**תכנון אלגוריתמים - עבודה 5 - פתרון**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **שם** | **דביר אזולאי** | **שם** | **אור אלמליח** |
| **ת.ז.** | **200534014** | **ת.ז.** | **301482220** |

**שאלה 1**

**סעיף א**

|  |
| --- |
| האלגוריתם המתואר הוא אלגוריתם מבוסס רדוקציה לאלגוריתם של בו המרת הקלט היא שינוי פונקציית הקיבולת , והמרת הפלט היא .  הוכחת נכונות-  טענה ראשית- האלגוריתם מבוסס הרדוקציה מחזיר זרימה מקסימלית עבור הגרף המקורי .  טענת עזר 1- האלגוריתם של עוצר עבור הקלט המומר.  טענת עזר 2- מתקבל פתרון חוקי עבור זרימה ב- לאחר המרת הפלט של הקופסא השחורה.  טענת עזר 3- עבור צלע כלשהי ב- מתקיים כך ש- היא חלק מזרימה מקסימלית ב- .  הוכחת הטענה הראשית- על סמך טענת עזר 3, אם לכל הצלעות בגרף מתקיים ש- היא חלק מזרימה מקסימלית בגרף, אזי היא אכן פונקציית זרימה מקסימלית בגרף .  הוכחת טענת עזר 1- נתון כי הוא מכנה משותף לכל הקיבולים שהיו נתונים ב*- . כלומר, עבור כל קיבול מתקיים . כלומר, מחלק את ללא שארית. לכן, בהכרח הוא מספר שלם. ידוע כי בהינתן קיבולים שלמים בלבד, האלגוריתם של תמיד עוצר, לאחר לכל היותר איטרציות.*  הוכחת טענת עזר 2- ידוע כי האלגוריתם של מחזיר פתרון חוקי עבור הקלט . כלומר, לכן מתקיימים הבאים:   1. אילוצי קיבול- עבור כל צלע מתקיים . ידוע כי   , וכן כי . בנוסף, לכן, ניתן לחלק את המשוואה ב- ונקבל כנדרש.   1. אנטי- סימטריות- עבור כל צלע מתקיים .   שוב, נחלק את המשוואה ב- ונקבל כנדרש.   1. שימור זרימה- עבור כל מתקיים . שוב נחלק ב- ונקבל כנדרש.   לכן הפתרון שמחזיר האלגוריתם כולו הינו פתרון חוקי עבור זרימה ב- .  הוכחת טענת עזר 3- ידוע כי האלגוריתם של מחזיר זרימה מקסימלית עבור הקלט הנתון. כלומר, ברשת השיורית בסיום האלגוריתם, לא היה קיים מסלול פשוט מ- ל- . לכן קל לראות כי גם לאחר סיום האלגוריתם, והמרת הפלט, אם היינו בונים רשת שיורית חדשה, גם בה לא היה מסלול פשוט בין ל- (ברשת השיורית מופיעות רק צלעות כך ש- , לכן הכפלה/חילוק של הקיבולים ב- לא משפיעה על הצלעות שיופיעו ברשת השיורית)*. כלומר, לא קיים מסלול שיפור ב- . לכן, הזרימה היא מקסימלית.* |

**סעיף ב**

|  |
| --- |
| במקרה בו כל הקיבולים הנתונים הם מספרים רציונליים נראה כי החסם העליון למספר האיטרציות שהאלגוריתם של יבצע הוא כאשר הוא המכנה המשותף הנמוך ביותר של כל הקיבולים בגרף. בהינתן גרף כלשהו, נסמן ב- שני קיבולים של צלעות כלשהן בגרף, על אותו מסלול פשוט מ- ל- . נסמן את המכנה המשותף הקטן ביותר של ב- . ברור מהגדרת כי (ו- ). נניח בה"כ . נניח שבאיטרציה הראשונה של נבחר המסלול הנ"ל, ובו צלע קריטית. כעת יוזרם דרך כל אחת מצלעות המסלול, ובפרט דרך זרימה השווה בגודלה ל- . כעת נקבל שברשת השיורית החדשה תהיה צלע במקומה של בעלת קיבול . כך האלגוריתם ימשיך, יכול להיות שצלע תיבחר שוב בהמשך כצלע קריטית, אך ידוע לנו ש- מחלק את ללא שארית*, לכן במקרה הגרוע נקבל קיבול חדש כלשהו . לכן ניתן לומר כי בכל איטרציה של האלגוריתם, הוא מוצא מסלול שיפור כך שהצלע הקריטית היא בעלת קיבולת של לכל הפחות. כלומר, ידרשו לאלגוריתם לכל היותר איטרציות כדי להגדיל את הזרימה הנוכחית ב- 1. לכן נאמר כי לכל היותר ידרשו לאלגוריתם איטרציות כדי למצוא את הזרימה המקסימלית. לכן זמן הריצה של האלגוריתם יהיה . כאשר היא הזרימה המקסימלית בשלמים (מעוגל).*  *הערה- שלמים כלשהם.* |

**שאלה 2**

|  |
| --- |
| נפריך את הטענה עם דוגמא נגדית: יהיה כך ש- , .  ותהי פונקציית קיבולת , וכמובן זרימה התחלתית  . ברור כי כעת . נשים לב כי ישנם שלושה מסלולים אפשריים מ- ל- : באורך 4, באורך 4,  ו- באורך 7. כלומר, המרחק בין ל- הוא 4. כעת נניח כי בשלב 3.א של האלגוריתם המוצע נמצאה הזרימה החוסמת בה מוזרם זרם בגודל 1 בכל הצלעות של מסלול . ברור כי זו אכן זרימה חוסמת כיוון שכך בכל המסלולים הנ"ל יש לפחות צלע אחת רוויה. כעת נזרים בגרף את הזרימה החוסמת שמצאנו. למעשה, הזרמנו זרם בכל הצלעות מלבד שתי הצלעות . יתרה מזאת, בכל צלע בה הזרמנו זרם, הזרמנו את הקיבולת המקסימלית שלה. לכן כל צלעות הגרף "יתהפכו" מלבד שתי הצלעות הנ"ל. אם כן, כעת נבנה את הגרף החדש, ונשים לב כי יהיה קיים בו המסלול מאורך 3, בסתירה לטענה שהוצגה. |

**שאלה 3**

**סעיף א**

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**סעיף ב**

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**סעיף ג**

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**שאלה 4**

**סעיף א**

|  |
| --- |
| כיוון א'- אם הוא גרף -קשיר-היטב בצלעות, אזי לכל קיימים לפחות מסלולים זרים בצלעות.  נתון כי עבור כל צלעות שנוריד מהגרף עדיין הוא יהיה קשיר היטב. כלומר, בין כל זוג קודקודים קיים מסלול.  אבחנה- אם נריץ אלגוריתם למציאת זרימה מקסימלית על הגרף עם קיבולת לכל צלע , ועם קודקודים ו- , אזי קבוצת הצלעות תהווה את קבוצת הצלעות של כל המסלולים הזרים בין ל- .  הסבר- לא יכולה להיות צלע משותפת לשני מסלולים שונים, כיוון שהקיבולת של כל הצלעות שווה ל- 1, וזו תהיה סתירה לשימור הזרימה. לכן כל המסלולים זרים אחד לשני, ובנוסף, כמות המסלולים הזרים מ- ל- היא בדיוק הזרימה המקסימלית שהאלגוריתם מצא.  *הערה- ידוע כי זרימה מקסימלית בגרף מסוים שווה לקיבולת חתך מינימלית כך ש- . ברור כי החתך בעל הקיבולת המינימלית הוא החתך בעל המספר המינימלי של צלעות החוצות אותו, וכן כי הקיבול שלו הוא מספר הצלעות החוצות (כיוון שהקיבול של כל הצלעות שווה ל- 1).*  *נניח בשלילה שקיימים* ***רק*** *מסלולים זרים בצלעות מ- ל- כלשהם. נוריד את הצלעות החוצות את החתך המינימלי בין ל- . וקיבלנו שכעת אין עוד מסלולים מ- ל- , כיוון שכל מסלול בהכרח צריך לחצות את החתך המינימלי מתישהו. בסתירה לכך ש- הוא גרף -קשיר-היטב בצלעות.*  כיוון ב'- אם בין כל שני קודקודים קיימים לפחות מסלולים זרים בצלעות, אזי הוא גרף -קשיר-היטב בצלעות.  נוריד מהגרף צלעות כלשהן. נראה כי עדיין קיים לפחות מסלול אחד בין כל זוג קודקודים כלשהו. ידוע כי בין כל היו לפחות מסלולים זרים בצלעות. כיוון שהמסלולים זרים בצלעות, לא ייתכן שהורדת צלע אחת כלשהי תקטע יותר ממסלול אחד. לכן ברור כי הורדת הצלעות מהגרף יכולה לקטוע לכל היותר מסלולים בין ל- . אך קיימים מסלולים, לכן עדיין קיים לפחות מסלול אחד בין כל . |
| *הוכחה לא נכונה לכיוון א'- נניח בשלילה שקיימים* ***רק*** *מסלולים זרים בצלעות מ- ל- כלשהם. אזי מכל אחד מ- המסלולים, נוריד את הצלע הקריטית (צלע* ***שלא ניתן*** *להחליף אותה במסלול אחר כך שכל* צלע **אינה שייכת** לאף אחד מ- המסלולים).  *הערה- בהכרח קיימת בכל מסלול לפחות צלע קריטית אחת. נניח בשלילה שלא קיימת במסלול מסוים מ- ל- צלע קריטית. כלומר, עבור כל צלע במסלול זה קיים מסלול אחר שמכיל* ***רק*** *צלעות שאינן שייכות ל- המסלולים האחרים. אזי ניקח מ- את המסלול ונגיע לקודקוד , משם ניקח את מסלול ונגיע ל- וכך הלאה עד שנגיע ל- . ואז קיבלנו מסלול*  מ- ל- המכיל רק צלעות שאינן שייכות ל- וגם לא ל- המסלולים האחרים מ- ל- . כלומר, קיבלנו מסלול זר ל- , וגם זר ל- המסלולים האחרים, בסתירה לכך שקיימים רק מסלולים זרים מ- ל- . לכן בהכרח בכל מסלול מ- ל- קיימת לפחות צלע קריטית אחת.  נחזור להוכחה- אם כן, הורדנו צלעות סה"כ וקיבלנו שכעת לא קיימים כלל מסלולים  מ- ל- *(זה לא נכון !!). בסתירה לכך ש- היה -קשיר-היטב בצלעות.* |

**סעיף ב**

|  |
| --- |
| תיאור האלגוריתם- עבור כל זוג קודקודים נריץ את האלגוריתם של דיניץ עם צלעות הגרף, פונקציית קיבולת , והקודקודים . אם עבור זוג כלשהו האלגוריתם של דיניץ מחזיר זרימה מקסימלית קטנה מ- , נחזיר . אחרת, כלומר עבור כל זוג קודקודים האלגוריתם של דיניץ החזיר זרימה מקסימלית גדולה או שווה ל- , נחזיר .  *הוכחת נכונות- לפי סעיף א', גרף הוא -קשיר-היטב בצלעות אמ"ם בין כל זוג קודקודים קיימים לפחות מסלולים זרים בצלעות. לכן נרצה לראות האם בגרף בין כל שני קודקודים אכן ישנן לפחות מסלולים זרים בצלעות. לשם כך אנחנו מריצים את האלגוריתם של דיניץ עבור כל זוג קודקודים. כפי שנאמר בסעיף א',* כמות המסלולים הזרים מ- ל- היא בדיוק הזרימה המקסימלית שהאלגוריתם ימצא. *לכן ע"י זה שאנו בודקים שהזרימה המקסימלית שהאלגוריתם מחזיר עבור כל זוג קודקודים גדולה או שווה ל- אנחנו בעצם בודקים האם קיים לפחות מסלולים זרים בצלעות מ- ל- . אם עבור אחד מהקודקודים ישנם פחות מ- מסלולים זרים בצלעות, אזי לפי סעיף א', זו סתירה לכך ש- הוא -קשיר-היטב בצלעות, ונחזיר . אחרת, אנו מחזירים . כלומר, האלגוריתם תמיד מחזיר תשובה נכונה.*  ניתוח זמן ריצה- לפי שאלה 3, סעיף ג, זמן ריצה של האלגוריתם של דיניץ **כאשר כל הקיבולות הן 1** הוא . אנו מריצים את האלגוריתם של דיניץ עם פונקציית קיבולת כזו עבור כל זוג קודקודים. כלומר, פעמים. לכן סה"כ זמן הריצה יהיה . |

**סעיף ג- בונוס**

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**שאלה 5**

**סעיף א**

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**סעיף ב**

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |