Abramsky- Categorical Logic

ashiato45 take notes

2015 年 11 月 2 日

1 Introduction

1.1 From Elements To Arrows

1.2 Categories Defined

1.3 Diagrams in Categories

1.4 First Notions

- (Definition 15: subcategory): $\mathbb{C}$ を圏とし、

$$\mathbf{Ob}(\mathbb{D}) \subset \mathbf{Ob}(\mathbb{C}), \quad {}^{\forall}A, B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{D}) \colon \ \mathcal{D}(A,B) \subset \mathcal{C}(A,B) \tag{1}$$

  がるとする。$\mathbb{D}$ が $\mathbb{C}$ の subcategory であるとは、
  - $A \in \mathbf{Ob}(\mathbb{D}) \implies \mathrm{id}_A \in \mathcal{D}(A,A)$ となる
  - $f \in \mathcal{D}(A,B), g \in \mathcal{D}(B,C) \implies g \circ f \in \mathcal{D}(A,C)$

  となること。
- (full,lluf): subcategory が full であるとは、A から B への射がもとの category のものと一致すること。lluf であるとは、オブジェクトをすべて引き継いでいること。

2 Some Basic Constructions

2.1 Initial and Terminal Objects

2.2 Products and Coproducts

2.2.1 Products

2.3 Coproducts

2.4 Pullbacks and Equalisers

2.4.1 Pullbacks

- $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ について、f, g に沿った pullback とは、$A \xleftarrow{p} D \xrightarrow{q} B$ で、

$$\begin{tikzcd}
D' \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, "q'"] \arrow[ddr, "p'"'] & & \\
& D \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

  という普遍性を持つもの。

- $((f,g)$-cone): $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ について、(f,g)-one とは (D,p,q) で
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$
となるもの。
- $((f,g)$-cone の morphism): $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ についてこの cone たちを考える。(f,g)-cone である、$(D_1,p_1,q_1),(D_2,p_2,q_2)$ について、この間の morphism とは、
$$\begin{tikzcd} & D_1 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "q_1"] \arrow[dd, "h"] & \\ A & & B \\ & D_2 \arrow[ul, "p_2"] \arrow[ur, "q_2"'] & \end{tikzcd}$$
となるもの。

2.4.2 Equalisers

- (Definition 28: equaliser): $\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \end{tikzcd}$ を考える。(f,g) の equaliser とは、
  - arrow$e\colon E \to A$ で、
  - $f \circ e = g \circ e$ をみたし、
  - $$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \\ D \arrow[u, dotted, "\hat{h}"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$ という普遍性を持つもの。
- たとえば、$f\colon (x,y) \mapsto x^2+y^2$、$g\colon (x,y) \mapsto 1$ について、単位円からの $\mathbb{R}^2$ への埋め込みは equaliser になっている。

2.5 Limits and Colimits

3 Functors

3.1 Basics

3.2 Further Examples

- poset の例: poset[*1]P が時間をあらわすとき、$F\colon P \to \mathbf{Set}$ は集合の時間変化をあらわす。
- **List** は functor になる。つまり、$f\colon X \to Y$ を $\mathbf{List}(X) \to \mathbf{List}(Y)$ にうつす: $\dfrac{f\colon X \to Y}{\mathbf{List}(f)\colon \mathbf{list}(X) \to \mathbf{list}(Y)}$
。
- さらに構造を持たせることもできる。List を monoid とみなせば、$\mathbf{MList}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$ を上と同様に定義すればよい。List は単位元を空リストとし、積を連結とすれば monoid になっている。
- (free monoid): $\mathbf{MList}(X)$ を X 上の free monoid という。

3.3 Contravariance

3.4 Properties of Functors

- (Definition 48: faithful): functor の、arrow をうつす部分が単射。
- (full): functor の、arrow をうつす部分が全射。
- (embedding): functor が full で faithful で「object に関して単射」である。

[*1] 反射対称推移

- (essentially surjective):

$$^{\forall}B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{D})\colon\ ^{\exists}A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})\colon\ F(A) \simeq B \tag{2}$$

つまり、「『object についての全射』を同型で弱めた」もの。
- (equivalence): functor が full で faithful で essentailly surjective ってであること。
- (isomorphism): 合成して 1。
- (preservation) P を arrow の性質とする[*2]。$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が P を preserve するとは、f が P をみたすとき $F(f)$ も P をみたすこと。
- (reflect): $F(f)$ が P をみたすとき f も P をみたすこと。

4 Natural Tansformations

4.1 Basics

- (natural isomorphism): 自然変換 $t\colon F \to G$ について、

$$^{\forall}A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})\colon\ t_A \text{は} \mathrm{isomorphism} \tag{3}$$

となるとき、t を natural isomorphism という。
- Functorid と、Functor$\times \circ \langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle$ (これは $f \mapsto \langle f, f \rangle$ と定義される) の間の $\Delta\colon \mathrm{id} \to \times \circ \langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle$ を $X \in \mathbf{Set}$ について、

$$\Delta_X\colon x \to X \times X, \quad x \mapsto (x, x) \tag{4}$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

と定義し、これを考える。これは、
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_X"] & Y \arrow[d, "\Delta_Y"] \\ X \times X \arrow[r, "f \times f"] & Y \times Y \end{tikzcd}$$
を commute させるので、自然変換になっている。
- binary products がある圏 $\mathbb{C}$ について、上と同様に functorid から functorid $\times$ id への自然変換 Δ_A が定義できる。
- binary products がある圏 $\mathbb{C}$ について、functor $\times\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を product category からとってその 2 つの binary products をとるものとし、functor $\pi_1\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を product category をとってその片方をとるものとする。このとき、この 2 つの functor の間の transformation π_1 を、各 $(A, B) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ について、

$$(\pi_1)_{(A,B)}\colon (A, B) \mapsto A \tag{5}$$

と定義すると、これは natural transformation になる。
- $\mathbb{C}$ を terminal T をもつ圏とし、functor $K_T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を、すべての object を T にうつし、すべての射を id_T にうつすものとする。すると、id から K_T への transformation を

$$\tau_A\colon c \mapsto (\mathrm{id}c \to K_T c) = (c \to T) \tag{6}$$

を、T が terminal であることから $c \to T$ が 1 つに定まることを使って定義する。すると、あきらかに
$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"] & \mathrm{id}c = c \arrow[r, "\tau c"] \arrow[d, "\mathrm{id}f = f"] & K_T c = T \arrow[d, "Kf = \mathrm{id}_T"] \\ c' & \mathrm{id}c' = c' \arrow[r, "\tau c'"] & K_T c' = T \end{tikzcd}$$
の図示が満たされるので (重ね重ね terminal の性質に注意)、τ は natural transformation になっている。

[*2] monic とか epi とか

- **List** 間の transformation $\mathbf{List}X \xrightarrow{\mathbf{reverse}_X} \mathbf{List}X$ をリストの逆転と定義すると、これは
$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ X' \end{array} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{List}X \arrow[r, "\mathbf{reverse}_X"] \arrow[d, "\mathbf{List}f"] & \mathbf{List}X \arrow[d, "\mathbf{List}f"] \\ \mathbf{List}X' \arrow[r, "\mathbf{reverse}_{X'}"] & \mathbf{List}X' \end{tikzcd}$$
をあきらかに満たし、natural。
- id から **List** への transformation $\mathrm{id}X \xrightarrow{\mathbf{unit}_X} \mathbf{List}X$ を 1 要素リストの生成と定義すると、これはあきらかに natural。
- $\mathbf{List}(\mathbf{List}(X))$ から $\mathbf{List}(X)$ への transformation をリストをつぶすことと定義すると、**List** のネストで矢がどこへ飛ぶかを考えると natural。
- functor $P\colon \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ を、monoid を忘れつつ対角線に埋め込む $(M, \cdot, 1) \mapsto M \times M,\ f \mapsto f \times f$ と定義する。さらに、U を単に forget する functor とする。このとき、P から U への transformation$t_{(M,\bullet,1)}$ をもとのモノイドでの積を取るとすると、
$$\begin{array}{c} (M, \bullet, 1) \\ \downarrow f \\ (N, \bullet, 1) \end{array} \qquad \begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "t_{(M,\bullet,1)}"] \arrow[d, "f\times f"] & M \arrow[d, "f"] \\ N \times N \arrow[r, "t_{(N,\bullet,1)}"] & N \end{tikzcd}$$
が commute し、natural。

4.2 Further Examples

- $\mathbb{C}$ の射 $f\colon A \to B$ を考える。このとき、$\hom_{\mathbb{C}}(B, ?)$ から $\hom_{\mathbb{C}}(A, ?)$ への transformation $\hom_{\mathbb{C}}(f, ?)\colon \hom_{\mathbb{C}}(B, C) \to \hom_{\mathbb{C}}(A, C)$ を、「コドメイン側に f を合成する」とすると、
$$\begin{array}{c} C \\ \downarrow h \\ D \end{array} \qquad \begin{tikzcd} \hom_{\mathbb{C}}(B, C) \arrow[r, "?\circ f"] \arrow[d, "h\circ ?"] & \hom_{\mathbb{C}}(A, C) \arrow[d, "h\circ ?"] \\ \hom_{\mathbb{C}}(B, D) \arrow[r, "?\circ f"] & \hom_{\mathbb{C}}(A, D) \end{tikzcd}$$
は
あきらかに commute で natural になる。
- (Lemma 1;Yoneda Lemma): (どの Hom-functor 間の natural transformation は矢の合成としてあらわせる) $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathbb{C})$ とする。t を $\hom(A, ?)$ から $\hom(B, ?)$ への natural transformation とする。$t = (\circ f)$ となる $f\colon B \to A$ がただ 1 つ存在する。
$\because f = t_A(\mathrm{id}_A)$ とすればよいことを示す。
$C \in \mathbf{Ob}(\mathbb{C})$ を fix する。$t(C) = (\circ f)(C)$ を示せばよい (この型は $\hom(A, C) \to \hom(B, C)$ になっている)。関手 $\hom(A, ?), \hom(B, ?)$ は圏 $\mathbb{C}$ から **Set** への関手なので、射は関数になっている。したがって、外延的に等価性を示せる。$g\colon A \to C$ を $\mathbf{Ar}(\mathbb{C})$ から fix する。$t(C)(g) = (\circ f)(C)(g)$ を示せばよい。g に t の naturality を使うと、
$$\begin{array}{c} A \\ \downarrow g \\ C \end{array} \qquad \begin{tikzcd} \hom(A, A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "g\circ"] & \hom(B, A) \arrow[d, "g\circ"] \\ \hom(A, C) \arrow[r, "t_C"] & \hom(B, C) \end{tikzcd}$$
を得る。
$$t_C(g) = t_C((g\circ ?)(\mathrm{id}_A)) \overset{\boxed{\text{comm}}}{=} (g\circ ?)t_A(\mathrm{id}_A) \overset{\boxed{f\ \text{の定義}}}{=} (g\circ ?)f = g \circ f = (\circ f)g. \tag{7}$$
g の fix を外し、$t_C = (\circ f) = (\circ f)(C)$ となる。よって、$t = (\circ f)$ となる。示された。
- (Definition 57; equivalent) 圏 $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ が equivalent ってであるとは、関手 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}, G\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ があり、$G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{C}},\ F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ となる。

4.3 Functor Categories

5 Universality and Adjoints

5.1 Adjunctions for Posets

- (g-approximation of x): $x \in P$ とする。P, Q を Poset の圏の object(つまり poset) とする。$g\colon Q \to P$ を poset 準同型とする。$x \leq g(y)$ となる $y \in Q$ を x の g-approximation という。

- (best g-approximation of x): $y \in Q$ で

$$x \le g(y) \wedge (x \le g(z) \implies y \le z) \tag{8}$$

- g が全射であり、したがって常に g-approximation があるとしても best なものがあるとは限らない。これが canonical choice の問題になる。
- (poset の left adjoint): もしも全ての $x \in P$ についてその best g-approximation があるなら、それでもって $f\colon P \to Q$ を定義できる。この f を g の left adjoint という。このとき、

$$x \le g(z) \iff f(x) \le z \tag{9}$$

  となっている。
- (binary relation の left adjoint): 二項関係の圏をかんがえる。$R \subset X \times Y$ とする。

$$f_R\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), \quad S \mapsto \bigcup_{x \in S, xRy} y \tag{10}$$

  f_R は right adjoint $[R]\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ は $S, T \subset \mathcal{P}(Y)$ としておいて、

$$S \subset [R]T \iff f_R(S) \subset T \tag{11}$$

  をみたしてほしいが、これは

$$[R]T := \{x \in X; xRy \implies y \in T\} \tag{12}$$

  である。
- (powerset の left adjoint): $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to (X)$ を考えることができるが、left adjoint$\exists(f)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ と right adjoint$\forall(f)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ 、すなわち $S \subset X, T \subset Y$ について、

$$\exists(f)(S) \subset T \iff S \subset f^{-1}(T), \quad f^{-1}(T) \subset S \iff T \subset \forall(f)(S). \tag{13}$$

  これは、$\exists(f)$ を S の像とし、$\forall(f)(S)$ を「y に行く x は全部 S 上」となるような y たちとする。つまり、$x \in S$ から f で飛ばした先の点 $f(x)$ が、S の外から来てはいけない。

5.2 Universal Arrows and Adjoints

- (Definition 64:universal arrow) $G\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ を functor とする。$C \in \mathbf{Ob}(\mathbb{C})$ から G への universal arrow とは、$(D \in \mathbf{Ob}(\mathbb{D}), \eta \in \hom_{\mathbb{C}}(C, G(D)))$ の組で、

$$^\forall D' \in \mathbf{Ob}(\mathbb{D})\colon\ ^\forall f\colon C \to G(D')\colon \quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & G(D) \arrow[d, dotted, "G(\widehat{f})"] & D \arrow[d, dotted, "\widehat{f}"] \\ & G(D') & D' \end{tikzcd}$$

  をみたすもの。
  一意性の条件は式で

$$^\forall h\colon D \to D'\colon\ G\widehat{(D \circ \eta)} = h \tag{14}$$

  ともあらわせる。∵$h\colon D \to D'$ で、$f = G(D) \circ \eta$ なら $\widehat{f} = h$ であることを示せばよいが、ハットのなかを置き換えて、これは $G\widehat{(D) \circ} \eta = h$ である。
- U を monoid から集合への forget する関手とする。このとき、X から U への universal arrow として、$(\mathbf{MList}(X), \eta_X)$ がとれる。ただし、$\eta_X\colon X \to U(\mathbf{MList}(X))$ は 1 要素リストの生成。∵任意の集合圏での関数 $f\colon X \to M$ について

$$\widehat{f}\colon \mathbf{MList}(X) \to (M, \bullet, 1), \quad [x_1, \ldots, x_n] \mapsto f(x_1) \ldots f(x_n) \tag{15}$$

Setの話 **Monの話**

が存在して、これが
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & U(\mathbf{MList}(X)) \arrow[d, dotted, "U(\widehat{f})"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{MList}(X) \arrow[d, dotted, "\widehat{f}"] \\ (M, \bullet, 1) \end{tikzcd}$$
の条件をみたす。実際、

$$(U(\widehat{f}) \circ \eta_X)(x) = U(\widehat{f})([x]) = f(x) \tag{16}$$

である。一意性は、上の条件より $\widehat{U(h) \circ \eta_X} = h$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} \widehat{U(h) \circ \eta_X}([x_1, \ldots, x_n]) &= (U(h) \circ \eta_X)(x_1) \cdot \cdots \cdot (U(h) \circ \eta_X)(x_n) && (17) \\ &= U(h)([x_1]) \cdot \cdots \cdot U(h)([x_n]) && (18) \\ &= h([x_1]) \ldots h([x_n]) && (19) \\ &= h([x_1, \ldots, x_n]). && (20) \end{aligned}$$

- (Definition 68:adjunction,adjoint) $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ を圏とする。$\mathbb{C}$ から $\mathbb{D}$ への adjunction は
  - F:$\mathbb{C}$ から $\mathbb{D}$ への functor
  - G:$\mathbb{D}$ から $\mathbb{C}$ への functor
  - θ: $\mathbb{C}$ の objectA, B で添字付けられた bijection の family

$$\theta_{A,B} : \mathbb{C}(A, G(B)) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{D}(F(A), B) \tag{21}$$

  で、A を run したとき自然になり、B を run したとき自然になるもの。
  - F を G の left adjoint といい、G を F の right adjoint という。
- 上の 2 つの自然性について考えてみる。まず、A を固定し B を走らせたときの naturality は
$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "h"] & \mathbb{C}(A, GB) \arrow[r, "\theta_{AB}"] \arrow[d, "(Gh)\circ"] & \mathbb{D}(FA, B) \arrow[d, "h\circ"] \\ B' & \mathbb{C}(A, GB') \arrow[r, "\theta_{AB'}"] & \mathbb{D}(FA, B') \end{tikzcd}$$
となる。
- 一方、B を固定し A を走らせたときの naturality は
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[d, "g"] & \mathbb{C}(A', GB) \arrow[r, "\theta_{A'B}"] & \mathbb{D}(FA', B) \\ A & \mathbb{C}(A, GB) \arrow[r, "\theta_{AB}"] \arrow[u, "\circ g"] & \mathbb{D}(FA, B) \arrow[u, "\circ(Fg)"'] \end{tikzcd}$$
となる。
- 上 2 つをくっつけると、
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[d, "g"] & & \mathbb{C}(A', GB) \arrow[r, "\theta_{A'B}"] & \mathbb{D}(FA', B) \\ A & B \arrow[d, "h"] & \mathbb{C}(A, GB) \arrow[r, "\theta_{AB}"] \arrow[u, "\circ g"] \arrow[d, "(Gh)\circ"] & \mathbb{D}(FA, B) \arrow[u, "\circ(Fg)"'] \arrow[d, "h\circ"] \\ & B' & \mathbb{C}(A, GB') \arrow[r] & \mathbb{D}(FA, B') \end{tikzcd}$$
となる。これが naturality の意味になる。さらに、B を固定し A を走らせたときの図式で B' を固定した図式を考えくっつけると、
$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "h"] & & \mathbb{C}(A, GB) \arrow[r, "\theta_{AB}"] \arrow[d, "(Gh)\circ"] & \mathbb{D}(FA, B) \arrow[d, "h\circ"] \\ B' & A & \mathbb{C}(A, GB') \arrow[r, "\theta_{AB'}"] \arrow[d, "\circ g"] & \mathbb{D}(FA, B') \arrow[d, "\circ(Fg)"] \\ & A' \arrow[u, "g"] & \mathbb{C}(A', GB') \arrow[r, "\theta_{A'B'}"] & \mathbb{D}(FA', B') \end{tikzcd}$$
を得る。

中間を引っこ抜くと、
$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "h"] & A & \mathbb{C}(A, GB) \arrow[r, "\theta_{AB}"] \arrow[d, "(Gh)\circ?\circ g"] & \mathbb{D}(FA, B) \arrow[d, "h\circ?\circ(Fg)"] \\ B' & A' \arrow[u, "g"] & \mathbb{C}(A', GB') \arrow[r, "\theta_{A'B'}"] & \mathbb{D}(FA', B') \end{tikzcd}$$
を得る。これは f, g を id にした

りすることで上の式をすべて包含する。