グレブナ基底と代数多様体入門 (Ideals, Varieties, and Algorithms)

ashiato45 のメモ，著者は D.Cox, J.Little, D.O'Shea

2015 年 7 月 12 日

1 幾何，代数，アルゴリズム

2 グレブナ基底

3 消去理論

4 代数と幾何の対応

5 多様体上の多項式関数と有理関数

6 ロボティクスの幾何の定理の自動証明

7 有限群の不変式論

8 射影代数幾何

8.1 射影平面

定義 1: $\mathbb{R}$ 上の射影平面 (projective plane) とは、$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ と表記される次の集合。

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \left\{\text{平行な直線からなる同値類ごとに1つの無限遠点}\right\}. \tag{1}$$

定義 2: $R^3 - \{0\}$ の $\sim$ による同値類の全体を $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ であらわす。つまり、

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 - \{0\})/\sim. \tag{2}$$

3 つ組 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ が $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ に対応するとき、(x, y, z) を p の斉次座標 (homogeneous coordinates) という。

定義 3: 同時にゼロではない実数 A, B, C が与えられたとき、次の集合

$$\left\{p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); p\text{の斉次座標}(x, y, z)\text{は}Ax + By + Cz = 0\text{を満たす}\right\} \tag{3}$$

を $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の射影直線とよぶ。これは well-defined であることは確認できる。

命題 4: $R^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \quad (x, y) \mapsto i(x, y, 1)$ は一対一であって、その像は $z = 0$ で定義される射影直線 H_∞ に一致する。

証明

1. $\forall p, x, y, x', y'$: (x, y) と (x', y') が同じ点 p にうつったとする。
2. $\exists \lambda \ (x, y, 1) = \lambda(x', y', 1)$
3. 上より、$\lambda = 1$ となる。
4. 上より、$(x, y) = (x', y')$ となる。
5. p の斉次座標を (x, y, z) とする。
6. $z = 0$ のとき、$p \in H_\infty$
7. $z \neq 0$ のとき、$\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ を標準的なものとする。$p = \pi(x, y, z) = \pi(x/z, y/z, 1)$ となり、$(x/z, y/z, 1)$ は p の斉次座標。
8. 上より、p は写像 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の像に ($(x/z, y/z)$ を引数として) なっている。
9. $\pi(\mathbb{R}^2) \cap H_\infty = \emptyset$ を示す。
   (a) $\exists$: $\pi(x, y, z) \in p(\mathbb{R}^2) \cap H_\infty$ と仮定する。
   (b) $\pi(x, y, z) \in H_\infty$ なので、$z = 0$ である。
   (c) $\pi(x, y, z) \in p(\mathbb{R}^2)$ なので、$\pi(x, y, z) = \pi(\xi, \eta, 1)$ なる ξ, η が存在する。よって、$z \neq 0$ である。
   (d) 上 2 つは矛盾する。

   よって、$\pi(\mathbb{R}^2) \cap H_\infty = \emptyset$ となる。

(証終)

8.2 射影空間と射影多様体

定義 1: $k^{n+1} - \{0\}$ の $\sim$ による同値類の集合を体 k 上の n 次元射影空間といい、$\mathbb{P}^n(k)$ とあらわす。つまり、

$$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1} - \{0\})/\sim \tag{4}$$

である。ゼロでないような $(n+1)$ 個の k の要素の組 $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1}$ は $\mathbb{P}^n(k)$ の点 p を決めるが、$(x_0, \ldots, x_n)$ を p の斉次座標とよぶ。

$\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合を

$$U_0 = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n(k); x_0 \neq 0\} \tag{5}$$

とすると、k^n の点 $(a_1, \ldots, a_n)$ を $\mathbb{P}^n(k)$ の斉次座標 $(1, a_1, \ldots, a_n)$ に写す写像 ϕ は k^n と $U_0 \subset \mathbb{P}^n(k)$ の間の一対一写像である。

証明

$\phi(a_1, \ldots, a_n) = (1, a_1, \ldots, a_n)$ の先頭が 0 でないので、$\phi\colon k^n \to U_0$ は定まっている。

$\psi\colon U_0 \to k^n$ を $\psi(\underbrace{x_0}_{\neq 0}, \ldots, x_n) = \psi(1, x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0) = (x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$ となる。well-defined と逆写像は示せる。

(証終)

$$\mathbb{P}^n(k) = \underbrace{k^n}_{\text{無限遠超平面。頭が0のところ}} \cup \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}(k)}_{\text{頭が非0のところ}} \tag{6}$$

系 3: $i = 0, \ldots, n$ それぞれに対して、

$$U_i = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n(k); x_i \neq 0\} \tag{7}$$

とおく。

(i) U_i の点は k^n の点と一対一に対応する。
(ii) 補集合 $\mathbb{P}^n(k) - U_i$ は $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ 同一視できる。
(iii) $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$ となる。

証明
i,ii は変数のつけかえで命題 2 に帰着する。iii は、$\cup$ をとることで $x_1 \neq 0 \vee \ldots \vee x_n \neq 0$ で、$\mathbb{P}^n(k)$ は全部座標が 0 になることはないので全体になっている。

(証終)
射影空間の多様体は、斉次なものを使わないとうまくいかない。

命題 4: $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ を斉次多様体とする。もし f が点 $p \in \mathbb{P}^n(k)$ のある斉次座標の組に対して消えていれば、f は p の任意の斉次座標に対して消える。とくに $\mathbf{V}(f) = \{p \in \mathbb{P}^n(k); f(p) = 0\}$ は $\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合として矛盾なく定義される。

証明
略。

(証終)

定義 5: k を体とし、$f_1, \ldots, f_s \in k[x_0, \ldots, x_n]$ を斉次多項式とする。

$$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n(k); f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0 \quad (1 \leq i \leq s)\} \tag{8}$$

とおいて、$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ を $f_1, \ldots, f_s$ によって定義された射影多様体とよぶ。

「1 つの」斉次多項式で定義された射影多様体は「n 次超曲面」という。
射影多様体と多様体を考える。$x_0 = 1$ として $V \cap U_0$ に斉次多項式を落とすことを非斉次化という。

命題 6: $V = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ を射影多様体とする。すると $W = V \cap U_0$ はアフィン多様体 $\mathbf{V}(g_1, \ldots, g_s) \subset k^n$ と同一視できる。ここで、$1 \leq i \leq s$ に対して、$g_i(x_1, \ldots, x_n) = f_i(1, x_1, \ldots, x_n)$ である[*1]。

証明

1. $\psi(W) \subset \mathbf{V}(g_1, \ldots, g_s)$ となる。$\psi: U_0 \to k^n$ は、射影座標を頭が 1 になるように正規化して頭を落とす写像であった。
   (a) $\forall x_\bullet$: $(x_1, \ldots, x_n) \in \psi(W)$ とする。$\psi(1, x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ であり、$(1, x_1, \ldots, x_n) \in V$ となっている。

(b) 任意の i について、上の $(1,\dots,x_n)\in V$ より

$$g_i(x_1,\dots,x_n)=f_i(1,x_1,\dots,x_n)=0. \tag{9}$$

(c) (a) おわり: 上より、$(x_1,\dots,x_n)\in \mathbf{V}(g_1,\dots,g_s)$ となる。

2. $\supset$ を示す。
   (a) $\forall a_\bullet$: $(a_1,\dots,a_n)\in \mathbf{V}(g_1,\dots,g_s)$ とする。
   (b) $(1,a_1,\dots,a_n)\in U_0$ である。
   (c) 任意の i について、

$$f_i(1,a_1,\dots,a_n)=g_i(a_1,\dots,a_n)=0. \tag{10}$$

   (d) 上より、$\phi(\mathbf{V}(g_1,\dots,g_s))\subset W$ となる。
3. ϕ と ψ は逆写像なので、W と $\mathbf{V}(g_1,\dots,g_s)$ の点は一対一に対応する。

(証終)

非斉次化の逆を考える。$f\in k[x_1,\dots,x_n]$ について、すべての項の全次数が $\deg(f)$ になるように各項に x_0 の羃をかけたものを f^h という。

命題 7: $g(x_1,\dots,x_n)\in k[x_1,\dots,x_n]$ を全次数 d の多項式とする。

(i) g を斉次成分の和に展開して、$g=\sum_{i=0}^d g_i$ とかく。ここで g_i の全次数は i である。すると、

$$g^h(x_0,\dots,x_n)=\sum_{i=0}^d g_i(x_1,\dots,x_n)x_0^{d-i} \tag{11}$$

は全次数が d であるような $k[x_0,\dots,x_n]$ の斉次多項式である。この g^h を g の斉次化という。

(ii) 斉次多項式は次で計算できる。

$$g^h=x_0^d\cdot g(\frac{x_1}{x_0},\dots,xfrax_nx_0). \tag{12}$$

(iii) g^h を非斉次化すると g になる。

$$g^h(1,x_1,\dots,x_n)=g(x_1,\dots,x_n). \tag{13}$$

(iv) $F(x_0,\dots,x_n)$ を斉次多項式とし、x_0^e を F を割り切るような x_0 の羃乗のうち最高次のものとする。もし $f=F(1,x_1,\dots,x_n)$ が F の非斉次化なら、$F=x_0^e\cdot f^h$ がなりたつ。

証明

(i) はあきらか。

(ii) を示す。

$$g^h(x_0,\dots,x_n)=\sum_{i=0}^d g_i(x_1,\dots,x_n)x_0^{d-i} \tag{14}$$

$$=x^d\sum_{i=0}^d \frac{g_i(x_1,\dots,x_n)}{x_0^i} \tag{15}$$

$$=x^d\sum_{i=0}^d g_i(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}). \tag{16}$$

(iii),(iv) はあきらか。

(証終)

8.3　射影化された代数-幾何対応

> 定義 1: $k[x_0,\ldots,x_n]$ のイデアル I が斉次であるとは、各 $f\in I$ に対して、f の斉次成分 f_i がまた I に属しているときに言う。

> 定理 2: $I\subset k[x_0,\ldots,x_n]$ をイデアルとする。このとき、次は同値である。
>
> (i) I は $k[x_0,\ldots,x_n]$ の斉次イデアルである。
> (ii) 斉次多項式 $f_1,\ldots,f_s$ を用いて、$I=\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ とあらわせる。
> (iii) 任意の多項式順序に対して、I の簡約グレブナ基底は斉次多項式からなる。

証明

(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す。そのために、演習問題 2 を解く。

(演習 2-a)「$f=\sum_i f_i$ と $g=\sum_i g_i$ を 2 つの多項式の斉次成分の和への分解とする。このとき、$f=g\iff {}^\forall i\colon f_i=g_i$ を示せ。」$\Leftarrow$ はあきらか。$\Rightarrow$ を示す。$f-g$ を考え、$f=0\implies {}^\forall i\colon f_i=0$ を示せば十分。i が次数をあらわしているとする。仮に何か $f_i\neq 0$ があるなら、それを打ち消すものが他の $f_\bullet$ にはない。
あるいは、$\sum_{j\neq i} f_i=-f_i$ と変形し、両方の次数が違うので $f_i=0$ である…というのを帰納的にやってもよい。

(演習 2-b)「$f=\sum_i f_i$ と $g=\sum_i g_i$ を 2 つの多項式の斉次成分の和への分解とする。このとき、$h=fg$ の斉次成分は $h_k=\sum_{i+j=k} f_i\cdot g_j$ で与えられていることを示せ。」$h=fg$ の項は $\left\{f_i\cdot g_j; i,j\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}\right\}$ である。よって、h の多重次数 k なものは、$i+j=k$ となる (i,j) 達だけであり、成り立つ。

(演習 2-c)「(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示せ。」$f\in I$ とし、これの斉次成分への分解 $f=\sum_d g_d$ とする。各 g_d は d 次である。f_i たちに番号をつけかえて、f_{ij} ただし i が多重次数で、j がそれらのうちの番号とする。$f\in I$ なので、$f=\sum_{i,j} h_{ij}f_{ij}$ と $h_{ij}\in k[x_1,\ldots,x_n]$ で表示される。さらに、$h_{ij}=\sum_k h_{ijk}f_{ij}$ と斉次成分に分解する。各 f_{ijk} は k 次である。さらに、(b) より、$f=\sum_d\sum_{i+k=d}\sum_j h'_{ijk}f_{ij}$ と和をとりかえる。よって、$\sum_d g_d=\sum_d\sum_{i+k=d}\sum_j h'_{ijk}f_{ij}$ となる。(a) より、各々の斉次成分が等しいので、$g_d=h'_{ijk}f_{ij}$ となっている。よって、$g_d\in I$ である。示された。

(i) $\Longrightarrow$ (ii) を示す。I は斉次イデアルであるとする。

1. $\exists F_\bullet$: ヒルベルトの基底定理より、
$$I=\langle F_1,\ldots,F_t\rangle \tag{17}$$
となる $F_1,\ldots,F_t\in k[x_1,\ldots,x_n]$ が存在する。(これは斉次とは限らない。)
2. $F_{\bullet\bullet}$: 各 j について、F_j を斉次成分に分け、$F_j=\sum_i F_{ji}$ と描く。
3. I は斉次イデアルであることと、各 j について $F_j\in I$ であること、各 F_{ji} が F_j の項であることから、$F_{ji}\in I$ である。
4. I': $I'=\langle F_{ji}; i,j\rangle$ とする。
5. 2 の $F_j=\sum_i F_{ji}$ より、$F_j\in I'$ がわかり、$I\subset I'$ である。
6. 3 より、$I'\subset I$ である。
7. 5,6 より $I=I'$ であり、I の基底として斉次なもの F_{ji} たちが得られた。

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) を示す。演習問題 3 を解く。

(演習 3-a)「割り算アルゴリズムを用いて、斉次多項式 f を斉次多項式たち $f_1,\ldots,f_s$ で割り算したとせよ。その結果、$f=a_1f_1+\cdots+a_sf_s+r$ という表示が得られる。このとき、商 $a_1,\ldots,a_s$ および、余り r は斉次多項式 (0 かもしれない。) であることを証明せよ。r の全次数はいくらになるか？」はじめに暫定的な余り r は f になっているが、ここからある単項式 $c\alpha x^\alpha$ として $f_i\cdot c_\alpha x^\alpha$ を引いて次数を下げても、r の全次数は変化しない。そして

このとき、商 a_i には cx^α が追加されるが、これの次数は $\deg(c_\alpha x^\alpha) = \deg(f) - \deg(f_i)$ である。よって、商も余りも (0 でなければ) 斉次であり続ける。r は 0 でなければ全次数は $\deg(f)$ である。

(演習 3-b)「f, g を斉次多項式とすると、S 多項式 $S(f,g)$ もまた斉次であることを示せ。」$x^\gamma = \mathrm{LCM}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))$ として、

$$S(f,g) = \frac{x^\gamma}{\mathrm{LT}(f)} f - \frac{x^\gamma}{\mathrm{LT}(g)} g \tag{18}$$

であった。

$$(x^\gamma/\mathrm{LT}(f) \cdot f\text{の各項の次数}) = \deg(\frac{x^\gamma}{\mathrm{LT}(f)} f) = \deg(x^\gamma). \tag{19}$$

同様に、$(x^\gamma/\mathrm{LT}(f) \cdot g\text{の各項の次数}) = \deg(x^\gamma)$ である。よって、$S(f,g)$ のどの項の次数も $\deg(x^\gamma)$ であり、斉次である。

(演習 3-c)「ブッフベルガーのアルゴリズムを解析することによって、斉次イデアルは斉次多項式からなるグレブナ基底を持つことを示せ。」ブッフベルガーのアルゴリズムは S 多項式を追加し続けるものだが、スタートが斉次だったので追加したものも (b) より斉次しか追加されない。よって、停止時点でも斉次な多項式しかなく、斉次イデアルには斉次なグレブナ基底がある。

(演習 3-d)「(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) を示せ。」(iii) $\Longrightarrow$ (ii) はあきらか。(ii) $\Longrightarrow$ (iii) を示す。(ii) を仮定する。ここからブッフベルガーのアルゴリズムを使うことで、(c) より I の斉次なグレブナ基底が得られる。斉次であることを保ちながら、これを極小グレブナ基底にすることができる*2。さらにこれに簡約グレブナ基底を作るアルゴリズムを適用しても斉次であり続けることを示す。このアルゴリズムは、グレブナ基底の各元 g に対して、g を $\overline{g}^{G-\{g\}}$ で置換するものであった。この操作で、g が斉次であることは変化しないことを示す。実際、(a) より余りは斉次であり続けるし (割り算をして 0 になることはない。仮にそうなれば極小にしたことに反する。)、その次数は g と変わらない。よって、I の斉次な基底から、斉次な簡約グレブナ基底を作ることができる。

(証終)

命題 3: $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ を斉次イデアルとして、斉次多項式 $f_1, \ldots, f_s$ に対して、$I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ であると仮定する。すると、

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) \tag{20}$$

であり、したがって $\mathbf{V}(I)$ は射影多様体である。

証明
演習 5 を解く。

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(I) &= \left\{(a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k); {}^\forall f \in I\colon f(a_0, \ldots, a_n) = 0\right\} && (21)\\
&= \left\{(a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k); {}^\forall i = 1, \ldots, s\colon f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0\right\} && (22)\\
&= \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s). && (23)
\end{aligned}$$

(証終)

射影多様体 $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ に対して、

$$\mathbf{I}(V) = \left\{f \in k[x_0, \ldots, x_n]; {}^\forall (a_0 : \cdots : a_n) \in V\colon f(a_0, \ldots, a_n) = 0\right\} \tag{24}$$

とおく (ここで f は V の任意の点のすべての斉次座標に対して消えていなければならないことに注意せよ。)。もし k が無限体であれば、$\mathbf{I}(V)$ は $k[x_0, \ldots, x_n]$ の斉次イデアルである。

*2 先頭項係数を 1 にして、不要なものを除く。

証明
イデアルであることはあきらか。$\mathbf{I}(V)$ が斉次であることを示す。

1. $\forall f$: $f \in \mathbf{I}(V)$ とする。
2. $\forall p$: $p \in V$ とする。
3. 仮定より、f は p のすべての斉次座標 $(a_0, \ldots, a_n)$ に対して消える。
4. f の任意の斉次成分 f_i は $(a_0, \ldots, a_n)$ で消える？
   (a) 演習問題 2-7 を解く。(これまでの文字は忘れる。)「k を無限体とする。もし $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ が斉次多項式ではなく、しかも $p \in \mathbb{P}^n(k)$ のすべての斉次座標で消え f の任意の斉次成分 f_i も p で消えていなければならないことを示そう。

(演習 2-7-a)「f を斉次成分の和として、$f = \sum_i f_i$ と表そう。$p = (a_0, \ldots, a_n)$ とするとき、次の式を示せ。

$$f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \sum f_i(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \sum_i \lambda^i f_i(a_0, \ldots, a_n). \tag{25}$$

」自明。

(演習 2-7-b)「f がすべての $\lambda \neq 0 \in k$ に対して消えれば、$f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0$ がすべての i について成り立つことを示せ。」$f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$ を $k[\lambda]$ の元と見る。これが $\lambda \neq 0$ で消えること、それに k が無限体であることから、この λ に関する方程式は無数の解を持つことになる。そのような多項式は 0 しかないので、$f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0_{k[\lambda]}$ である。(a) より、$\sum_i \lambda^i f_i(a_0, \ldots, a_n)$ も λ に関する 0 多項式であることがわかる。よって、すべての i について、$f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0$ である。

   (b) 3 は、$^\forall \lambda \neq 0$: $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0$ を主張しているので、(a) で解いた問と k が無限体であることより、f のすべての斉次成分 f_i が $f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0$ をみたす。

   よって、f の任意の斉次成分 f_i は $(a_0, \ldots, a_n)$ で消える。
5. 2 おわり: 上より、任意の i について、$f_i \in \mathbf{I}(V)$ である。
6. 1 おわり: 上より、f の任意の斉次成分が I に属するので、$\mathbf{I}(V)$ は斉次である。

(証終)

定理 5: k を無限体とする。写像

$$\text{射影多様体} \xrightarrow{\mathbf{I}} \text{斉次イデアル} \tag{26}$$

と

$$\text{斉次イデアル} \xrightarrow{\mathbf{V}} \text{射影多様体} \tag{27}$$

は包含関係を逆転させる。さらに、任意の射影多様体に対して、

$$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V \tag{28}$$

が成り立つ。特に $\mathbf{I}$ は単射である。

証明
$\mathbf{I}$ の反転を示す。$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) \subset \mathbf{V}(g_1, \ldots, g_t)$ とする。

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(g_1, \ldots, g_t)) = \left\{f \in k[x_0, \ldots, x_n]; f\text{は}\mathbf{V}(g_1, \ldots, g_t)\text{を消す}\right\} \tag{29}$$
$$\subset \left\{f \in k[x_0, \ldots, x_n]; f\text{は}\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)\text{を消す}\right\} \tag{30}$$
$$= \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_t)). \tag{31}$$

$\mathbf{V}$ の反転を示す。$\langle f_1,\dots,f_s\rangle \subset \langle g_1,\dots,g_t\rangle$ とする。

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\langle g_1,\dots,g_t\rangle) &\overset{\boxed{\text{命題 3}}}{=} \mathbf{V}(g_1,\dots,g_t) &(32)\\ &\subset \mathbf{V}(f_1,\dots,f_s) &(33)\\ &\overset{\boxed{\text{命題 3}}}{=} \mathbf{V}(\langle f_1,\dots,f_s\rangle). &(34)\end{aligned}$$

$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ を示す。

1. $V = \mathbf{V}(f_1,\dots,f_s)$ とする。$\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s))) = \mathbf{V}(f_1,\dots,f_s)$ を示せばよい。
2. $\subset$ を示す。
   (a) $f_1,\dots,f_s$ は $\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s)$ を消す。
   (b) 上より、$f_1,\dots,f_s \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s))$ となる。
   (c) 上より、$\langle f_1,\dots,f_s\rangle \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s))$ がなりたつ。
   (d) 上と $\mathbf{V}$ の反転より、
$$\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s))) \subset \mathbf{V}(\langle f_1,\dots,f_s\rangle) \overset{\boxed{\text{命題 3}}}{=} \mathbf{V}(f_1,\dots,f_s). \tag{35}$$
3. $\supset$ を示す。
   (a) $\forall(a_0:\dots:a_n)$: $(a_0:\dots:a_n) \in \mathbf{V}(f_1,\dots,f_s)$ とする。$f_1,\dots,f_s$ 全ては $(a_0:\dots:a_n)$ を消す。
   (b) $\forall f$: $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s))$ とする。(f は $(a_0:\dots:a_n)$ を消す？)
   (c) 上より、f は $\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s)$ を消す。
   (d) 上と、(a) より、f は $(a_0:\dots:a_n)$ を消す。
   (e) (b) おわり: $(a_0:\dots:a_n)$ は $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s))$ のどれでも消える。
   (f) (a) おわり: $\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s)$ は $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s))$ のどれでも消える。
   (g) 上より、
$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s))) &= \left\{\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\dots,f_s))\text{のどれでも消える点}\right\} &(36)\\ &\supset \mathbf{V}(f_1,\dots,f_s). &(37)\end{aligned}$$
4. 2,3 よりなりたつ。

(証終)

定理 6: k を無限体とする。

(i) $\mathbb{P}^n(k)$ に含まれる射影多様体の降鎖
$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots \tag{38}$$
に対して、ある整数 N が存在して、$V_N = V_{N+1} = \dots$ が成り立つ。

(ii) 任意の射影多様体 $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ は、有限個の既約な射影多様体の和集合として一意的に表される。
$$V = V_1 \cup \dots \cup V_m. \tag{39}$$
ただし、$i \neq j$ に対しては $V_i \not\subset V_j$ である。

証明

(i) を示す。鎖に $\mathbf{I}$ をとって昇鎖を作る。ネーター環の昇鎖は安定するので、ある N 以上 $\mathbf{I}(V_N) = \mathbf{I}(V_{N+1}) = \dots$ となる。定理 5 の $\mathbf{I}$ の単射より、$V_N = V_{N+1} = \dots$ となる。

(ii) を示す。2 通りに書いて、1 個既約多様体とってもう片方のどこに含まれますか〜みたいなことを言っていればできる。

(証終)
斉次イデアルの演算と射影多様体の演算を考える。

演習 6: $I_1, \ldots, I_l$ を $k[x_0, \ldots, x_n]$ の斉次イデアルとする。

(a) $I_1 + \cdots + I_l$ は斉次。
(b) $I_1 \cap \ldots \cap I_l$ は斉次。
(c) $I_1 \ldots I_l$ は斉次。

証明
(a) を示す。定理 2 より、各 I_i には斉次な生成元 $f_{i1}, \ldots, f_{iN_i}$ がある。

$$I_1 + \cdots + I_l = \langle f_1 + \cdots + f_l; f_1 \in I_1, \ldots, f_l \in I_l \rangle \tag{40}$$

$$\overset{\boxed{\text{命題 4-3-2}}}{=} \langle f_{11}, \ldots, f_{1N_1}, \ldots, f_{i1}, \ldots, f_{iN_i}, \ldots, f_{l1}, \ldots, f_{lN_l} \rangle . \tag{41}$$

生成元がすべて斉次なので、定理 2 より $I_1 + \cdots + I_l$ も斉次イデアルである。
(b) を示す。$f \in I_1 \cap \ldots \cap I_l$ とする。$i = 1, \ldots, l$ とする。$f \in I_i$ である。I_i は斉次なので、f の各項も I_i に属する。i は任意なので、f の各項も $I_1 \cap \ldots \cap I_l$ に属する。f は任意なので、$I_1 \cap \ldots \cap I_l$ は斉次。
(c) を示す。$I_\bullet$ の生成元を (a) のときと同様にする。命題 4-6-3 によれば、

$$I_1 \ldots I_l = \langle f_{1i_1} \ldots f_{li_l}; 1 \leq i_1 \leq N_1, \ldots, 1 \leq i_N \leq N_l \rangle \tag{42}$$

となっている。生成元を斉次になるようにとっておいたので、各 j について f_{ji_j} の全次数は i に依らず一定であり、$f_{1i_1} \ldots f_{li_l}$ の全次数は $i_1, \ldots, i_l$ の選び方に依らず一定である。よって、$I_1 \ldots I_l$ は斉次な基底で生成されており、定理 2 より $I_1 \ldots I_l$ は斉次イデアルである。

(証終) アフィンと同様に次が成り立つ。

練習問題 7: $I_1, \ldots, I_l$ を $k[x_0, \ldots, x_n]$ の斉次イデアルとして、$V_i = \mathbf{V}(I_i)$ を対応する $\mathbb{P}^n(k)$ の射影多様体とする。

(a) $\mathbf{V}(I_1 + \cdots + I_l) = \bigcap_{i=1}^l V_i$ である。
(b)

$$\mathbf{V}(I_1 \cap \ldots \cap I_l) = \mathbf{V}(I_1 \ldots I_l) = \bigcup_{i=1}^{l} V_i. \tag{43}$$

斉次イデアルは

$$\sqrt{I} = \left\{ f \in k[x_0, \ldots, x_n]; \text{ある} m \geq 1 \text{について} f^m \in I \right\}. \tag{44}$$

命題 7: $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ を斉次イデアルとする。すると、$\sqrt{I}$ も斉次イデアルである。

証明
1. $\forall f$: $f \in \sqrt{I}$ とする。斉次成分に興味があるので、$f \neq 0$ としてよい。
2. $\exists m$: $m \geq 1$ があって、$f^m \in I$ となる。
3. f_i: f を斉次成分に分解する。$f = \sum_i f_i$ としておく。

4. $f_{\max}$: $f_{\max}$ をゼロでない斉次成分のうち、最大の全次数を持つような成分とする。
$$f = f_{\max} + \sum_{i<\max} f_i \tag{45}$$
となる。
5. 4 より、f^m を展開することを考えると
$$(f^m)_{\max} = (f_{\max})^m \tag{46}$$
となる。
6. I が斉次イデアルであること、2 の $f^m \in I$ より、$(f^m)_{\max} \in I$ だえる。
7. 5 と上より、$(f_{\max})^m \in I$ である。
8. 上より、$f_{\max} \in \sqrt{I}$ である。
9. g: $g = f - f_{\max}$ とする。
10. 1 と 8 より、$f, f_{\max} \in \sqrt{I}$ なので、上より $g \in \sqrt{I}$ である。
11. 2-8 の議論を g に繰替えすと、$g_{\max} \in \sqrt{I}$ である。
12. 以降、9-11 の議論を繰替えすことによい、f のすべての項が $\sqrt{i}$ に属することがわかる。
13. 1 おわり:$f \in \sqrt{I}$ は任意だったので、$\sqrt{I}$ は斉次イデアルである。

(証終)
射影幾何だと、弱形の零点定理はそのまま持ってこれない。

定理 8(射影幾何における弱形の零点定理) k を代数的閉体として、I を $k[x_0, \dots, x_n]$ の斉次イデアルとする。すると次は同値である。

(i) $\mathbf{V}(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ は空である。
(ii) G を I の (ある単項式順序に関する) 簡約グレブナ基底とする。すると任意の $0 \leq i \leq n$ に対して、$\mathrm{LT}(g)$ が x_i の非負冪であるような $g \in G$ が存在する。
(iii) 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して、ある整数 $m_i \geq 0$ が存在して、$x_i^{m_i} \in I$ が成り立つ。
(iv) ある $r \geq 1$ が存在して、$\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$ が成り立つ。

証明
1. C_V: $C_V = \mathbf{V}_a(I) \subset k^{n+1}$ を、I で定義されるアフィン多様体とする。(これは、I で定義される射影多様体の各点に対応する点をすべて含む。)
2. (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す。簡約グレブナ基底 G で、任意の i に対しある $g \in G$ が存在して、ある $m_i \geq 0$ に対して $\mathrm{LT}(g) = x_i^{m_i}$ となるものがあるとする。
   (a) 上の状況は、$\langle \mathrm{LT}(I) \rangle = \langle \mathrm{LT}(G) \rangle = \langle x_0^{m_0}, x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n} \rangle$ となっている (G は簡約されている。)。
   (b) このとき、定理 6-3-6 によれば C_V は有限集合である。概略を示す。
      i. $\forall i$: $i = 0, \dots, n$
      ii. $\exists g$: (a) より、$\mathrm{LT}(g) = x_i^{m_i}$ となる g が存在する。
      iii. 上より、$(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{V}(I)$ ならば $g = 0$ を満たさなければならない。
      iv. g を x_i に関する方程式と見做せば、x_i は m_i 個以下であることがわかる (代数的閉体であることは使っていない。)。
      v. i おわり。任意の i について x_i は m_i 個以下なので、x は $m_0 \cdot \dots \cdot m_n$ 個以下である。

      よって、C_V は有限集合である。
   (c) $\exists p$: $p \in V$ が存在したとする (背理法)。
   (d) $(a_0, \dots, a_n)$: $(a_0, \dots, a_n)$ を p の斉次座標とする。
   (e) 任意の λ について、$\lambda(a_0, \dots, a_n) \in C_V$ となる。
   (f) k は代数的閉体ゆえ無限体なので、上より C_V は無限に元を含む。

(g) (c) おわり: 上は、(b) に矛盾する。よって、$\mathbf{V}(I)=V=\emptyset$ である。

3. (iii) $\Longrightarrow$ (ii):
   (a) G: G を I のグレブナ基底とする。
   (b) $\forall i$: $i=0,\dots,n$ とする。
   (c) $\exists m_i$: (iii) より、$x_i^{m_i}\in I$ となる $m_i\geq 0$ がある。
   (d) 上より、
   $$x_i^{m_i}=\mathrm{LT}(x_i^{m_i})\in\mathrm{LT}(I)=\langle\mathrm{LT}(I)\rangle=\langle\mathrm{LT}(G)\rangle \tag{47}$$
   となる。
   (e) $\exists g$: 上より、$\mathrm{LT}(g)|x_i^{m_i}$ となる $g\in G$ が存在する。
   (f) 上より、$\mathrm{LT}(g)$ は x_i の冪である。
   (g) (b) おわり: 任意の $i=0,\dots,n$ について、$g\in G$ で $\mathrm{LT}(g_i)$ が x_i の冪であるものが存在する。

4. (iv) $\Longrightarrow$ (iii):
   (a) $\forall i$: $i=0,\dots,n$
   (b) $\exists r$: 仮定より、$r\geq 1$ で、$\langle x_0,\dots,x_n\rangle^r\subset I$ となるものがある。
   (c) 上より、$x_i^r\in I$ である。
   (d) (a) おわり: 任意の i について、ある整数 $m_i\geq 0$ が存在して、$x_i^{m_i}\in I$ となる。

5. (i) $\Longrightarrow$ (iv):
   (a) 仮定より、$V=\emptyset$ である
   (b) $C_V\subset\left\{(\overset{\overset{0}{\vee}}{0},\dots,\overset{\overset{n}{\vee}}{0})\right\}$?
      i. $\exists(a_0,\dots,a_n)$: C_V がゼロでない点 $(a_0,\dots,a_n)$ を持つとする (背理法)。
      ii. 上より $(a_0,\dots,a_n)\neq 0$ なので、$(a_0:\cdots:a_n)\in V$ となる。
      iii. i おわり: 上は (a) に矛盾。

      よって、$C_V\subset\left\{(\overset{\overset{0}{\vee}}{0},\dots,\overset{\overset{n}{\vee}}{0})\right\}$。
   (c) 上に $\mathbf{I}_a$ をかける。$\mathbf{I}_a(\{(0,\dots,0)\})\subset\mathbf{I}_a(C_V)$ となる。
   (d) $\mathbf{I}_a(\{(0,\dots,0)\})=\langle x_0,\dots,x_n\rangle$ である[*3]。
   (e) k は代数的閉体なので、アフィン多様体の強形の零点定理により、
   $$\mathbf{I}_a(C_V)=\mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I))=\sqrt{I}. \tag{48}$$
   (f) (c),(d),(e) より、
   $$\langle x_0,\dots,x_n\rangle\overset{\boxed{\text{(d)}}}{=}\mathbf{I}_a(\{(0,\dots,0)\})\overset{\boxed{\text{(c)}}}{\subset}\mathbf{I}_a(C_V)\overset{\boxed{\text{(e)}}}{=}\sqrt{I}. \tag{49}$$
   (g) $\exists r$: 上より、$\langle x_0,\dots,x_n\rangle^r\subset I$ となる $r\geq 1$ が存在する。(なぜなら、各 i について $x_i^{r_i}\in I$ となる r_i があるが、このとき $r=r_0+r_1+\cdots+r_n$ とすれば、$\langle x_0,\dots,x_n\rangle^r$ からどうとっても $x_i^{r_i}$ が因子として入っている。)

(証終)

定理 9(射影幾何における強形の零点定理): k を代数的閉体として、I を $k[x_0,\dots,x_n]$ の斉次イデアルとする。$V=\mathbf{V}(I)$ が $\mathbb{P}^n(k)$ の空でない射影多様体であれば、$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))=\sqrt{I}$ が成り立つ。

証明

1. V: $V=\mathbf{V}(I)\subset\mathbb{P}^n(k)$ とする。

[*3] $f\in\mathbf{I}_a(\{(0,\dots,0)\})$ として、f を $x_0,\dots,x_n$ で割る。

2. C_V: $C_V = \mathbf{V}_a(I) \subset k^{n+1}$ とする。
3. 仮定より、$V \neq \emptyset$ である。
4. $\mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}(V)$?
   (a) $\subset$ を示す。
      i. $\forall f$: $f \in \mathbf{I}_a(C_V)$ とする。
      ii. $\forall p$: $p \in V$ とする。
      iii. $\forall (a_0, \ldots, a_n)$: p の斉次座標を $(a_0, \ldots, a_n)$ とする。
      iv. 上より、$(a_0, \ldots, a_n) \in C_V$ となる。
      v. i より、f は C_V で消える関数なので、$(a_0, \ldots, a_n)$ を消す。
      vi. iii おわり: f は p の斉次座標をすべて消す。
      vii. ii おわり: f は V を消す。
      viii. 上より、$f \in \mathbf{I}(V)$ である。
      ix. i おわり: $\mathbf{I}(C_V) \subset \mathbf{I}(V)$ である。

      よって、 $\mathbf{I}(C_V) \subset \mathbf{I}(V)$ である。
   (b) $\supset$ を示す。
      i. $\forall f$: $f \in \mathbf{I}(V)$ とする。
      ii. $\forall a_0, \ldots, a_n$: $(a_0, \ldots, a_n) \in C_V - \{0\}$ とする。
      iii. 上より、$(a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbf{I}(V)$ である。
      iv. 上と (b) より、f は $(a_0 : \cdots : a_n) \in V$ を消す。
      v. (b) おわり: 上より f は $C_V - \{0\}$ を消す。
      vi. (a) と $\mathbf{I}(V)$ は斉次イデアルなので、f の斉次成分はまた $\mathbf{I}(V)$ に属し、V を消す。
      vii. 上より、f の定数項も V を消す。
      viii. 上と $V \neq \emptyset$ より、f の定数項は 0 である。
      ix. 上より、f は原点 0 を消す。
      x. 上と (e) より、f は C_V を消す。
      xi. (a) おわり: 上より $\mathbf{I}(V) \subset \mathbf{I}(C_V)$ となる。
   (c) (a),(b) より、$\mathbf{I}(C_V) = \mathbf{I}(V)$ となる。
5. アフィン幾何の強形の零点定理より、$\sqrt{I} = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I))$ となる。
6.

$$\sqrt{I} \overset{\boxed{5, \text{零点定理}}}{=} \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I)) = \mathbf{I}_a(C_V) \overset{\boxed{4}}{=} \mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)). \tag{50}$$

(証終)

演習問題 9(結局使わんかった。):

(a) $k[x_0, \ldots, x_n]$ の任意の斉次イデアルで真部分集合になっているようなものは、I_0 に含まれることぉお示せ。
(b) r 次の冪 I_0^r は $k[x_0, \ldots, x_n]$ の全次数が r の単項式全体から生成されることを示せ。さらに、このことから全次数が r 以上であるような任意の斉次多項式は I_0^r に含まれていることを示せ。
(c) $V = \mathbf{V}(I_0) \subset \mathbb{P}^n(k), C_V = \mathbf{V}_a(I_0) \subset k^{n+1}$ とおく。$\mathbf{I}_a(C_V) \neq \mathbf{I}(V)$ であることを示せ。

証明

(a) 斉次イデアル $I \subsetneq k[x_0, \ldots, x_n]$ とする。仮に I が定数を含んでいるならば I は全体になってしまうので、I は定数を含まない。$f \in I$ とする。先のことより、f は定数ではない。f は斉次なので、これは f が定数項を含まないことを意味する。したがって、$f \in I_0$ であり、$I \subset I_0$ である。
(b) $I_0^r = \langle k[x_0, \ldots, x_n]\text{の全次数}r\text{な単項式} \rangle$ を示す。これは、$I_0 = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ なので、イデアルの積の生成元としてイデアルの生成元の積たち全体が取れることから明らか。

全次数が r 以上であるような任意の斉次多項式が I_0^r に属することは、そのような多項式の各項の出鱈目な r 次の因子を取れば、それが I_0^r に属することからわかる。

(c)

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_a(C_V) &= \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I_0)) && (51)\\ &= \langle x_0, \ldots, x_n \rangle . && (52)\end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned}\mathbf{I}(V) &= \mathbf{I}(\mathbf{V}(I_0)) && (53)\\ &= \mathbf{I}(\mathbf{V}(\langle x_0, \ldots, x_n \rangle)) && (54)\\ &= \mathbf{I}(\emptyset) && (55)\\ &= k[x_0, \ldots, x_n]. && (56)\end{aligned}$$

(証終)

定理 10: k を代数的閉体とする。$\mathbf{I}$ と $\mathbf{V}$ は、空でない射影多様体と、$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ に含まれる根基斉次イデアルとの間の、包含関係を逆転するような全単射写像を与える。つまり写像

$$\{\text{空でない射影多様体}\} \xrightarrow{\mathbf{I}} \{\langle x_0, \ldots, x_n \rangle \text{ に真に含まれる根基斉次イデアル}\} \quad (57)$$

$$\{\langle x_0, \ldots, x_n \rangle \text{ に真に含まれる根基斉次イデアル}\} \xrightarrow{\mathbf{V}} \{\text{空でない射影多様体}\} \quad (58)$$

は互いに逆写像を与えている。

証明

1. I を根基斉次イデアルとしたとき、$\mathbf{V}(I) \neq \emptyset \iff I \subsetneq \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$？
   (a) 定理 8 より、$\mathbf{V}(I) = \emptyset \iff {}^{\exists}r \geq 1\colon \langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r \subset I$
   (b) 1 の仮定より I は根基イデアルなので、

$$^{\exists}r \geq 1\colon \langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r \subset I \iff \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \subset I. \quad (59)$$

   (c) (a)(b) より、

$$\mathbf{V}(I) = \emptyset \iff \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \subset I. \quad (60)$$

   (d) 上の対偶をとり、

$$\mathbf{V}(I) \neq \emptyset \iff I \subsetneq \langle x_0 \ldots, x_n \rangle . \quad (61)$$

2. I を $I \subsetneq \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ となる根基斉次イデアルとして、$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$？
   (a) $I \subsetneq \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ で、根基斉次イデアルなので、1 より $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$ である。
   (b) 上と、I が斉次であることから定理 9 より、$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$ となる。
   (c) I は根基なので、$\sqrt{I} = I$ である。
   (d) 上と (b) より、$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$ である。
3. V を空でない射影多様体として、$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$？
   (a) 定理 5 と、k が代数的閉体ゆえ無限体であることから $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ である。
4. 2,3 より $\mathbf{I}$ と $\mathbf{V}$ は互いに逆写像である。

(証終)

8.4　アフィン多様体の射影完備化

定義 1: イデアル $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ に対して、I の斉次化を次のように定義する。

$$I^h = \langle f^h; f \in I \rangle \subset k[x_0, \dots, x_n] \tag{62}$$

ここで f^h は先の斉次化である。

命題 2: 任意のイデアル $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ に対して、その斉次化 I^h は $k[x_0, \dots, x_n]$ の斉次イデアルである。

証明

$g \in \langle f^h; f \in I \rangle$ とする。$N, F_\bullet$ を使って、$g = \sum_{i=1}^N F_i f_i^h$ とする。$f_\bullet$ の番号を付け替えて、f_{ij} が、i が斉次の次数、j がそのうちでのインデックスになるようにする。$g = \sum_{i=}^N \sum_j F_{ij} f_{ij}^h$ となる。さらに、F_{ij} を斉次分解して、$F_{ij} = \sum_l F_{ijl}$ とする。$g = \sum_{i=1}^N \sum_j \sum_l F_{ijl} f_{ij}^h$ となる。これを次数で分けて書くと、(存在しない添字の項は 0 として、)

$$g = \sum_d \sum_{i+l=d} \sum_j F_{ijl} f_{ij}^h \tag{63}$$

となる。このうち、$\sum_{i+l=d} \sum_j F_{ijl} f_{ij}^h$ は d 次斉次成分になっているが、これは f_{ij}^h の一次結合なので I^h に属する。

(証終)

$\langle f_1^h, \dots, f_s^h \rangle$ は斉次な基底でできているので斉次イデアルだが、上の斉次化はこれよりも大きくなりうる。

次数つきの単項式順序: 単項式順序のうち、$|\alpha| > |\beta|$ なら $x^\alpha > x^\beta$ となるもの。

定理 4: I を $k[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル、$G = \{g_1, \dots, g_t\}$ を $k[x_1, \dots, x_n]$ の次数付き単項式順序に関する I のグレブナ基底とする。すると $G^h = \{g_1^h, \dots, g_t^h\}$ は $I^h \subset k[x_0, \dots, x_n]$ の基底である。

証明

「G^h は $k[x_0, \dots, x_n]$ の適当な単項式順序について I^h のグレブナ基底であることを示す。」

1. 記号を用意する。$k[x_0, \dots, x_n]$ の単項式は、$\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ と $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を使って、

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = x^\alpha x_0^d \tag{64}$$

と書く。

2. $>_h$: $k[x_0, \dots, x_n]$ の順序 $>_h$ を

$$x^\alpha x_0^d >_h x^\beta x_0^e \iff \begin{cases} x^\alpha > x^\beta \text{または} \\ x^\alpha = x^\beta \text{であって、かつ} d > e \text{が成り立つ。} \end{cases} \tag{65}$$

と定める。これは単項式順序になっている。

3. 任意の $i \geq 1$ について、$x_i >_h x_0$ が成立する。
4. 任意の $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ について、$\mathrm{LM}_{>_h}(f^h) = LM_>(f)$？
   (a) $\forall f$: $f \in k[x_1, \dots, x_n]$
   (b) α: $x^\alpha = \mathrm{LM}_>(f)$
   (c) 上より x^α は f の最高全次数の斉次部分の単項式である。

(d) 斉次化の定義より、f^h の単項式たちにも x^α は存在する。

(e) $\forall\beta, e$: $x^\beta x_0^e$ を f^h にあらわれる他の多項式とする。

(f) x^β が f の x^α でない単項式なので、(b) より、$\alpha > \beta$ となる。

(g) 上より、$x^\alpha >_h x^\beta x_0^e$ である。

(h) (e) おわり: 上より、$x^\alpha = \mathrm{LM}_{>_h}(f^h)$ である。

(i) (b) と上より、任意の f について、$\mathrm{LM}_>(f) = \mathrm{LM}_{>_h}(f^h)$ である。

任意の $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ について、$\mathrm{LM}_{>_h}(f^h) = \mathrm{LM}_>(f)$ である。

5. 任意の i について、I^h の定義と、$g_i \in G \subset I$ より $g_i^h \in I^h$ である。
6. 上より、$G^h \subset I^h$ である。
7. $\langle \mathrm{LT}_{>_h}(I^h) \rangle$ は $\mathrm{LT}_{>_h}(G^h)$ で生成される？

(a) $\forall F$: $F \in I^h$ とする。

(b) I^h は斉次イデアルなので F の各斉次成分は I^h に属する。

(c) 上より、(a) でとった F は斉次であると仮定してよい (生成を示したくて、F を $\langle \mathrm{LT}_{>_h}(G^h) \rangle$ で書けることさえ言えればいい。)。

(d) $\exists A_j, f_j$: (a) より、

$$F = \sum_j A_j f_j^h \tag{66}$$

と $A_j \in k[x_0, \ldots, x_n]$ と $f_j \in I$ を用いて書ける。

(e) f: f を F の非斉次化とする。すなわち: $f = F(1, x_1, \ldots, x_n)$ とする。

(f) (d)(e) と命題 2-7(iii) の「斉次化の頭に 1 を入れると戻る」より、

$$\begin{aligned} f &= F(1, x_1, \ldots, x_n) &(67)\\ &= \sum_j A_j(1, x_1, \ldots, x_n) f_j^h(1, x_1, \ldots, x_n) &(68)\\ &= \sum_j A_j(1, x_1, \ldots, x_n) f_j. &(69) \end{aligned}$$

(g) (d) で $f_j \in I$ としたことを言ったので上より、$f \in I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ となる。

(h) $\exists e$: (c) で F は斉次としておいたことと、命題 2-7(iv) の「斉次多項式 F を x_0 で e 回まで割れるなら、$f = F(1, x_1, \ldots, x_n)$ として、$F = x_0^e \cdot f^h$ となる[*4]」より、

$$F = x_0^e \cdot f^h \tag{70}$$

となる $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がある。

(i) 4 より、

$$\mathrm{LM}_{>_h}(F) \overset{\boxed{\text{(h)}}}{=} x_0^e \cdot \mathrm{LM}_{>_h}(f^h) \overset{\boxed{4}}{=} x_0^e \cdot \mathrm{LM}_>(f). \tag{71}$$

(j) $\exists i$: G は I のグレブナ基底であることと、(g) で $f \in I$ であることより、$\mathrm{LM}_>(f)$ はある $\mathrm{LM}_>(g_i)$ で割り切れる。

(k) 上と、4 の $\mathrm{LM}_>(g_i) = \mathrm{LM}_{>_h}(g_i^h)$ より、$\mathrm{LM}_>(F)$ は $\mathrm{LM}_{>_h}(g_i^h)$ で割り切れる。

(l) (a) おわり: 任意の $\mathrm{LM}_>(F) \in \mathrm{LT}_{>_h}(I^h)$ は $\mathrm{LM}_{>_h}(g_i^h)$ の倍数になっている。示された。

$\langle \mathrm{LT}_{>_h}(I^h) \rangle$ は $\mathrm{LT}_{>_h}(G^h)$ で生成される。

8. 6 の $G^h \subset I^h$ と 7 の $\langle \mathrm{LT}_{>_h}(I^h) \rangle$ が $\mathrm{LT}_{>_h}(G^h)$ で生成されることより、G^h は I^h のグレブナ基底。

(証終)

[*4] まじ？ と思ったが、非斉次化では次数は落ち、斉次化では次数は変わらないので、非斉次化→斉次化だと次数は落ちており、x_0^e を補わないとまずい。

定義 6: アフィン多様体 $W \subset k^n$ に対して、W の射影完備化とは、射影多様体 $\overline{W} = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \subset \mathbb{P}^n(k)$ のことである。

$W = \{0\}$ のときは $\overline{W} = \emptyset$ になってしまう。

$f_\bullet \in k[x_1, \ldots, x_n]$ は $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ はアフィン多様体 $\subset k^n$ とも見えるし、射影多様体 $\subset \mathbb{P}^n(k) = k^{n+1}/\sim$ とも見える。また、射影多様体 $\subset \mathbb{P}(k^n) = k^{n+1}/\sim$ を $x_0 = 1$ としたアフィン多様体 k^{n+1} と同一視することがある。

命題 7:

$W \subset k^n$ をアフィン多様体とし、$\overline{W} \subset \mathbb{P}^n(k)$ をその射影完備化とする。 (独自) また、$W \neq \{0\}$ とする。←そんなことはなかった。k^n と k^{n+1} で考えてることに注意。すると、次が成り立つ。

(i) $\overline{W} \cap U_0 = \overline{W} \cap k^n = W$。(アフィン多様体とみて)

(ii) $\overline{W}$ は W を含むような $\mathbb{P}^n(k)$ における最小の射影多様体である。

(iii) アフィン多様体 W が既約ならば、射影多様体 $\overline{W}$ もまた既約である。

(iv) $\overline{W}$ のどの既約成分も無限遠超平面 $\mathbf{V}(x_0) \subset \mathbb{P}^n(k)$ に完全に含まれることはない。

証明

(i) を示す。

1. G: $k[x_1, \ldots, x_n]$ の次数付き順序に関する $\mathbf{I}_a(W)$ のグレブナ基底とする。
2. 定理 4 と上より、$\mathbf{I}_a(W)^h = \langle g^h; g \in G \rangle$ である。
3. k^n のサブセットと見て、2 より

$$
\begin{aligned}
\overline{W} \cap U_0 &= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \cap U_0 && (72)\\
&\overset{\boxed{2}}{=} \mathbf{V}(g^h; g \in G) \cap U_0 && (73)\\
&\overset{\boxed{\text{同一視}}}{=} \mathbf{V}_a(g^h; g \in G) \cap \mathbf{V}_a(x_0 = 1) && (74)\\
&= \mathbf{V}_a(g^h(1, x_1, \ldots, x_n); g \in G). && (75)
\end{aligned}
$$

4. 命題 2-7(iii) の「斉次化して $x_0 = 1$ にすると戻る」より、$g^h(1, x_1, \ldots, x_n) = g$ となる。
5. 3,4 と 1 より、

$$\overline{W} \cap U_0 \overset{\boxed{3}}{=} \mathbf{V}_a(g^h(1, x_1, \ldots, x_n); g \in G) \overset{\boxed{4}}{=} \mathbf{V}_a(g; g \in G) = \mathbf{V}_a(G) \overset{\boxed{1}}{=} \mathbf{V}_a(\mathbf{I}_a(W)) = W. \quad (76)$$

(ii) を示す。

1. $\forall V$: $\underbrace{W}_{\subset k^n} \subset V$ なる射影多様体。(V は一旦 k^{n+1} と見做すが、射影多様体の条件を満たすものとする。)($\overline{W} \subset V$？)
2. $F_1, \ldots, F_s$: $V = \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s)$ とする。
3. $f_1, \ldots, f_s$: f_i は F_i の非斉次化 $f_i = F_i(1, x_1, \ldots, x_n)$ とする。
4. 2 より各 F_i は V を消す。
5. 上と 1 より F_i は W も消す。
6. 上と各 F_i が射影多様体 V の定義方程式であることと、3 で各 f_i が F_i の非斉次化であることから、各 f_i は W を消す。
7. 上より、各 i について、$f_i \in \mathbf{I}_a(W)$ となる。
8. 上より、各 i について、$f_i^h \in \mathbf{I}_a(W)^h$ となる。
9. 上より、各 i について、f_i^h は $\mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) = \overline{W}$ を消す。
10. $\exists e_1, \ldots, e_s$: 命題 2-7(iv) より、各 i についてある整数 e_i があって $F_i = x_0^{e_i} f_i^h$ となる。

11. 上と 9 より、各 F_i は $\overline{W}$ を消す。
12. 上と 2 より、$\overline{W} \subset \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) = V$ となる。
13. 1 おわり: 任意の $W \subset V$ なる任意の射影多様体 V について $\overline{W} \subset V$ なので、$\overline{W}$ は W を包む最小の射影多様体になる。

(iii) を示す。W が既約 $\iff$ $\overline{W}$ が既約なので、これを示す。対偶を示す。

1. W が既約でないなら $\overline{W}$ が既約でないことを示す。$W = W_1 \cup W_2$ と、空でないアフィン多様体 $W_1, W_2 \subset k^n$ に分解できるとする。

$$\begin{aligned}\overline{W} &= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) && (77)\\ &= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_1 \cup W_2)^h) && (78)\\ &= \mathbf{V}((\mathbf{I}_a(W_1) \cap \mathbf{I}_a(W_2))^h) && (79)\\ &= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_1)^h \cap \mathbf{I}_a(W_2)^h) && (80)\\ &= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_1)^h) \cup \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_2)^h) && (81)\\ &= \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2. && (82)\end{aligned}$$

(ii) より、$W_1 \subset \overline{W}_1$ かつ $W_2 \subset \overline{W}_2$ であり、$W_1, W_2 \neq \emptyset$ なので、$\overline{W}_1, \overline{W}_2 \neq \emptyset$ であり、$\overline{W}$ は既約ではない。
2. $\overline{W}$ が既約でないなら W が既約でないことを示す。$\overline{W} = V_1 \cup V_2$ と空でない既約多様体 $V_1, V_2 \subset \mathbb{P}^n(k)$ に分解されたとする。すると、(i) より

$$W = \overline{W} \cap U_0 = (V_1 \cap U_0) \cup (V_2 \cap U_0) \tag{83}$$

となる。V_1, V_2 が空でないので、$V_1 \cap U_0, V_2 \cap U_0$ は空でないアフィン多様体であり、W は既約でない。

(iv) を示す:

1. $V_\bullet$: $\overline{W} = V_1 \cup \ldots \cup V_m$ を既約な分解とする。さらに、余計なものは除かれているとする。
2. どれか既約成分が無限遠超平面 $\mathbf{V}(x_0)$ に含まれているとする (背理法)。それが V_1 であるとして一般性を失なわない。
3. 上の $V_1 \subset \mathbf{V}(x_0)$ なので、$V_1 \cap \mathbf{V}(x_0) = \emptyset$ である。
4.

$$\begin{aligned}W &\overset{\boxed{\text{(i)}}}{=} \overline{W} \cap U_0 && (84)\\ &\overset{\boxed{1}}{=} (V_1 \cup \ldots \cup V_m) \cap U_0 && (85)\\ &= (V_1 \cap U_0) \cup ((V_2 \cup \ldots \cup V_m) \cap U_0) && (86)\\ &\overset{\boxed{3}}{=} (V_2 \cup \ldots \cup V_m) \cap U_0. && (87)\end{aligned}$$

5. 上より、$W \subset V_2 \cup \ldots \cup V_m$ となる。
6. 上と射影完備化の定義より、$\overline{W} \subset V_2 \cup \ldots \cup V_m$ となる。
7. 1 より $V_2 \cup \ldots \cup V_m \subset \overline{W}$ である。
8. 7,8 より、$V_2 \cup \ldots \cup V_m = \overline{W}$ である。
9. 1 と上より、$V_1 \subset V_2 \cup \ldots \cup V_m$ である。
10. 上で V_1 との $\cap$ をとり、

$$V_1 = (V_2 \cup \ldots \cup V_m) \cap V_1 = (V_2 \cap V_1) \cup \ldots \cup (V_m \cap V_1). \tag{88}$$

11. $\exists i$: 上と 1 の V_1 の既約性より、ある i について $V_1 = V_1 \cap V_i$ である。
12. 上より、$V_1 = V_1 \cap V_i \subset V_i$ となる。
13. 2 おわり: 上は、1 で余計なものを除いたことに矛盾する。よって、どの $\overline{W}$ の既約成分も無限遠超平面 $\mathbf{V}(x_0)$ に含まれることはない。

(証終)

定理 8: k を代数的閉体とし、$I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ を任意の[*5]イデアルとする。すると $\mathbf{V}(I^h) \subset \mathbb{P}^n(k)$ は $\mathbf{V}_a(I) \subset k^n$ の射影完備化である。

証明

1. W: $W = \mathbf{V}_a(I)$ とする。
2. Z: $Z = \mathbf{V}(I^h) \subset \mathbb{P}^n(k)$ とする。
3. 命題 7(i) と k が代数的閉体であることより、

$$
\begin{aligned}
W &\overset{\boxed{\text{命題 7(i)}}}{=} \overline{W} \cap V_0 && (89)\\
&= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \cap V_0 && (90)\\
&= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I))^h) \cap V_0 && (91)\\
&\subset \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I))^h) && (92)\\
&= \mathbf{V}(\sqrt{I}^h) && (93)\\
&\overset{\boxed{☆}}{\subset} \mathbf{V}(I^h) && (94)\\
&= Z. && (95)
\end{aligned}
$$

よって、$W \subset Z$ となっている。

4. (最小性を示す)
5. $\forall V, F_1, \ldots, F_s$: $V = \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s)$ を $W \subset V$ なる射影多様体とする。
6. 上より、$f_i = F_i(1, x_1, \ldots, x_n)$ と非斉次化として、

$$
\begin{aligned}
W &\subset U(F_1, \ldots, F_s) \cap U_0 && (96)\\
&= \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s, x_0 - 1) && (97)\\
&= \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s). && (98)
\end{aligned}
$$

7. 上より、各 i について $f_i \in \mathbf{I}_a(W)$ となる。
8. 上と 1 と、k が代数的閉体であることから $f_i \in \mathbf{I}_a(W) = \sqrt{I}$ である。
9. $\forall i$:
10. 8 より、$f_i \in \sqrt{I}$ となる。
11. $\exists m$: $m \geq 1$ が存在して、$f_i^m \in I$ となる。
12. 上より、$(f_i^m)^h \in I^h$ となる。
13. 上と 2 より、$(f_i^m)^h$ は Z を消す。
14. $(f_i^m)^h = (f_i^h)^m$？
    (a) $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ として、$(fg)^h = f^h g^h$？
        i. f, g の全次数を d, e としておく。
        ii. 命題 2-7(ii) より、

$$
\begin{aligned}
(fg)^h &= x_0^{d+e} \cdot (fg)(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) && (99)\\
&= (x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})) \cdot (x_0^e \cdot g(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})) && (100)\\
&= f^h \cdot g^h. && (101)
\end{aligned}
$$

よって、$(fg)^h = f^h \cdot g^h$ となる。

    (b) 上よりあきらか。よって、$(f_i^m)^h = (f_i^h)^m$ となる。
15. 13 と 14 より、$(f_i^h)^m$ は Z を消す。

16. 上より、f_i^h は Z を消す。
17. 命題 2-7(iv) より、F_i は f_i^h の倍数である。
18. 上と 16 より、F_i は Z を消す。
19. 9 おわり: 上より、$Z \subset \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) = V$ である。
20. Z は W を含む最小の射影多様体である。
21. 命題 7 より、$\overline{W}$ も W を含む最小の射影多様体なので、上より $\overline{W} = Z$ である。

(証終)

8.5 射影的消去理論

以下、

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \mapsto (1, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \tag{102}$$

によって、$k^n \times k^m$ を $\mathbb{P}^n \times k^m$ の $x_0 \neq 0$ で決まる部分集合と同一視する。

定義 2: k を体とする。

(i) 多項式 $F \in k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ は、ある整数 $l \geq 0$ に対して

$$F = \sum_{|\alpha|=l} h_\alpha(y_1, \ldots, y_m) x^\alpha \tag{103}$$

と表されるとき、$(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次であるという。ただし上の式で、x^α は $x_0, \ldots, x_n$ の多重次数 α の単項式、また $h_\alpha \in k[y_1, \ldots, y_m]$ である。

(ii) $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次多項式 $F_1, \ldots, F_s \in k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ によって定義された多様体 $\mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbb{P}^n \times k^m$ とは、次の集合

$$\{(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{P}^n \times k^m; F_i(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0 \quad (1 \leq i \leq s)\} \tag{104}$$

のことである。

($\mathbb{P}^n \times k^m$ の多様体を定義するために斉次多項式の概念を拡張した。) (ii) のほうは well-defined である。

定義 4: $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次多項式で生成されたイデアル $I \subset k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ が与えられたとき、I の射影的消去イデアルとは集合

$$\hat{I} = \left\{ f \in k[y_1, \ldots, y_m]; {}^\forall 0 \leq i \leq n \colon {}^\exists e_i \geq 0 \colon x_i^{e_i} f \in I \right\}. \tag{105}$$

のことである。

$k[y_1, \ldots, y_m]$ のイデアルになっていることはあきらか。

命題 5: $V = \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbb{P}^n \times k^m$ を $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次多項式で定義された多様体とし、$\pi \colon \mathbb{P}^n \times k^m \to k^m$ を射影とする。このとき、$\hat{I}$ を $I = \langle F_1, \ldots, F_s \rangle$ の射影的消去イデアルとすれば、k^m の中で

$$\pi(V) \subset \mathbf{V}(\hat{I}) \tag{106}$$

が成り立つ。

証明

1. $\forall a_\bullet, b_\bullet$: $(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in V$ とする。
2. $\forall f$: $f \in \hat{I}$
3. $\forall i$:
4. $\exists e_i$: 2 と射影的消去イデアルの定義により、$x_i^{e_i} f(y_1, \ldots, y_m) \in I$ となる $e_i \geq 0$ が存在する。
5. 上より、$x_i^{e_i} f(y_1, \ldots, y_m)$ は V を消す。
6. 3 おわり: 上より、任意の i について $a_i^{e_i} f(b_1, \ldots, b_m) = 0$ となる。
7. $\exists i$: 1 より、$(a_0, \ldots, a_n)$ は斉次座標なので $a_i \neq 0$ となる i がある。
8. 上と 4 より、$f(b_1, \ldots, b_m) = 0$ となる。
9. 1 おわり: 上より、f は $\pi(V)$ を消す。
10. 2 と上より、$\pi(V) \subset \mathbf{V}(\hat{I})$ となる。

(証終)

定理 6(射影化された拡張定理): k を代数的閉体とし、$V = \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbb{P}^n \times k^m$ を $k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ の $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次多項式で定義された多様体とする。$I = \langle F_1, \ldots, F_s \rangle$ の射影的消去イデアルを、$\hat{I} \subset k[y_1, \ldots, y_m]$ で表す。また

$$\pi \colon \mathbb{P}^n \times k^m \to k^m \tag{107}$$

を後半の m 個への座標空間への射影とするならば、

$$\pi(V) = \mathbf{V}(\hat{I}) \tag{108}$$

が成り立つ。

証明

命題 5 より $\pi(V) \subset \mathbf{V}(\hat{I})$ は成立しているので、$\mathbf{V}(\hat{I}) \subset \pi(V)$ を示したい。

1. $\forall \mathbb{c}, c_\bullet$: $\mathbb{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbf{V}(\hat{I})$ とする。
2. 任意の i について、$F(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})$ は $x_0, \ldots, x_n$ についての斉次多項式である。
3. $d_\bullet$: 各 i について、 $F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})$ の $x_0, \ldots, x_n$ の多項式としての全次数を d_i とする。
4. $\mathbb{c} \notin \pi(V)$ とする。(背理法)
5. 上より、

$$F_1(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}) = \cdots = F_s(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}) = 0 \tag{109}$$

   は $\mathbb{P}^n$ の空集合を定義する。(これを満足するような斉次座標の $x_\bullet$ は存在しない。) ($\mathbf{V}(F_1(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}), \ldots, F_s(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})) = \emptyset$ である。)
6. $\exists r$: k は代数的閉体であることから、上の空集合であることに射影化された零点定理の弱形 (定理 3-8) を使って、ある $r \geq 0$ が存在して

$$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r \subset \langle F_1(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}), \ldots, F_s(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}) \rangle . \tag{110}$$

7. $\forall \alpha$: $|\alpha| = r$ となる多重次数とする。
8. $H_\bullet$: 上と 6 より、$|\alpha| = r$ なる単項式 x^α は $F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})$ たちの多項式係数線形結合としてあらわされる:

$$x^\alpha = \sum_{i=1}^{s} H_i(x_0, \ldots, x_n) F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}). \tag{111}$$

   となる $H_\bullet$ がある。
9. 3(d_i の次数),7(α の次数),8(x^α の表現) より、H_i は全次数 $r - d_i$ の斉次多項式として一般性を失なわない。($F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})$ はもともと斉次。)

10. 7 おわり: 各 H_i を $|\beta_i| = r - d_i$ なる x^{β_i} の k 係数線形結合で書くと、8 より、任意の $|\alpha| = r$ なる α について、

$$x^\alpha = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\beta_i|=r-d_i} (\text{なにか係数}) x^{\beta_i} F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}) \tag{112}$$

となっている。

11. 上より、

$$x^{\beta_i} F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}), \quad i = 0, \ldots, s, \quad |\beta_i| = r - d_i \tag{113}$$

が $x_0, \ldots, x_n$ に関する全次数 r の斉次多項式すべての空間を張る。

12. N_r: 「$x_0, \ldots, x_n$ に関する全次数 r の斉次多項式すべての空間」の次元を N_r とする。実際はこれは $n+1$ 文字から r 文字選ぶ方法の数になっている。

13. $G_\bullet$: 11 の基底たちを、12 より N_r 個選んでこれを「$x_0, \ldots, x_n$ に関する全次数 r の斉次多項式すべての空間」の基底にすることができる。その基底を

$$G_j(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}), \quad j = 1, \ldots, N_r \tag{114}$$

とする (x^{β_i} の部分は、これが $x_\bullet$ の関数なので折り込んでよい。)。

14. $a_{\bullet\bullet}$: 13 の $G_\bullet$ の定義より、これは 11 のような $x_\bullet$ について r 次の斉次多項式式 $x^{\beta_i} F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})$ たちでできているのだから、これを斉次分解することにより各 $j = 1, \ldots, N_r$ について

$$G_j = \sum_{|\alpha|=r} a_{j\alpha}(y_1, \ldots, y_m) x^\alpha \tag{115}$$

となる $a_{j\alpha} \in k$ が存在する。

15. 上について、$|\alpha| = r$ となる単項式の個数は 12 の定義より N_r だったので、$a_{j\alpha}$ は j を固定すると N_r 個ある。

16. $D(y_1, \ldots, y_m)$: 上より、$a_\bullet$ は正方形に並べられるので行列式

$$D(y_1, \ldots, y_m) = \det(a_{j\alpha}(y_1, \ldots, y_m); 1 \le j \le N_r, |\alpha| = r) \tag{116}$$

が考えられる。

17. 14 の式で $(y_1, \ldots, y_m) = \mathbb{c}$ と代入し j を走らせながら並べることにより、

$$\underbrace{(G_1, \ldots, G_{N_r})(\mathbb{c})}_{N_r \times N_r} = \underbrace{(a_{j\alpha}; 1 \le j \le N_r, |\alpha| = r)(y_1, \ldots, y_m)}_{N_r \times N_r} \cdot \underbrace{(x_\alpha; |\alpha| = r)}_{N_r \times N_r}. \tag{117}$$

となる。ただし、左の行列と右の行列は多項式なので、それを項毎に α についての適当な順序で並べたベクトルと見做している。

18. 上は、「$x_0, \ldots, x_n$ に関する全次数 r の斉次多項式すべての空間」の基底の変換の式になっているので ($G_\bullet$ が基底なのは 13 による。$x_\bullet$ は標準的な基底。) $(a_{j\alpha}; 1 \le j \le N_r, |\alpha| = r)(y_1, \ldots, y_m)$ は正則である。

19. 上より、$D(\mathbb{c}) \ne 0$ である。

20. $D(y_1, \ldots, y_m) = 0$ だとすると $D(\mathbb{c}) = 0$ となるので上に矛盾する。したがって、$D(y_1, \ldots, y_m) \ne 0_{k[y_1, \ldots, y_m]}$ となる。

21. 17 の式

$$(a_{j\alpha}; 1 \le j \le N_r, |\alpha| = r)(y_1, \ldots, y_m) \cdot (x_\alpha; |\alpha| = r) = (G_1, \ldots, G_{N_r})(\mathbb{c}) \tag{118}$$

は x_α たちについての $k(y1, \ldots, y_m)$ 上での

22. M_α: $(a_{j\alpha}; 1 \le j \le N_r, |\alpha| = r)(y_1, \ldots, y_m)$ の第 α 列を $\begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_{N_r} \end{pmatrix}$ に取り替えたものとする。

23. 上と 21 とクラメルの公式と 20 の非零より、

$$x^\alpha = \frac{\det(M_\alpha)}{D(y_1,\ldots,y_m)}. \tag{119}$$

24. $H_{j\alpha}$: $H_{j\alpha}$ を $(a_{j\alpha}; 1 \le j \le N_r, |\alpha| = r)(y_1,\ldots,y_m)$ から j 列 α 行を除いた小行列の行列式とする。(j 列 α 行での展開のやつ。)
25. 23 で、$\det(M_\alpha)$ を α 列目で展開することで、24 も利用し

$$x^\alpha D(y_1,\ldots,y_m) = \sum_{j=1}^{N_r} H_{j\alpha}(y_1,\ldots,y_m) G_j(x_0,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m). \tag{120}$$

26. 13 の定義より、各 G_j は $x^{\beta_i}F_i$ の形をしていたので、

$$x^\alpha D(y_1,\ldots,y_m) \in \langle F_1,\ldots,F_s\rangle = I. \tag{121}$$

27. 上より、$D(y_1,\ldots,y_m) \in \hat{I}$ となる。
28. 上より、$D(y_1,\ldots,y_m)$ は $\mathbf{V}(\hat{I})$ を消す。
29. 1 より $\mathbb{c} \in \mathbf{V}(\hat{I})$ なので、上より、$D(y_1,\ldots,y_m)$ は $\mathbb{c}$ を消す: $D(\mathbb{c}) = 0$ となる。
30. 上と 19 は矛盾する。
31. 4 おわり: $\mathbb{c} \in \pi(V)$ となる。
32. 1 おわり: $\mathbf{V}(\hat{I}) \subset \pi(V)$ となる。

(証終)

命題 7: $I \subset k[x_0,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]$ をイデアルとする。十分大きなすべての整数 e に対して、

$$\hat{I} = (I : \langle x_0^e,\ldots,x_n^e\rangle) \cap k[y_1,\ldots,y_m] \tag{122}$$

が成り立つ。

証明

1. イデアル商の定義より、

$$^\forall 0 \le i \le n\colon f \in I : \langle x_0^e,\ldots,x_n^e\rangle \implies x_i^e f \in I \tag{123}$$

である。

2. 上より、任意の $e \ge 0$ に対して、

$$(I : \langle x_0^e,\ldots,x_n^e\rangle) \cap k[y_1,\ldots,y_m] \subset \hat{I} \tag{124}$$

となる。($f \in \hat{I} \subset k[y_1,\ldots,y_m]$ のための条件は、$x_0,\ldots,x_n$ の適当な冪を f にかければ I に入るということだった。)

3.
$$I : \langle x_0,\ldots,x_n\rangle \subset I : \left\langle x_0^2,\ldots,x_n^2\right\rangle \subset \ldots \tag{125}$$

という昇鎖がある。

4. $\exists e$: 上の昇鎖は安定するので、e 以降安定するとする:

$$I : \langle x_0^e,\ldots,x_n^e\rangle = I : \left\langle x_0^{e+1},\ldots,x_n^{e+1}\right\rangle = \ldots \tag{126}$$

である。

5.
$$^\forall d \ge 0\colon I : \left\langle x_0^d,\ldots,x_n^d\right\rangle \subset I : \langle x_0^e,\ldots,x_n^e\rangle. \tag{127}$$

6. $\forall f$: $f \in \hat{I}$ とする。
7. 上より、

$$^{\forall}0 \le i \le n\text{: } ^{\exists}e_i \ge 0\text{: } x_i^{e_i} f \in I. \tag{128}$$

8. d: $d = \max(e_0, \ldots, e_n)$ とする。
9. 上の定義と 7 より、$x_i^d f \in I$ がすべての i で成立する。
10. 上より、$f \in I : \left\langle x_0^d, \ldots, x_n^d \right\rangle$ である。
11. 6 で、$f \in \hat{I} \subset k[y_1, \ldots, y_n]$ と 5 より、

$$f \in (I : \langle x_0^e, \ldots, x_n^e \rangle) \cap k[y_1, \ldots, y_m]. \tag{129}$$

12. 上より、

$$\hat{I} \subset \langle I : \langle x_0^e, \ldots, x_n^e \rangle\rangle \cap k[y_1, \ldots, y_m]. \tag{130}$$

13. 2,12 より、

$$\hat{I} = \langle I : \langle x_0^e, \ldots, x_n^e \rangle\rangle \cap k[y_1, \ldots, y_m]. \tag{131}$$

(証終)

定義: $F \in k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ において $x_i = 1$ について、

$$F^{(i)} = F(x_0, \ldots, \overset{\overset{i}{\vee}}{1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in k[x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]. \tag{132}$$

イデアルの非斉次化を

$$I^{(i)} = \left\{ F^{(i)}; F \in I \right\} \subset k[x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]. \tag{133}$$

とする。$I = \langle F_1, \ldots, F_s \rangle$ のときには、$I^{(i)} = \left\langle F_1^{(i)}, \ldots, F_s^{(i)} \right\rangle$ が成立する。

命題 8: $I \subset k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ を $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次多項式で生成されたイデアルとする。すると、

$$\hat{I} = I_n^{(0)} \cap I_n^{(1)} \cap \ldots \cap I_n^{(n)} \tag{134}$$

が成り立つ。

証明

1. $\hat{I} = I^{(0)} \cap \ldots \cap I^{(n)} \cap k[y_1, \ldots, y_m]$ を示す。
2. $\forall f$: $f \in \hat{I}$ とする。
3. $\forall i$:
4. 2 より、$x_i^{e_i} f(y_1, \ldots, y_m) \in I$
5. 上で $x_i = 1$ として、$f(y_1, \ldots, y_m) \in I^{(i)}$ となる。
6. 3 おわり: $f(y_1, \ldots, y_m) \in I^{(0)} \cap \ldots \cap I^{(n)}$
7. 2 おわり: $\hat{I} \subset I^{(0)} \cap \ldots \cap I^{(n)} \cap k[y_1, \ldots, y_m]$ となる。
8. $\forall i$:
9. $\forall f$: $f \in I^{(i)}$
10. $\exists F$: $I^{(i)}$ の定義より、f はある $F \in I$ で $x_i = 1$ とおくことで得られる。
11. F は $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次として一般性を失なわない？
    (a) $F_\bullet$: F を $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次に分解する: $F = \sum_{j=0}^{d} F_j$ となる。

(b) I が $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式で生成されていることから、各 $F_j \in I$ となる。 これは定理 3-2 と同様に示せる。概略としては、$F \in I$ から F を I の生成元の一次結合で書き、それを $x_\bullet$ 斉次なものたちで整理する。あとは、次数で $F = \sum_{j=0}^{d} F_j$ と比較し、$F_j \in I$ を得る

(c) $\sum_{j=0}^{d} x_i^{d-j} F_j$ は I に含まれる $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式。(全次数は、F_j が (a) より j となるようにしておいたので、x_i^{d-i} をかけて d 次。)

(d) 上の $\sum_{j=0}^{d} x_i^{d-j} F_j$ は $x_i = 1$ とすれば非斉次化され f に一致する。

(e) 上より、$F \in I$ は $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次と仮定してよい。もとの F から、斉次になるように作り直すことができた。

12. 9 おわり: $f \in I^{(i)}$ について、$(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式 F が存在して、$f = F(x_1,\dots,\overset{\overset{i}{\vee}}{x_i},\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ となる。

13. $\bullet^h$: 記号を定める。$f \in k[x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ に対して、x_i を用いて $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式 $f^h \in k[x_0,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ を作ることで斉次化作用素 $\bullet^h$ を定める。

14. $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式 F について、$f = F(x_0,\dots,\overset{\overset{i}{\vee}}{1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ と非斉次化するとき、ある整数 $e \geq 0$ について $F = x_i^e f^h$ となる？

(a) $i = 0$ として一般性を失なわない。

(b) $F = \sum_{|\alpha|=l} h_\alpha(y_1,\dots,y_n) x^\alpha$ と分解する。

(c) さらに、x_0 だけ特別扱いする。

$$F = \sum_{j=0}^{l} \sum_{|\beta|=l-j} h_{(j,\beta)}(y_1,\dots,y_n) x^{(j,\beta)} \tag{135}$$

とする。

(d)

$$f = \sum_{j=0}^{l} \sum_{|\beta|=l-j} h_{(j,\beta)}(y_1,\dots,y_n) x^{(0,\beta)} \tag{136}$$

(e) l' を、$h_{(l',\beta)}(y_1,\dots,y_n) \neq 0$ なる β があるような l' のうち最小のものとする。すると、

$$f = \sum_{j=l'}^{l} \sum_{|\beta|=l-j} h_{(j,\beta)}(y_1,\dots,y_n) x^{(0,\beta)} \tag{137}$$

となり、f の $(x_1,\dots,x_n)$ についての全次数は $l - l'$ となる。

(f) 上より、

$$f^h = \sum_{j=l'}^{l} \sum_{|\beta|=l-j} h_{(j,\beta)}(y_1,\dots,y_n) x^{(j-l',\beta)} \tag{138}$$

となる。全次数は変わらず $l - l'$ である。

(g) (c),(f) より、

$$F = f^h \cdot x_0^{l'} \tag{139}$$

となる。

15. $\forall f$: $f \in I^{(i)} \cap k[y_1,\dots,y_m]$ とする。
16. $\exists F$: 9-12 より、$f = F(x_i = 1)$ と、非斉次化して f になる $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式 $F \in I$ がある。
17. 15 より、f は $x_0,\dots,x_n$ を含まないので、($(x_0,\dots,x_n)$ に関する全次数が $-\infty$ であり、) $f = f^h$ である。
18. $\exists e$: 14 より、$F = x_i^e f^h$ となる $e \geq 0$ が存在する。
19. 上と 17 より、$F = x_i^e f$ である。

20. 上と 16 より、$x_i^e f \in I$ である。
21. 15 おわり: 任意の i について、$e_i \geq 0$ があって、$x_i^{e_i} f \in I$ となる。
22. 上より、$f \in \hat{I}$ である。
23. 15 おわり:

$$I^{(0)} \cap \ldots \cap I^{(n)} \cap k[y_1, \ldots, y_m] \subset \hat{I}. \tag{140}$$

24. 7,23 より、

$$I^{(0)} \cap \ldots \cap I^{(n)} \cap k[y_1, \ldots, y_m] = \hat{I}. \tag{141}$$

(証終)

定義: $I \subset k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ について、I の $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次化 I^h を

$$I^h = \langle f^h; f \in I \rangle \subset k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]. \tag{142}$$

命題 9: イデアル $I \subset k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ の $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次化を I^h とする。

(i) I^h の射影的消去イデアルは I の第 n 消去イデアルに一致する。つまり $\hat{I^h} = I_n \subset k[y_1, \ldots, y_m]$ が成り立つ。
(ii) k が代数的閉体のとき、$\overline{V} = \mathbf{V}(I^h)$ は、アフィン多様体 $V = \mathbf{V}_a(I) \subset k^n \times k^m$ を含む $\mathbb{P}^n \times k^m$ における最小の多様体である。$\overline{V}$ を V の $\mathbb{P}^n \times k^m$ における射影完備化とよぶ。

証明
(i) を示す。

1. I^h を x_0 について非斉次化すれば、$(I^h)^{(0)} = I$ となる (h で x_0 をつけたし、それを 1 にしたのでもとにもどる。)。
2. 命題 8 より (あるいはその証明より)

$$\hat{I^h} = (I^h)_n^{(0)} \cap \ldots \cap (I^h)_n^{(n)} \cap k[y_1, \ldots, y_n] \tag{143}$$

である。
3. 1 と 2 より、

$$\hat{I^h} \subset (I^h)_n^{(0)} = I_n. \tag{144}$$

4. $\forall f$: $\forall f \in I_n$
5. $f \in k[y_1, \ldots, y_n]$ なので、f $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次になっている。($-\infty$ 次。)
6. 上と 4 の $f \in I_n \subset I$ より、$f = f^h \in I^h$ となる。
7. 上より、任意の i について $x_i^0 f \in I^h$ である。(1 をかけただけ)
8. 上と射影的消去イデアルの定義より、$f \in \hat{I^h}$ となる。
9. 4 おわり: $I_n \subset \hat{I^h}$ となる。
10. 3,9 より、$I_n = \hat{I^h}$ となる。

(ii) を示す。略証。

1. (まず $\mathbf{V}_a(I) = V \subset \overline{V} = \mathbf{V}(I^h)$ を示す。)

2.

$$\begin{aligned} V &= \mathbf{V}_a(I) && (145)\\ &= \mathbf{V}_a(I^h, x_0 - 1) && (146)\\ &\subset \mathbf{V}_a(I^h). && (147) \end{aligned}$$

3. (次に、最小性を示す。)
4. $\forall F_1, \ldots, F_s$: $V = \mathbf{V}_a(I) \subset \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s)$ と、$F_1, \ldots, F_s \in k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ となる $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次多項式を考える。
5. $f_\bullet$: 各 i について、f_i を F_i の非斉次化とする。
6.

$$\begin{aligned} V &\subset \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) \cap (U_0 \times k^m) && (148)\\ &= \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s, x_0 - 1) && (149)\\ &= \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s). && (150) \end{aligned}$$

7. 上より、$f_1, \ldots, f_s \in \mathbf{I}_a(V) = \sqrt{I}$ となる。
8. $\exists m_i$:

$${}^\forall i\colon {}^\exists m_i \geq 0\colon f_i^{m_i} \in I. \tag{151}$$

9. 上より、

$${}^\forall i\colon {}^\exists m_i \geq 0\colon (f_i^{m_i})^h \in I^h. \tag{152}$$

10. 上で、冪と斉次化を交換して (多分できる)

$${}^\forall i\colon {}^\exists m_i \geq 0\colon (f_i^h)^{m_i} \in I^h. \tag{153}$$

11. 上より、各 $(f_i^h)^{m_i}$ は $\mathbf{V}(I^h)$ を消す。
12. 上より、各 f_i^h は $\mathbf{V}(I^h)$ を消す。
13. 各 F_i は f_i^h の倍数である。
14. 上と 12 より、各 F_i は $\mathbf{V}(I^h)$ を消す。
15. 上より、$\mathbf{V}(I^h) \subset \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s)$ である。
16. 4 おわり: 4 より、$\mathbf{V}_a(I)$ を包む $\mathbb{P}^n \times k^m$ の多様体は $\mathbf{V}(I^h)$ を包む。
17. 2,16 より、$\mathbf{V}(I^h)$ は $\mathbf{V}_a(I)$ を包む最小の $\mathbb{P}^n \times k^m$ の多様体である。

(証終)

系 10: k を代数的閉体とし、イデアル $I \subset k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ に対して $V = \mathbf{V}_a(I) \subset k^n \times k^m$ とおく。すると

$$\mathbf{V}(I_n) = \pi(\overline{V}) \tag{154}$$

が成り立つ。ただし $\overline{V} \subset \mathbb{P}^n \times k^m$ は V の射影完備化であり、$\pi\colon \mathbb{P}^n \times k^m \to k^m$ は射影である。

証明

1. 命題 9 より、$\overline{V} = \mathbf{V}(I^h)$ である。
2. 命題 9 より、$\hat{I^h} = I_n$ である。
3. 定理 6 を多様体 $\mathbf{V}(I^h)$、イデアル I^h に使うと、$\pi(\mathbf{V}(I^h)) = \mathbf{V}(\hat{I^h})$ がわかる。
4.

$$\mathbf{V}(I_n) \overset{\boxed{2}}{=} \mathbf{V}(\hat{I^h}) \overset{\boxed{3}}{=} \pi(\mathbf{V}(I^h)) \overset{\boxed{1}}{=} \pi(\overline{V}). \tag{155}$$

(証終)

命題 11: $>$ を $k[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ の単項式順序であって、$x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m$ の単項式 $x^\alpha y^\gamma, x^\beta y^\delta$ に対して

$$|\alpha|>|\beta| \implies x^\alpha y^\gamma > x^\beta y^\delta \tag{156}$$

となるようなものとする。$G=\langle g_1,\dots,g_s\rangle$ が $I\subset k[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ の $>$ に関するグレブナ基底であれば、$G^h=\left\{g_1^h,\dots,g_s^h\right\}$ は $I^h\subset k[x_0,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ の基底である。

証明

Pending.

(証終)

先に演習問題を解く。

演習 16: $(x_0,\dots,x_n)$ を $\mathbb{P}^n$ の斉次座標、$(y_0,\dots,y_m)$ を $\mathbb{P}^m$ の斉次座標とする。

(a) 「$h\in k[x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_m]$ は

$$h=\sum_{|\alpha|=k,|\beta|=l} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta \tag{157}$$

と書けるとき、双斉次とよばれる。このとき、h は双次数 (k,l) を持つという。$h_1,\dots,h_s$ が双斉次のとき、多様体

$$\mathbf{V}(h_1,\dots,h_s)\subset\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m \tag{158}$$

は矛盾なく定義できることを示せ。また $J\subset k[x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_m]$ が双斉次多項式で生成されたイデアルであるとき、$\mathbf{V}(J)\subset\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m$ をどのように定義すればよいかを説明せよ。また、$\mathbf{V}(J)$ は多様体であることを証明せよ。」明らか。

(b) 「J が双斉次多項式で生成されていれば、$V=\mathbf{V}(J)\subset\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m$ が定義できた。J は $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次でもあるから、その射影的消去イデアル $\hat{J}\subset k[y_0,\dots,y_m]$ が構成できる。$\hat{J}$ は斉次イデアルであることを証明せよ。」$(x_0,\dots,x_n)$ 斉次化を I^h とする。命題 9 より $\hat{J}^h=J_n$ となる。また、J はすでに $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次なので、$J^h=J$ である。よって、$\hat{J}=J_n$ となる。J は斉次イデアルになっているので (グレブナ基底を考えれば) J_n も斉次イデアルになっている。よって、$\hat{J}$ は斉次イデアルである。

(c) $\mathbf{V}(J)$ を $\mathbb{P}^n\times k^{m+1}$ の多様体とみなし、定理 6 より $\pi(V)=\mathbf{V}(\hat{J})$ を得る。

定理 12: k を代数的閉体とする。すべて同じ全次数を持ち、$\mathbb{P}^n$ において共通零点を持たないような斉次多項式 $f_0,\dots,f_m\in k[x_0,\dots,x_n]$ によって定義される写像を $F\colon\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^m$ とする。$k[x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_m]$ におけるイデアル $I=\langle y_0-f_0,\dots,y_m-f_m\rangle$ を考え、$I_{n+1}=I\cap k[y_0,\dots,y_m]$ とおく。すると I_{n+1} は $k[y_0,\dots,y_m]$ の斉次イデアルであって、

$$F(\mathbb{P}^n)=\mathbf{V}(I_{n+1}) \tag{159}$$

が成り立つ。

証明

1. I_{n+1} は斉次イデアル？

2. d: 各 f_i の全次数 (これらは仮定より一致する) を d とする。
3. 各 x_i にウェイト 1 を与え、y_j にウェイト d を与える。
4. $f \in k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ がウェイト付き斉次多項式とは、f の単項式がすべて同じウェイトを持つ場合をいう。
5. I の生成元 $y_i - f_i$ たちはすべてウェイト d を持つ。
6. 上より、I はウェイトつき斉次イデアルである。
7. G: G を I のグレブナ基底とする。
8. 定理 3-2 と同様の定理が示せて、上と 6 より G はウェイトつきの斉次多項式からなる。
9. lex 順序をとると、消去定理により、$G \cap k[y_0, \dots, y_m]$ は $I_{n+1} = I \cap k[y_0, \dots, y_m]$ の基底になる。
10. 8,9 より、I_{n+1} はウェイト付き斉次多項式からなる基底を持つ。
11. 3 より y_i たちは同じウェイトを持つ。
12. 上より、$k[y_0, \dots, y_m]$ の多項式について、「これが斉次である $\iff$ これがウェイト付き斉次である」となる。
13. $h \in k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ はもしそれが

$$h = \sum_{|\alpha|=k, |\beta|=l} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \tag{160}$$

とかけていれば、双斉次であるという。このとき、$h_1, \dots, h_s$ が双斉次なら、$\mathbf{V}(h_1, \dots, h_s) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ が定義され、多様体になる。$J \subset k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ が双斉次多項式で生成されたイデアルなら、多様体 $\mathbf{V}(J) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ が定義される。
14. J が双斉次多項式で生成されたイデアルなら、演習 16 より、$\hat{J} \subset k[y_0, \dots, y_m]$ は斉次イデアルである。
15. J が双斉次多項式で生成されたイデアルなら $\pi\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^m$ で $\pi(\mathbf{V}(J)) = \mathbf{V}(\hat{J})$ となる。(演習 16 より。)
16. J: $J = \langle y_i f_j - y_j f_i \rangle$ とする。
17. $\mathbf{V}(J) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ が $F\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ のグラフ？
    (a) i. (Fのグラフ) $\subset \mathbf{V}(J)$？
        A. $\forall p$: $p \in \mathbb{P}^n$ とする。
        B. $\forall i$:
        C. $y_i = f_i(p)$ である。
        D. A,B おわり:$(p, F(p)) \in \mathbf{V}(J)$ となる。
       ii. $\mathbf{V}(J) \subset$ (Fのグラフ)？
        A. $\forall p, q$: $(p, q) \in \mathbf{V}(J)$ とする。
        B. $p_\bullet, q_\bullet$: p の第 i 斉次座標を p_i とし、q についても同様にする。
        C. 16 より、任意の i, j について $q_i f_j(p) = q_j f_i(p)$ となる。
        D. $\exists j$: $q_\bullet$ は斉次座標なので、$q_j \neq 0$ となる j がある。
        E. $\exists i$: 仮定より $f_\bullet$ たちがすべて 0 になるようなことはないので、、$f_i(p) \neq 0$ となる i がある。
        F. C,D,E より、$q_i f_j(p) = q_j f_i(p) \neq 0$ となる。
        G. 上より、$q_i \neq 0$ である。
        H. λ: $\lambda = q_i / f_i(p)$ とする。
        I. 16 より、$q = \lambda f(p)$ である。
        J. A おわり: 上より、$(p, q) \in$ (Fのグラフ) となる。
      よって、$\mathbf{V}(J) =$ (Fのグラフ) となる。
18. 上とグラフ、射影の性質より、$\pi(\mathbf{V}(J)) = F(\mathbb{P}^n)$ である。
19. 15 より、$\mathbf{V}(\hat{J}) = F(\mathbb{P}^n)$ である。
20. 上より、F の像は $\mathbb{P}^m$ の多様体である。
21. $\mathbf{V}(\hat{J}) = \mathbf{V}(I_{n+1})$？ つまり、$\mathbf{V}_a(\hat{J}) = \mathbf{V}_a(I_{n+1})$？
    (a) $\mathbf{V}_a(I) \subset k^{n+1} \times k^{n+1}$ は $(f_0, \dots, f_m)$ で決まる写像 $k^{n+1} \to k^{n+1}$ のグラフである。
    (b) $\pi\colon k^{n+1} \times k^{m+1} \to k^{m+1}$ とする。
    (c) $\pi(\mathbf{V}_a(I)) = \mathbf{V}_a(\hat{J})$？

i. 15 より、$\mathbf{V}(\hat{J}) = F(\mathbb{P}^m)$ である。
ii. 上より、原点を除いて考えれば

$$q \in \mathbf{V}_a(\hat{J}) \iff {}^{\exists}p \in k^{n+1}\colon q = F(p). \tag{161}$$

iii. $\exists\lambda$: 上より、$q = \lambda F(p)$ となる $\lambda \neq 0$ がある。
iv. λ': $\lambda' = \sqrt[d]{\lambda}$ とする。
v. $q = F(\lambda' p)$ となる。
vi. 上より、

$$ {}^{\exists}p \in k^{n+1}\colon q = F(p) \iff q \in \pi(\mathbf{V}_a(I)). \tag{162}$$

vii. ii,vi より、

$$q \in \mathbf{V}_a(\hat{J}) \iff q \in \pi(\mathbf{V}_a(I)). \tag{163}$$

よて、$\mathbf{V}_a(\hat{J}) = \mathbf{V}_a(I_{n+1})$ となる。

(d) 閉包定理により、$\mathbf{V}_a(I_{n+1})$ は $\pi(\mathbf{V}_a(I))$ を含む最小の多様体。
(e) (c)(d) より、$\mathbf{V}_a(\hat{J}) = \mathbf{V}_a(I_{n+1})$ となる。

よって、$\mathbf{V}_a(\hat{J}) = \mathbf{V}_a(I_{n+1})$ であり、$\mathbf{V}(\hat{J}) = \mathbf{V}(I_{n+1})$ となる。

22. 19 と 21 より、$F(\mathbb{P}^n) = \mathbf{V}(I_{n+1})$ である。

(証終)

8.6 2 次超曲面の幾何

$A \in GL(n+1, k)$ は $A\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ を引き起こす。

命題 1: $A \in GL(n+1, k)$ とし、$V \subset \mathbb{P}^n$ を多様体とする。すると $A(V) \subset \mathbb{P}^n$ はまた多様体となる。このとき V と $A(V)$ は射影同値であるという。

証明

1. $\exists s, f_\bullet$: $V = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ とする。ただしこれらは斉次多項式。
2. B: $B = A^{-1}$
3. $g_\bullet$: 各 i について、$g_i = f_i \circ B$ とする。
4. $b_{\bullet\bullet}$: $B = (b_{ij})$ とする。
5.

$$g_i(x_0, \ldots, x_n) = f_i(\sum_{j=0}^{n} b_{0j}x_0, \ldots, \sum_{j=0}^{n} b_{nj}x_n) \tag{164}$$

となる。

6. 上の各 g_i は斉次
7. f_i と全次数は一致する。
8. $A(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)) = \mathbf{V}(g_1, \ldots, g_s)$ となる。(計算する。)

(証終)

命題 2: すべての超平面 $H \subset \mathbb{P}^n$ は射影同値である。

証明

H が $\mathbf{V}(x_0)$ に射影同値なことを示す。

1. $\exists x_\bullet, f$ H は $f = a_0x_0 + \cdots + a_nx_n$ で定義されるとする。$a_0 \neq 0$ と仮定する。
2.

$$X_0 = a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \tag{165}$$
$$X_1 = x_1, \tag{166}$$
$$\vdots \tag{167}$$
$$X_n = x_n. \tag{168}$$

   と斉次座標をとる。
3. $\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}(X_0)$ である。
4. A: $\mathbf{V}(f)$ と $\mathbf{V}(x_0)$ が

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{169}$$

   によって射影同値。
5. 上は、1 の $a_0 \neq 0$ より可逆。
6. $A(\mathbf{V}(f)) = \mathbf{V}(x_0)$ となる。
7. 上より、射影同値。

x_0 でなく x_i のときには $\mathbf{V}(x_i) \simeq \mathbf{V}(x_0)$ を示せばよい。

(証終)

定義 3: f がゼロではない全次数 2 の斉次多項式のとき、多様体 $V = \mathbf{V}(f) \subset \mathbb{P}^n$ を 2 次超曲面、あるいはもっと簡単に 2 次曲面とよぶ。

定理 4(2 次曲面の標準形): $f = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_ix_j \in k[x_0, \dots, x_n]$ をゼロでない全次数が 2 の斉次多項式とし、k は標数が 2 でない体とする。すると $\mathbf{V}(f)$ は

$$c_0x_0^2 + \cdots + c_nx_n^2 = 0 \tag{170}$$

で定義された 2 次曲面に射影同値である。ここで $c_0, \dots, c_n$ は k の元であって、同時にゼロにはならない。

証明

1. 座標変換 $X_i = \sum_{j=0}^n b_{ij}x_j$ であって、f がの座標に関して

$$c_0X_0^2 + \cdots + c_nX_n^2 \tag{171}$$

   と現わされるようなものを見つけてくればよい。
2. 帰納法を使う。1 変数のときは自明。n 変数のとき正しいとする。
   (a) $\forall f$: $f = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_ix_j$ とする。
   (b) $a_{00} \neq 0$ としてよい？
      i. $a_{00} = 0$ であるが、ある $1 \leq j \leq n$ については $a_{jj} \neq 0$ であるとき:
         A.

$$X_0 = x_j, \quad {}_Xj = x_0, \quad X_i = x_i (i \neq 0, j) \tag{172}$$

            とする。

B. 上と i より、座標 $X_0, \dots, X_n$ に関して f の X_0^2 の係数はゼロでない。

ii. すべての $a_{ii} = 0$ のとき:

A. $\exists i, j$: $f \neq 0$ なので (仮定)、ある $i \neq j$ について $a_{ij} \neq 0$ となる。

B. 座標の入れ替えを行なうことにより、$a_{01} \neq 0$ として一般性を失なわない。

C.

$$X = x_0, \quad X_1 = x_1 - x_0, \quad X_i = x_i (i \geq 2) \tag{173}$$

とする。

D. $f = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} X_i X_j$ とあらわすと、計算すれば $c_{00} = a_{01} \neq 0$ となる。

よって、適当な座標変換で $a_{00} \neq 0$ としてよい。

(c)

$$\frac{1}{a_{00}}(a_{00}x_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i0}}{2} x_i)^2 = a_{00}x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} a_{i0}x_0x_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{i0}a_{j0}}{4a_{00}} x_i x_j \tag{174}$$

である。標数は 2 ではないので、上の 2 での割り算は正当である。

(d) 座標変換

$$X_0 = x_0 + \frac{1}{a_{00}} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i0}}{2} x_i, \quad X_i = x_i (i \geq 1). \tag{175}$$

(e) 上で計算すると、

$$a_{00}X_0^2 + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} X_i X_j. \tag{176}$$

となる。

(f) 帰納法の仮定より、$\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} X_i X_j$ を $e_1 X_1^2 + \cdots + e_n X_n^2$ に写せる。

(証終)

定義 5: $V \subset \mathbb{P}^n$ を 2 次超曲面とする。

(i) V が

$$c_0 x_0^2 + \cdots + c_p x_p^2 = 0, \quad c_0, \dots, c_p \neq 0 \tag{177}$$

によって定義されているとき、V は階数 $p+1$ を持つという。

(ii) もっと一般に、V が任意の 2 次曲面のとき、V が階数 $p+1$ を持つとは、V が上で定義される 2 次曲面と射影同値であるときにいう。

上は well-defined になる。

命題 6: Q を $(n+1) \times (n+1)$ 対称行列として、$f = \mathbb{x}^t Q \mathbb{x}$ とおく。

(i) $A \in GL(n+1, k)$ が与えられたとする。$B = A^{-1}$ とおくと、$g = \mathbb{x}^t \mathbb{B}^t Q B \mathbb{x}$ に対して、$A(\mathbf{V}(f)) = \mathbf{V}(g)$ が成り立つ。

(ii) 2 次超曲面 $\mathbf{V}(f)$ の階数は行列 Q の階数に一致する。

証明

(i) を示す。

1. g: $g = f \circ B$
2. 計算すると、$A(\mathbf{V}(f)) = \mathbf{V}(g)$ となる。
3.

$$g(\mathbb{x}) = f(B\mathbb{x}) = (B\mathbb{x})^t Q(B\mathbb{x}) = \mathbb{x}^t B^t QB\mathbb{x}. \tag{178}$$

(ii) を示す。

1. $\mathrm{rank}Q = \mathrm{rank}B^t QB$ となる。
2. $\exists A, c_\bullet$: $g = c_0 x_0^2 + \cdots + c_p x_p^2$ となる $A, C_\bullet$ がある。ここで、$c_0, \ldots, c_p \neq 0$ である。((i) のなかで、B も定まる。)
3.

$$B^t QB = \begin{pmatrix} c_0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_p & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{179}$$

4. $\mathrm{rank}B^t QB = p + 1$ となる。

(証終)

命題 7: k が代数的閉体であって、その標数が 2 でないとする。すると、階数が $p+1$ の 2 次超曲面は、次の式で定義される 2 次曲面に射影同値である。

$$\sum_{i=0} p x_i^2 = 0. \tag{180}$$

特に、2 つの 2 次曲面は、等しい階数を持つとき、かつそのときに限り射影同値である。

証明
階数 $p+1$ の 2 次超曲面が、それに射影同値であることを示す。

1. $c_\bullet, p$: 定理 4 より、2 次曲面は $c_0 x_0^2 + \cdots + c_p x_p^2 = 0$ としてよい。$p+1$ が階数。どの係数も 0 でない。
2. 任意の i について、k が代数的閉体ということから、$x^2 - c_i = 0$ は k に根を持つので、その 1 つを $\sqrt{c_i}$ とする。
3. 1 で各 c_i は 0 でないので、上の $\sqrt{c_i} \neq 0$ である。
4.

$$X_i = \sqrt{c_i} x_i \, (0 \leq i \leq p), \quad X_i = x_i, \, (p < i \leq n). \tag{181}$$

と変換する。
5. 上の変換を計算すると射影同値である。

射影同値なら同じ階数を示す。

1. f, g: $\mathbf{V}(f)$ と $\mathbf{V}(g)$ が射影同値であるとする。
2. Q, B 命題 7 より、f は Q に対応しており、g は $B^t QB$ に対応する。B は可逆。
3. 上で B は可逆なので、$\mathrm{rank}Q = \mathrm{rank}(B^t QB)$ となる。
4. 上より、$\mathbf{V}(f)$ と $\mathbf{V}(g)$ は同じ階数である。

(証終)

定義 8: $\mathbb{P}^n$ の 2 次曲面はその階数が $n+1$ であるとき、非特異であるという。

系 9: k を代数的閉体とする。このとき $\mathbb{P}^n$ のすべての非特異 2 次曲面は射影同値である。

命題 10: セグレ写像 $\sigma\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ は 1 対 1 であって、その像は非特異 2 次曲面 $\mathbf{V}(z_0z_3 - z_1z_2)$ と一致する。ただし、σ は $(x_0, x_1, y_0, y_1) \mapsto (x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1)$ である。

証明

$\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbf{V}(z_0z_3 - z_1z_2)$ を示す。

1. $z_\bullet$: $(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ を $\mathbb{P}^3$ の斉次座標とする。
2. $\exists x_0, x_1, y_0, y_1$: 上より、

$$x_0y_0 = z_0, \tag{182}$$
$$x_0y_1 = z_1, \tag{183}$$
$$x_1y_0 = z_2, \tag{184}$$
$$x_1y_1 = z_3. \tag{185}$$

   となる $x_0, x_1, y_0, y_1 \in k$ が存在する。
3. 上より、$z_0z_3 - z_1z_2 = 0$ となる。

等号を示す。つまり、$\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \supset \mathbf{V}(z_0z_3 - z_1z_2)$ を示す。

1. $\forall w_0, w_1, w_2, w_3$: $(w_0, w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{V}(z_0z_3 - z_1z_2)$ とする。
2. 上のどれか 1 つが 0 でないので、$w_0 \neq 0$ とする (他は同様。)
3. 上より、$(w_0, w_2, w_0, w_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ となる。
4. $\sigma(w_0, w_2, w_0, w_1) = (w_0^2, w_0w_1, w_0w_2, w_1w_2)$ となる。
5. 1 より、$w_0w_3 - w_1w_2 = 0$ である。
6. 4,5 より、

$$\sigma(w_0, w_2, w_0, w_1) = (w_0^2, w_0w_1, w_0w_2, w_0w_3) = w_0(w_0, w_1, w_2, w_3) = (w_0, w_1, w_2, w_3). \tag{186}$$

よって、$\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathbf{V}(z_0z_3 - z_1z_2)$ を示す。

(証終)

$p = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in k^4$ とし、$q = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in k^4$ とし、$\Omega = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ とする。

$$w_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} \tag{187}$$

を $(i, j) = (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ で考え、

$$w(p, q) = (w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{13}, w_{23}) \in k^6 \tag{188}$$

とする。これは、$p - q$ を通る $\mathbb{P}^3$ の直線にのみ依存する。$\omega(L)$ と書く。また、この像は $\mathbf{V}(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12})$ となる。

定理 11: 直線 $L \subset \mathbb{P}^3$ をそのプリュッカー座標 $\omega(L) \in \mathbf{V}(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12})$ に対応させる写像

$$\left\{\mathbb{P}^3\text{の直線全体}\right\} \to \mathbf{V}(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12}) \tag{189}$$

は全単射である。(プリュッカー座標はあたりまえだが射影化されている。)

証明

1. $\forall L$: L を $\mathbb{P}^3$ の直線とする。
2. $\forall p, q$: p, q を L 上の点とする。
3. $\exists a_\bullet, b_\bullet$: $p = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ とし、$q = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ とする。
4. $w_\bullet$ を $F: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ で

$$F(u, v) = u \cdot (a_0, \ldots, a_3) - v \cdot (b_0, \ldots, b_3) \tag{190}$$

を用いて、

$$b_0 p - a_0 q = F(b_0, a_0) = (0, -w_{01}, -w_{02}, -w_{03}), \tag{191}$$
$$b_1 p - a_1 q = F(b_1, a_1) = (w_{01}, 0, -w_{12}, -w_{13}), \tag{192}$$
$$b_2 p - a_2 q = F(b_2, a_2) = (w_{02}, w_{12}, 0, -w_{23}), \tag{193}$$
$$b_3 p - a_3 q = F(b_3, a_3) = (w_{03}, w_{13}, w_{23}, 0). \tag{194}$$

とする。
5. 上は F で書けており、演習 13 より F の像は p, q を通る直線となるので、上の 4 つが 0 でないならば、それらは p, q を通る直線すなわち L を通る。
6. ω が単射であることを示す。
   (a) $\forall L, L'$: $\omega(L)$ と $\omega(L')$ が射影的に等しいような $L, L' \subset \mathbb{P}^3$ を考える。
   (b) $\exists \lambda$: $\omega(L) = \lambda\omega(L')$ がある非零な λ になりたつ。
   (c) $\omega(L), \omega(L')$ のプリュッカー座標を $w_{ij}, w'_{ij} \quad (0 \leq i < j \leq 3)$ とする。(プリュッカー座標の定義を確認!)
   (d) (b) と (c) より、$w_{ij} = \lambda w'_{ij}$ が $0 \leq i < j \leq 3$ となる。
   (e) $w_{01} \neq 0$ とする。(他のプリュッカー座標の成分では、次で 4 からの選びかたを変えれば同様に通る。)
   (f) P, Q: (d) より、

$$P = (0, -w'_{01}, -w'_{02}, -w'_{03}) = (-0, -\lambda w_{01}, -\lambda w_{02}, -\lambda w_{03}) = (0, -w_{01}, -w_{02}, -w_{03}), \tag{195}$$
$$Q = (w'_{01}, 0, -w'_{12}, -w'_{13}) = (\lambda w_{01}, 0, -\lambda w_{12}, -\lambda w_{13}) = (w_{01}, 0, -w_{12}, -w_{13}). \tag{196}$$

   (g) (f) より、$P = (0, -w'_{01}, -w'_{02}, -w'_{03})$ と、L' のプリュッカー座標の 4 のような並びで書けているので、5 より $P \in L'$ となる。
   (h) (f) より、$P = (0, -w_{01}, -w_{02}, -w_{03})$ と、L のプリュッカー座標の 4 のような並びで書けているので、5 より $P \in L$ となる。
   (i) (g)(h) と同様に Q も (f) より、$Q \in L, L'$ となる。
   (j) 演習問題 14 より、2 点を通る直線は一意に定まる。
   (k) (g),(h),(i),(j) より、$L = L'$ である。
   (l) (a) おわり: ω は単射である。
   全射であることを示す。
   (a) $\forall w_\bullet$: $(w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{13}, w_{23}) \in \mathbf{V}(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12})$ とする。
   (b) 上はプリュッカー座標なので、どれか 1 つの成分は 0 ではなく、したがって 4 の 4 つのベクトルから 0 でないものを 2 つ選ぶことができる。ここでは仮に $w_{01} \neq 0$ とし、上 2 つの $(0, -w_{01}, -w_{02}, -w_{03})$ と $(w_{01}, 0, -w_{12}, w_{13})$ を選んだとする。
   (c) L: 5 より、上の 2 ベクトルが直線 L を定める。

(d) $\omega(L)$ の定義と L のプリュッカー座標から、L のプリュッカー座標が (a) で定めた (w_{ij}) と一致することが計算できる (演習 16)。

(e) (a) おわり: ω は全射。

(証終)

8.7 ベズーの定理

定義 (曲線): $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ によって定義された射影多様体 $\mathbf{V}(f)$ を曲線とよぶ。

演習 3: $f = gh$ を斉次多項式、$g = g_m + \cdots + g_0$ を g_i が全次数 i であるような斉次成分への分解で、$g_m \neq 0$ とする。$h = h_n + \cdots + h_0$ も同様とすう。このとき、$f = g_m h_n$ であることは命題 4 で示す。このとき、$g = g_m$ かつ $h = h_n$ となることを示せ？

証明

m_0 を $g_{m_0} \neq 0$ となる最小の m_0 とする。n_0 も h について同様とする。この定義により、$f = gh$ の gh の全次数最小の項は $g_{m_0} h_{n_0}$ となる。f の全次数最小の項は $f = g_m h_n$ より、$g_m h_n$ となる。よって、$g_{m_0} h_{n_0} = g_m h_n$ となり、$m = m_0$, $n = n_0$ となる。よって、$g = g_m$ かつ $h = h_n$ となる。

(証終)

演習 6:

(a) $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を 0 でない (非定数もつけないとだめだよね？) 多項式とする。このとき、$\mathbf{V}(f)$ と $\mathbb{C}^n - \mathbf{V}(f)$ はどちらも空集合でない。

(b) 上を用いて、$q \notin C \cup D \cup \bigcup_{i<j} L_{ij}$ となる点がある？

(c) $q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ について、$A \in GL(3, \mathbb{C})$ であって、$A(q) = (0, 0, 1)$ となるものを見つけよ。

(d) $(0, 0, 1)$ と (u, v, w) を結ぶ射影直線が、直線 $z = 0$ と点 $(u, v, 0)$ で交わることを示せ。

証明

(a) を示す。(定理の証明としては射影的なほうを使わなければいけないはずなのでなんで解いたのかよくわからない。)
$\mathbf{V}(f) = \emptyset \iff \langle f \rangle = k[x_1, \ldots, x_n] \iff f \in \mathbb{C}$ となる。よって、$f \notin \mathbb{C} \iff \mathbf{V}(f) \neq \emptyset$ となる。次に、$\mathbf{V}(f) = \mathbb{C}^n$ とする。すると、f は無数の根を持つことになる。k は代数的閉体ゆえ無限体で、$f = 0$ となる。よって、$f \neq 0$ ならば $\mathbf{V}(f) \subsetneq \mathbb{C}^n$ であり、$\mathbb{C}^n - \mathbf{V}(f) \neq \emptyset$ である。

(b) を示す。

Pending...

(証終)

命題 4: $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ を 0 でない斉次多項式 (しかも定数でない) とすると、f の既約因子はまた斉次である。f の因数分解を

$$f = f_1^{a_1} \ldots f_s^{a_s} \tag{197}$$

とする。ここに $i \neq j$ なら、f_i と f_j は互いに定数倍でない既約因子である。このとき、

$$\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}(f_1) \cup \ldots \cup \mathbf{V}(f_s) \tag{198}$$

は $\mathbf{V}(f)$ の $\mathbb{P}^2$ における既約成分への無駄のない分解であり、

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(f)) = \sqrt{\langle f \rangle} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \tag{199}$$

が成り立つ。

証明

1. f が $g, h \in \mathbb{C}[x, y, z]$ によって $f = gh$ と分解し、f が斉次ならば、g, h も斉次である？
   (a) $g_\bullet, m$: $g = g_m + \cdots + g_0$ と書く。$g_m \neq 0$ としておく。添字は全次数とする。
   (b) $h_\bullet, n$: $h = h_n + \cdots + h_0$ と書く。$h_n \neq 0$ としておく。添字は全次数とする。
   (c)
   $$f = gh = g_m h_n + (\text{全次数が}mn\text{未満の項}). \tag{200}$$
   (d) 上と、仮定の f が斉次であることから、$f = g_m h_n$ となる。
   (e) m_0: 0 でない g の最低全次数の添字とする。
   (f) n_0: 0 でない h の最低全次数の添字とする。
   (g) (e),(f) より、gh の最低全次数は $g_{m_0} h_{n_0}$ である。
   (h) 仮定の $f = gh$ と (d) の $f = g_m h_n$ で、両辺の最低全次数を比較し、上より $g_m h_n = g_{m_0} h_{n_0}$ となる。
   (i) 上より、$m = m_0$, $n = n_0$ となる。
   (j) 上より、$g = g_m$, $h = h_n$ となる。

   f が $g, h \in \mathbb{C}[x, y, z]$ によって $f = gh$ と分解し、f が斉次ならば、g, h も斉次である。
2.
   $$\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}(f_1^{a_1} \ldots f_s^{a_s}) = \mathbf{V}(f_1^{a_1}) \cup \ldots \cup \mathbf{V}(f_s^{a_s}) = \mathbf{V}(f_1) \cup \ldots \cup \mathbf{V}(f_s). \tag{201}$$
3. 上は無駄のない分解である。なぜなら、$i \neq j$ について $\mathbf{V}(f_i) \subset \mathbf{V}(f_j)$ なら $\langle f_j \rangle \subset \langle f_i \rangle$ となるが、これは $f_i | f_j$ となり、これは既約因子への分解に矛盾する。
4. $\mathbf{V}(f) \neq \emptyset$ である？
   (a) f の先頭項係数を正規化しておく。$\langle f \rangle$ は簡約グレブナ基底になっている。
   (b) 射影幾何の零点定理より、$\mathbf{V}(f) = \emptyset$ と「G を $\langle f \rangle$ のグレブナ基底として、$\mathrm{LT}(g)$ が x のべきであるような $g \in G$、y のべきであるような $g \in G$、z のべきであるような $g \in G$ がすべて存在する」となる
   (c) (a)(b) より、$\mathbf{V}(f) \neq \emptyset$ となる。

   $\mathbf{V}(f) \neq \emptyset$ である。
5. 上と強形の零点定理より、$\mathbf{I}(\mathbf{V}(f)) = \sqrt{\langle f \rangle}$ である。
6. $\sqrt{\langle f_1 \ldots f_s \rangle} = \langle f_1 \ldots f_s \rangle$ である。なぜなら、左辺から $[g(f_1 \ldots f_s)]^N$ をとると、$g^N (f_1 \ldots f_s)^N \in \langle f_1 \ldots f_s \rangle$ となるから。
7. 2 と上より、
   $$\mathbf{I}(\mathbf{V}(f)) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1) \cup \ldots \cup \mathbf{V}(f_s)) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(\langle f_1 \rangle \ldots \langle f_s \rangle)) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(\langle f_1 \ldots f_s \rangle)) = \sqrt{\langle f_1 \ldots f_s \rangle} = \langle f_1 \ldots f_s \rangle. \tag{202}$$
8. 5,7 より、
   $$\mathbf{I}(\mathbf{V}(f)) = \sqrt{f} = \langle f_1 \ldots f_s \rangle. \tag{203}$$

(証終)

補題 5: $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z$ を斉次多項式で、全次数がそれぞれ m, n のものとする。$f(0,0,1)$ と $g(0,0,1)$ がゼロでなければ、終結式 $\mathrm{Res}(f, g, z)$ は x, y に関して斉次 mn 次である。

証明

1. $\exists a_\bullet, b_\bullet$:

$$f = a_0 z^m + \cdots + a_m, \tag{204}$$
$$g = b_0 z^n + \cdots + b_n. \tag{205}$$

となる斉次多項式 $a_\bullet$, $b_\bullet \in \mathbb{C}[x, y]$ がある。ここで、f, g は斉次なので、a_i は全次数 i 次、b_j は全次数 j 次としてある。

2. 各 a_i が全次数 i 次斉次であったことから、

$$f(0,0,1) = a_0(0,0)1^m + \cdots + a_m(0,0) = a_0. \tag{206}$$

となる。a_0 が全次数 0 で、定数であることに注意。

3. 上と仮定 $f(0,0,1) \neq 0$ より、$a_0 \neq 0$ である。
4. 2-3 と同様の議論を $g, b_\bullet$ にもして、$g(0,0,1) \neq 0$ より、$b_0 \neq 0$ である。
5. c_{ij}: c_{ij} を $Syl(f, g, z)$ の ij 要素とする。
6. シルベスター行列の定義により、ゼロでない c_{ij} は、

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{i-j} & ; j \leq n \\ b_{n+i-j} & ; j > n \end{cases}. \tag{207}$$

となる。(ちなみにこれは、

$$c_{i,1} = \begin{cases} a_{i-1} & ; 1 \leq i \leq m+1 \\ 0 & ;\text{ほか} \end{cases}, \quad c_{i,j} = c_{(i-1),(j-1)} = \cdots = c_{i-(j-1),j-1} \tag{208}$$

はあきらかなので、これを使うと詳しく調べられる。)

7. 上より、c_{ij} はゼロでなければ、

$$\deg c_{ij} = \deg \begin{cases} i-j & ; j \leq n \\ n+i-j & ; j > n \end{cases}. \tag{209}$$

であり、1 より斉次多項式である。

8. 行列式の定義より、

$$\mathrm{Res}(f, g, z) = \sum_{\sigma \in S_{m+n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{m+n} c_{i\sigma(i)} \tag{210}$$

である。(この各項の次数を数えたい。)

9. $\forall \sigma$: $\sigma \in S_{m+n}$ とする。
10.

$$\prod_{i=1}^{m+n} c_{i\sigma(i)} = \prod_{\sigma(i) \leq n} c_{i\sigma(i)} \prod_{\sigma(i) > n} c_{i\sigma(i)}. \tag{211}$$

11. 上と 7 より、この式の全次数は、

$$\deg(\prod_{i=1}^{m+n} c_{i\sigma(i)}) = \sum_{\sigma(i) \leq n} (i - \sigma(i)) + \sum_{\sigma(i) > n} (n + i - \sigma(i)) \tag{212}$$
$$= \sum_{i=1}^{m+n} (i - \sigma(i)) + \sum_{\sigma(i) > n} n \tag{213}$$
$$= \sum_{\sigma(i) > n} n \tag{214}$$
$$= mn. \tag{215}$$

12. 9 おわり:8 の各項の全次数は mn である。
13. 上より、$\mathrm{Res}(f, g, z)$ は次数 mn の斉次多項式である。

(証終)

定義: 曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ が斉次多項式 f で $C = \mathbf{V}(f)$ と書けているとし、f の相異なる既約因子が $f_1, \ldots, f_s$ であるとき、$f_1 \ldots f_s$ を被約多項式といい、$f_1 \ldots f_s = 0$ を C の被約多項式方程式という。

補題 6: $h \in \mathbb{C}[x, y]$ をゼロでない斉次多項式とする。すると h は次の形に因数分解される。

$$h = c(s_1 x - r_1 y)^{m_1} \ldots (s_t x - r_t y)^{m_t}. \tag{216}$$

ここで $c \neq 0$ は複素数であり、$(r_1, s_1), \ldots, (r_t, s_t)$ は $\mathbb{P}^1$ の相異なる点である。さらに

$$\mathbf{V}(h) = \{(r_1, s_1), \ldots, (r_t, s_t)\} \subset \mathbb{P}^1 \tag{217}$$

が成り立つ。

証明
非斉次化 $h(x, 1) \in \mathbb{C}[x]$ なので、代数的閉体の性質より

$$h(x, 1) = c(x - a_1)^{m_1} \ldots (x - a_t)^{m_t} \tag{218}$$

となる $a_\bullet \in \mathbb{C}$ と $m_\bullet \in \mathbb{N}$ と $c \in \mathbb{C}$ が存在する。ここで、$a_\bullet$ は相異なる。e を、h が y^e で割り切れ、それより高い冪では割り切れないような自然数とする。命題 2-7(iv) より、

$$h = y^e h(x, 1)^h \tag{219}$$

となるので、

$$h = cy^e (x - a_1 y)^{m_1} \ldots (x - a_t y)^{m_t} \tag{220}$$

となっている。よって、$e > 0$ ならば

$$\mathbf{V}(h) = \{(1:0), (a_1:1), \ldots, (a_t:1)\} \subset \mathbb{P}^1 \tag{221}$$

であり、$e = 0$ ならば

$$\mathbf{V}(h) = \{(a_1:1), \ldots, (a_t:1)\} \subset \mathbb{P}^1 \tag{222}$$

である。$a_\bullet$ が相異なることより、これらも相異なる。

(証終)

定理 7: C と D を $\mathbb{P}^2$ の射影曲線であって、共通の既約成分を持たないものとする。C と D の被約多項式方程式の次数をそれぞれ m および n とすれば、$C \cap D$ は有限集合であって、高々 mn 個の点しか持たない。

証明
1. $\Longrightarrow$: $C \cap D$ が交点を mn 個より多く持ったとする (背理法)。
2. $\exists p_\bullet$: 上より、交点が $mn + 1$ 個選べるので、$p_1, \ldots, p_{mn+1}$ と番号付けられる。
3. $L_\bullet$: $1 \leq i < j \leq mn + 1$ について、L_{ij} を p_i と p_j を通る直線とする。
4. f: f を $C = \mathbf{V}(f)$ となる被約多項式とする (命題 4 より斉次となる。)
5. g: g を $D = \mathbf{V}(g)$ となる被約多項式とする (命題 4 より斉次となる。)。

6. f は仮定より次数 m である。
7. g は仮定より次数 n である。
8. l_{ij}: l_{ij} を

$$l_{ij} = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & p_i & p_j \end{vmatrix} \in \mathbb{C}[x, y, z] \tag{223}$$

と定義する。ただし、p_i, p_j は何か斉次座標をとったものと考える。

9. l_{ij} は上の定義より、p_i, p_j を通る直線になっており、3 より $\mathbf{V}(l_{ij}) = L_{ij}$ となっている。
10. $\exists q$: $q \notin C \cup D \cup \bigcup_{i<j} L_{ij}$ となる $q \in \mathbb{P}^2$ が存在する？
    (a) $\mathbb{P}^2 \setminus (C \cup D \cup \bigcup_{i<j} L_{ij}) \neq \emptyset$ であることを示せばよい。これは、アフィン多様体では

$$[\mathbb{C}^3 \setminus (\mathbf{V}_a(f) \cup \mathbf{V}_a(g) \cup \bigcup_{i<j} \mathbf{V}_a(l_{ij}))] \cap [\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}] \neq \emptyset \tag{224}$$

    を示せばよい。
    (b) 上の否定を仮定する。(背理法)

$$\mathbf{V}_a(f) \cup \mathbf{V}_a(g) \cup \bigcup_{i<j} \mathbf{V}_a(l_{ij}) \cup \{0\} = \mathbb{C}^3 \tag{225}$$

    となっている。
    (c) $\{0\} \subset \mathbf{V}(x)$ なので、上より、

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^3 &= \mathbf{V}_a(f) \cup \mathbf{V}_a(g) \cup \bigcup_{i<j} \mathbf{V}_a(l_{ij}) \cup \{0\} && (226) \\ &\subset \mathbf{V}_a(f) \cup \mathbf{V}_a(g) \cup \bigcup_{i<j} \mathbf{V}_a(l_{ij}) \cup \mathbf{V}_a(x) && (227) \end{aligned}$$

    となり、これは $\mathbb{C}^3$ である。
    (d) 上は、

$$\mathbf{V}_a(fg \prod_{i<j} l_{ij} x) = \mathbb{C}^3 \tag{228}$$

    を意味する。
    (e) 上はは $fg \prod_{i<j} l_{ij} x = 0$ が $\mathbb{C}^3$ 全体で成立することを意味するので、k が無限体であることから、$fg \prod_{i<j} l_{ij} x$ が多項式として 0 になる。これは矛盾である。
    (f) (b) おわり: (a) の式が示された。

    よって、$q \notin C \cup D \cup \bigcup_{i<j} L_{ij}$ となる $q \in \mathbb{P}^2$ が存在する。
11. $\exists A$: $Aq = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる A が存在する。なぜなら、$q \neq 0$ なので、3 次元回転と拡大を組み合わせればよい[*6]。
12. 上より、A で変換することにより 10 の q を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として一般性を失なわない。
13. 4(f について),10(q の条件),12(q のとりなおし) より、$f(0,0,1) \neq 0$ となる。
14. 上と同様に、$g(0,0,1) \neq 0$ となる。
15. 13,14 と補題 5 より、$\mathrm{Res}(f, g, z)$ は x, y に関する斉次 mn 次の多項式である。
16. 命題 3-6-1 の終結式の性質と、f, g が z について正の次数であることと、仮定の f, g が共通の既約成分を持たないことより、$\mathrm{Res}(f, g, z) \neq 0$ である。

[*6] あるいは、q と、それと一次独立な q', q'' をとって (q, q', q'') を作り、それを $(1, 0, 0)^t$ にかけると q になる。(q, q', q'') は可逆なので OK。

17. 命題 3-6-1 より、$\mathrm{Res}(f,g,z) \in \langle f,g \rangle$ である。
18. $u_\bullet, v_\bullet, w_\bullet$: 各 p_i について、$p_i = (u_i, v_i, w_i)$ と $u_i, v_i, w_i \in \mathbb{C}$ を定める。
19. 2 の定義より、f,g が上の各 $p_i = (u_i, v_i, w_i)$ を消し、さらに 17 より、各 i について $\mathrm{Res}(f,g,z)(u_i, v_i) = 0$ である。
20. $q = (0,0,1)$ と $p_i = (u_i, v_i, w_i)$ を結ぶ挑戦は、$z = 0$ と $(u_i, v_i, 0)$ で交わる。実際内分の式を考えればよい。
21. 10 より、$(0,0,1)$ は p_i, p_j をむすぶどの直線 L_{ij} 上にもない。
22. 上より、$(u_i, v_i, 0)$ は各 i についてすべて異なる (射影平面上で異なる直線は 1 点で交わる。$(0,0,1)$ は共有しているのだからもう共有点はない。)。
23. 上より、$\left\{(x,y,0) \in \mathbb{P}^2\right\} \simeq \mathbb{P}^1$ の同一視によって、相異なる (u_i, v_i) が得られる。
24. 19 と上より、$\mathrm{Res}(f,g,z)$ は $mn+1$ 個の相異なる点 (u_i, v_i) で消える。
25. 15,16 によれば $\mathrm{Res}(f,g,z)$ は mn 次の 0 でない多項式だが、これは上に矛盾する。

(証終)

定義 8: C と D は $\mathbb{P}^2$ の曲線で、共通の成分がなく、被約方程式 $f=0$ および $g=0$ でそれぞれ定義されているとする。$\mathbb{P}^2$ の座標を

$$(0,0,1) \notin C \cup D \cup \bigcup_{p \neq q \in C \cap D} L_{pq} \tag{229}$$

をみたすように選ぶ[*7]。 $p = (u,v,w) \in C \cap D$ に対して、交わりの重複度 $I_p(C,D)$ を、$\mathrm{Res}(f,g,z)$ の因数分解における因子 $vx - uy$ の指数と定義する。

定理 10(ベズーの定理): C と D を $\mathbb{P}^2$ における曲線で、共通の成分を持たないものとし、m と n をそれぞれの被約定義多項式の次数とする。すると定義 8 で定義された p における交わりの重複度 $I_p(C,D)$ に対して、

$$\sum_{p \in C \cap D} I_p(C,D) = mn \tag{230}$$

が成り立つ。

証明

1. f: $f=0$ を C の被約方程式とする。
2. g: $g=0$ を D の被約方程式とする。
3. 適当な座標変換をかけることにより、

$$(0,0,1) \notin C \cup D \cup \bigcup_{p \neq q \in C \cap D} L_{pq} \tag{231}$$

   であると仮定してよい。
4. $u_\bullet, v_\bullet, w_\bullet$: 記号を定める。$p \in C \cap D$ について、$u_p, v_p, w_p \in \mathbb{C}$ を $p = (u_p, v_p, w_p)$ と定める。
5. $\exists c$:

$$\mathrm{Res}(f,g,z) = c \prod_{p \in C \cap D} (v_p x - u_p y)^{I_p(C,D)}, \quad c \neq 0 \tag{232}$$

   が成立？
   (a) 各 p について、重複度 $I_p(C,D)$ の定義より、終結式 $\mathrm{Res}(f,g,z)$ を割り切る $v_p x - u_p y$ の最大の冪は $(v_p x - u_p y)^{I_p(C,D)}$ である。
   (b) 上より、曲線の交点 (u_p, v_p, w_p) から作った (u_p, v_p) はすべて終結式の根になっている。
   (c) 終結式のすべての根は曲線の交点から得られる？ 終結式の根になってるのに曲線の交点になってないやつとかあったりしない？

i. $\forall u, v$: $(u, v) \in \mathbb{P}^1$ が $\mathrm{Res}(f, g, z)(u, v) = 0$ をみたすとする。
ii. f の z についての先頭項の係数 ($k[x, y]$ の元になる) は 0 でない定数である？
A. m: f の全次数を m とする。
B. $a_\bullet$: $f = a_0 z^m + \cdots + a_m$ とする。$a_\bullet$ は斉次。
C. f は斉次多項式なので、上の a_0 は定数である。
D. 1 と 3 より、

$$a_0 = a_0(0,0) \cdot 1^m + \cdots + a_m(0,0) = f(0,0,1) \neq 0. \tag{233}$$

よって、f の z についての先頭項係数は 0 でない定数である。
iii. 上と同様に、g の z についての先頭項の係数は 0 でない定数である。
iv. $\exists$: ii と iii を命題 3-6-3 を適用し、$w \in \mathbb{C}$ が存在して、f, g が (u, v, w) で消える。[*8]
v. 上より、$(u, v, w) \in C \cap D$ となり、(u, v) は曲線の交点になっている。
終結式のすべての根は曲線の交点から得られる。

(d) $\exists c$: (b),(c) より、$\mathrm{Res}(f, g, z)$ を割りきるものは各曲線の交点から作った $(v_p x - u_p y)^{I_p(C,D)}$ だけだと分かったので、ある定数 $c \neq 0$ が存在して、

$$\mathrm{Res}(f, g, z) = c \prod_{p \in C \cap D} (v_p x - u_p y)^{I_p(C,D)} \tag{234}$$

となる。

6. 5 の両辺の次数を計算すると、3 で f, g が $(0,0,1)$ で消えないことから補題 5 より、

$$\begin{aligned} mn &= \deg(\mathrm{Res}(f, g, z)) && (235)\\ &= \deg(c \prod_{p \in C \cap D} (v_p x - u_p y)^{I_p(C,D)}) && (236)\\ &= \sum_{p \in C \cap D} \deg((v_p x - u_p y)^{I_p(C,D)}) && (237)\\ &= \sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D). && (238) \end{aligned}$$

(証終)

いま、「A で座標変換」と言ったとき、曲線全体を動かして条件を満たすようにすることを考えている。つまり、「A が条件

$$(0,0,1) \notin C \cup D \cup \bigcup_{p \neq q \in C \cap D} L_{pq} \tag{239}$$

をみたす座標変換」ということは、「

$$(0,0,1) \notin A(C \cup D \cup \bigcup_{p \neq q \in C \cap D} L_{pq}) \tag{240}$$

」ということである。

$$\begin{aligned} A(C) &= A(\mathbf{V}(f)) && (241)\\ &= A\{p; f(p) = 0\} && (242)\\ &= \{Ap; f(p) = 0\} && (243)\\ &= \left\{q; f(A^{-1}q) = 0\right\} && (244)\\ &= \left\{q; [f \circ (A^{-1})](q) = 0\right\} && (245)\\ &= \mathbf{V}(f \circ (A^{-1})). && (246) \end{aligned}$$

[*8] 命題 3-6-3 は、「$f, g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ に対して、$a_0, b_0 \in \mathbb{C}[x_2, \ldots, x_n]$ を f, g の x_1 についての先頭項係数とする。もし $\mathrm{Res}(f, g, x_1) \in \mathbb{C}[x_2, \ldots, x_n]$ が $(c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ において消えるとすれば次のいずれかが成立する。(i)a_0 または b_0 が $(c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ で消える。(ii)$c_1 \in \mathbb{C}$ が存在して、f と g は $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ で消える。」だった。証明は、(i) を否定しておいて終結式を計算する。

となっていることには注意する。

補題 11: 定義 8 において、

$$(0,0,1) \notin C \cup D \cup \bigcup_{p \neq q \in C \cap D} L_{pq} \tag{247}$$

をみたすどの座標変換行列を用いても、$p \in C \cap D$ に対して同じ交わりの重複度 $I_p(C,D)$ を定める。

証明

1. l_{pq}: L_{pq} の方程式を l_{pq} とする。
2. A が座標変換の条件を満たすとは、
$$A^{-1}(0,0,1) \notin C \cup D \cup \bigcup_{p \neq q \in C \cup D} L_{pq} \tag{248}$$
となることである。
3.
$$h = f \cdot g \cdot \prod_{p \neq q \in C \cap D} l_{pq} \tag{249}$$
とする。
4. 1,2,3 より、A が座標変換の条件を満たすとは、
$$A^{-1}(0,0,1) \notin \mathbf{V}(h) \tag{250}$$
である。
5. 1,2,3 より、A が座標変換の条件を満たすとは、
$$h(A^{-1}(0,0,1)) \neq 0 \tag{251}$$
である。
6. H: $H\colon M_{3\times 3}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ を
$$H(B) = \det(B) \cdot h(B(0,0,1)) \tag{252}$$
とする。
7. 行列が可逆になることと、その行列が 0 でないことは同値なので、6 の記号を用いると、
$$H(B) \neq 0 \iff \det(B) \neq 0 \quad \text{かつ} \quad h(B(0,0,1)) \neq 0 \tag{253}$$
$$\iff B\text{は可逆} \quad \text{かつ} \quad h(B(0,0,q)) \neq 0. \tag{254}$$
8. 上より、$M_{3\times 3}(\mathbb{C}) - \mathbf{V}(H)$ と条件を満たす座標変換とは逆行列を取る操作で一対一である。
9. $p_\bullet$: $C \cap D = \{p_1, \ldots, p_s\}$ とする。
10. $u_\bullet, v_\bullet, w_\bullet$: $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) - \mathbf{V}(H)$ に対して、$B^{-1}(p_i) = (u_{i,B}, v_{i,B}, w_{i,B})$ とする。
11. $\forall B$: $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) - \mathbf{V}(H)$ とする。
12. A: $A = B^{-1}$ とする。
13. $\exists c_B, m_\bullet$: 定理 10 の議論のように、$B(C), B(D)$ について終結式を書く。このとき、
$$A(C) = \mathbf{V}(f \circ B),\ A(D) = \mathbf{V}(g \circ B),\ A(p_i) = (u_{i,B}, v_{i,B}, w_{i,B}) \tag{255}$$
に注意すると、
$$\mathrm{Res}(f \circ B, g \circ B, z) = c_B \prod_{i=1}^{s} (v_{i,B}x - u_{i,B}y)^{m_{i,B}}. \tag{256}$$
となる。10 より $B(u_{i,B}, v_{i,B}, w_{i,B}) = p_i$ となっているので、$(u_{i,B}, v_{i,B}, w_{i,B})$ は曲線 $A(C) \cap A(D)$ の点たちになっていることに注意する。

14. $m_{i,B}$ がすべての $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) - \mathbf{V}(H)$ に対して同じ値をとる？

(a) 斉次多項式 $G(x,y)$ と $H(x,y)$ と $(u,v) \neq (0,0)$ に対して

$$G(x,y) = (vx-uy)^M H(x,y), \quad M \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{257}$$

のとき、

$$\frac{\partial^{i+j}G}{\partial x^i \partial y^j}(u,v) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq i+j < M \\ M!\, v^i(-u)^j H(u,v) & ; i+j = M \end{cases} \tag{258}$$

となる。計算する。G にライプニッツルールを適用して微分していくうち、$(vx-uy)$ がかかった項は (u,v) を代入して消えてしまう。$i+j<M$ のときは $(vx-uy)$ が残って消えて 0 になる。$i+j=M$ のときには、$vx-uy$ のほうを微分しきった項だけ残り、その項は $M!\, v^i(-u)^j H(x,y)$ となる。

特に、$H(u,v) \neq 0$ なら $(u,v) \neq (0,0)$ なので、G のある M 階の偏微分係数が (u,v) では消えない。($u=0$ になってしまったら $i=0$ にして 0 乗を考え、1 にしてしまう。)

(b) $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ の間の距離を、$B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij}) \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ について

$$d(B,C) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} |b_{ij}-c_{ij}|^2} \tag{259}$$

と定義する。

(c) 上の定義から明らかに、$F\colon M_{3\times 3}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ が、行列の 9 要素でできた多項式写像ならば、これは (b) で定義した距離のもとで連続である。

(d) 上より、多項式写像 $F\colon M_{3\times 3}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ と $F(B_0) \neq 0$ なる $B_0 \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ について、$B \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ を B_0 に十分 (上の距離で) 近付けることで $F(B) \neq 0$ とできる。

(e) さらに、有理関数についても、定義されていれば同様のことが言える。

(f) $\forall B_0, i$: $B_0 \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) - \mathbf{V}(H)$ とする。7 より、$B_0 \in GL(3,\mathbb{C})$ である。

(g) M: $M = m_{i,B_0}$

(h) $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ が B_0 に十分近いなら $m_{i,B} = M$ である。

   i. $\exists M$階の偏微分: (a) より、$\mathrm{Res}(f\circ B_0, g\circ B_0, z)$ の M 階の偏微分には (u_{i,B_0}, v_{i,B_0}) で消えていないものがある。($\mathrm{Res}(f\circ B_0, g\circ B_0, z)$ は $(v_{i,B_0}x - u_{i,B_0}y)^M \cdot$ (ほか) であるから、これに適用する。)

   ii. 13 で

$$(u_{i,B}, v_{i,B}, w_{i,B}) = B^{-1}\cdot p_i, \tag{260}$$

$$\mathrm{Res}(f\circ B, g\circ B, z) = c_B \prod_{i=1}^{s} (v_{i,B}x - u_{i,B}y)^{m_{i,B}}. \tag{261}$$

   iii. 上より、$\mathrm{Res}(f\circ B, g\circ B, z)$ の M 階の偏微分に $(u_{i,B}, v_{i,B})$ を代入したものは (p_i の要素は定数とみなして)、B の 9 要素の有理関数となる。分母は B の行列式しか出ず、11 より $B \in GL(3,\mathbb{C})$ なので $M_{3\times 3}(\mathbb{C}) - \mathbf{V}(H)$ 全体で定義されている。

   iv. 上と (e) の有理関数の連続性、それに i より、B が B_0 に十分近ければ $\mathrm{Res}(f\circ B, g\circ B, z)$ の i で取った M 階の偏微分は $(u_{i,B}, v_{i,B})$ でゼロでない。

   v. 仮に $m_{i,B} > M$ であるとする (背理法)。

   vi. 14 より、$m_{i,B}$ 階未満の $\mathrm{Res}(f\circ B, g\circ B, z)$ の偏微分は $(u_{i,B}, v_{i,B})$ で消える。

   vii. v と上より M 階の $\mathrm{Res}(f\circ B, g\circ B, z)$ の偏微分は $(u_{i,B}, v_{i,B})$ で消えるが、これは iv に矛盾する。

   viii. v おわり: 上より、$m_{i,B} \leq M = m_{i,B_0}$ である。

   ix. 定理 10 のベズーの定理は座標を固定したまま証明できるので、ある座標にだけ定義された「仮の」重複度のまま利用できる。そこで、viii の和を i にわたって取り、

$$mn = \sum_{i=1}^{s} m_{i,B} \leq \sum_{i=1}^{s} m_{i,B_0} = mn. \tag{262}$$

x. 上より、各 i について $m_{i,B} = m_{i,B_0}$ である。

よって、B が B_0 に十分近ければ各 i について $m_{i,B} = m_{i,B_0}$ である。

15. 上より、$B \mapsto m_{i,B}$ は局所定数である。
16. $M_{3\times 3}(\mathbb{C}) - \mathbf{V}(H)$ は弧状連結？
    (a) $f \in \mathbb{C}[x]$ が 0 でないなら、$\mathbb{C} - \mathbf{V}(f)$ は弧状連結である。これは、$\mathbf{V}(f)$ が有限集合であることから明か。
    (b) $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ が 0 でないなら、$\mathbb{C}^n - \mathbf{V}(f)$ は弧状連結である。$a, b \in \mathbb{C}^n$ とし、それを結ぶ複素直線 $t \mapsto ta + (1-t)b$ を考える。$t \mapsto f(ta + (1-t)b)$ の像は $\mathbb{C}^n - \mathbf{V}(f)$ の部分集合である。$t \mapsto ta + (1-t)b$ は $\mathbb{C}$ 内の 1 変数の多様体とみなせるので、(a) より $\mathbb{C}^n - \mathbf{V}(f)$ の a と b を結ぶ path が得られる。
    (c) 上を、$\mathbb{C}^9$ でのことと考えて $M_{3\times 3}(\mathbb{C}) - \mathbf{V}(H)$ に適用すれば OK。
17. 15 と 16 より、$B \mapsto m_{i,B}$ は弧状連結な集合上の局所定数関数なので、定数関数である。

(証終)

定理 12(パスカルの神秘の六角形): 既約 2 次曲線上の 6 点に対し、それらを結ぶ 6 本の直線を上のように決める。すると 3 組の対置する 2 本の直線の交点は、ある 1 本の直線上にある。

証明

1. C: 2 次曲線。
2. $p_\bullet$: $p_1, \ldots, p_6$ を C 上の 6 点とする。
3. $L_\bullet$: L_i を p_i と p_{i+1} を繋ぐ直線とする。
4. C_1: $C_1 = L_1 \cup L_3 \cup L_5$ とする。これは 3 本の直線の $\cup$ なので、3 次曲線になっている。
5. C_2: $C_2 = L_2 \cup L_4 \cup L_6$ とする。これは 3 本の直線の $\cup$ なので、3 次曲線になっている。
6. ベズーの定理と 4,5 より、$C_1 \cap C_2$ は重複度を含めて 9 個の点からなる。
7. $C_1 \cap C_2 = \{p_1, \ldots, p_6\}$ である。なぜなら、
   $$C_1 \cap C_2 = (L_1 \cup L_3 \cup L_5) \cap (L_2 \cup L_4 \cup L_6) = \{p_1, \ldots, p_6\} \cup (L_1 \cap L_4) \cup (L_2 \cap L_5) \cup (L_3 \cap L_6) \tag{263}$$
   となっている。
8. 上の $C_1 \cap C_2$ の 9 つの点が全て異なるので、これらの重複度は 1 である。
9. f: $C = \mathbf{V}(f)$ とする。
10. g_1: $C_1 = \mathbf{V}(g_1)$ とする。
11. g_2: $C_2 = \mathbf{V}(g_2)$ とする。
12. 1 と 9 より f の全次数は 2。
13. 4,5,10,11 より、g_1, g_2 の全次数は 3。
14. $\forall p : p \in C$ を $p_1, \ldots, p_6$ と異なる点とする。
15. $g_1(p)$ と $g_2(p)$ は 0 ではない。なぜなら、$g_1(p) = 0$ とすると $p \in C_1$ となり、$p \in C_1 \cap C$ となる。ベズーの定理より $C_1 \cap C$ は重複度込みで 6 点からなる。$\{p_1, \ldots, p_6\} \subset C_1 \cap C$ なので、$\{p_1, \ldots, p_6\} = C_1 \cap C$ となる。よって、p は $p_1, \ldots, p_6$ のいずれかになるが、これは矛盾である。よって、$g_1(p) \neq 0$ である。同様に、$g_2(p) \neq 0$ となる。
16. g: $g = g_2(p)g_1 - g_1(p)g_2$ とする。これは 13 より 3 次になる。(斉次なので先頭項だけ消えるということもない。)
17. 上より、g は $p, p_1, \ldots, p_6$ で消える。
18. g_1 と g_2 は 1 次独立である。なぜなら、1 次従属だとすると $C_1 = \mathbf{V}(g_1) = \mathbf{V}(g_2) = C_2$ となってしまうから。
19. 上と 15 と 16 より、g は 0 でない。
20. 17 より $\mathbf{V}(g)$ は C と 7 点以上で交わる。
21. ベズーの定理を $\mathbf{V}(g)$ と C とに適用すると、上より「g と f が被約であり、しかも共通の成分を持たないならば、$\sum_{q \in \mathbf{V}(g) \cap C} 1 = 6$」となる。
22. 20,21 より、g か f かが被約でないか、あるいは $\mathbf{V}(g)$ と C とが共通の既約成分を持つことになる。
23. f は被約にしておいたので、上より g が被約でないか、あるいは g と f とが共通の成分を持つことになる。

24. $\mathbf{V}(g)$ と C は共通の既約成分を持つ？
    (a) $\mathbf{V}(g)$ と C が共通の既約成分を持たないとする。(背理法)
    (b) 上と 23 より、g は被約でないということになる。
    (c) 16 より、g が 3 次なので $\mathbf{V}(g)$ は 2 次以下の多項式で定義される。
    (d) (a)(b)(c) と C を定義する f が被約であることから、ベズーの定理より $\mathbf{V}(g) \cap C$ は高々 4 点になる。
    (e) 上は 20 と矛盾する。

    よって、$\mathbf{V}(g)$ と C は共通の既約成分を持つ。
25. C は既約なので、上より $C = \mathbf{V}(f)$ が $\mathbf{V}(g)$ の既約成分である。
26. $\exists l$: 上より、$g = f \cdot l$ となる全次数 1 の斉次多項式 l がある。
27. 4,10,5,11 より、g_1 は L_1, L_3, L_5 を消し、g_2 は L_2, L_4, L_6 を消すので、16 より g は $L_1 \cap L_4,\ L_2 \cap L_5,\ L_3 \cap L_6$ を消す。
28. $L_1 \cap C$ はベズーの定理より 2 個しか点がなく、それらは p_1, p_2 なので、$L_1 \cap L_4$ は $L_1 \cap C$ 上にない。
29. 上同様の考察を $L_4 \cap C$ に対してもして、$L_1 \cap L_4$ は $L_4 \cap C$ 上にない。
30. 28,29 より、$L_1 \cap L_4$ は C 上にない。
31. 28-30 と同様の考察をして、$L_2 \cap L_5$ と $L_3 \cap L_6$ も C 上にない。
32. 30,31 より C を定義する f は $L_1 \cap L_4,\ L_2 \cap L_5,\ L_3 \cap L_6$ を消さない。
33. 26,27,32 より、$L_1 \cap L_4,\ L_2 \cap L_5,\ L_3 \cap L_6$ は g で消えるのに f で消えない。よって、l は $L_1 \cap L_4,\ L_2 \cap L_5,\ L_3 \cap L_6$ を消す。
34. 16 より g の次数は 3 で、仮定より f の次数は 2 なので、26 より l の次数は 1 になっている。よって、$\mathbf{V}(l)$ は射影直線になっている。
35. 33,34 より、$L_1 \cap L_4,\ L_2 \cap L_5,\ L_3 \cap L_6$ は同一直線 l 上である。

(証終)