Astrofísica Computacional

MHD. Ecuación de Advección

A. Ecuación de Advección lineal 1D

La ecuación de advección lineal en una dimensión es

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \, , \tag{1}$$

donde la velocidad de advección, v, es una constante. Solucione numéricamente esta ecuación utilizando un perfil inicial sinusoidal

$$\Psi_0 = \psi(x, t = 0) = \sin\frac{4\pi x}{L}, \tag{2}$$

donde $L = 100$ con una velocidad positiva $v = 0.1$ en el dominio espacial $x \in [0, 100]$ y para un intervalo temporal con $t \in [0, 1000]$. Utilice condiciones de frontera periódicas y los métodos *LeapFrog* y *Lax-Wendroff*.

B. Ecuación de Burguer

La ecuación de Burguer es

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \, , \tag{3}$$

y es utilizada como un primer ejemplo de las consecuencias de la no-linealidad en la hidrodinámica. Es muy similar a la ecuación de advección, pero en este caso la velocidad NO es una constante sino que es el mismo campo ψ que se quiere encontrar. Esta característica puede llevar a efectos como los shocks o la rarefacción, que son típicos en las descripciones de la hidrodinámica.

1. Solucione la ecuación de Burger para evolucionar un perfil sinusoidal,

   $$\Psi_0 = \psi(x, t = 0) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \tag{4}$$

   en el dominio $[0, L]$ con $L = 100$.
   Utilice condiciones de frontera de "outflow" (recuerde que bajo esta condición los datos de los últimos puntos interiores en la malla son copiados en los puntos de frontera.) y muestre que la solución forma un shock después de $t \gtrsim 140$.

2. Solucione la ecuación de Burger para evolucionar un perfíl de paso,

   $$\Phi_0 = \Phi(x, t = 0) = \begin{cases} 1 \text{ cuando } x < 0.5 \\ 2 \text{ cuando } x > 0.5 \end{cases} \tag{5}$$

   en el dominio $[0, 1]$ para mostrar la aparición de la rarefacción.

C. Advección Multidimensional

La ecuación de advección lineal 2-dimensional es

$$\partial_t \psi + v^x \partial_x \psi + v^y \partial_y \psi = 0 \tag{6}$$

donde v^x y v^y son las componentes de la velocidad en las direcciones x y y, respectivamente. Resuelva numéricamente la ecuación de advección 2-dimensional mediante el método de volumenes finitos considerando un perfíl inicial Gaussiano,

$$\Psi_0 = \psi(t = 0, x, y) = e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{7}$$

donde $x_0 = 20$, $y_0 = 30$, $\sigma = \sqrt{50}$ y considerando $v^x = 0.8$, $v^y = 1.0$ en el dominio espacial $x \in [0, 100]$ y $y \in [0, 100]$. Además, implemente la posibilidad de seleccionar condiciones de frontera de gradiente nulo (outflow) y periódicas.