*עבודת בית 3 בתכנון אלגוריתמים – תשובות*

*מגישים: אור אלמליח 301482220, דביר אזולאי 200534014*

*שאלה 1*

סעיף א':

מופע לדוגמא המכשיל את האלגוריתם :

|  |
| --- |
| דוגמא נגדית: מופע לבעיה: (n=3).  *ראשית, האלגוריתם יבחר מכיוון ש- n אי-זוגי.*  *באיטרציה הראשונה* . ולכן יכריז על , ו-.  כעת ולכן האלגוריתם יעצור ויחזיר , אך ברור כי קיים פתרון , עבורו  וכמובן (ו- חוקי), לכן קיים מופע לבעיה עבורו האלגוריתם לא מחזיר פתרון אופטימלי. |

סעיף ב':

הגדירו את תתי הבעיות והגדירו את OPT

|  |
| --- |
| נסמן ב- את הרווח המקסימלי האפשרי עבור הקרקס בשעות 1 עד .  אנו מחפשים את , כלומר הרווח המקסימלי האפשרי עבור הקרקס ב- שעות פעילות.  { |

סעיף ג':

ניתוח מקרים :

|  |
| --- |
| נחלק את הפתרונות האפשריים לקבוצות. נגדיר עבור כל שעת פעילות :  = תת קבוצה של פתרונות בהם במקום ה- יש .  = תת קבוצה של פתרונות בהם במקום ה- יש .  = תת קבוצה של פתרונות בהם במקום ה- יש NO-SHOW. |

תת -הקבוצות הנ"ל מכסות את קבוצת כל הפתרונות האפשריים

|  |
| --- |
| ניקח פתרון כלשהו לבעיה , נתבונן במקום ה- –  אם אזי .  אחרת, אם אזי .  אחרת, לכן כמובן ש- .  כמובן ש- (כהגדרת הבעיה), ולכן ישתייך לאחת מתתי הקבוצות של מרחב הפתרונות. |

הסקת הצורה הסכמטית של נוסחת הרקורסיה

|  |
| --- |
| נגדיר להיות הרווח המקסימלי של הפתרונות בקבוצות המתאימות.  מסקנה: מתתי הסעיפים הנ"ל:  *אבחנה: , ולכן ניתן היה לומר ש- .*  *הסבר: אין סיבה לא לבחור ב- במקום , מכיוון שרווח ממופע לא יכול להיות שלילי.* |

ניתוח האופטימום של כל קבוצה:

|  |
| --- |
| נוכיח כי לכל :   1. לפי הגדרה, היא קבוצת הפתרונות בהם במקום ה- ישנו , ו- הינו פתרון אופטימלי בקבוצה זו. לכן, נחסיר משני האגפים את ערכו של ,   ונקבל כי . מכיוון ש- הוא ערך הפתרון המקסימלי עד הפעילות ה- , הוא ערך הפתרון המקסימלי עד הפעילות ה- , בדומה להגדרת , כלומר:   1. לפי הגדרה, היא קבוצת הפתרונות בהם במקום ה- ישנו , ו- הינו פתרון אופטימלי בקבוצה זו. לכן, נחסיר משני האגפים את ערכו של ,   ונקבל כי . נשים לב, כי מכיוון שבמקום ה- שובצה פעילות , בהכרח במקום ה- חייב להיות משובץ .  מכיוון ש- הוא ערך הפתרון המקסימלי עד הפעילות ה- , הוא ערך הפתרון המקסימלי עד הפעילות ה- , אך מכיוון שבקבוצת הפתרונות במקום ה- משובצת פעילות , הרי בכל הפתרונות במקום ה- לא תשובץ אף פעילות (*כלומר ), הרי שערך פתרון זה יהיה אופטימלי גם עד המקום ה- , בדומה להגדרת .*  כלומר:   1. לפי הגדרה, היא קבוצת הפתרונות בהם במקום ה- ישנו , ו- הינו פתרון אופטימלי בקבוצה זו. מכיוון שתרומתו של לרווח הקרקס הינה 0, נקח את ערכו של הפתרון האופטימלי עד המקום ה- (ללא ה- NO-SHOW המיותר), בדומה להגדרת .   כלומר: |

סעיף ד':

נסחו אלגוריתם רקורסיבי המשתמש ב-memoization למציאת ערך פתרון אופטימאלי

|  |
| --- |
| :   1. If 2. If 3. If |

זמן ריצה:

|  |
| --- |
| ראשית נציין כי לפני הקריאה לפונקציה מאותחל לאפסים מערך בגודל n- זמן ריצה.  לפני שאנו מחשבים ערך כלשהו, ראשית אנו בודקים האם הוא כבר חושב ע"י חיפוש בתא המתאים במערך אותו אנו מתחזקים. אם הערך כבר חושב, לא נחשב אותו שוב, אלא פשוט נחזיר אותו מהמערך- כמובן. עוד נציין כי חישוב תא  *במערך, בהינתן שתאים*  כבר חושבו, גם הוא לוקח זמן ריצה (פעולות חיבור והשוואה פשוטות שבשורה מספר 4).  סיכום: האלגוריתם מחשב את ערכם של כל התאים במערך , תאים. לכן סה"כ זמן ריצה של האלגוריתם. |

סעיף ה':

נסחו אלגוריתם המשחזר ביעילות את P מתוך פלט האלגוריתם

|  |
| --- |
| 1. // |
| הסבר: האלגוריתם יעבור על מערך ה- מהסוף להתחלה. כפי שהוסבר לעיל, בשעת הפעילות האחרונה חייב להבחר מופע או . לכן, האלגוריתם משווה את ההפרש בין הרווח המקסימלי ב- שעות לבין הרווח המקסימלי ב- שעות, ואם הפרש זה שווה ל- , נמקם בשעה ה- (אשר מהווה את ההפרש המינימלי בין ל- בכל מקרה), **אחרת,** ההפרש יהיה יותר גדול מ- (אחרת זו סתירה לאופטימליות הרי יכולנו למקם את במקום ה- ), כלומר (ו- במקום ה- ).  זמן ריצה: לולאת ה- תתבצע לכל היותר פעמים. כל איטרציה לוקחת זמן ריצה, לכן סה"כ השיחזור לוקח זמן ריצה. |

*שאלה 2*

סעיף א':

ניתוח מקרים :

|  |
| --- |
| נגדיר עבור כל קודקוד בעל צלעות נכנסות את הקבוצות:  *, כך ש- מכילה את כל הפתרונות האפשריים בהם הצלע האחרונה במסלול מ- ל- היא .* |

תת -הקבוצות הנ"ל מכסות את קבוצת כל הפתרונות האפשריים

|  |
| --- |
| *כמובן, שאם בכלל ניתן להגיע מקודקוד לקודקוד כלשהו, אזי בהכרח הצלע האחרונה במסלול מ- ל- היא אחת הצלעות* הנכנסות לקודקוד . לכן, כמובן ש- מכסה את כל האפשרויות להגיע מקודקוד לקודקוד . |

הסקת הצורה הסכמטית של נוסחת הרקורסיה

|  |
| --- |
| נגדיר להיות משקל המסלול המינימלי של הפתרונות בקבוצות המתאימות.  מסקנה: מתתי הסעיפים הנ"ל: |

ניתוח האופטימום של כל קבוצה:

|  |
| --- |
| נחשב את האופטימום עבור קבוצה כלשהי. כלומר, האופטימום עבור תת קבוצת הפתרונות אשר הצלע האחרונה במסלול מ- ל- היא . לכן, ברור ש- לכל . |

סעיף ב':

נסחו אלגוריתם איטראטיבי למציאת ערך פתרון אופטימאלי

|  |
| --- |
| 1. // 2. // |

מדוע בעת חישוב ערך במערך M, חושבו הערכים הקודמים לו בצורה נכונה:

|  |
| --- |
| אמנם לא כל פעם שנקבע ערך במערך , הוא המינימלי. אך ניתן לומר כי כאשר מוכנס קודקוד לתור , אזי במקום כבר נמצא ה- . זאת כיוון שכבר האלגוריתם עבר על כל האפשרויות להגיע מקודקוד לקודקוד זה, כיוון שמוכנסים לתור רק קודקודים שדרגם הכניסה שלהם היא 0. האפשרויות להגיע לקודקוד עברו דרך קודקודים שגם הם, בתורם, הוכנסו לתור , לכן עבורם גם כבר חושב ה- הנכון, כמובן, וכן הלאה.  הערה: מובטח לנו שתמיד יהיה קודקוד בעל דרגת כניסה 0, כיוון שהגרף חסר מעגלים (בדומה לדרך הפעולה של אלגוריתם למיון טופולוגי). |

זמן ריצה:

|  |
| --- |
| אתחול המערך - זמן ריצה. כעת נשים לב כי זמן הריצה של כל איטרציה הוא כמספר השכנים של הקודקוד שהוצאנו מהתור. כל קודקוד בגרף יכנס ויצא מהתור בדיוק פעם אחת. ידוע כי סכום כל השכנים של כל הקודקודים הוא . לכן נאמר שזמן הריצה עבור כל האיטרציות הוא . סה"כ זמן ריצת האלגוריתם הוא . |

סעיף ג':

הגדירו את OPT

|  |
| --- |
| יסמן את אורך המסלול החוקי הארוך ביותר מקודקוד לקודקוד .  אנו נחפש את ערכו של . כלומר, אורך המסלול המקסימלי מקודקוד לקודקוד .  יכולנו להגדיר את הנוסחא כך:            אך אם נשים לב, ניתן להגדיר קבוצת צלעות , אשר מהווה תת קבוצה של , המכילה רק צלעות המקיימות את תנאי הצבעים. כעת, אנו מתבוננים בבעיה פשוטה יותר – אורך המסלול הארוך ביותר בין ל- המכיל רק צלעות מ- (כעת, דרישת החוקיות הינה טריוויאלית) וננסח את הנוסחא באופן הבא: |

סעיף ד' (שימו לב כי יש להוכיח רק את אחד מהמקרים)

ניתוח מקרים :

|  |
| --- |
| עבור כל , נגדיר קבוצת הפתרונות האפשריים לבעיה העוברים בקודקוד . |

תת -הקבוצות הנ"ל מכסות את קבוצת כל הפתרונות האפשריים

|  |
| --- |
| *ברור כי כדי להגיע מ- ל- כל מסלול יצטרך לעבור דרך אחד משכניו של , לכן לכל פתרון כלשהו לבעיה קיימת לפחות אחת אליה הוא שייך.* |

הסקת הצורה הסכמטית של נוסחת הרקורסיה

|  |
| --- |
| *נגדיר להיות אורך המסלול המקסימלי ב-.*  מסקנה: |

ניתוח האופטימום של כל קבוצה:

|  |
| --- |
| כמובן שאם , מכיוון שהגרף הינו מכוון ללא מעגלים, אורך המסלול המקסימלי הוא 0.  כמו כן, אם ל- אין שכנים, לא ניתן להגיע לקודקוד , ולכן אורך המסלול המקסימלי הוא בינם מוגדר להיות (כדי שנוכל לסכום את אורכו של המסלול הארוך ביותר; אך בכל מקרה אורכו יהיה 0)  כעת, נרצה להוכיח שמתקיים .  כיוון ראשון :  יהי פתרון אופטימלי לבעיה כך ש-. נתבונן ב- כאשר ואורכו של המסלול הארוך ביותר בין ל- הינו הארוך ביותר מבין מסלולים היוצאים משכניו של . מכיוון ש- כולל גם את הצלע וגם את ערכו של , ברור כי  , ולפי הגדרה, הינו אורך המסלול המקסימלי בין ל- העובר דרך , כלומר , כנדרש.  כיוון שני :  יהי פתרון אופטימלי לבעיה כך ש- . לפי הגדרת , עובר דרך קודקוד בדרכו ל-. נתבונן בצלע המחברת בין במסלול , ויהי הקודקוד אליו הוא מחובר. כעת נסיר את הצלע מהמסלול, כלומר . נשים לב כי מסלול זה הוא המסלול הארוך ביותר בין ל- (אחרת ניתן היה לבחור את המסלול הארוך ביותר ולחבר אותו ל-, בסתירה למקסימליות ). כלומר, . נוסיף את הצלע , ונקבל מסלול מקסימלי מ- ל-, כלומר . לכן:  , כנדרש.  לכן קיבלנו כי . |

סעיף ה':נסחו אלגוריתם איטראטיבי למציאת ערך פתרון אופטימאלי

|  |
| --- |
| 1. // |

זמן ריצה:

|  |
| --- |
| האתחול של המערך לוקח זמן ריצה. וברור כי זמן ריצה של פונקציית הוא . כעת, נשים לב כי כל איטרציה של לולאת ה- מתבצעת ב- זמן ריצה. עוד נשים לב כי סכום ה- של כל הקודקודים בגרף הוא . לכן ניתן לומר כי כל האיטרציות של לולאת ה- מסתכמות ב- זמן ריצה.  לכן, לסיכום, נאמר שהאלגוריתם רץ ב- זמן ריצה. |

*שאלה 3*

סעיף א':

הגדירו את תתי הבעיות באופן מילולי והגדירו את OPT

|  |
| --- |
| נסמן ב- את אורך תת המחרוזת הפלינדרומית (**תמ"פ**) המקסימלי בטווח במחרוזת.  *אנו מחפשים את , כלומר אורך ה****תמ"פ*** *המקסימלי בכל המחרוזת הנתונה.*  הערה: הפונקציה מחזירה 2 אם , ו- 0 אחרת. |

סעיף ב':

ניתוח מקרים :

|  |
| --- |
| נחלק את הפתרונות האפשריים לקבוצות. נגדיר עבור כל אינטרוול :  = תת קבוצה של פתרונות *המכילים את האותיות הקיצוניות ו- .*  = תת קבוצה של פתרונות המכילים את האות אך לא את האות .  = תת קבוצה של פתרונות המכילים את האות אך לא את האות . |

תת -הקבוצות הנ"ל מכסות את קבוצת כל הפתרונות האפשריים

|  |
| --- |
| *ניקח פתרון כלשהו לבעיה, . נשים לב, כי כל פלינדרום מוגדר ע"י זוגות של אינדקסים כך ש-. לכן, עבור כל זוג אינדקסים*  בהכרח מתקיים אחד מהתנאים להשתייכות לקבוצה כלשהי. נשים לב כי קיים, כביכול, מקרה רביעי (תת קבוצה של פתרונות שלא מכילים את האות , וגם לא מכילים את האות ), אך זוהי בעצם קבוצה שתהווה חיתוך בין , ו- . כלומר עבור אינטרוול כלשהו, ראשית נעבור לתת קבוצה , כלומר נעבור לאינטרוול , ועבור האינטרוול החדש נעבור לקבוצה , כלומר נעבור לאינטרוול .  לכן, בכל מקרה שייך לאחת מתתי הקבוצות, ולכן איחוד תתי הקבוצות מהווה את כל מרחב הפתרונות. |

הסקת הצורה הסכמטית של נוסחת הרקורסיה

|  |
| --- |
| נגדיר להיות אורך התמ"פ המקסימלי של הפתרונות בקבוצות המתאימות.  מסקנה: מתתי הסעיפים הנ"ל: |

ניתוח האופטימום של כל קבוצה:

|  |
| --- |
| נוכיח כי לכל אינטרוול *:*   1. אנו מחפשים את הפיתרון האופטימלי בתת הקבוצה , כלומר פתרון אופטימלי מבין הפתרונות המכילים את האותיות (נשים לב שעבור האינטרוול , האותיות הללו הן הקיצוניות), לכן בהכרח ניתן לומר כי אותיות אלו צריכות להיות שוות. כלומר . לכן, ע"י בחירת שתי אותיות אלו, וצירופן לאותיות שנקבל מתת הבעייה , נקבל פתרון אופטימלי לבעייה המקורית .   לכן, בהכרח: .   1. אנו מחפשים את הפיתרון האופטימלי בתת הקבוצה , כלומר פתרון אופטימלי מבין הפתרונות אשר מכילים את האות אך לא את האות . כלומר פתרון אופטימלי עבור האינטרוול . לכן כמובן שערכו של פתרון זה יהיה שווה לערכו של .   כלומר: .   1. אנו מחפשים את הפתרון האופטימלי בתת הקבוצה , כלומר פתרון אופטימלי מבין הפתרונות אשר מכילים את האות אך לא את האות . כלומר פתרון אופטימלי עבור האינטרוול . לכן כמובן שערכו של פתרון זה יהיה שווה לערכו של .   כלומר: . |

סעיף ג':

נסחו אלגוריתם רקורסיבי המשתמש ב-memoization למציאת ערך פתרון אופטימאלי

|  |
| --- |
| //  : |

הוכחת נכונות האלגוריתם:

|  |
| --- |
| צריך להוכיח כי הקריאה לאלגוריתם מחזירה את אורך התמ"פ המקסימלי עבור האינטרוול . נוכיח באינדוקציה **שלמה** על (על אורך האינטרוול):  בסיס: , לכן האינטרוול בעצם אינו קיים, כלומר אורכו שלילי, לכן איננו מתאר תת מחרוזת כלל, ולכן אורך התמ"פ המקסימלי בו הוא 0  , כלומר האינטרוול מתאר אות אחת מהמחרוזת בלבד. לכן אורך התמ"פ המקסימלי באינטרוול זה הוא בדיוק 1 (האות היחידה משמשת כפלינדרום).  הנחת האינדוקציה: מחזירה את אורך התמ"פ המקסימלי עבור האינטרוול , וכן עבור כל  *מחזירה את אורך התמ"פ המקסימלית עבור האינטרוול המתאים.*  צריך להוכיח:   1. מחזירה את אורך התמ"פ המקסימלי עבור האינטרוול 2. מחזירה את אורך התמ"פ המקסימלי עבור האינטרוול   אבחנה: לכל אינטרוול מתקיים כי , ובאופן דומה, , וכן, .  הסבר: אורך התמ"פ המקסימלי של מחרוזת כמובן לא יכול להיות יותר ממספר התווים במחרוזת, ולכן אורך התמ"פ המקסימלי באינטרוול מסוים , לא יכול להיות יותר גדול מאשר אורך התמ"פ המקסימלי באינטרוול קצר יותר (המוכל בו)  *+ הפרש אורכי האינטרוולים.*  הוכחה:   1. נניח כי מתקיים , אם כן, הפונקציה תחזיר 2. לכן, ע"פ האבחנה, האורך המקסימלי שנוכל לקבל הינו , לפי הנחת האינדוקציה, מחזיר תשובה נכונה ואופטימלית, לכן סיימנו.   כעת נניח כי . כלומר, תחזיר 0. כעת, ברור ש- , לכן נרצה להחזיר את אחד משני הביטויים הנמצאים בקצוות אי-השיויון. ונשים לב שהאלגוריתם אכן מחזיר את המקסימום מבין שני הביטויים (ע"פ הנחת האינדוקציה כל אחד מהביטויים אכן מחזיר גם הוא תשובה נכונה). לכן בכל מקרה קיבלנו ש- מחזיר תשובה נכונה ומקסימלית.   1. באותו אופן בדיוק. |

זמן ריצה:

|  |
| --- |
| ראשית נציין כי לפני הקריאה לפונקציה מאותחל לאפסים מערך - סדר גודל של זמן ריצה. כעת נשים לב כי לפני שאנו מחשבים ערך כלשהו, ראשית אנו בודקים האם הוא כבר חושב ע"י חיפוש בתא המתאים במערך אותו אנו מתחזקים. אם הערך כבר חושב, לא נחשב אותו שוב, אלא פשוט נחזיר אותו מהמערך- כמובן. עוד נציין כי חישוב תא כלשהו  *במערך* גם הוא לוקח זמן ריצה, כיוון שאנו פשוט בוחרים את ה- מבין שלושת הערכים שחזרו אלינו מהקריאות הרקורסיביות.  סיכום: האתחול לוקח זמן ריצה. האלגוריתם מחשב את ערכם של כל התאים במערך - תאים. כל חישוב לוקח זמן ריצה, לכן סה"כ  + זמן ריצה של האלגוריתם. |

*שאלה 4*

סעיף א':

|  |
| --- |
| הקודקוד הוא עלה, כלומר אין לו "בנים". כלומר פתרון עבור *תת העץ המושרש ב- , יהיה פשוט . אז מתקיים לכל שהוא שייך ל- L* או שהוא מחובר בצלע לקודקוד מ- *L.* אם היינו לוקחים את , אזי התנאי לפיתרון חוקי לא היה מתקיים. אם כן, ערך הפתרון . |

סעיף ב':

|  |
| --- |
| הסבר: בהכרח , לכן ראשית נוסיף את . כעת, כיוון ש- , כל הבנים שלו כבר מקיימים את התנאי על מנת שהפיתרון יהיה חוקי. כלומר, עבור כל אחד מהבנים של , קיימת צלע המחברת בינם לבין קודקוד אשר מוכל ב- . אם כך, נשתמש כעת בערכי ה- , כיוון שכך אנו "מכסים" את כל תתי העצים המושרשים בבנים של , מלבד אולי הבנים עצמם, כיוון שכבר כיסינו אותם ע"י לקיחת . נשים לב שהנוסחא מתקיימת גם אם הינו עלה, שכן סכום ה- של בניו הוא 0.  הסבר: באופן דומה, נרצה "לכסות" את כל הקודקודים בעץ כך שיקיימו את התנאי לחוקיות הפיתרון. לכן, ניתן לקחת את סכום ה- של הבנים. פעולה זו בהכרח "תכסה" לנו את כל העץ , ובמשקל **מינימלי**, מלבד אולי הקודקוד עצמו*.* ***אמנם,*** *אף אחד מבניו של , לא יכול לבחור את*  *. לכן עלינו גם להתייחס למקרה זה ע"י בחירת המינימום בין סכום ה- שחישבנו, ו- . נשים לב שהנוסחא מתקיימת גם במקרה ש- הינו עלה, כיוון שסכום ה-*  של בניו יהיה 0.  *הערה: כבר בטאנו את בעזרת הערכים המחושבים של הבנים.* |

סעיף ג':

|  |
| --- |
| דרך אחרת לרשום:  מכאן ניתן לראות כי עבור פונקציית ה- הפנימית, אנו מחפשים את ה- שייתן את ההפרש הקטן ביותר בין ל- , המצב האופטימלי יהיה המצב בו הם שווים. כלומר, המצב בו קיים מסוים אשר מקיים כאשר הוא הפתרון עבור שלו.  *הסבר לנוסחא: אם כאשר מתקבל מ- , אזי יתקיים ש- . אחרת, אחד מילדיו של חייב להיות שייך ל- . לכן, נבחר את הסכום המתואר בנוסחא בצורה המינימלית ביותר שלו.* נשים לב שהנוסחא מתקיימת גם במקרה ש- הינו עלה, כיוון שסכום ה- של ילדיו יהיה 0.  מיקום הפתרון יהיה כמובן כאשר הוא שורש העץ המקורי. |

סעיף ד':

ניתוח מקרים:

|  |
| --- |
| נחלק את הפתרונות האפשריים לקבוצות. עבור כל קודקוד נגדיר:  *כך ש- היא תת קבוצה של פתרונות כך ש-*  כך ש- תהיה הקבוצה שסכום משקליה יקבע את .  הערה: נשים לב כי אם אזי לא בהכרח עבור . כלומר, יש חיתוך בין תתי הקבוצות. |

תת -הקבוצות הנ"ל מכסות את קבוצת כל הפתרונות האפשריים

|  |
| --- |
| *ברור שאם בחרנו את כאשר מתקבל מ- , אזי אחד מילדיו של חייב להיות שייך ל- על מנת שהפיתרון יהיה חוקי. קל לראות כי מהווה בדיוק את כל הפתרונות כך ש****לפחות אחד*** *מילדיו של שייך ל- . שזו כפי שאמרנו, קבוצת כל הפתרונות שאנו מחפשים.* |

הסקת הצורה הסכמטית של נוסחת הרקורסיה

|  |
| --- |
| נגדיר להיות הפתרון בעל המשקל המינימלי בכל קבוצה מתאימה.  מסקנה: מתתי הסעיפים הנ"ל: |

ניתוח האופטימום של כל קבוצה:

|  |
| --- |
| נחשב את האופטימום עבור קבוצה כלשהי. כלומר, האופטימום עבור תת קבוצת הפתרונות כך ש- כאשר היא הקבוצה שסכום משקלי הקודקודים בה קובע את . אם כבר קבענו ש- אזי עבור , התכונה שתניב עבורנו את הערך האופטימלי היא כמובן . בניגוד ללקיחת מ- ואיחודו עם . פעולה אשר יכולה רק להגדיל. כעת, נרצה כמובן את הערכים האופטימליים משאר בניו של , עליהם אין לנו הגבלות. לכן ניקח מכל אחד מהם את , . אם כן, קיבלנו ש- . |

סעיף ה':

נסחו אלגוריתם איטרטיבי + ניתוח זמן ריצה

|  |
| --- |
| נשמור 3 מערכים:   1. מערך בגודל המחזיק את ערכי ה- של כל הקודקודים בעץ. 2. מערך בגודל המחזיק את ערכי ה- של כל הקודקודים בעץ. 3. מערך בגודל המחזיק את ערכי ה- של כל הקודקודים בעץ.   *\* כל המערכים מאותחלים לאפסים.*  *כעת, נהפוך את ה"עץ הלא מכוון עם שורש" ל"עץ מכוון עם שורש", כך שכל צלע תהיה מכיוון השורש לעלים.*  *כעת, נבצע על הגרף מיון טופולוגי. מעתה נתייחס לגרף כאל מערך כך שבתא הראשון מופיע השורש (עומק 0), החל מהתא השני מופיעים כל הקודקודים שעומקם הוא 1, לאחריהם כל הקודקודים שעומקם הוא 2, וכך הלאה. לא כל העלים בהכרח נמצאים בסוף המערך, אך כן בהכרח שבסוף המערך נמצאים העלים של הרמה העמוקה ביותר.*   * + 1. *//*   הערה: עוברים על הגרף מהסוף להתחלה, כך מובטח לנו שכשאר אנו רוצים לחשב את ערכי ה- של קודקוד מסוים, כבר חישבנו את ערכים אלו עבור כל הילדים שלו, כיוון שהם בהכרח בעומק גדול יותר מהאבא, והערכים שמורים במערכים המתאימים בצורה נכונה.  ניתוח זמן ריצה: אתחול שלושת המערכים- . הפיכת העץ למכוון- . מיון טופולוגי- . כעת אנו עוברים על כל קודקוד פעם אחת בדיוק, אם הקודקוד הינו עלה, הטיפול בו לוקח זמן ריצה. אחרת, *אנו מבצעים עבור הקודקוד* את הפעולות הבאות: חישוב סכום ה- של ילדיו, חישוב סכום ה- של ילדיו, ומציאת הילד שעבורו ההפרש בין ל- הינו מינימלי. עבור כל אלה נדרש זמן ריצה. וכמובן שעבור קביעת הערכים, ופעולות ה- נדרש . לכן סה"כ עבור כל קודקוד אנו מבצעים פעולות. כעת, נשים לב כי **סכום** ה- -ים בכל הגרף אינו יכול לעלות על , כיוון שכל קודקוד הינו ילד של אבא אחד בדיוק. לאם כך, ניתן לומר כי עבור כל הקודקודים, עדיין אנו מבצעים פעולות.  הערה: ניתן לומר כי טיפול בכל קודקוד, בין הם הוא עלה ובין אם לא, לוקח **בממוצע** זמן ריצה.  סיכום: זמן הריצה הכולל הינו ! |