Astrofísica Computacional

MHD I. Estructura de una Enana Blanca

A. Modelo de la Estructura Interna de una Enana Blanca

En este problema se describe la estructura interna de una enana blanca utilizando un modelo simplificado de la MHD para la estructura estelar.

Al considerar equilibrio hidrostático con simetría esférica, las funciones involucradas en la estructura interna son

- $M = M(r)$
- $v = v_r =$ constante
- $f = -\frac{GM\rho}{r^2}$

y las ecuaciones de la hidrodinámica serán

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho \qquad \text{Equilibrio hidrostático} \tag{1}$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi\rho r^2 \qquad \text{Conservación de la masa} \tag{2}$$

junto con una ecuación de estado del tipo politrópico,

$$p = \kappa\rho^\Gamma, \tag{3}$$

donde κ se denomina la *constante politrópica* y Γ es el *índice adiabático* (i.e. la razón entre los calores específicos).

Un modelo relativista de una enana blanca completamente degenerada da como resultado los siguientes valores de las constantes en al ecuación de estado

$$K = 1{,}244 \times 10^{15} \times (0{,}5)^\Gamma \text{ dinas cm}^{-2} \left(\text{g}^{-1}\text{cm}^3\right)^\Gamma \tag{4}$$

$$\Gamma = \frac{4}{3}. \tag{5}$$

Como se discutió en clase, la integración de las ecuaciones diferenciales se lleva a cabo desde el punto central de la estrella hasta el punto que define su superficie para encontrar las funciones $M(r)$, $\rho(r)$ y $p(r)$. La densidad en el centro de la estrella debe ser

$$\rho_c = 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$$

La integración se realizará hasta la superficie de la estrella, la cual está definida por el radio R_* en el cual la presión es suficientemente pequeña para considerarse nula,

$$p(r = R_*) \sim 10^{-10} P_c$$

1. Grafique las funciones obtenidas $M(r)$, $\rho(r)$ y $p(r)$ desde el centro de la estrella hasta R_*.
2. Obtenga el valor de R_* en radios solares y en kilometros.
3. Obtenga el valor de la masa total de la estrella (contenida dentro del radio R_*) y expresela en kilogramos y en masas soalres.

B. Potencial Gravitacional en el interior

Consideraremos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi(t, x, y, z) = 4\pi G \rho(t, x, y, z) \tag{6}$$

donde $\phi(t, x, y, z)$ es el potencial gravitacional y $\rho(t, x, y, z)$ representa la densidad de masa. Imponga las condiciones de simetría y de frontera adecuadas para el sistema descrito para reescribir esta relación como una ecuación diferencial ordinaria. Resuelva la ecuación para obtener una gráfica del potencial gravitacional en el interior y en el exterior de la enana blanca.