**תכנון אלגוריתמים עבודה 4 - פתרון**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **שם** | **אור אלמליח** | **שם** | **דביר אזולאי** |
| **ת.ז.** | **301482220** | **ת.ז.** | **200534014** |

**שאלה 1**

**סעיף א**

|  |
| --- |
| ראשית נגדיר: זוג סדור כך ש-  *הוא סכום המשקלים של הצלעות ששייכות ל- , ו- הוא סכום המשקלים של הצלעות ב-* . כעת נגדיר יחס סדר חלקי :  . נשים לב ש- הינו יחס רפלקסיבי, טרנזיטיבי, ואי- סימטרי, לכן הינו יחס סדר מלא (לינארי). כלומר, עבור כל צמד זוגות סדורים בהכרח מתקיים אחד מהבאים:  או . **מעתה כאשר נתייחס לפתרון** **כלשהו כך שהוא קל/מינימלי/קטן יותר מפיתרון אחר** **הכוונה היא ש-**  *.* |
| כעת נגדיר:  כמובן שאם , אזי יתווסף לערך ה- של הפיתרון, ואם אזי יתווסף לערך ה- של הפיתרון. |
| ברור כי אם אזי ערך ה- יהיה כיוון שלא צריך לקחת שום צלעות.  *גם ברור כי אם אזי ערך הפיתרון האופטימלי יהיה* ***המינימום*** *מבין כל האפשרויות שיש לנו להמשיך את המסלול על צלע כלשהי בגרף.* |

**סעיף ב**

|  |
| --- |
| נשים לב כי כל עוד לא קיימים **מעגלים** בעלי משקל שלילי בגרף אזי יהיה קיים עץ מסלולים  A-מינימליים. כלומר, כל עוד אין לנו דרך ליצור מסלול בין שני קודקודים כלשהם במשקל אזי יהיה קיים חסם כלשהו כך שעבור כל שני קודקודים בגרף, יתקיים . גם אם פונקציית המשקל  *תכיל משקלים שליליים (אך לא מעגלים שליליים), אזי החסם יכול להיות גם שלילי, אך הוא יהיה קיים. עבור כל גרף ניתן לחשב את החסם (לא חסם הדוק) באופן הבא: . כלומר, סכום כל הצלעות שבעלות משקל שלילי בגרף. הסבר- לא ניתן לחזור על צלע בעלת משקל שלילי יותר מפעם אחת בלי להגדיל את משקל המסלול כיוון שאין מעגלים שליליים בגרף.*  *לכן, גם כאשר תהיה פונקצייה אי-שלילית, כמובן שעדיין לא יהיו מעגלים שליליים בגרף, לכן בין כל שני קודקודים בגרף יהיה מספר סופי של מסלולים (בהנחה שלא מבצעים מעגלים, כיוון שהם יכולים רק להגדיל את משקל המסלול), לכן בהכרח יהיה מסלול כלשהו שהוא יהיה המסלול הקל ביותר, ולכן גם יהיה קיים עץ מסלולים* A*-מינימליים.* |

**סעיף ג**

|  |
| --- |
| השינויים שצריכים להיעשות באלגוריתם של הם סמנטיים בלבד. כלומר, שינוי של הערך להיות זוג סדור כפי שהגדרנו בסעיף א', ושינוי של פעולת ה- כך שתעדכן את אמ"ם החדש (שחושב כסכום של ) עומד ביחס  *עם הישן. כלומר, אמ"ם החדש הינו קטן יותר, לפי היחס . הערה: כמובן שגם בחירת הקודקוד בעל ערך ה- המינימלי בכל איטרציה, תיעשה לפי היחס .* |

**סעיף ד**

|  |
| --- |
| אבחנה- באלגוריתם , ברגע שקודקוד נכנס ל- , ערך ה- שלו לא משתנה עד סוף ריצת האלגוריתם. |
| הסבר- מתיאור האלגוריתם, נראה כי פעולת ה- מתבצעת אך ורק על קשתות כך ש- . |
| מסקנה- לאחר ביצוע פעולת , תמיד יתקיים . |
| טענה ראשית- בסיום האלגוריתם , לכל מתקיים כי . |
| טענת עזר- כאשר קודקוד נכנס ל- , מתקיים . |
| *הוכחת הטענה הראשית- על סמך טענת העזר, בסוף ריצת האלגוריתם, כל הקודקודים כבר הוכנסו לקבוצה , לכן עבור כל הקודקודים מתקיים .* |
| הוכחת טענת העזר- באינדוקציה שלמה לפי סדר הכנסת הקודקודים ל- .  בסיס- קודקוד הוא הראשון שנכנס לקבוצה , ומתקיים .  *צעד- נניח כי ב- השלבים הראשונים, כל הקודקודים שהוכנסו מקיימים כי*  *. יהי הקודקוד שנבחר בתחילת השלב ה- . כלומר, הוא המינימלי מבין כל הקודקודים שאינם בקבוצה . נביט במסלול כלשהו מקודקוד ל- . יש להוכיח כי . נסמן ב- צלע ראשונה ב- P, כך ש- . נסמן ב- וב- את תתי המסלולים מ- ל- ומ- ל- בהתאמה. מתקבל כי:*  *ומהגדרת :*  *מהנחת האינדוקציה:*  *מהמסקנה:*  *ממינימליות מתקיים:*  *ומהעובדה ש- אי שלילית:*  *לכן: , כנדרש.* |
| ניתוח זמן ריצה- פעולת ה- החדשה עדיין לוקחת זמן ריצה, וכן בחירת הקודקוד בעל ה- המינימלי גם היא לוקחת אותו זמן ריצה כמו שלקחה באלגוריתם המקורי. לכן זמן הריצה יהיה זהה לזמן הריצה של אלגוריתם המקורי, שהוא . |

**סעיף ה (בונוס 5 נקודות)**

|  |
| --- |
| תרגום הקלט- בהינתן מופע , פונקציית משקל אי שלילית לצלעות , קודקוד מקור , וקבוצת צלעות *, נשנה את פונקציית המשקל באופן הבא:*  *נסכום את משקלן של כל הצלעות בגרף, נסמן משקל זה ב- .*  *כעת נוסיף למשקלה של כל צלע ששייכת ל- את . כלומר,*    *בצורה זאת מובטח לנו שהאלגוריתם של "יעדיף" לקחת את כל הצלעות שאינן ב- על פני צלע אחת שכן ב- , תוך כדי שמירה על היחס בין המשקלים של כל הצלעות שכן ב- .*  *כעת נריץ את הקופסא השחורה- האלגוריתם של .*  *תרגום הפלט- עבור כל קודקוד נבצע את הפעולה הבאה: .*  *כלומר, הפחתה של מ- כמספר הפעמים שהופיעה צלע מ- במסלול הכי קל מ- ל-* . |
| הסבר- האלגוריתם של ימצא מסלולים קצרים ביותר לכל קודקודי הגרף כך שהוא משתמש בצלעות מ- רק אם הוא חייב, כפי שהוסבר לעיל, וכנדרש בשאלה. ותרגום הקלט בעצם מחזיר את פונקציית המשקל להיות בדיוק כפי שהייתה בהתחלה. לכן קיבלנו עץ מסלולים A-מינימליים מ- לשאר קודקודי הגרף. |
| ניתוח זמן ריצה- חישוב - זמן ריצה. עדכון פונקציית המשקל - זמן ריצה. זמן ריצת הקופסא השחורה- . תרגום הפלט- . *הנחה: הגרף קשיר מ- , לכן , לכן* סה"כ*- .* |

**שאלה 2**

**סעיף א**

|  |
| --- |
| יהי , , ,  , קל לראות כי .  אך מתקיים עבור הצלע ש- כיוון ש- . |

**סעיף ב**

|  |
| --- |
| כיוון א'- אם קיים מסלול קל ביותר מ- ל- העובר ב- , אזי  .  ניקח את המסלול המינימלי מ- ל- . נוריד ממנו את הצלע האחרונה . קיבלנו מסלול חוקי מ- ל- . מהגדרת נקבל ש-  *.*  *כעת ניקח את המסלול המינימלי מ- ל- , ונוסיף לו את הצלע . קיבלנו מסלול חוקי מ- ל- . ומהגדרת נקבל ש-*  .  לכן אם מסלול קל ביותר מ- ל- עובר ב- , אז .  כיוון ב'- אם , יש מסלול קל ביותר מ- ל- העובר ב- .  ניקח את המסלול המינימלי מ- ל- . נוסיף לו את הצלע . קיבלנו מסלול חוקי  מ- ל- , שעובר שצלע . לפי ההנחה נקבל כי  . כלומר, משקל המסלול הוא כלומר הוא מסלול מינימלי העובר ב- . |

**סעיף ג**

|  |
| --- |
| * + 1. //     2. // |
| הוכחת האלגוריתם- נרצה להוכיח כי עבור כל קודקוד בגרף.  ברור כי על להיות שווה ל- 0, כיוון שניתן להגיע מקודקוד לעצמו ב- 0 צלעות, לכן אם תנאי זה אינו מתקיים, מייד האלגוריתם מחזיר .  נשים לב כי האלגוריתם עובר על כל צלע בדיוק פעם אחת, ובודק:   1. האם . כלומר, בהנחה ש- , אזי מצאנו מסלול במשקל מקודקוד ל- . אם התנאי מתקיים אזי מצאנו מסלול במשקל קטן יותר מ- . נסמן משקל מסלול זה ב- . כעת ידוע כי , ובנוסף, מהגדרת ידוע כי , לכן נקבל ש- ולכן, מייד האלגוריתם מחזיר . אם עבור כל הצלעות בגרף התנאי **לא** מתקיים, אזי קיבלנו ש-   עבור כל .   1. האם . נרצה לבדוק שאכן קיים מסלול כלשהו מ- ל- כך שמשקלו הוא **בדיוק** . אחרת, נוכל לקבל פונקצייה כלשהי המקיימת   עבור כל קודקוד (מלבד ), ואז לא נקבל סתירה מהתנאי הראשון. בסוף האלגוריתם אנו עוברים על המערך ומוודאים שערך כל התאים בו הוא . כלומר, עבור כל קודקוד קיים לפחות מסלול אחד (במשקל ) המקיים . מהגדרת נקבל . לכן קיבלנו ש- .  לסיכום: עבור כל קודקוד מתקיים , לכן האלגוריתם יחזיר . |
| ניתוח זמן ריצה- אתחול המערך - .  אנו עוברים על כל צלע בגרף בדיוק פעם אחת, עבור כל צלע מבצעים פעולות, לכן זמן ריצה. ולבסוף, בודקים את ערכי מערך - .  לסיכום, זמן ריצת האלגוריתם הוא . |

**שאלה 3**

**סעיף א**

|  |
| --- |
| המרת הקלט- עבור גרף כלשהו, נבנה גרף באופן הבא:  *, ,*  *,*  *, .𝑑}הבאנה גרף יים לפחות מסלול אחד המקיים מחזיר 'שקר'.*  *כלומר, נשכפל את כל קודקודי הגרף לשני עותקים. וכעת, עבור כל צלע , אם משקלה היה זוגי אזי עכשיו יהיו ב- הצלעות בעלות אותו המשקל הזוגי. אך אם משקלה היה אי- זוגי, עכשיו יהיו ב- הצלעות שוב, בעלות אותו המשקל האי- זוגי.*  הרצת הקופסא השחורה- נריץ על הגרף החדש את אחד האלגוריתמים שנלמדו בכיתה למציאת מרחקים בין כל זוג קודקודים, למשל .  המרת הפלט- אין צורך בהמרת פלט, רק צריך לדעת איפה למצוא את התשובה, כיוון שכעת מתקיים עבור כל זוג קודקודים : . |
| הוכחת נכונות-  טענה ראשית- . כלומר, המסלול בעל המשקל האי- זוגי הקטן ביותר בין ל- ב- הוא המסלול בעל המשקל הקטן ביותר בין ל- ב- .  טענת עזר- בגרף יש מסלול במשקל **אי- זוגי** בין זוג קודקודים אמ"ם יש מסלול בגרף בין ל- באותו המשקל.  הוכחת טענת העזר-  כיוון א'- אם יש ב- מסלול במשקל אי- זוגי בין שני קודקודים אזי יש ב- מסלול באותו משקל בין : יהיה המסלול ב- מ- ל- . תהיה הצלע הראשונה במסלול שמשקלה אי- זוגי. אם כן, כל הצלעות הינן בעלות משקל זוגי, ולפי הגדרת הן גם צלעות ב- . לכן, אותו מסלול קיים גם ב- . לפי הצלע ב- ולפי הגדרת , נראה כי קיימת ב- הצלע . נשים לב כי משקל המסלול עד כה הוא זוגי (סכום משקלים זוגיים), וכאשר נוסיף לו את הצלעות , נקבל מסלול במשקל אי- זוגי. נשים לב כי בכל פעם שאנו מגיעים לצלע בעלת משקל אי- זוגי במסלול , אנו עוברים ממשקל זוגי למשקל אי- זוגי או להפך, ובנוסף, אנו עוברים מעותק אחד של הקודקודים לעותק האחר. כיוון שידוע שמשקלו של הוא אי- זוגי והוא מתחיל בקודקוד ומסתיים ב- , אזי ב- נסיים את המסלול ב- ובאותו המשקל.  כיוון ב'- אותה ההוכחה, בכיוון ההפוך.  הוכחת הטענה הראשית- לפי טענת העזר, אם כלומר, קיים מסלול במשקל אי- זוגי מינימלי בין ל- ב- , אזי מסלול באותו משקל קיים בין ל- ב- . כיוון שהאלגוריתם של מוצא מסלולים במשקלים מינימליים בין כל זוג קודקודים, בפרט הוא ימצא את המסלול הנ"ל. הוא לא ימצא מסלול במשקל קטן יותר בין ל- ב- , כיוון שלא קיים כזה (שוב, לפי הכיוון השני של טענת העזר). לכן קיבלנו  *.* |
| ניתוח זמן ריצה- המרת הקלט- . זמן ריצת הקופסא השחורה- . המרת הפלט- . הערה: ניתן לבנות מטריצה בגודל שתכיל את הפתרון הסופי עבור כל זוג קודקודים- זמן ריצה. בכל מקרה, הזמן ריצה הכולל הוא . |

**סעיף ב**

|  |
| --- |
| נבחר לעדכן את האלגוריתם של , ע"י הוספת מערך שני בגודל שמאותחל ל- , המייצג את משקל המסלול האי- זוגי המינימלי מ- ל- , וע"י שינוי פעולת באופן הבא:  כעת פשוט נריץ מכל קודקוד את האלגוריתם של עם פעולת ה- החדשה. |
| הסבר- פעולת ה- החדשה מעדכנת את ערכי כרגיל. אך כעת אנו גם משתמשים ב- כדי לבדוק האם הצלע משרה מסלול **אי- זוגי** קל יותר מ- , שהוא משקל המסלול האי-זוגי המינימלי שמצאנו עד כה מ- ל- . אם כן, אזי נעדכן את . בצורה זו אנו למעשה שומרים כי תמיד ב- יהיה את משקל המסלול האי- זוגי המינימלי מ- ל- שמצאנו עד כה. ונשים לב כי לאחר מעברים על כל צלעות הגרף, כיוון שהמסלול הארוך ביותר שנרצה לקחת מכיל צלעות (אין מעגלים שליליים בגרף), אזי כבר גילינו את כל המסלולים הקלים ביותר מ- לכל הקודקודים (בדומה להוכחת ), ובפרט את כל המסלולים במשקל אי- זוגי הקלים ביותר. |
| ניתוח זמן ריצה- הדבר היחיד ששינינו הוא פעולת ה- , והיא עדיין פועלת ב- זמן ריצה. אזי עדיין אלגוריתם רץ ב- . אנו מריצים את על כל אחד מקודקודי הגרף, לכן זמן הריצה הכולל הוא . |

**שאלה 4**

**סעיף א**

|  |
| --- |
| יהיה מסלול כלשהו מ- ל- בגרף . יהיה מסלול אחר מקודקוד ל- .  טענה- אמ"ם .  הוכחת הטענה- ידוע כי ,  כמו כן ידוע כי ,  וכך האלה עד ל- .  אם נחבר את כל המשוואות, נקבל: .  כלומר, . באותו אופן, ניתן למצוא ש-  , כעת נחסר בין שתי המשוואות הנ"ל ונקבל  או . כלומר, בהינתן פונקציית איזון , ההפרש בין משקל מסלול לפי פונקציית משקל למשקל מסלול לפי פונקציית משקל זהה עבור כל המסלולים בין שני קודקודים כלשהם. לכן בהכרח מתקיים שמשקל שני מסלולים הוא זהה לפי פונקציית משקל אמ"ם הוא זהה לפי הפונקציה , כלומר, אמ"ם .  הערה- באותו אופן מתקיים כי אמ"ם , וכן הלאה.  כעת אנו יודעים כי פונקציית המשקל שומרת על היחס בין משקלי המסלולים ב- , לכן ניתן פשוט להריץ את האלגוריתם של על , עם קודקוד מקור , ועם פונקציית המשקל (לפי הגדרת , קל לראות כי כל המשקלים יהיו אי- שליליים). ונקבל חזרה מהאלגוריתם, בין היתר, את המסלול הקל ביותר מקודקוד ל- (ניתן למצוא את המסלול, אם עוקבים אחר ערכי ה- החל מקודקוד עד שמגיעים ל- ). כעת נחשב את משקל של המסלול שמצאנו לפי פונקציית המשקל , ונחזיר את הסכום שמצאנו.  ניתוח זמן ריצה- הרצת האלגוריתם של - (בגרסה המשופרת). מציאת המסלול וחישוב ערכו לפי פונקציית המשקל - .  סה"כ- זמן ריצה. |

**סעיף ב**

|  |
| --- |
| תהיה צלע כלשהי בגרף. צריך להוכיח כי . כדי שפונקציית האיזון תהיה חוקית. כלומר, צריך להוכיח . ידוע כי קודקוד נגיש מ- . לכן, ניקח את המסלול המינימלי מ- ל- .  משקל מסלול זה הוא . כעת נוסיף למסלול זה את הצלע . קיבלנו מסלול חוקי מ- ל- . לפי הגדרת נקבל כי , מש"ל. |

**סעיף ג**

|  |
| --- |
|  |
| הוכחת נכונות- |
| ניתוח זמן ריצה- עבור האתחול- זמן ריצה. כעת, אנו מבצעים איטרציות על כל הצלעות בגרף. על כל צלע מבצעים פעולות, לכן סה"כ זמן ריצה. |

**סעיף ד**

|  |
| --- |
| נשתמש באלגוריתם דומה לאלגוריתם של . ראשית, ניצור קודקוד חדש . ונגדיר גרף חדש כך ש- , . כלומר, הוספנו צלעות חדשות מקודקוד לכל קודקודי הגרף. נגדיר את משקלן של כל הצלעות שהוספנו להיות 0. כעת ידוע כי כל קודקודי הגרף נגישים מ- . נריץ את האלגוריתם של  מהקודקוד . לאחר ריצת האלגוריתם, וכיוון שישנן צלעות במשקל 0  מ- לכל קודקוד אחר בגרף, אזי עבור כל . למעשה, עבור כל יתקיים ש- הוא משקלו של המסלול הקל ביותר (בעל משקל אי- חיובי) שמסתיים ב- . כעת נשנה את פונקציית המשקל באופן הבא:  . כעת מובטח לנו שכל הצלעות הן בעלות משקל אי- שלילי (בדיוק כמו באלגוריתם של ). כעת, נוריד את הקודקוד והצלעות שהוספנו, ונריץ עבור כל אחד מ- זוגות הקודקודים את האלגוריתם של עם קודקוד המקור , ועם פונקציית המשקל החדשה, על מנת למצוא את . |
| ניתוח זמן ריצה- נזכור שהוספנו לגרף קודקוד אחד ו- צלעות, לכן ו- . זמן ריצת - . זמן עדכון פונקציית המשקל- . כעת אנו מריצים פעמים את האלגוריתם של על הגרף המקורי, אך עם פונקציית המשקל החדשה- . לכן סה"כ זמן ריצה . |

**שאלה 5**

**סעיף א**

|  |
| --- |
| כיוון א'- נתון הוא גרף חביב, ובנוסף נתון מיון טופולוגי כלשהו של הגרף. ניקח  *שני קודקודים סמוכים במיון הטופולוגי. כיוון שהגרף חביב, ידוע כי קיים מסלול מאחד הקודקודים לשני. לא ייתכן שקיים מסלול מ- ל- , כיוון שלא יכולות להיות צלעות אחורה במיון טופולוגי. לכן חייב להיות מסלול מ- ל- . נשים לב כי הצלע הראשונה במסלול זה לא יכולה להיות אחורה (כיוון שאין צלעות אחורה במיון טופולוגי), אך גם אינה יכולה להיות קדימה לקודקוד כלשהו שמופיע* ***אחרי*** *הקודקוד במיון, כיוון שאנו צריכים לסיים את המסלול ב- , אך כאמור, אין צלעות אחורה במיון טופולוגי. לכן הצלע הראשונה (והיחידה) במסלול מ- ל- תהיה . לכן,* לכל הצלע *.*  *כיוון ב'- נתון גרף בעל מיון טופולוגי המקיים כי* לכל הצלע *.*  *קל לראות שעבור כל שני קודקודים במיון, קיים המסלול , לכן מתקיים שבין כל שני קודקודים בגרף קיים מסלול מאחד לשני, לכן הגרף הוא גרף חביב.* |

**סעיף ב**

|  |
| --- |
| כיוון א'- נתון הוא גרף חביבוחסר מעגלים, לכן קיים לו מיון טופולוגי. *לפי סעיף א', אם קיים מיון טופולוגי כלשהו, אזי במיון זה מתקיים ש*לכל הצלע *.*  *נניח בשלילה שקיים מיון טופולוגי אחר . יהי הקודקוד הראשון במיון* ***שאינו*** *זהה לקודקוד במיון הטופולוגי המקורי. כלומר, כך ש- עד מופיעים באותם מקומות במיון ,* ***וגם מתקיים*** *(אחרת גם היה באותו מקום כמו המיון המקורי). לכן, מופיע* ***אחרי*** *במיון* , אך ידוע כי , וזו תהיה צלע **אחורה** במיון החדש. סתירה לכך שקיים אינדקס כזה , סתירה לכך שקיים מיון טופולוגי שונה.  *כיוון ב'- נתון גרף בעל מיון טופולוגי יחיד . כלומר, לא קיים מיון טופולוגי אחר, בפרט לא קיים מיון טופולוגי עם קודקוד אחר במקום הראשון במיון. לכן ניתן להסיק שקיים מסלול מ- לכל קודקודי הגרף, ובפרט ל- . באופן דומה, ניתן לומר כי קיים מסלול מ- ל- וכך הלאה עד העובדה שקיים מסלול מ- ל- . כעת, בצורה דומה לסעיף א', תוך שימוש בעובדה שאין צלעות אחורה במיון טופולוגי, ניתן* להסיק כי לכל הצלע *.* ולפי סעיף א', נקבל ש- הוא גרף חביב. |

**סעיף ג**

|  |
| --- |
|  |
| הוכחת נכונות- האלגוריתם בודק האם לכל הצלע *.* לפי סעיף א', הגרף הוא חביב אמ"ם במיון טופולוגי שלו מתקיים שלכל הצלע *.* לכן, האלגוריתם מחזיר אמ"ם הגרף הוא גרף חביב. |
| ניתוח זמן ריצה- זמן ריצה של מיון טופולוגי- . זמן בדיקה של קיום הצלעות- . לכן סה"כ זמן ריצה של , כנדרש. |

**סעיף ד**

|  |
| --- |
| ראשית, נרצה להריץ את האלגוריתם של למציאת ממוין טופולוגית. הערה- לפי טענה שנלמדה בכיתה, יש מעגלים בגרף אמ"ם אלגוריתם מצא צלע אחורה, וכידוע, השלב הראשון באלגוריתם של הוא הרצת .  הערה נוספת- אם כלל לא היו מעגלים בגרף , אזי ברור כי . לכן, בכל מקרה כרגע יש לנו את ממוין טופולוגית. כעת נריץ את האלגוריתם מסעיף ג' על המיון הטופולוגי, והאלגוריתם שלנו יחזיר אמ"ם האלגוריתם מסעיף ג' יחזיר . |
| הוכחת נכונות- אם ב- לא היו מעגלים, אזי לא קיימים רכיבי קשירות קשירים היטב בגודל של יותר מקודקוד יחיד. לכן כל קודקוד ב- יהיה גם קודקוד ב- , ולפי הגדרת הצלעות ב- , גם כל הצלעות ב- יהיו הצלעות ב- . לכן, כאמור, אם אין מעגלים ב- אזי . ואז האלגוריתם של  *יחזיר לנו מיון טופולוגי של , אותו ניתן לאלגוריתם מסעיף ג', וסיימנו.*  *אם ב- היו מעגלים, אזי ונרצה להוכיח כי גרף עם מעגלים הוא חביב אמ"ם הוא חביב.*  כיוון א'- נתון גרף חביב, עם מעגלים. כלומר עבור כל זוג קודקודים קיים מסלול מהאחד לשני. יהיה מעגל כלשהו . אם אין עוד קודקודים בגרף מלבד אזי ב- יד רק קודקוד אחד, והוא חביב באופן ריק. אחרת, יהיה קודקוד . *ידוע כי קיים מסלול מ- לקודקוד כלשהו במעגל או מסלול מקודקוד כלשהו*  *ב- ל- . ב- , המעגל יהיה הקודקוד , וברור כי עדיין יש את אחד או שני המסלולים הנ"ל. לכן הינו גרף חביב.*  *כיוון ב'- ידוע כי הוא גרף חביב. לכן בין כל זוג קודקודים ב- , שכל אחד מהם מייצג אחד או יותר קודקודים קשירים היטב ב- , קיים מסלול מהאחד לשני. יהיו שני קודקודים ב- . ונניח בה"כ המסלול ב- מ- ל- . נניח , ו- מעגלים ב- (אולי , ואולי ), כך שהקודקוד שמחובר ל- הוא והקודקוד שמחובר ל- הוא . אזי בין כל , ברור שיש מסלול, כי הם באותו מעגל ב- . ובין כל , גם ברור שיש מסלול, מאותה סיבה. נראה גם כי בין כל ל- קיים מסלול והוא*  *. לכן בין כל שני קודקודים ב- יש מסלול, ולכן הוא גרף חביב.* |
| ניתוח זמן ריצה- זמן הריצה של אלגוריתם - . וזמן הריצה של האלגוריתם מסעיף ג' גם הוא . לכן סה"כ זמן ריצה . |