**תכנון אלגוריתמים תרגיל 2 – דף תשובות**

אנא הגישו רק חלק זה. אל תחרגו מהמקום המוקצה לתשובה!

**מגישים: אור אלמליח 301482220, דביר אזולאי 200534014**

|  |
| --- |
| שאלה 1– תיאור האל­גוריתם |
| נמיין את קבוצת אורכי הפעילויות C מהגדול לקטן, ובכל איטרציה נגדיר עבור הפעילות זמן התחלה וזמן סיום לפי סיום הפעילות הקודמות ולפי אורכה. נשמור את זמן סיום הפעילות הקודמת ב-F ונגדיל באורך הפעילות לאחר כל איטרציה. פלט האלגוריתם יהיה ה- וה- עבור כל פעילות. |

|  |
| --- |
| שאלה 1– הוכחת נכונות |
| טענה ראשית: קבוצת ה- וה- שמתקבלת מהאלגוריתם מהווה פיתרון חוקי ומקסימלי למופע הנתון.  טענת עזר א': לכל סדרה סופית C של אורכי פעילויות שמהווה מופע לבעיה זו, קיים פתרון חוקי ומקסימלי כלשהו.  טענת עזר ב': בכל שלב של האיטרציה, קיים פתרון חוקי ומקסימלי O המכיל את אותן הפעילויות ובאותו הסדר.  טענת עזר ג': בהינתן סדרה של פעילויות, אם נחליף בין פעילויות s ו-t, בעלות אורך שונה, ישתנה ממוצע זמני הסיום של הסדרה.  הוכחת הטענה הראשית: לפי טענת עזר ב', בכל שלב של האיטרציה הפתרון שהאלגוריתם בונה מוכל בפתרון חוקי ומקסימלי O. לכן, לאחר n איטרציות, נקבל פתרון בגודל n, ומכיוון שהוא מוכל בפתרון אופטימלי O כלשהו הוא מהווה פתרון לבעיה. כמו כן, האלגוריתם מבצע פעולות פשוטות בגוף הלולאה ולכן תמיד יעצור.  הוכחת טענת עזר א': C קבוצה סופית ולכן מספר הפרמוטציות של איבריה סופי. לכל פרמוטציה נבנה רצף של פעילויות על ציר זמן (כך שאין חפיפות ואין רווחים). עבור כל סידור כזה של פעילויות נחשב את זמן הסיום הממוצע של הפעילויות ונבחר את אלה בעלות הערך הממוצע הגבוה ביותר להיות אוסף הפתרונות האופטימלים (קבוצה זו בהכרח אינה ריקה כי C סופית).  הוכחת טענת עזר ג': נתבונן ברצף פעילויות .  כעת נחליף בין פעילויות i ו-j. בה"כ, . *נסמן . כעת נשים לב כי זמן הסיום של כל הפעילויות גדל ב-d (מכיוון ששיבצנו פעילות ארוכה יותר לפניהן, זמן ההתחלה שלהן גדל ב-d וכך גם זמן הסיום).*  *נשים כי זמן הסיום הממוצע של הפעילויות לפני ההחלפה היה* , ולאחר ההחלפה נסמנו . כעת, נבחין כי לכל , מתקיים . לכן, ממוצע זמני הסיום החדש הוא = .  מכיוון ש-d חיובי וכן j-i+1 חיובי, קיבלנו שממוצע זמני הסיום גדל (וברור כי אם d היה שלילי, כלומר , היינו מקבלים שממוצע זמני הסיום קטן).  הוכחת טענת העזר ב': באינדוקציה על מספר האיטרציות של האלגוריתם.  הגדרה: פתרון ***מוכל בפתרון*** *אופטימלי O אם עד הפעילות ה-i זמני ההתחלה והסיום של הפעילויות בשני הפתרונות זהים.*  בסיס האינדוקציה: i=0, ולכן מוכל בכל פתרון, ובהכרח בפתרון אופטימלי O כלשהו.  הנחת האינדוקציה: (סדרת הפעילויות שהתקבלה לאחר i-1 איטרציות) מוכלת בפתרון אופטימלי O כלשהו.  צעד האינדוקציה: נסמן I הפעילות שנבחרה באיטרציה ה-i, ו-J הפעילות ה-i-ית ב-O.  יהי O הפתרון האופטימלי המכיל את המובטח לנו מהנחת האינדוקציה.  נחלק למקרים:  אם I נמצאת ב-O במיקום ה-i, נוסיף אותה ל- ונקבל שגם מוכלת ב-O וסיימנו.  אחרת, אם הפעילות J שווה באורכה ל-I, נחליף ביניהן. כמובן שפעולה זו לא תשנה את ממוצע זמני הסיום של הפעילויות, לכן ממוצע זמני הסיום של 'O (הפתרון לאחר ההחלפה) גם הוא מקסימלי ולכן גם הוא פתרון אופטימלי, כנדרש.  **אחרת,** כלומר הפעילות J לא שווה באורכה ל-I, נשים לב כי אורכה של J בהכרח קצר מאורכה של I, כיוון שהאלגוריתם המתואר בוחר בכל איטרציה את הפעילות באורך המקסימלי מבין הפעילויות שנותרו.  לכן לפי טענת עזר ג' אם נחליף בין הפעילות ה-I וה-J ב-O () נקבל שממוצע זמני הסיום ב-O' (הפתרון O לאחר ההחלפה) גדול מממוצע זמני הסיום של O, בסתירה למקסימליות O. ולכן, בהכרח מקרה זה לא יתכן – כלומר אם I לא נמצאת במיקום ה-i ב-O, היא בהכרח שווה באורכה לפעילות שנמצאת במיקום זה ב-O. |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 1– ניתוח זמן ריצה |
| מיון סדרת הקלט - .  כל איטרציה של הלולאה מתבצעת ב- O(1) זמן ריצה, וישנן n איטרציות, לכן סה"כ O(n) זמן ריצה עבור הלולאה. לכן סה"כ האלגוריתם רץ בO(nlogn) -. |
|  |
|  |
| שאלה 2 סעיף א' |
| ­­­­­­­­­­­­ טענה: לכל ילד , מתקיים .  הוכחה: יהי . מכיוון ש-, האלגוריתם לא בחר את עד השלב ה-.  נחלק למקרים:   1. –האלגוריתם **בחר** שלא להוסיף את לפתרון. 2. – האלגוריתם עדיין **לא שקל** האם להוסיף את או לא.   מקרה א': האלגוריתם בחר שלא להוסיף את לפתרון – כלומר, בהרצת אלגוריתם הגננת על הקבוצה (כאשר מהווה הקבוצה של הילדים שנבחרו בתחילת הצעד בו האלגוריתם שקל את הילד ), מתקבל "אין מיפוי". מצב זה אינו אפשרי מכיוון ש-, וכמובן , ולכן לא יתכן שאין מיפוי עבור .  מקרה ב': האלגוריתם עדיין לא שקל האם להוסיף את או לא – האלגוריתם מבצע איטרציה על כל הילדים ב-. בכל שלב בוחר האלגוריתם את הילד הצעיר ביותר ועבור כל ילד מחליט האם להוסיפו לפתרון או לא; לכן, בכל איטרציה גילו של הילד אותנו אנו שוקלים הינו המינימלי ביותר, ולכן בהכרח .  מכיוון שהאלגוריתם לא שקל עדיין את , נקבל כי , כנדרש.  מקרה א' לא יתכן, ומקרה ב' הניב את הטענה שרצינו להוכיח, לכן לכל ילד , מתקיים . |
|  |
| שאלה 2 סעיף ב' |
| טענה: אם וקיים ילד כך ש-, אזי קיים פתרון אופטימלי כך ש-.  הוכחה: נתבונן בפתרון האופטימלי , ונבנה פתרון אופטימלי שיענה על הדרישות.  ולכן לפי 2.א. מתקיים . מכך ש- ניתן להבחין בשתי אבחנות:  אבחנה א':הגננת החזירה מיפוי כלשהו עבור ולכן לא ריקה.  אבחנה ב': מיקום הישיבה של ו- במיפוי הגננת ובמיפוי הפתרון זהה (ונסמנו ב-); כלומר וגם .  כעת, נתבונן ב-, וב-  פתרון חוקי: וגם , ולכן מכיל ילדים שונים.  עבור כל ילד השייך ל- פונקצית המיפוי לא השתנתה, ולכן, בנוסף לכך שמיפינו את לכיסא אשר מראש היה שייך ל-, נקבל בהכרח שהתכונה נשמרה, חח"ע (לא שינינו מיקומים מלבד !) ועל (המקום היחיד ממנו הוצאנו ילד הוא המקום אליו מיפינו ילד חדש).  פתרון מינימלי: כפי ששמנו לב, מסעיף 2.א. נבעה המסקנה ש-, ולכן נסיק כי:  ולכן: . מכיוון ש- פתרון אופטימלי, בהכרח מתקיים ש-  ולכן מינימלי.  ולכן, פתרון אופטימלי. כאמור, , והוספנו את לפתרון, ולכן , כנדרש. |
| שאלה 2 סעיף ג' |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף ד' – טענה נשמרת |
| בכל איטרציה של האלגוריתם על קבוצת ילדים , קיים פתרון אופטימלי כך ש-. |
|  |
|  |
| שאלה 2 סעיף ד'– הוכחת משפט הנכונות |
| קודם כל, נשים לב כי האלגוריתם סופי – בכל איטרציה מסירים ילד אחד מקבוצה , לכן בשלב כלשהו יתקיים תנאי העצירה והאלגוריתם יעצור.  לפי הטענה הנשמרת, קיים פתרון אופטימלי בו מכיל את קבוצת הילדים שהתקבלה בסיום האלגוריתם. מהנחה 2 האלגוריתם מחזיר פתרון חוקי, ולכן . |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף ד' – הוכחת הטענה הנשמרת |
| בכל איטרציה של האלגוריתם על קבוצת ילדים , קיים פתרון אופטימלי כך ש-.  באינדוקציה על גודל הקבוצה .  בסיס האינדוקציה: , כלומר קבוצה ריקה ולכן מוכלת בכל פתרון אופטימלי.  הנחת האינדוקציה: קיים פתרון אופטימלי כך ש- .  צעד האינדוקציה: נסמן ב- את הילד שנבחר באיטרציה ה-i-ית.  יהי הפתרון האופטימלי המובטח מהנחת האינדוקציה, המכיל את .  נחלק למקרים:  מקרה א' - , ולכן וסיימנו.  מקרה ב' - . ניצור פתרון אופטימלי כך ש-. נשים לב כי קיימים שני מקרים:  מקרה I: אם קיים ילד כך ש-, מסעיף 2.ב' מובטח לנו קיום פתרון אופטימלי כך ש- כנדרש, וסיימנו.  מקרה II: אם לא קיים כזה ילד, והרי שבמקום ה- חייב לשבת ילד כלשהו,  בהכרח קיים ילד כך ש-, ומסעיף 2.ג' מובטח לנו קיום פתרון אופטימלי כך ש- כנדרש, וסיימנו. |
|  |
|  |
|  |
|  |
| שאלה 3 סעיף א' |
| האלגוריתם של פרים: |
| Input: A non-empty connected weighted graph with vertices V and edges E.   * Initialize: Vnew = {x}, where x is an arbitrary node (starting point) from V,   Enew = {}   * Repeat until Vnew = V:  1. Choose an edge (u, v) with minimal weight such that u is in Vnew and v is not (if there are multiple edges with the same weight, any of them may be picked) 2. Add v to Vnew, and (u, v) to Enew  * Output: Vnew and Enew describe a minimal spanning tree |
| האלגוריתם בוחר בתחילה קודקוד שרירותי, ובכל איטרציה האלגוריתם של פרים מוסיף צלע אחד (בעלת משקל מינימלי) כך ש- . כלומר, בכל איטרציה האלגוריתם של פרים מגדיל את רכיב הקשירות () שלו בקודקוד אחד נוסף, עד אשר מכיל את כל הקודקודים.  נשים לב כי אם ניקח לאחר כל איטרציה את הקבוצה S להיות , אזי נקבל שהאלגוריתם אכן יקח את הצלע הקלה ביותר בחתך *. כיוון שקבוצה זו תכיל בדיוק את כל הצלעות מהצורה כך ש- , כלומר . לכן האלגוריתם של פרים הוא אכן מימוש של האלגוריתם הגנרי.* |

|  |
| --- |
| שאלה 3 סעיף ב' |
| האלגוריתם של קרוסקל: |
| KRUSKAL(G=(V,E)):  1. A ∅  2. for each v ∈ V:  3. MAKE-SET(v)  4. for each (u, v) ∈ E, ordered by ascending weight:  5. if (FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v))  6. A A ∪ (u, v)  7. UNION(u, v)  8. return A |
| האלגוריתם של קרוסקל יוצר קבוצה מכל קודקוד, ממיין מהקלה לכבדה את כל צלעות הגרף, ועובר לפי הסדר על כל הצלעות, ועבור כל צלע , אם קודקודים u ו- v נמצאים בקבוצות שונות, מוסיף את הצלע לתשובה, ומאחד את שתי הקבוצות הנ"ל. נשים לב כי לא ניתן לדעת מראש איזה חתך נצטרך לעשות על מנת שהצלע הבאה שהאלגוריתם של קרוסקל יקח תהיה חוצה את החתך שלנו. אך בהינתן הצלע הבאה שהאלגוריתם של קרוסקל מצא, ניתן *למצוא חתך מתאים, בו היא אכן הצלע בעלת המשקל המינימלי.*  *תהיה*  הצלע שנבחרה. נסמן FIND-SET(u) = B, FIND-SET(v) = C. אזי נוכל לבחור את , כלומר, כל הקודקודים ברכיב הקשירות C, למשל.  ואז נקבל שהצלע שנבחרה היא אכן חוצה את החתך , ובנוסף כמובן שהיא גם הצלע הקלה ביותר שחוצה את החתך, כיוון שהאלגוריתם של קרוסקל בוחר את הצלעות מהקלה לכבדה.  לכן גם האלגוריתם של קרוסקל הוא מימוש של האלגוריתם הגנרי הנתון. |
|  |
| שאלה 3 – סעיף ג’ |
| עץ פורש של גרף G=(V,E) הוא גרף קשיר וחסר מעגלים F=(V,E'), כך ש- *.*  *בהנחה שהמופע לאלגוריתם הינו גרף קשיר (אחרת לא קיים עץ פורש), נאמר שלפי האלגוריתם הגנרי יתבצעו בדיוק איטרציות. בכל איטרציה מוסיפים צלע אחת בדיוק לפיתרון. תמיד כמובן אפשר למצוא את החתך המבוקש, כיוון שאם כבר גרף הפיתרון שלנו מכיל את כל הקודקודים (והוא קשיר), אז סיימנו, אם לא, אזי ניקח את S להיות קבוצת הקודקודים שעוד לא מחוברים לשום צלע.*  *ברור כי הגרף שנקבל כפתרון אינו מכיל מעגלים, כיוון שבכל איטרציה מוסיפים צלע , כך ש- , ובנוסף, . כלומר, לא קיים מסלול בגרף הפתרון בין קודקוד u ל- v, ולאחר הוספת הצלע e, המסלול הוא יחיד. כלומר, גרף ללא מעגלים.*  *לכן גרף בעל |V| קודקודים, |V|-1 צלעות וללא מעגלים הוא עץ פורש (משפט).* |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 3- סעיף ד’ |
| טענה ראשית- האלגוריתם מוצא עץ פורש בעל משקל מינימלי  טענת עזר- בסוף כל איטרציה של האלגוריתם, היער (מספר תתי גרפים, שכל אחד מהם הוא עץ) שמתקבל מוכל בעץ פורש מינימלי כלשהו.  אבחנה- בסוף כל איטרציה של האלגוריתם, גודל היער (מספר הצלעות) גדל באחד. הצלע שמתווספת היא בעלת המשקל הנמוך ביותר מבין הצלעות החוצות של החתך שבחרנו.  הוכחת הטענה הראשית- בסוף ריצת האלגוריתם, לאחר *בדיוק איטרציות*, נקבל גרף פתרון בעל *צלעות, כלומר גרף ללא מעגלים בגודל מקסימלי, הוא הגודל המבוקש* על מנצ להיות עץ פורש של הגרף המקורי. ע"פ טענת העזר הוא מוכל בעץ פורש מינימלי כלשהו. כיוון ששני העצים באותו הגודל אזי הם שווים ממש. לכן הפתרון שקיבלנו מהאלגוריתם הוא אופטימלי.  הוכחת טענת העזר- באינדוקציה על מספר האיטרציות k  נסמן:קבוצת הצלעות שהתקבלה לאחר האיטרציה ה- i.  בסיס: k=0 כלומר עוד לא היו איטרציות, לכן . כמובן שהקבוצה הריקה מוכלת בכל פיתרון, ובפרט בפיתרון אופטימלי כלשהו.  הנחת האינדוקציה: לאחר k-1 איטרציות, שהתקבל מוכל בעץ פורש מינימלי כלשהו.  *מהלך האינדוקציה: נסמן את הצלע שהוספנו . אם , אזי ואז מוכל ב- וסיימנו.*  אחרת, נאמר שקיימת צלע אחרת בעלת אותו משקל*, החוצה את אותו חתך, ושייכת ל- T. לכן נחליף את e' ב- e, ושוב קיבלנו צלע בעלת משקל מינימלי החוצה את החתך, ולכן*  מוכל ב- .  נניח בשלילה כי לא קיימת ב- T צלע e' כמתואר לעיל, נחלק למקרים:   1. לא קיימת ב- T צלע החוצה את אותו החתך, מלבד e- לכן כמובן שלא יכול להיות MST שאינו מכיל את e, כיוון שבלי e, הגרף אינו קשיר. בסתירה למקרה . 2. לא קיימת צלע בעלת אותו משקל- כמובן שלא קיימת צלע בעלת משקל יותר קטן, כיוון שבחרנו את e, כך שהיא בעלת המשקל המינימלי מבין הצלעות החוצות את החתך, לכן שאר הצלעות החוצות הן בעלות משקל גדול יותר. תהיה e' אחת מהן, נוסיף ל- את e, ויווצר מעגל. מהמעגל נוכל להוריד את e', ולקבל עץ פורש בעל משקל קטן יותר מ- . בסתירה למינימליות של .   לכן, בהכרח קיבלנו ש- מוכל ב- T. |
| שאלה 4 – תיאור האלגוריתם |
| נסמן את הצלע שהפחיתו ממשקלה . ראשית, נריץ את האלגוריתם לבעיית המסלול הקצר (BFS) על הגרף הנתון G, על מנת לקבל את **המסלול** (היחיד, אחרת קיים מעגל בגרף) בין שני קודקודים אלו (האלגוריתם יכול להחזיר מערך של prev המתאר עבור כל קודקוד בגרף את הקודקוד ממנו האלגוריתם הגיע אליו). כעת, נוסיף את e לעץ הפורש המינימלי הנתון T. צלע זו תיצור מעגל, כיוון שכל עץ פורש הינו בעל מספר מקסימלי של צלעות (מבלי ליצור מעגל), כפי שנלמד בכיתה. כעת, נוריד מהמעגל את הצלע בעלת המשקל המקסימלי, נסמנה e'. כפי שנלמד בכיתה, הגרף החדש שקיבלנו (נסמנו T') גם הוא עץ פורש של הגרף המקורי G, והוא גם יהיה עץ פורש מינימלי של הגרף עם פונקציית המשקל החדשה. |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 4 – הוכחת נכונות |
| טענה ראשית: הגרף החדש שקיבלנו מהאלגוריתם, T', אכן מקיים את טענת העזר, ולכן הוא MST.  טענת עזר: עץ פורש T הינו עץ פורש מינימלי אמ"ם הוא מכיל את הצלע בעלת המשקל המינימלי עבור כל חתך אפשרי בגרף.  הוכחת טענת העזר: כפי שהוכחנו בשאלה 3, אם עץ פורש T כלשהו מכיל את הצלע בעלת המשקל הקטן ביותר עבור כל חתך אפשרי בגרף , אזי T הינו עץ פורש מינימלי.  הכיוון השני ברור- אם T עץ פורש מינימלי אזי הוא מכיל את הצלע המינילית במשקלה עבור כל חתך בגרף, אחרת ניתן להוסיף את הצלע בעלת המשקל המינימלי בחתך כלשהו שאינה נמצאת כבר בעץ T, ולהוריד צלע בעלת משקל גדול יותר במעגל שנוצר ולקבל עץ פורש בעל משקל קטן יותר, בסתירה למינמליות של T.  הוכחת הטענה הראשית: עבור כל חתך אפשרי בגרף , מתקיים אחד מהבאים:   * : ה- MST המקורי T הכיל את הצלע בעלת המשקל המינימלי החוצה את חתך זה. והורדנו לכל היותר צלע אחת החוצה את החתך e'. אך e' בעלת משקל גדול או שווה למשקלה של הצלע e, שחוצה גם היא את החתך. לכן בכל מקרה העץ החדש T', גם הוא עדיין מכיל את הצלע בעלת המשקל המינימלי החוצה את חתך זה. * : שוב, ידוע כי T הכיל את הצלע בעלת המשקל המינימלי החוצה את חתך זה. כעת הוספנו את e והורדנו את e'. אם , אזי לא הורדנו צלעות החוצות את החתך, ועדיין T' מכיל את הצלע בעלת המשקל המינימלי החוצה את חתך זה. אחרת, מתקיים   , אבל ידוע לנו כי e' וכן e שתיהן היו מוכלות במעגל כלשהו בגרף G, לאחר שהוספנו את הצלע e, ולפני שהורדנו את e'. לכן, אם e אינה חוצה את החתך, ו- e' כן חוצה אותה בהכרח ניתן לומר כי קיימת צלע נוספת, נסמנה e\*, אשר חוצה את החתך (כיוון שהיה קיים מעגל). בהכרח משקלה של e\* קטן או שווה ממשקלה של e'. לכן גם לאחר שהורדנו את e', הגרף החדש T' עדיין מכיל את הצלע בעלת המשקל המינימלי החוצה את חתך זה.  לכן בכל מקרה הגרף החדש T' מכיל את הצלע בעלת המשקל המינימלי החוצה כל חתך אפשרי בגרף, לכן T' הינו MST. |
|  |
| שאלה 4 – ניתוח זמן ריצה |
| זמן ריצה של אלגוריתם לבעיית המסלול הקצר- .  *מעבר על כל הצלעות של המעגל שנוצר ומציאת המקסימלית מביניהן- במקרה הגרוע.*  *מחיקת הצלע בעלת המשקל המקסימלי במעגל- .*  סה"כ- . |