**תכנון אלגוריתמים תרגיל 1 – דף תשובות**

אנא הגישו רק חלק זה. אל תחרגו מהמקום המוקצה לתשובה!

|  |
| --- |
| שאלה 1 סעיף א' – תיאור הרדוקציה |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 1 סעיף א' – הוכחת נכונות |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
| שאלה 1 סעיף א' – ניתוח זמן ריצה |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 1 סעיף ב – תיאור הרדוקציה  בהינתן מופע G=(V,E), ושלושה קודקודים שונים s,d,t V לבעיית תחנת הביניים, ניצור קבוצה |
| חדשה V' שתכיל העתקים (שיסומנו ב- ' ) של כל הקודקודים מ- V. בנוסף ניצור קבוצה חדשה |
| E' = {(u',v') | (u,v) E} (במילים אחרות שכפלנו את הגרף). כעת נוסיף צלע נוספת e=(d,d'). |
| ונגדיר גרף חדש- G'=(V V', E E' e). כלומר קיבלנו גרף חדש, המכיל שני עותקים של הגרף |
| המקורי, ובנוסף הקודקוד d מחובר בצלע לקודקוד d', והוא בעצם מהווה את הגשר היחיד בין שני העותקים |
| של הגרף המקורי. כעת קיבלנו מופע לבעיית המסלול הקצר. נריץ את האלגוריתם שפותר את בעיית המסלול |
| הקצר על הגרף G' שיצרנו, עם הקודקודים s' ו- t (או לחילופין s ו- t') ונקבל פתרון x כלשהו. |
| אם כן, הפתרון לבעיית תחנת הביניים הוא x-1. |
| הערה: אם x = , אזי גם x-1 = . (כלומר, לא קיים מסלול בין s ל- t, שעובר בקודקוד d). |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 1 סעיף ב' – הוכחת נכונות  רעיון ההוכחה: בהינתן מופע לבעיית תחנת הביניים, ותחת ההגבלה שעלינו להשתמש ב"קופסא השחורה" |
| פעם אחת בלבד, נרצה "להכריח" את האלגוריתם של בעיית המסלול הקצר לעבור דרך הקודקוד d. אז המרחק המבוקש יהיה dist(s,d) + dist(d,t).  טענה ראשית: אורך המסלול הקצר ביותר בין s ל- t העובר בקודקוד d, הוא dist(s, d) + dist (d', t'). |
| הוכחת הטענה הראשית: עקב שכפול הגרף, כמתואר לעיל, על מנת להגיע מקודקוד s לקודקוד t', למשל, על |
| האלגוריתם לעבור בין שני העותקים של הגרף, והוא יכול לעשות זאת אך ורק דרך הצלע e שהוספנו, לכן |
| בהכרח כל מסלול בין s ל- t' יעבור גם דרך d וגם דרך d'. כלומר, האלגוריתם ימצא את המסלול הקצר |
| ביותר בין s ל- d, אז יעבור מקודקוד d לקודקוד d', דרך הצלע שהוספנו (זהו המעבר האחד שאותו צריך |
| להוריד בהמרת הפלט), ואחר כך ימצא את הדרך הקצרה ביותר מקודקוד d' לקודקוד t'. סה"כ קיבלנו |
| dist(s, d) + 1 + dist(d', t'). אנו מחפשים את הפתרון לבעיית תחנת הביניים (המסלול הקצר ביותר בין |
| קודקוד s לקודקוד t העובר בנקודה d), כלומר dist(s ,d) + dist (d, t). |
| אבחנה: dist(y, z) = dist (y', z') לכל y, z קודקודים כלשהם בגרףG הנתון. |
| לכן, כל שנשאר לנו לעשות הוא לחסר את המעבר היחיד שהוספנו, ונקבל פתרון לבעיית תחנת הביניים. |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 1 סעיף ב' – ניתוח זמן ריצה  המרת הקלט- עלינו ליצור |V| קודקודים חדשים ו- |E|+1 צלעות חדשות- O(|V|+|E|). |
| זמן ריצת "הקופסא השחורה"- O(|V|+|E|). |
| המרת הפלט- חיסור פשוט- O(1). |
| סה"כ- O(|V|+|E|). |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף א' – תיאור הרדוקציה מבעיה א' לב'  בהינתן מופע G=(V,E) לבעייה הקליקה המקסימלית, ניצור גרף חדש G'=(V',E') (הגרף המשלים), |
| המקיים V'=V, E} E'={(u,v) | (u,v), כלומר כל הצלעות שמופיעות ב- E לא יופיעו ב- E', וכל הצלעות |
| שלא מופיעות ב- E יופיעו ב- E'. כעת קיבלנו מופע לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה המקסימלית, נריץ את |
| האלגוריתם הפותר בעיה זו, ונקבל פתרון V S שיהווה פתרון לבעיית הקליקה המקסימלית. |
|  |
|  |
| שאלה 2 סעיף א' – הוכחת נכונות  טענה ראשית: כל קבוצת קודקודים S V המהווה קליקה מקסימלית בגרף G כלשהו, מהווה גם קבוצה |
| בלתי תלויה מקסימלית בגרף המשלים G'. |
| הוכחת הטענה הראשית: אנו מחפשים פתרון לבעיית הקליקה המקסימאלית. כלומר קבוצה S V מקסימלית |
| בגודלה כך שלכל u, v שני קודקודים שונים ב- S, מתקיים u, v) E). כלומר S קליקה מקסימלית בגרף. |
| אבחנה: עבור כל קליקה בגרף המקורי G, מתקיים שבגרף המשלים G', היא מהווה קבוצה בלתי תלויה, |
| כלומר, קבוצה V S, בה בין כל u, v S שונים מתקיים ש- (u, v) E. לכן, בפרט, כל קליקה |
| מקסימלית בגרף G, תהווה קבוצה בלתי תלויה מקסימלית בגרף המשלים G'. לכן ע"י הפיכת המופע שקיבלנו |
| לבעיית הקליקה המקסימלית למופע לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה מקסימלית והפעלת האלגוריתם של |
| הקבוצה הבלתי תלויה המקסימלית, נקבל בדיוק את הפתרון V S שרצינו, ללא כל המרה של הפלט. |
|  |
|  |
|  |
| שאלה 2 סעיף א' – ניתוח זמן ריצה  המרת הפלט- בכל מקרה נצטרך לעבור על O() צלעות אפשריות בגרף. אם הצלע קיימת נוריד אותה, ואם הצלע |
| אינה קיימת נוסיף אותה. לכן סדר גודל זמן ריצה O(). |
| זמן ריצת ה"קופסא השחורה"- O(). |
| המרת פלט- אין המרת פלט, לכן O(1). |
| סה"כ- O() = O() + O(). |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף א' – תיאור הרדוקציה מבעיה ב' לא'  בהינתן מופע G=(V,E) לבעייה הקבוצה הבלתי תלויה המקסימלית, ניצור גרף חדש G'=(V',E') |
| (הגרף המשלים) המקיים V'=V, E} E'={(u,v) | (u,v), כלומר כל הצלעות שמופיעות ב- E לא יופיעו |
| ב- E', וכל הצלעות שלא מופיעות ב- E יופיעו ב- E'. כעת קיבלנו מופע לבעיית הקליקה המקסימלית, נריץ |
| את האלגוריתם הפותר בעיה זו. ונקבל פתרון V S שיהווה פתרון לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה |
| המקסימלית. |
|  |
| שאלה 2 סעיף א' – הוכחת נכונות  טענה ראשית: כל קבוצת קודקודים S V המהווה קבוצה בלתי תלויה מקסימלית בגרף G כלשהו, מהווה |
| גם קליקה מקסימלית בגרף המשלים G'. |
| הוכחת הטענה הראשית: אנו מחפשים פתרון לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה המקסימלית. כלומר |
| קבוצה S V מקסימלית בגודלה כך שלכל u, v שני קודקודים שונים ב- S, מתקיים u, v) E). כלומר S קבוצה בלתי תלויה מקסימלית בגרף. |
| אבחנה: עבור כל קבוצה בלתי תלויה בגרף המקורי G, מתקיים שבגרף המשלים G', היא מהווה קליקה, |
| כלומר, קבוצה V S, בה בין כל u, v S שונים מתקיים ש- (u, v) E. לכן, בפרט, כל קבוצה בלתי |
| תלויה מקסימלית בגרף G, תהווה קליקה מקסימלית בגרף המשלים G'. לכן ע"י הפיכת המופע שקיבלנו |
| לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה המקסימלית למופע לבעיית הקליקה מקסימלית והפעלת האלגוריתם של |
| הקליקה המקסימלית, נקבל בדיוק את הפתרון V S שרצינו, ללא כל המרה של הפלט. |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף א' – ניתוח זמן ריצה  המרת הפלט- בכל מקרה נצטרך לעבור על O() צלעות אפשריות בגרף. אם הצלע קיימת נוריד אותה, ואם הצלע |
| אינה קיימת נוסיף אותה. לכן סדר גודל זמן ריצה O(). |
| זמן ריצת ה"קופסא השחורה"- O(). |
| המרת פלט- אין המרת פלט, לכן O(1). |
| סה"כ- O() = O() + O(). |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף ב'  בהנחה שיש אלגוריתם שפותר את בעיה א' בזמן ריצה כלשהו, בעל סדר גודל גדול יותר מ- O() |
| (בפרט O()), ניתן לומר כי בהכרח גם קיים אלגוריתם (מבוסס רדוקציה), שפותר את בעיה ב' באותו סדר גודל |
| כיוון שזמן הריצה הכולל של האלגוריתם הוא סכום זמן ריצת המרת הקלט וזמן ריצת "הקופסא השחורה", כל עוד |
| זמן ריצת "הקופסא השחורה" עולה על זמן ריצת המרת הקלט, אזי זמן הריצה הכולל יהיה זמן הריצה של |
| "הקופסא השחורה". |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף ג'  בהנחה שקיים אלגוריתם שפותר את בעיה א' בסדר גודל זמן ריצה של O(n+m), עדיין סביר שקיים |
| אלגוריתם (לא מבוסס רדוקציה), שפותר את בעייה ב' באותו הזמן. בהנחה שבמקומות שונים בקוד של |
| האלגוריתם שפותר את בעייה א' מתבצעות בדיקות האם צלעות מסוימות קיימות או לא קיימות בגרף, ניתן |
| לומר שאם נחליף כל בדיקה כזאת בהופכית שלה, נקבל אלגוריתם הפותר את בעייה ב' באותו סדר גודל של |
| זמן ריצה (גם בהנחה שבדיקה האם צלע קיימת או לא קיימת לוקח אותו סדר גודל זמן ריצה). |
| אך אלגוריתם מבוסס רדוקציה, כפי שתיארנו לעיל, לא ירוץ בסדר גודל של פחות מ- O(), עקב המרת |
| הקלט, שלוקחת O(). |

|  |
| --- |
| שאלה 3 סעיף א' |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 3 סעיף ב' – תיאור הרדוקציה |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 3 – הוכחת נכונות |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 3 – ניתוח זמן ריצה |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 4 – תיאור האלגוריתם |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 4 – הוכחת נכונות |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
| שאלה 4 – ניתוח זמן ריצה |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |