Astrofísica Computacional

Ejercicios 00. Métodos Numéricos Básicos

A. Movimiento de un Satélite Artificial a partir de la Ecuación de Kepler

Como es bien conocido, la orbita de un satélite artificial es una elipse dada por la ecuación

$$r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \tag{1}$$

donde $f = \varphi - \omega$ se denomina la anomalía verdadera, ω es el argumento del pericentro (i.e. la posición angular del pericentro en el plano orbital), a es el semiéje mayor y $0 \leq e < 1$ es la excentricidad de la orbita elíptica.

Para analizar la dependencia temporal del movimiento del satélite, se introduce la anomalía excentrica, E, la cual se relaciona con la anomalía verdades mediante la ecuación (ver desarrollos en las notas anexas),

$$\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\frac{f}{2}\right). \tag{2}$$

La anomalía excentrica se puede calcular a partir de la Ecuación de Kepler,

$$E - e\sin E = l, \tag{3}$$

donde l se denomina anomalía media y se define mediante

$$l = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}(t-t_p), \tag{4}$$

con M la masa de la Tierra, t_p el tiempo de paso por el pericentro y t es el instante en el que se quiere ubicar el satélite.

De esta manera, la estrategia usual para resolver el problema temporal del movimiento satelital es el siguiente: Conocidos los parametros constantes que definen la orbita, $(G, M, a, e, \omega, t_p)$, la posición del satélite en un tiempo t se obtiene mediante

- Se resuelve la Ecuación de Kepler numéricamente para el tiempo de observación para obtener $E(t)$
- A partir de la anomalía excentrica se obtiene la anomalia verdader en la época, $f(t)$
- Con esta información se puede obtener la coordenada angular, $\varphi(t)$, y la coordenada radial, $r(t)$, del satélite.

1. Escriba un código que resuelva el problema del movimiento satelital mediante la ecuación de Kepler, utilizando un método de busqueda de raices construido por usted mismo (no utilice funciones provenientes de librerias importadas).
2. Incluya una función

```
position(t)
```

cuyo argumento es el tiempo de observación y retorna las coordenadas del satélite en ese instante.

3. Incluya una función

```
orbit( )
```

sin argumentos de entrada y que retorna un gráfico con la orbita del satelite a lo largo de un periodo completo.

4. Incluya una función

```
date(r0)
```

cuyo argumento es un valor para la posición radial del satélite, `r0`. En caso de que esta posición pueda ser alcanzada por el satélite en su movimiento orbital, la función retorna el tiempo `t0` en el que el satélite se localiza allí.

* El código debe permitir cambiar fácilmente los parámetros orbitales, al igual que los argumentos `t` y `r0` de las funciones.

* Los tiempos t_p y t deben estar dados en formato de año, mes, dia y hora (tiempo UTC). Para ello se recomienda utilizar la librería `astropy.time`, pero pueden utilizar cualquier otro método que consideren adecuado.

Verificación

Para verificar que su código funciona correctamente, puedden considerar los siguientes parámetros orbitales

$$\begin{aligned} a =& 1.30262 * R_\oplus \\ e =& 0.16561 \\ \omega =& 15^\circ \\ t_p =& 2025-03-31\ 00:00:00\ UTC \end{aligned}$$

donde $R_\oplus$ es el radio de la Tierra. Utilizando el valor $GM_\oplus = 398600.4405\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, La posición del satélite para la época

$$t = 2025-04-01\ 00:00:00\ UTC$$

es

$$\begin{aligned} r(t) =& 9658.322106272499\ \mathrm{km} \\ \varphi(t) =& 185^\circ.57050376292037. \end{aligned}$$

Por otro lado, la posición radial $r_0 = 1.5 R_\oplus$ es alcanzada para la época

$$t_0 = 2025 - 03 - 31\ 00 : 53 : 09.882\ \text{UTC}$$

con una incertidumbre de $\Delta r = 1.28342948 \times 10^{-6}$ km.

–
–
Happy Coding !