**תכנון אלגוריתמים -עבודה 4**

**תאריך הגשה:** 30.05.2013 בשעה 11:59בצהריים

**מתרגל אחראי:** רמזי כחיל

**הערות:**

* **כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:**

**1. תיאור מילולי של האלגוריתם.**

**2. הוכחת נכונות.**

**3. ניתוח זמן ריצה.**

* **אלגוריתם עם זמן ריצה אקספונינציאלי לא נחשב יעיל ולכן לא יתקבל.**
* **חובה לכתוב את הפתרון בדף התשובות הנלווה לעבודה.**

**שאלה 1**

נתון: גרף מכוון , פונק' מחיר חיובית ממש וקדקוד מקור . כמו כן, נתונה תת-קבוצה של צלעות .

בשאלה זו נמצא מסלולים זולים ביותר מ-s אל כל הקדקודים האחרים, אשר ככל האפשר נמנעים מצלעות שנמצאות ב-.

בהינתן מסלול וקבוצת צלעות , נגדיר את **מחיר המסלול ביחס ל-** באופן הבא:

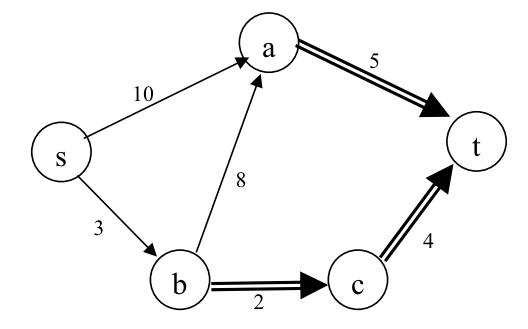
כלומר סכום מחירי הצלעות של שנמצאות ב-*.*

נסמן .

נגדיר שמסלול מ- ל- הוא **-מינימלי** אם מקיימים שני התנאים הבאים:

* **לא** **קיים** מסלול אחר מ- ל- כך ש-. כלומר, למסלול יש מחיר מינימלי ביחס ל- מבין כל המסלולים מ- ל-.
* **לא** **קיים** מסלול מ- ל- כך שמתקיים: **וגם** . כלומר, מבין כל המסלולים מ- ל- אשר מחירם ביחס ל- הוא מינימלי, המסלול מינימלי במחיר שאר המסלול (חלק המסלולשלא ב- ).

למשל בגרף הבא הוא מסלול -מינימלי מ- ל-, כאשר הצלעות של מסומנות *בגרף.*



**סעיף א**

נסחו והוכיחו תכונות תת-מבנה אופטימלי עבור מסלולים -מינימליים.

**סעיף ב**

הוכיחו שקיים עץ מסלולים -מינימליים מ-, אפילו כאשר אי שלילית.

**סעיף ג**

נסחו את **השינויים** שצריך להכניס לאלגוריתם כפי שנלמד בכיתה, כך שאלגוריתם החדש (נקרא לו ) ימצא את המסלולים ה--מינימליים מ-s לכל שאר הקדקודים. שימו לב, יתכן ותהיו חייבים לעשות שינויים במבנה נתונים. בסעיף זה, **אין** לבנות אלגוריתם **מבוסס רדוקציה**.

**סעיף ד**

הוכיחו את נכונות האלגוריתם . ציינו ונמקו מהו זמן הריצה של האלגוריתם.

**סעיף ה (בונוס 5 נקודות)**

תארו אלגוריתם **מבוסס רדוקציה** לאותה הבעיה.

**שאלה 2**

נתון גרף , פונקצית משקל כך שב- **אין מעגלים שליליים** ביחס ל-, וקודקוד כך שכל הקדקודים בגרף נגישים מ-s.

**סעיף א**

הראו דוגמא נגדית לטענה הבאה:

לכל קשת מתקיים .

הסבירו את הדוגמא.

**סעיף ב**

הוכיחו את הטענה הבאה:

לכל קשת מתקיים כי אם ורק אם קיים מסלול קל ביותר מ- ל- העובר ב-.

**סעיף ג**

נתונה הפונקציה . תארו אלגוריתם העונה על השאלה: "האם זה נכון כי לכל מתקיים ?"

על האלגוריתם לרוץ בזמן של .

**שאלה 3**

נתון גרף מכוון עם פונקציית משקל (מספרים טבעיים).

מסלול יקרא **מסלול אי-זוגי** אם משקל המסלול הוא אי-זוגי.

עבור כל שני קדקודים נסמן ב- את מחיר המסלול האי-זוגי הזול ביותר מ- ל-. נגדיר אם אין מסלול אי-זוגי בין ל-.

**סעיף א**

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר למציאת עבור כל זוג קודקודים בגרף, **המבוסס על רדוקציה לבעיה שנלמדה בכיתה**. יש לפרט את כל שלבי הרדוקציה ולהוכיח את נכונותה.

**סעיף ב**

תארו אלגוריתם **ישיר** לאותה הבעיה. (אלגוריתם ישיר = אלגוריתם שנלמד בכיתה + שינוים). **הסבירו** למה האלגוריתם שהצעתם נכון ונתחו את זמן ריצתו.

**שאלה 4**

בשאלה זו נפתח שיטה למציאת משקלות של מסלולים קלים ביותר מקדקוד מקור לכל קודקוד בגרף ביחס לפונקצית משקל (יתכנו משקלים שליליים).

השיטה תתבסס על מידע מסוים כך שנוכל לעמוד בזמן של .

הגדרות: בהינתן גרף מכוון ופונקצית משקל , נגדיר **פונקציית איזון** על ו- להיות פונקציה מהצורה המקיימת לכל קשת את התנאי .

**פונקציית המשקל המאוזנת** ביחס ל-, ו- היא פונקציית המשקל , כאשר לכל קשת .

בכל הסעיפים הבאים הוא גרף מכוון **חסר מעגלים שליליים**, ו- פונקצית משקל על הקשתות של .

**סעיף א**

הסבירו כיצד בהינתן זוג קדקודים ופונקצית איזון על ו-, ניתן למצוא את משקלו של מסלול **קל ביותר** מ- ל- ב- בזמן ריצה של .

רמז: חישבו כיצד להיעזר ב-.

**סעיף ב**

בהינתן קדקוד כך שכל הקדקודים בגרף **נגישים** מ-, הראו כי הפונקציה כך ש-, היא פונקציית איזון על ו-.

**סעיף ג**

תארו אלגוריתם המוצא פונקציית איזון על ו-. שימו לב כי לאו דווקא קיים קדקוד ב- אשר כל שאר הקדקודים נגישים ממנו.

**סעיף ד**

תארו אלגוריתם המקבל סדרה של זוגות קדקודים , ומחשב לכל את . על זמן הריצה של האלגוריתם להיות לא יותר מאשר (כאשר ו-).

**שאלה 5**

גרף מכוון נקרא **גרף** **חביב** אם לכל זוג קדקודים מתקיים כי יש לפחות אחד מהמסלולים הבאים: מסלול מ- ל- **או** מסלול מ- ל-.

**סעיף א**

יהי גרף מכוון ויהי מיון טופולוגי **כלשהו** של הגרף. הוכיחו כי הוא גרף חביב אם ורק אם לכל קיימת הצלע *.*

**סעיף ב**

הוכחו כי גרף מכוון הוא חביב אם ורק אם ל- קיים מיון טופולוגי יחיד.

**סעיף ג**

תארו אלגוריתם ליניארי המקבל גרף מכוון חסר מעגלים ומחזיר האם הוא גרף חביב.

**סעיף ד**

תארו אלגוריתם ליניארי המקבל גרף מכוון כללי (יתכנו מעגלים) ומחזיר האם הוא גרף חביב.

**בהצלחה!**