グレブナ基底と代数多様体入門 (Ideals, Varieties, and Algorithms)

ashiato45 のメモ，著者は D.Cox, J.Little, D.O'Shea

2015 年 4 月 19 日

1　幾何，代数，アルゴリズム

2　グレブナ基底

3　消去理論

3.1　消去および拡張定理

グレブナ基底を lex 順序で計算すると、変数の消去が起こることをみた。このことを示す。そのために、「消去イデアル」を定義する。$k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアル I について、「I の l 次の消去イデアル I_l」を $I_l := I \cap k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ と定める。これが $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルになっていることを示す必要はある。

証明
I は $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルであり、$k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ は $k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ のイデアルなので、イデアルの交わりがイデアルになることは使えない。個別にイデアルの条件を示す必要がある。

- 和で閉じる: $f, g \in I_l$ とする。$f, g \in I$ なので、$f + g \in I$ となる。また、$f, g \in k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ なので、$f + g \in k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ となっている。よって、$f + g \in (I \cap k[x_{l+1}, \ldots, x_n]) = I_l$ となっている。
- 積で飲み込む:$f \in I_l$ とし、$g \in k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ とする。$gf \in I_l$ であることを示す。$f \in k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ なので、$gf \in k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ となっている。また、I がイデアルであり $f \in I$ なので、$gf \in I$ となっている。よって、$gf \in I_l$ となっている。

(証終) さらに、l 次の消去イデアル I_l の 1 次の消去イデアル $(I_l)_1$ は I の $l+1$ 次の消去イデアル I_{l+1} になっている:$(I_l)_1 = I_{l+1}$ である。

証明
$I_l = I \cap k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ であり、$I_{l+1} = I \cap k[x_{l+2}, \ldots, x_n]$ であり、$(I_l)_1 = I_l \cap k[x_{l+2}, \ldots, x_n]$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
(I_l)_1 &= I_l \cap k[x_{l+2}, \ldots, x_n] && (1)\\
&= (I \cap k[x_{l+1}, \ldots, x_n]) \cap k[x_{l+2}, \ldots, x_n] && (2)\\
&= I \cap k[x_{l+1}, \ldots, x_n] && (3)\\
&= I_l. && (4)
\end{aligned}
$$

示された。

(証終) つまり、高次の消去イデアルを考えたいときには、1 次ずつ消去イデアルを計算すればよいことがわかった。

消去イデアルはその定義から、イデアル I のうち文字を消したもののあつまりであり、G を I の基底とするなら、この G をたしひきかけ算して文字を消したもののあつまりとなっている。$\mathbf{V}(I)$ を考えると、これに属する点は I の式を 0 にしなくてはならず、特に I_l の式を 0 にしなくてはならない。これは、$\mathbf{V}(I)$ に点が属するには $k[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ のなかではどうでなければならないかという必要条件を与える。I_l の式を 0 にするときを考えるには I_l の基底がわかっていれば必要十分なので、I_l の基底を求める方法を知りたいが、これには Groebner 基底が便利である。次のことが言え

る。これを消去定理とよぶ。「G を $I \subset k[x_1,\dots,x_n]$ の lex 順序での Groebner 基底とすると、$G \cap k[x_{l+1},\dots,x_n]$ は I_l の Groebner 基底となる。」

証明

$G \cap k[x_{l+1},\dots,x_n] \subset I_l$ なので、$\langle \mathrm{LT}(G \cap k[x_{l+1},\dots,x_n]) \rangle = \langle \mathrm{LT}(I_l) \rangle$ となることを示せばよい。この $\subset$ は、$G \cap k[x_{l+1},\dots,x_n] \subset I_l$ は自明なので、生成元 $\mathrm{LT}(I_l)$ が $\langle \mathrm{LT}(G \cap k[x_{l+1},\dots,x_n]) \rangle$ に包まれることを示せばよい。$f \in I$ なので、$\mathrm{LT}(f) \in \mathrm{LT}(I) \subset \langle \mathrm{LT}(I) \rangle = \langle \mathrm{LT}(g_1),\dots,\mathrm{LT}(g_s) \rangle$ となっていて、$\mathrm{LT}(g_i)|\mathrm{LT}(f)$ となる i が存在する。示したいのは $\mathrm{LT}(f)$ が $\mathrm{LT}(G \cap k[x_{l+1},\dots,x_n])$ のどれかで割り切れることであり、$\mathrm{LT}(G)$ である $\mathrm{LT}(g_i)$ で割り切れることは示したので、あとは $g_i \in k[x_{l+1},\dots,x_n]$ を示せばよい。

$f \in k[x_{l+1},\dots,x_n]$ なので、$\mathrm{LT}(f) \in k[x_{l+1},\dots,x_n]$ である。多項式順序の性質から、$\mathrm{LT}(g_i) \le \mathrm{LT}(f)$ であり、いまは lex 順序を採用しているので、$\mathrm{LT}(g_i) \in k[x_{l+1},\dots,x_n]$ となる。さらに lex 順序を採用しているので、$g_i \in k[x_{l+1},\dots,x_n]$ となり、$g_i \in G \cap k[x_{l+1},\dots,x_n]$ となる。よって、$g_i \in G \cap k[x_{l+1},\dots,x_n]$ であり、$\mathrm{LT}(g_i)|\mathrm{LT}(f)$ であり、$\mathrm{LT}(f) \in \langle \mathrm{LT}(G \cap k[x_{l+1},\dots,x_n]) \rangle$ となっている。

(証終) これで消去のほうは議論できた。あとは後退代入に相当するところを考える。

文字を消した結果の式を満たすことは、多様体に点が属することの必要条件でしかない。それを満たす点のことを部分解という。つまり、「$(a_{l+1},\dots,a_n) \in k[x_{l+1},\dots,x_n]$ が $\mathbf{V}(I)$ の部分解である」とは、「$(a_{l+1},\dots,a_n) \in \mathbf{V}(I_l)$ となる」ことである。したがって、多様体に属するように整合性が取れるように他の点が取れるかどうかは分からない。そのような拡張ができるための十分条件として、次の拡張定理がある。「体は $k = \mathbb{C}$ で考えることにする。$(a_2,\dots,a_n) \in \mathbf{V}(I_1)$ を部分解とする。I の Groebner 基底を G とする。$k[x_1,\dots,x_n]$ の多項式について、その多項式を $(\mathbb{C}[x_2,\dots,x_n])[x_1]$ の元、すなわち x_1 だけを不定元とみなした多項式とみなしたときの最高次の係数を LC' とよぶことにする。ただし、$\mathrm{LC}'(0)$ は考えないことにする。この条件のもとで、

$$(a_2,\dots,a_n) \notin \mathbf{V}(\mathrm{LC}'(G)) \implies (a_1,a_2,\dots,a_n) \in \mathbf{V}(I)\text{となる}a_1(\in \mathbb{C})\text{が存在する} \tag{5}$$

となる。証明は後の節でやる。先に、$(I_l)_1 = I_{l+1}$ であることは示したので、必要なら繰り返し使えばよい。

ここで、2 つの特徴的な条件がある。

- 体を $\mathbb{C}$ にしていること:$x^2 = z$, $x^2 = y$ を $\mathbb{R}$ 上で考えて先の定義をナイーブに適用すると、x を消去した $y = z$ 上、つまり (a,a) は、$\mathbf{V}(\mathrm{LC}'(x^2 - z), \mathrm{LC}'(x^2 - y)) = \mathbf{V}(1,1) = \emptyset$ に入らない限り、つまりいつでも拡張できるということになるが、実際は $a \ge 0$ のときだけ拡張できる。
- $(a_2,\dots,a_n) \notin \mathbf{V}(\mathrm{LC}'(G))$ としていること: $xy = 1$, $xz = 1$ を考える。

  - $xy + (-1)$
  - $xz + (-1)$

  .
  $\overline{S(xy + (-1), xz + (-1))} = y + (-1)z$.
  Not enough. Appends
  - $y + (-1)z$

  .
  $\overline{S(xy + (-1), y + (-1)z)} = 0$.
  $\overline{S(xz + (-1), y + (-1)z)} = 0$.
  Enough for groebner basis. Result is
  - $xy + (-1)$
  - $xz + (-1)$
  - $y + (-1)z$

  . ■ Minimalizes groebner basis
  - $xy + (-1)$
  - $xz + (-1)$
  - $y + (-1)z$

  .
  $xy + (-1)$ is removed by $y + (-1)z$.
  Minimalized groebner basis is
  - $xz + (-1)$
  - $y + (-1)z$

  . ■
  Reduce groebner basis
  - $xz + (-1)$
  - $y + (-1)z$

  .
  Reducing: $\overline{xz + (-1)} = xz + (-1)$.
  Reducing: $\overline{y + (-1)z} = y + (-1)z$.
  Reduced groebner basis is
  - $y + (-1)z$
  - $xz + (-1)$

  . ■

  という計算で、この Groebner 基底が $y - z$, $xz - 1$ である。よって、$I_1 = \langle y - z \rangle$ である。よって、$\mathbf{V}(I_1) = \{(a,a); a \in \mathbb{C}\}$ となる。よって、これをナイーブに拡張すると、$(1/a, a, a)$ となる。

ここで先の条件を考えてみる。$\mathrm{LC}'(xz-1)=z$ なので、拡張できるための十分条件として $(a,a)\notin \mathbf{V}(z)$ が得られる。つまり、拡張できないかもしれない場合というのは、$(a,a)\in\mathbf{V}(z)$ になる。このときというのは、$a=0$ のときである。このときは実際、$1/a$ が考えられない。また図を考えて、$y=z,\ xz=1$ というときを考える。これは、平面 $y=z$ と双曲線 $xz=1$ を y 方向に延ばしたやつの共有点全体だが、この点のうち $z=0$ となっているものはあきらかに存在しない。

$\mathrm{LC}'(g_1),\ldots,\mathrm{LC}'(g_s)$ のうち定数があったときはあきらかに $\mathbf{V}(\mathrm{LC}'(g_1),\ldots,\mathrm{LC}'(g_s))=\emptyset$ となるので、部分解全体が拡張できることが保証される。つまり、系として「体は $k=\mathbb{C}$ とする。部分解 $(a_2,\ldots,a_n)\in\mathbf{V}(I_1)$ があったとする。さらに、G を I の Groebner 基底とし、$\mathrm{LC}'(G)$ のうち (当然非 0 の) 定数があったとすると、部分解 $(a_2,\ldots,a_n)$ は常に $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbf{V}(I)$ に拡張できる。」が得られる。仮に $g_1,\ldots,g_s$ に定数があったとすると、元の $\langle I\rangle$ が全体集合になり、$\mathbf{V}(I)$ は空集合になる。このときは、拡張もなにもなくなってしまうので自明に正しい。また、仮に $g_1,\ldots,g_s$ に 0 があったとすると、そのような 0 は外しておけばよいので考える必要がない。このときは LC' を考えることができなくなってしまう。

3.2 消去の幾何

頭 l 個落とす写像 $\pi_l\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^{n-l}$ を射影写像 (projection map) という。すると、消去イデアルとについて、次の関係がある。「$f_\bullet\in k[x_1,\ldots,x_n]$ とする。

$$\pi_l(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))\subset\mathbf{V}(\langle f_1,\ldots,f_s\rangle_l) \tag{6}$$

となる。言い換えるなら、多様体の (l 次の) 射影は (l 次の) 部分解に包まれる。」

証明
$(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ とする。$f_\bullet(a_1,\ldots,a_n)=0$ となっている。$\pi_l(a_1,\ldots,a_n)=(a_{l+1},\ldots,a_n)$ である。

一般に、$f\in k[x_{l+1},\ldots,x_n]$ のとき、これを $f\in k[x_1,\ldots,x_n]$ とみなすと、$f(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ は $\xi_1,\ldots,\xi_l$ の値に依存せず、$\xi_{l+1},\ldots,\xi_n$ の値のみによって定まる。これは、$f\in k[x_1,\ldots,x_n]$ ではあるが、$k[x_{l+1},\ldots,x_n]$ からの埋め込みだったので、式のなかに $x_1,\ldots,x_n$ の文字があらわれず、これらに対応する値 $\xi_1,\ldots,\xi_l$ に値が依存しないからである。よって、$f(\pi(\xi_1,\ldots,\xi_n))$ と π_l による同値類で定めれば、これは well-defined である。

$f\in\langle f_1,\ldots,f_s\rangle_l$ とする。$f\in k[x_{l+1},\ldots,x_n]$ なので、先の考察より f のとる値は π_l の同値類で定まり、

$$f(a_{l+1},\ldots,a_n)=f(\pi_l(a_1,\ldots,a_n))=f(0,\ldots,0,a_{l+1},\ldots,a_n) \tag{7}$$

である。また、$f\in\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ なので、$f=\sum_i h_if_i$ となる $h_\bullet\in k[x_1,\ldots,x_n]$ が存在し、

$$\begin{aligned} f(a_{l+1},\ldots,a_n) &\overset{\boxed{\text{頭 } l \text{ 個はなんでもいい (well-defined)}}}{=} f(a_1,\ldots,a_n) && (8)\\ &=\sum_{i=1}^{s}h_i(a_1,\ldots,a_n)\underbrace{f_i(a_1,\ldots,a_n)}_{=0,\ \text{はじめの設定}} && (9)\\ &=0. && (10)\end{aligned}$$

(証終) 言い換えるなら、多様体の射影は、部分解のうち拡張できるもの全体に一致する (そりゃそうだ、射影が部分解をはみ出ることがないというほうが重要情報っぽい。)。例えば、$(y=z,xy=1)$ を考えると、これの射影 $\pi_1(\mathbf{V}(y-z,xy-1))$ は $\{(a,a);a\neq0\}$ であり、消去イデアルのなす多様体は $\mathbf{V}(\langle y-z\rangle)$ になって、$\{(a,a)\}$ になる。

ただし、多様体の射影がかならず多様体になるとは限らない。実際先の例だと、$\pi_1(\mathbf{V}(y-z,xy-1))=\{(a,a);a\neq0\}$ であり、これは多様体でない。この状況を考えるために、次の分解を用意しておく。「$f_1,\ldots,f_s\in k[x_1,\ldots,x_n]$ について、

$$\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)=\pi_1(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))\cup(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)\cap\mathbf{V}(\mathrm{LC}'(f_1),\ldots,\mathrm{LC}'(f_s))). \tag{11}$$

となる。」

証明

- $\supset$: $a=(a_1,\ldots,a_n)$ とする。$a\in\pi_1(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))$ のときは、先の「多様体の射影は部分解に含まれる」より、$a\in\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ となる。$a\in\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)\cap\mathbf{V}(\mathrm{LC}'(f_1),\ldots,\mathrm{LC}'(f_s))$ のときは自明に $a\in\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ となる。
- $\subset$: $a\in\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ とする。$a\notin\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)\cap\mathbf{V}(\mathrm{LC}'(f_1),\ldots,\mathrm{LC}'(f_s))$ であるとする。このときは、$a\in\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ なので、$a\notin\mathbf{V}(\mathrm{LC}'(f_1),\ldots,\mathrm{LC}'(f_s))$ なので、先の拡張定理により $a\in\pi_1(f_1,\ldots,f_s)$ となる。

(証終)

正確に多様体の射影と部分解との関係を記述するものとして、閉包定理がある:「$f_1,\ldots,f_s\in k[x_1,\ldots,x_n]$ として、

(a) $\pi_l(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))$ を包む最小の多様体は $\mathbf{V}(\langle f_1,\ldots,f_s\rangle_l)$ である。

(b) $\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)\neq\emptyset$ とする。$\pi_l(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))$ は、多様体 $\mathbf{V}(\langle f_1,\ldots,f_s\rangle_l)$ から、これに真に包まれる多様体 W を削ったものを包む:

$$^{\exists}W(:\text{ 多様体}, \subsetneq \mathbf{V}(\langle f_1,\ldots,f_s\rangle_l))\colon\ \underbrace{\mathbf{V}(\langle f_1,\ldots,f_s\rangle_l)-W}_{\neq\emptyset}\subset\pi_l(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)) \tag{12}$$

となる。

」

証明

(b) の $l=1$ のときだけを証明する。$\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ に関して、条件を満たす、この多様体に真に含まれる多様体を探す。

Algorithm 1 削る多様体を探す

```
1:  list ⇐ [f_1, ..., f_s]
2:  stop ⇐ false
3:  while stop = false do
4:    if list ⊂ k[x_2, ..., x_n] then
5:      stop ⇐ true
6:      W ⇐ ∅
7:    else
8:      W ⇐ V(⟨list⟩_1) ∩ V(LC′(list))
9:      if V(⟨list⟩_1) − W ≠ ∅ then
10:       stop ⇐ true
11:     else
12:       list ⇐ [x ↦ x − LT′(x)](list) + LC′(list)
13:     end if
14:   end if
15: end while
```

ただし、LT' は、$k[x_2,\ldots,x_n][x_1]$ とみなしたときの先頭項とする。

- アルゴリズムは停止する: L.3 の停止条件から、L.3〜L.15 のループが 1 回実行されるごとに、必ず L.12 が実行される。この行について、$[x\mapsto x-\mathrm{LT}'(x)](list)$ は、$k[x_2,\ldots,x_n][x_1]$ での先頭項を消しており、$\mathrm{LC}'(list)\subset k[x_2,\ldots,x_n]$ なので、$list$ の最高の ($k[x_2,\ldots,x_n][x_1]$ での) 次数は、0 より大きければ真に減少する。
このことから、$list$ の次数はあるところで 0 に到達する。つまり、$list$ の元がどれも $k[x_2,\ldots,x_n]$ に属することになる。すると、その次のループのなかで、L.4 の条件が真となり、L.5 で $stop=true$ となるので、L.4 の停止条件を満たすようになり、アルゴリズムは停止する。

- $\mathbf{V}(list)$ は変わらない: $list$ が変化するのは L.12 でのみであり、このときには、
  (a) $list_b \not\subset k[x_2, \ldots, x_n]$
  (b) $W_a = \mathbf{V}(\langle list_b \rangle_1) \cap \mathbf{V}(\mathrm{LC}'(list_b))$
  (c) $\mathbf{V}(\langle list_b \rangle_1) - W_a = \emptyset$
  (d) $list_a = [x \mapsto x - \mathrm{LT}'(x)](list_b) + \mathrm{LC}'(list_b)$
  となっている。
  まず、$\mathbf{V}(list_b) = \mathbf{V}(list_b + \mathrm{LC}'(list_b))$ を示す。(b),(c) より、
  $$\mathbf{V}(\langle list_b \rangle_1) \subset W_a = \mathbf{V}(\langle list_b \rangle_1) \cap \mathbf{V}(\mathrm{LC}'(list_b)) \subset \mathbf{V}(\mathrm{LC}'(list_b)) \tag{13}$$
  $\langle list_b \rangle \supset \langle list_b \rangle_1$ なので、$\mathbf{V}(list_b) \subset \mathbf{V}(\langle list_b \rangle_1)$ である。よって、
  $$\mathbf{V}(list_b) \subset \mathbf{V}(\mathrm{LC}'(list_b)) \tag{14}$$
  である。よって、
  $$\mathbf{V}(list_b) = \mathbf{V}(\mathrm{LC}'(list_b)) \cap \mathbf{V}(list_b) = \mathbf{V}(\mathrm{LC}'(list_b) + list_b) \tag{15}$$
  である。
  そして、
  $$\left\langle \mathrm{LC}'(list_b) + list_b \right\rangle = \left\langle \mathrm{LC}'(list_b) + ([x \mapsto x - \mathrm{LT}'(x)](list_b)) \right\rangle = \langle list_a \rangle \tag{16}$$
  なので、
  $$\mathbf{V}(list_a) = \mathbf{V}(\mathrm{LC}'(list_b) + list_b) = \mathbf{V}(list_b) \tag{17}$$
  である。
- $\pi_1(\mathbf{V}(list))$ は変わらない: $\mathbf{V}(list)$ が変わらないことから直ちに従う。
- $\mathbf{V}(\langle list \rangle_1)$ は変わらない: $list$ が変化する、すなわち L.12 が実行されるときを考えればよく、「$\mathbf{V}(list)$ は変わらない」の状況と同じとしてよい。閉包定理より、$\mathbf{V}(\langle list_a \rangle_1)$ は $\pi_1(\mathbf{V}(list_a))$ を包む最小の多様体である。また、$\mathbf{V}(list_b)$ は $\pi_1(\mathbf{V}(list_b))$ を包む最小の多様体である。しかし、先に示したことより、「$\pi_1(\mathbf{V}(list))$ は変わらない」ので、$\pi_1(\mathbf{V}(list_b)) = \pi_1(\mathbf{V}(list_a))$ である。よって、$\mathbf{V}(\langle list_a \rangle_1)$ も $\mathbf{V}(\langle list_b \rangle_1)$ も同じ多様体 $\pi_1(\mathbf{V}(list_b)) = \pi_1(\mathbf{V}(list_a))$ を包む最小の多様体なので、
  $$\mathbf{V}(\langle list_a \rangle_1) = \mathbf{V}(\langle list_b \rangle_1) \tag{18}$$
  である。
- 停止時点で、$W \subsetneq \mathbf{V}(\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_1)$ となり、W は多様体である。
  - 停止直前に実行されたのが L.5 である: このとき $W = \emptyset$ なのであきらか。
  - 停止直前に実行されたのが L.10 である: このとき $W = \mathbf{V}(\langle list \rangle_1) \cap \mathbf{V}(\mathrm{LC}'(list))$ なので、多様体ではある。
    さらに、W のこの式より、$W \subset \mathbf{V}(\langle list \rangle_1)$ であることも保証される。
    最後に、$W \neq \mathbf{V}(\langle list \rangle_1)$ であることを示せばよいが、そうだとすると L.9 の条件が通過できず矛盾する。
- 停止時点で、W は $\mathbf{V}(\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_1) - W \subset \pi_1(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s))$ となる。
  - 停止直前に実行されたのが L.5 であるとき: $list \subset k[x_2, \ldots, x_n]$ となっている。よって、$\langle list \rangle_1 = \langle list \rangle$ となる。よって、$\mathbf{V}(list)$ は x_1 を使わずに定義されていることわかり、どの部分解 $\mathbf{V}(\langle list \rangle_1)$ も、拡張できること、すなわち $\mathbf{V}(\langle list \rangle_1) = \pi_1(\langle list \rangle)$ がわかる。これまで示してきた不変より、
    $$\begin{aligned} \mathbf{V}(\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_1) - W &= \mathbf{V}(\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_1) - W && (19) \\ &= \mathbf{V}(\langle list \rangle_1) - W && (20) \\ &= \mathbf{V}(\langle list \rangle_1) && (21) \\ &= \pi_1(\mathbf{V}(list)) && (22) \\ &= \pi_1(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)). && (23) \end{aligned}$$
    また、W はあきらかに $\mathbf{V}(\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_1)$ に含まれる多様体であり、満たされた。

– 停止直前が L.10 のとき: $list$ に関して、部分解の分解を考えると、$W = \mathbf{V}(\langle list \rangle_1) \cap \mathbf{V}(\mathrm{LC}'(list))$ となるから、

$$\mathbf{V}(\langle list \rangle_1) = \pi_1(\mathbf{V}(list)) \cup W \tag{24}$$

となる。よって、$\mathbf{V}(\langle list \rangle_1) - W \subset \pi_1(\mathbf{V}(list))$ となる。これまで示してきたことより、

$$\mathbf{V}(\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_1) - W = \mathbf{V}(\langle list \rangle_1) - W \tag{25}$$
$$\subset \pi_1(\mathbf{V}(list)) \tag{26}$$
$$= \pi_1(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)). \tag{27}$$

(証終) (a) は射影を多様体で上から抑え、(b) は多様体の差で下から抑えている。

この定理だと $\pi_1(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s))$ が正確にどういう形をしているかは分からない。実は

$$\pi_1(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)) = \bigcup_{i=1}^{t} (A_i - B_i) \tag{28}$$

となる多様体 A_i, B_i が存在する、つまり多様体の射影は多様体の差の和で書けることがわかり、このような (？) 集合を構成可能という。あとでやる。

この節で π の記号を整備して、先の節での系を幾何学的に言い直すことができる。すなわち:「$\mathbf{V}(g_1, \ldots, g_s)$ について、$\mathrm{LC}'(g_1), \ldots, \mathrm{LC}'(g_s)$ のうちで定数 (当然非 0) があるならば、$\pi_1(\mathbf{V}(g_1, \ldots, g_s)) = \mathbf{V}(\langle g_1, \ldots, g_s \rangle_1)$ となる。」 $g_1, \ldots, g_s$ のうち 0 があるような場面は、その 0 を外しておけるので考える必要がない。このときは LC' を考えることができなくなってしまう。また、そもそも非 0 の定数があったときには、多様体は空集合をあらわすようになる。このときは射影しても空でありやはり成立している。