IとV

グレブナ基底と代数多様体入門 (Ideals, Varieties, and Algorithms)

ashiato45 のメモ，著者は D.Cox, J.Little, D.O'Shea

2015 年 9 月 14 日

1　幾何，代数，アルゴリズム

2　グレブナ基底

3　消去理論

4　代数と幾何の対応

5　多様体上の多項式関数と有理関数

6　ロボティクスの幾何の定理の自動証明

7　有限群の不変式論

8　射影代数幾何

8.1　射影平面

8.2　射影空間と射影多様体

8.3　射影化された代数-幾何対応

8.3.1　定理 2:斉次イデアルの特徴付け

イデアルについて、以下同値。

(i) I は $k[x_0, \ldots, x_n]$ の斉次イデアル
(ii) 斉次多項式 $f_\bullet$ を用いて $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$
(iii) 任意の多項式順序について、I の簡約グレブナ基底は斉次多項式からなる。

$\because$斉次多項式で生成される $\Longrightarrow$ 斉次イデアル: イデアルから f をとって、

$$\sum_d \underbrace{g_d}_{d\text{次}} = f = \sum_i c_i f_i \tag{1}$$

と 2 通りに分解して、右側の c_i も分解して比べる。

$\because$斉次イデアル $\Longrightarrow$ 斉次多項式で生成される: イデアル I をヒルベルトの基底定理で $I =\geq F_1, \ldots, f_t$ と書いて、各 F_i を分解すると、それらで生成されるイデアルが I と一致する。

$\because$斉次多項式で生成される $\Longrightarrow$ 簡約グレブナ基底は斉次多項式からなる: 斉次多項式で生成されるので、これにブッフベルガーをかますと、斉次多項式からなるグレブナ基底は得られる。割り算アルゴリズムを考えると、簡約化で余りを取るステップでも斉次であることが保たれる。

8.3.2 命題 3:イデアルで生成される射影多様体

$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$

∵

$$\mathbf{V}(\langle f_1, \dots, f_s \rangle) = \left\{ \text{どの } \langle f_1, \dots, f_s \rangle \text{ でも消える点} \right\} = \left\{ \text{どの} f_1, \dots, f_s \text{でも消える点} \right\} = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s). \tag{2}$$

8.3.3 命題 4: 射影多様体からイデアル

$$\mathbf{I}(V) = \left\{ V \text{を消す関数} \right\} \tag{3}$$

とすると、k を無限体とすると $\mathbf{I}(V)$ は斉次イデアルとなり、$\mathbf{I}$: $\left\{\text{射影多様体}\right\} \to \left\{\text{斉次イデアル}\right\}$ が定義される。

∵: 斉次を示す。$\mathbf{I}(V)$ から元をとって f としておく。

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \sum_i \lambda^i f_i(a_0, \dots, a_n) \tag{4}$$

を λ についての方程式と見ると、無限体なので各 $f_i(a_0, \dots, a_n) = 0$ になって、各斉次成分 f_i も $\mathbf{I}(V)$ に属す。

8.3.4 定理 5: イデアルをとることの単射性

k を無限体とすると、$\mathbf{I}, \mathbf{V}$ は逆転する。また、$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ となる。

- $\mathbf{I}$ の逆転: たくさんの点を消すには条件が少ないほうがいいのでイデアルは小さいほうがいい。
- $\mathbf{V}$ の逆転: 少しの関数だと沢山の点が消えるので逆転する。
- $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) \subset V$:

$$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = \mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))) \subset \mathbf{V}(I) = V. \tag{5}$$

- $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) \supset V$: I が消す点は、「I が消す点」を消す関数が消す点？

8.3.5 命題 7: 斉次イデアルのラジカルは斉次イデアル

$\sqrt{I}$ から元 f を選んで、$f = f_{max} + f'$ と書いたら、f^n の先頭項も f_{max}^n となる。あとはこれを引いて同じ操作を繰替えす。

8.3.6 定理 8: 射影幾何における弱系の零点定理

k を代数的兵隊として I を斉次イデアルとする。

∵$C_V = \mathbf{V}_a(I)$ を、I で定義されるアフィン多様体とする。(射影多様体のユークリッド空間での実現)

すべての x_i について、$x_i^{\text{何か}}$ が I のグレブナ基底に入っている $\implies$ $\mathbf{V}(I)$ は空: ∵グレブナ基底の条件を定理 6-3-6 に使えば、C_V が有限集合になる (lex なら簡単。)。$\mathbf{V}(I)$ に何か点があったとすると、その定数倍すべてが $\mathbf{V}(I)$ に属することになり、有限性に反する。

すべての x_i について、$x_i^{\text{何か}}$ が I に入っている $\implies$ すべての x_i について、$x_i^{\text{何か}}$ が I のグレブナ基底に入っている: ∵$x_i^m \in I$ とする。

$$x_i^m = \mathrm{LT}(x_i^m) \in \mathrm{LT}(I) \subset \langle LT(I) \rangle = \langle \mathrm{LT}(G) \rangle. \tag{6}$$

ある $r \geq 1$ について $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I \implies$ すべての $x_i^{\text{何か}} \in I$: ∵あきらか。

$\mathbf{V}(I)$ が空 $\implies$ ある $r \geq 1$ について $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$: ∵

$$\langle x_0, \dots, x_n \rangle = \mathbf{I}_a(0) \overset{\boxed{\text{空だから}}}{\subset} \mathbf{I}_a(C_V) \overset{\boxed{\text{零点定理}}}{=} \sqrt{I}. \tag{7}$$

8.3.7 定理 9: 射影幾何における強系の零点定理

$$\sqrt{I} \overset{\boxed{\text{零点定理}}}{=} \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I)) \overset{\boxed{\text{簡単}}}{=} \mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)). \tag{8}$$

8.3.8 定理 10: 射影多様体の I と V

8.4 アフィン多様体の射影完備化

8.4.1 定義 1: イデアルの斉次化

I を x_1 から x_n に対して、この斉次化を $I^h = \left\langle f^h; f \in I \right\rangle$ とする (こっちは x_0 があるかも)。

8.4.2 命題 2: 斉次化は斉次イデアル

$g \in \left\langle f^h; f \in I \right\rangle$ とする。

$$g = \sum_{i=1}^{N} F_i f_i^h = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j} F_{ij} \underbrace{f_{ij}^h}_{i\text{次のやつの}j\text{番目}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j} \underbrace{(\sum_{l} F_{ijl})}_{F_{ij}\text{の斉次分解}} f_{ij}^h = \sum_{d} \sum_{i+l=d} \sum_{j} \underbrace{F_{ijl}}_{i\text{次}} \underbrace{f_{ij}^h}_{l\text{次}} \tag{9}$$

8.4.3 定理 4: グレブナ基底の斉次化

I をイデアルとして、G を次数つき順序についてのグレブナ基底とすると、G^h は I^h の基底。

$\because$

- $x_1, \ldots, x_n$ を所与の順序を優先し、次に x_0 で評価する単項式順序 $>_h$ を考える。この順序で G^h がグレブナ基底であることを言えば十分。
- 条件として、$G^h \subset I^h$ と $\left\langle \mathrm{LT}(I^h) \right\rangle \subset \left\langle \mathrm{LT}(G^h) \right\rangle$ があるが、後者を示せばよい。
- $F \in I^h$ として、

$$\mathrm{LM}_{>_h}(F) = \mathrm{LM}_{>_h}(\underbrace{x_0^e}_{F\text{に吐かせた}e\text{全部}} \underbrace{f^h}_{\text{非斉次化の斉次化}}) = x_0^e \mathrm{LM}_{>_h}(f^h) = x_0^e \mathrm{LM}_{>}(\underbrace{f}_{\in I}) \nleftarrow \mathrm{LM}_{>}(\underbrace{g_i}_{\in G}) = \mathrm{LM}_{>_h}(g_i^h). \tag{10}$$

よりこれは従う。

8.4.4 定義 6

アフィン多様体 W について、W の射影完備化とは、$\overline{W} = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h)$ のこと。

8.4.5 命題 7

W をアフィン多様体とし、$\overline{W}$ を射影完備化とする。

(i)$\overline{W} \cap U_0 = \overline{W} \cap k^n = W$。$\because$ G を $\mathbf{I}_a(W)$ のグレブナ基底とする。

$$\begin{aligned}
\overline{W} \cap U_0 &= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \cap U_0 & (11)\\
&= \mathbf{V}(g^h; g \in G) \cap U_0 & (12)\\
&= \mathbf{V}(g^h; g \in G) \cap \mathbf{V}_a(x_0 = 1) & (13)\\
&= \mathbf{V}_a(g^h(1, x_1, \ldots, x_n); g \in G) & (14)\\
&\overset{\boxed{\text{斉次化して非斉次化している}}}{=} \mathbf{V}_a(g; g \in G) & (15)\\
&\overset{\boxed{\text{定義}}}{=} \mathbf{V}_a(\mathbf{I}_a(W)) & (16)\\
&= W. & (17)
\end{aligned}$$

(ii)$\overline{W}$ は W を含む最小の射影多様体。$\because W$ を含む射影多様体広いやつ V を考える。広いやつ V を構成する関数たちは V を消すので、もとのやつ W も消し、もとのやつ W はアフィンだったので広いやつ V を構成する関数たちの非斉次化ももとのやつ W を消す。よって、広いやつ V を構成する関数たちの非斉次化の斉次化は $\overline{W}$ を消す。関数はその非斉次化の斉次化の倍数なので、広いやつ V を構成する関数たちは $\overline{W}$ を消す。よって、広いやつ V は $\overline{W}$ を常に包むので、$\overline{W}$ が W を含むやつのうち最小。

8.5　射影的消去理論

8.6　2 次超曲面の幾何

8.6.1　命題 1: 射影同値

〜は簡単に示せる: f_i が d 次だとしてなんとかする。

平方完成の応用:本当に平方完成でよさそう