz. Para esto es necesario estudiar el efecto de la lente gravitacional en el flujo de luz que llega al observador con relación al tiempo.

Teniendo en cuenta que el flujo de luz se relaciona con el ángulo sólido a través del brillo superficial,

$$\Delta f = (\text{brillo superficial}) \times \Delta \Omega, \quad (1-7)$$

es posible definir la magnificación como la relación entre el flujo detectado con evento de lente y el que se detecta sin el<sup>||</sup>,

$$A_{\pm} = \frac{\Delta \Omega_{\pm}}{\Delta \Omega_*} = \left| \frac{y_{\pm} \Delta y_{\pm}}{u \Delta u} \right|. \quad (1-8)$$

A partir de las soluciones del apartado anterior, se obtiene:

$$A_{tot} = |A_+| + |A_-| = \frac{u^2 + 2}{u \sqrt{u^2 + 4}}. \quad (1-9)$$

---

<sup>||</sup>Para establecer la relación que se muestra en términos de los ángulos sólidos, se tuvo que suponer que el brillo superficial es conservado durante el evento. Para esto hay que hacer consideraciones como aquella de que la lente no es una que absorbe fotones [11].



La manera en que la posición angular se relaciona con el tiempo es

$$u(t) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{t - t_0}{t_E}\right)^2}, \quad (1-10)$$

de tal manera que a través de las dos ecuaciones anteriores puede escribirse la magnificación en términos del tiempo. Siendo que la magnificación sería el incremento del flujo cuando hay evento de lente gravitacional con respecto a cuando no, tenemos en realidad una relación de flujo y tiempo, por lo que se puede estudiar la curva de luz para el arreglo más sencillo de una lente, una fuente y un observador.

Al generalizar, se debe hacer un mapeo de las partes de la superficie de la fuente a las partes de la superficie de la imagen, por lo que ahora la magnificación está en términos del jacobiano,

$$A_j = \frac{1}{\det J} \Big|_{z=z_j}. \quad (1-11)$$

En la descripción anterior se usa la variable  $z$ , que proviene de usar la ecuación de las  $N$  lentes en variable compleja y que representa la posición angular de la imagen,  $z_j$  es la posición angular de la  $j$ -ésima lente y  $\zeta$  es la posición angular de la fuente. En el caso de  $N$  lentes puntuales, este determinante del jacobiano queda escrito como

$$\det J = 1 - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}\right) \overline{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}\right)}. \quad (1-12)$$

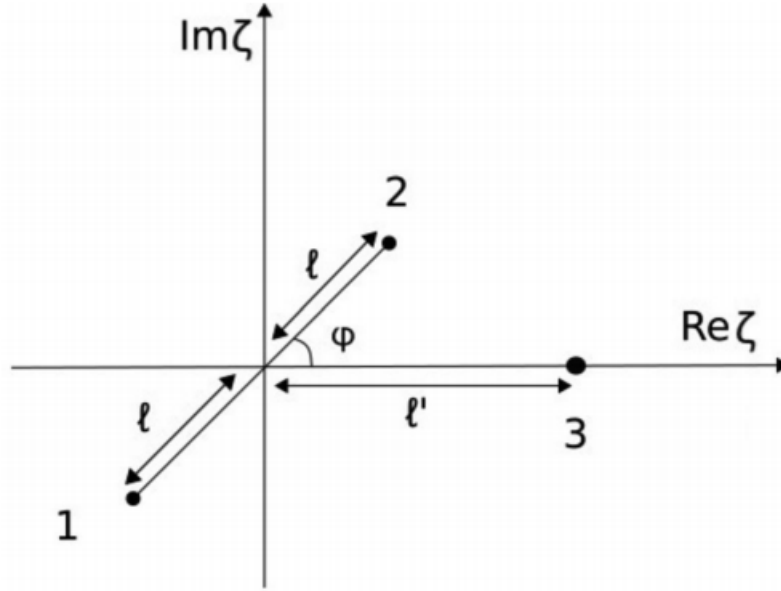
La magnificación total  $A$  corresponde a la suma de todas las  $N$  magnificaciones.

### 1.2.3. Método de la resultante

Para el caso de un sistema circumbinario, al tomar el arreglo de dos estrellas y un exoplaneta como el de tres lentes que pueden curvar la luz de una fuente lejana\*\*, este arreglo puede ser descrito con la ecuación de las lentes como

---

\*\*Este no es el único caso de tres lentes que ha sido estudiado hasta ahora. Sistemas como el de una estrella, un planeta y un satélite o una estrella y dos planetas ya han sido objetos de estudio en años anteriores. Para sistemas circumbinarios, un análisis más detallado del método de la resultante y del manejo del jacobiano en diferentes configuraciones puede encontrarse en [7].



**Figura 1-1:** Colocando el origen en el medio de las lentes 1 y 2, se toman las cantidades  $l$  como las distancias desde este origen hasta las lentes mencionadas, mientras que  $l'$  será la distancia hasta la tercera ubicada en el eje real. El ángulo  $\phi$  será aquel entre el eje real y la línea que une el origen con la lente 2. Tomado de Brett (2023) [6]

$$\zeta = z - \frac{\epsilon_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} - \frac{\epsilon_2}{\bar{z} - \bar{z}_2} - \frac{\epsilon_3}{\bar{z} - \bar{z}_3}. \quad (1-13)$$

A partir de esta ecuación se puede encontrar el complejo conjugado de  $z$ ,

$$\bar{z} = \bar{\zeta} + \frac{\epsilon_1}{z - le^{-i\phi}} + \frac{\epsilon_2}{z + le^{-i\phi}} + \frac{1 - \epsilon_1 - \epsilon_2}{z - l'}, \quad (1-14)$$

habiendo encontrado cómo se relacionan parámetros que pueden ser descritos en términos de otros y definiendo  $|z_1| \equiv l$  y  $z_3 \equiv l'$ . La manera en que se escogieron estos parámetros está ilustrada en la figura 1-1.

A partir de estas dos ecuaciones es posible definir dos polinomios. El primero se obtiene de reemplazar (1-14) en (1-13) y operar para dejar todos los términos sobre un denominador común e igualados a cero. De esta manera se elimina la dependencia en  $\bar{z}$ , quedando solo  $\zeta$ ,  $\bar{\zeta}$  y  $z$ ,

$$P_1(z, \zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{i=1}^{10} c_i(\zeta, \bar{\zeta}) z^i = 0. \quad (1-15)$$

Los coeficientes y raíces de este polinomio serán llamados como  $a_n$  y  $\alpha_n$ , respectivamente. El segundo polinomio puede obtenerse a partir de escribir la magnificación de cada lente  $A_j$  (1-11) en términos de  $\zeta$ ,  $\bar{\zeta}$ ,  $z$  y  $\bar{z}$ . Debido a su definición a través del jacobiano (1-12), se debe evaluar la derivada parcial  $\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}$ . Esto es posible usando (1-13):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = \frac{\epsilon_1}{(\bar{z} - l e^{-i\phi})^2} - \frac{\epsilon_2}{(\bar{z} + l e^{-i\phi})^2} - \frac{1 - \epsilon_1 - \epsilon_2}{(\bar{z} - l')^2}. \quad (1-16)$$

Por lo que la magnificación reescrita y operada para quedar con sus términos sobre un denominador común, puede igualarse a cero y resulta en un polinomio que depende de  $A_j$ ,  $\zeta$ ,  $\bar{\zeta}$ ,  $z$  y  $\bar{z}$ . Esta última dependencia puede quitarse utilizando (1-14) y así definimos  $P_2$  como:

$$P_2(A_j, z, \zeta, \bar{\zeta}) = 0, \quad (1-17)$$

con coeficientes  $b_m$  y raíces  $\beta_m$ .

Así, es posible construir un tercer polinomio:

$$R = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j), \quad (1-18)$$

con el cual se puede eliminar la dependencia en  $z$  que se tenía en  $P_1$  y  $P_2$ . Entonces, al encontrar las raíces del llamado polinomio *resultante*:

$$P_{res}(A_j, \zeta, \bar{\zeta}) = 0, \quad (1-19)$$

se encuentran las magnificaciones individuales de cada lente involucrada. Tomando la suma de los valores absolutos resulta la magnificación total del arreglo.

### 1.3. IA en la detección de exoplanetas

Desde hace unos años, los algoritmos de inteligencia artificial han empezado a tener un papel importante en el campo de la detección de exoplanetas. Por ejemplo, desde 2015 existen

artículos que relacionan técnicas de este campo al análisis de las curvas de luz para el método de tránsito. Para el 2019 se estaban desarrollando métodos más sofisticados a partir de redes neuronales convolucionales dos dimensionales, en busca de un análisis mejorado de las bases de datos del telescopio espacial Kepler [12]. En el caso de observatorios en la superficie terrestre los datos deben tener un grado más alto de tratamiento y es por eso que desde años más recientes (2017 a la fecha) han aparecido trabajos de análisis de curvas de luz obtenidas en este tipo de observatorios, destacando aquel que utiliza las técnicas de bosques aleatorios y redes neuronales convolucionales para analizar los datos del programa Wide Angle Search for Planets (WASP) [13].

Previamente se ha comentado que el método de tránsito ha sido el más prolífico hasta ahora y por ello es posible que se le haya prestado una mayor atención. Sin embargo, el lanzamiento del telescopio espacial Nancy Grace Roman (también llamado Wide Field Infrared Space Telescope WFIRST), ha despertado el interés por desarrollar nuevos métodos de análisis de las curvas de luz obtenidas por el método de microlensing, pues se espera pueda contribuir al descubrimiento de alrededor de 1600 nuevos exoplanetas mediante la observación de cientos de millones de objetos cerca del bulbo central de nuestra galaxia. Ya hay trabajos que plantean el desarrollo de curvas de luz simuladas para el caso de dos lentes y de métodos de clasificación a partir de estos insumos [14].

El trabajo de Brett et al. (2023) [6] da un paso adicional en esta dirección, plantea un marco teórico para el desarrollo de las curvas de luz generadas por tres lentes y modela los parámetros que caracterizan al arreglo. Teniendo en cuenta el volumen de información que se deberá analizar a partir de las detecciones del Roman Space Telescope se justifica desarrollar un método de análisis de los datos que pueda determinar si una curva de luz puede ser el resultado de la acción de un arreglo de tres lentes y, en particular, que tenga las características de un posible sistema circumbinario.

## 2 Objetivos

### 2.1. Objetivo general

Describir un modelo teórico de microlentes gravitacionales para los sistemas circumbinarios con el cual se pueda(n) predecir alguna(s) de las características físicas de los cuerpos del sistema.

### 2.2. Objetivos específicos

1. Plantear la ecuación de la lente gravitacional y la magnificación esperada para un sistema que incluya tres lentes.
2. Explorar el espacio de parámetros de un sistema circumbinario (compuesto por dos estrellas y un planeta) para analizar cual es el efecto de cada una de las características físicas en los eventos de lente gravitacional.
3. Entrenar un modelo de inteligencia artificial, a partir de datos obtenidos con este modelo, que pueda predecir alguna(s) de la(s) característica(s) física(s) del sistema a partir de los datos del evento de lente gravitacional.

### 3 Metodología

Para llevar a cabo los objetivos específicos planteados, se presentan a continuación los pasos que se planea seguir. Estos pasos están divididos por número del objetivo y por secciones en las que este objetivo se puede segmentar.

1. Para este objetivo se plantea realizar una sección sobre la ecuación de las lentes y otra sobre la magnificación, terminando con el caso específico de las tres lentes, así:

*a)* **Ecuación de la lente:**

- 1) A partir de la configuración de una lente  $L$ , una fuente de luz  $S$  y una imagen generada  $I$ , plantear la **ecuación de la lente** para describir el ángulo  $\theta$  entre la lente y la imagen generada, en términos del ángulo de deflexión de los rayos de luz,  $\alpha$ . Inicialmente se considerará la aproximación de lente esférica.
- 2) Encontrar una expresión para el ángulo de deflexión de un rayo de luz que pasa cerca de una masa  $M$ , con un parámetro de impacto  $b$ , en términos del radio de Schwarzschild  $R_S$  y hacer la aproximación para  $b \gg R_S$ .
- 3) Aplicar los conceptos de relatividad general estudiados en [1a2](#) a la ecuación planteada en [1a1](#) reemplazando el valor hallado para el ángulo de deflexión  $\alpha$ .
- 4) Escribir el parámetro de impacto  $b$  en términos del ángulo  $\theta$  y realizar la aproximación de ángulos pequeños.
- 5) Realizar la derivación del ángulo de Einstein  $\theta_E$  y el radio de Einstein  $R_E$  para reescribir la ecuación de la lente.
- 6) Normalizar con respecto a  $\theta_E$  para definir las posiciones angulares de la fuente,  $u$ , y de la lente,  $y$ .
- 7) Resolver la ecuación planteada para obtener la relación entre las posiciones angulares  $u$  y  $y$ . Analizar los casos posibles.
- 8) Generalizar la ecuación de la lente al caso de  $N$  lentes puntuales.

- 9) Hallar la generalización para el ángulo de deflexión  $\alpha$  y describirlo en términos de  $\theta_E$ .
- 10) Normalizar para llegar a la descripción de la posición angular de la fuente,  $\mathbf{u}$ , ahora en términos de la posición angular de las lentes,  $\mathbf{y}$ , y de las imágenes generadas,  $\mathbf{y}_i$ .
- 11) Estudiar la conveniencia de escribir la ecuación obtenida como variable compleja y realizar la transformación correspondiente.

**b) Magnificación:**

- 1) Definir el flujo de luz de una fuente en términos de su brillo superficial y el ángulo sólido, y escribirlo en aproximación a pequeños ángulos.
- 2) Definir la magnificación para una sola lente en términos del flujo descrito y expresar en términos de las posiciones angulares  $u$  y  $y$ .
- 3) Tomar el límite  $\Delta\theta \rightarrow 0$  para fuente puntual.
- 4) Realizar la derivada que surge a partir de la expresión encontrada en [1a7](#) y reemplazar.
- 5) Hallar la magnificación total a partir de las imágenes generadas.
- 6) Hallar una expresión para la separación angular con respecto al tiempo, definiendo la separación angular mínima entre la lente y la fuente.
- 7) Generalizar a un conjunto de lentes puntuales y encontrar la magnificación en términos del jacobiano del mapeo entre posiciones angulares y su contraparte compleja, según fue descrito en [1a11](#).
- 8) Plantear el jacobiano en términos de las posiciones angulares  $u$  y  $y$ .
- 9) Encontrar una expresión para el diferencial  $d\zeta$  en términos de los diferenciales  $dy_1$  y  $dy_2$  para los casos de las  $u_i$  y las  $z_i$ .
- 10) Igualar las expresiones para hallar el determinante del jacobiano en términos de la variable compleja.
- 11) Considerar una densidad de masa no continua  $\partial\zeta/\partial z = 1$  y con esto expresar el determinante del jacobiano.
- 12) Encontrar la magnificación total sumando la magnificación de todas las lentes

en valor absoluto.

- 13) Estudiar las curvas críticas y las cáusticas.
- 14) Derivar la ecuación de la lente escrita en [1a11](#) y hacer el determinante del jacobiano igual a cero, enunciando la solución paramétrica posible.

*c)* **Tres lentes:**

- 1) Plantear la ecuación de los  $N$  lentes en el caso específico de 3 lentes.
- 2) Tratarla para reducir los parámetros y variables involucrados, de tal manera que quede solamente una relación de  $\zeta$  con  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $l$ ,  $l'$  y  $\phi$ .
- 3) Tomar el complejo conjugado de la expresión encontrada.
- 4) Encontrar el polinomio  $P_1$  de orden 10 que resulta de reemplazar en la ecuación de las lentes.
- 5) Derivar la ecuación de la lente con respecto a la variable conjugada.
- 6) Encontrar el polinomio  $P_2$  de orden 18 que resulta de reemplazar esta derivada en la expresión hallada para el determinante del jacobiano en [1b11](#).
- 7) De los polinomios encontrados, utilizar la expresión del resultante:

$$R = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j), \quad (3-1)$$

para obtener uno tercero  $P_3$  cuyas soluciones son las magnificaciones individuales de las imágenes.

2. Para alcanzar el segundo objetivo específico se plantea usar lo obtenido en la sección anterior para generar mapas de magnificación, así:

*a)* A partir de la definición

$$\zeta = x + iy, \quad (3-2)$$

graficar la magnificación para cada punto asignando valores para la posición de la fuente y especificando el valor de  $l'$ .

*b)* Parametrizar la trayectoria de la fuente a través de

$$y = x \tan \theta - u_0, \quad (3-3)$$



donde  $\theta$  es el ángulo de la trayectoria de la fuente con respecto al eje x del plano de la fuente y  $u_0$  corresponde a la coordenada x en que la trayectoria corta a este mismo eje.

- c) Establecer los valores de los parámetros para cuando vayan a ser establecidos como constantes. Estos serán: Masa de las estrellas y el planeta, distancia entre estrellas, distancia al planeta, y ángulo del sistema. La trayectoria de la fuente se fija con los valores de  $\theta$  y  $u_0$
  - d) Variar de a uno a la vez, los parámetros mencionados en el numeral anterior y realizar los mapas de magnificación además de las curvas de luz relacionadas para las variaciones exploradas.
3. Para alcanzar el tercer objetivo específico se plantea una metodología en dos fases:

a) **Recolección de información**

- 1) Explorar de bases de datos de exoplanetas detectados a la fecha, tales como <https://exoplanet.eu/catalog/> y <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/> para determinar su posible uso para descarga de curvas de luz de exoplanetas detectados por microlensing.
- 2) En caso de ser necesario, explorar la página de los telescopios o proyectos a través de los cuales dichas curvas de luz fueron obtenidas, por ejemplo <https://ogle.astrouw.edu.pl/>, con el mismo fin de descargar de curvas de luz.
- 3) Generar alrededor de 50 datos a partir del modelo obtenido con variaciones de parámetros cercanas a las características de los sistemas encontrados en la exploración de los numerales anteriores.

b) **Desarrollo del programa**

- 1) Implementar y entrenar una red neuronal de clasificación que permita identificar si una curva de luz corresponde a un sistema circumbinario o a un sistema de una sola estrella y planeta.
- 2) Implementar y entrenar una red neuronal de clasificación que permita identificar si el sistema circumbinario en cuestión corresponde al de dos estrellas y un planeta, o dos estrellas y una enana marrón.
- 3) Utilizar los datos obtenidos observacionalmente como grupo de prueba y com-

parar los datos arrojados por el programa con los de las bases de datos.

## 4 Cronograma

**Cuadro 4-1:** Actividades primer semestre.

Actividad	Mes				
	1	2	3	4	5
Revisión bibliográfica					
Desarrollar la teoría para la ecuación de la lente					
Desarrollar la teoría para la magnificación					
Desarrollar la teoría para el caso específico de tres lentes (esto satisface el objetivo 1)					
Generar mapas de magnificación y curvas de luz para cada parámetro variado (esto satisface el objetivo 2)					
Redacción de la tesis					

**Cuadro 4-2:** Actividades segundo semestre.

Actividad	Mes				
	1	2	3	4	5
Revisión bibliográfica					
Recolección de información desde bases de datos sobre exoplanetas					
Generación de mapas de magnificación y curvas de luz a partir del modelo obtenido					
Desarrollar un clasificador para curvas de luz de dos tipos de sistemas planetarios					
Desarrollar un clasificador que identifique la masa del cuerpo no estelar en sistemas circumbinarios a partir de curvas de luz					
Implementar clasificadores con diferentes principios de inteligencia artificial					
Utilizar los datos de la literatura como grupo de prueba para los algoritmos desarrollados (esto satisface el objetivo 3)					
Redacción de la tesis					

## 5 Presupuesto

Para el desarrollo de este proyecto es suficiente con el recurso humano del estudiante y su director de tesis.

El recurso material a necesitar es un computador con acceso a internet que puede ser el portátil del estudiante o la unidad del Observatorio Astronómico Nacional en caso de llegar a requerir mayor poder de cómputo.

No se planea utilizar otros recursos que puedan generar gastos durante el desarrollo de este trabajo de tesis.

# Bibliografía

- [1] WOLSZCZAN, A. ; FRAIL, D. A.: A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257+ 12. (1992), S. 145–147
- [2] NASA’S ASTROPHYSICS DIVISION: *Exoplanet Exploration: Planets Beyond Our Solar System*. <https://exoplanets.nasa.gov/>. Version: 2023. – [Online; accessed 20-November-2023]
- [3] PORTILLA, J. G.: *Principios de mecánica celeste*. 2018
- [4] HENIN, B.: The Frost Line. (2018), S. 21–31
- [5] GAUDI, B. S.: Microlensing surveys for exoplanets. (2012), S. 411–453.
- [6] GEORGE, B. C. ; KONTOU, E. A. ; PRZEWOZNIK, P. ; TURRELL, E.: An exploration of circumbinary systems using gravitational microlensing. (2023), S. 182–192
- [7] DANĚK, K. ; HEYROVSKÝ, D.: Critical curves and caustics of triple-lens models. (2015), S. 99
- [8] DANĚK, K. ; HEYROVSKÝ, D.: Triple-lens gravitational microlensing: Critical curves for arbitrary spatial configuration. (2019), S. 72
- [9] MENEGHETTI, M.: *Introduction to gravitational lensing: with Python examples*. Bd. 956. 1. Springer Nature, 2021
- [10] SCHNEIDER, P. ; KOCHANÉK, C. ; WAMBSGANSS, J.: *Gravitational lensing: strong, weak and micro: Saas-Fee advanced course 33*. Bd. 33. 1. London : Longman, 1977
- [11] SCHNEIDER, P.: The amplification caused by gravitational bending of light. (1984), S. 119–124
- [12] CHINTARUNGRUANGCHAI, P. ; JIANG, G.: Detecting exoplanet transits through machine-learning techniques with convolutional neural networks. (2019)
- [13] SCHANCHE, N. et al.: Machine-learning approaches to exoplanet transit detection and

candidate validation in wide-field ground-based surveys. (2019), S. 5534–5547

- [14] KHAKPASH, S. ; PENNY, M. ; PEPPER, J.: A fast approximate approach to microlensing survey analysis. (2019), S. 9