

グレブナ基底と代数多様体入門 (Ideals, Varieties, and Algorithms)

ashiato45 のメモ , 著者は D.Cox, J.Little, D.O'Shea

2015 年 7 月 6 日

- 1 幾何 , 代数 , アルゴリズム
- 2 グレブナ基底
- 3 消去理論
- 4 代数と幾何の対応
- 5 多様体上の多項式関数と有理関数
- 6 ロボティクスの幾何の定理の自動証明
- 7 有限群の不変式論
- 8 射影代数幾何
- 8.1 射影平面

定義 1: \mathbb{R} 上の射影平面 (projective plane) とは、 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ と表記される次の集合。

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{平行な直線からなる同値類ごとに1つの無限遠点}\}. \quad (1)$$

定義 2: $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ の \sim による同値類の全体を $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ であらわす。つまり、

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 - \{0\})/\sim. \quad (2)$$

3 つ組 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ が $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ に対応するとき、 (x, y, z) を p の斉次座標 (homogeneous coordinates) という。

定義 3: 同時にゼロではない実数 A, B, C が与えられたとき、次の集合

$$\{p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); p \text{ の斉次座標 } (x, y, z) \text{ は } Ax + By + Cz = 0 \text{ を満たす}\} \quad (3)$$

を $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の射影直線とよぶ。これは well-defined であることは確認できる。

命題 4: $R^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $(x, y) \mapsto i(x, y, 1)$ は一対一であって、その像は $z = 0$ で定義される射影直線 H_∞ に一致する。

証明

1. $\forall p, x, y, x', y': (x, y)$ と (x', y') が同じ点 p にうつったとする。
2. $\exists \lambda (x, y, 1) = \lambda(x', y', 1)$
3. 上より、 $\lambda = 1$ となる。
4. 上より、 $(x, y) = (x', y')$ となる。
5. p の斉次座標を (x, y, z) とする。
6. $z = 0$ のとき、 $p \in H_\infty$
7. $z \neq 0$ のとき、 $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ を標準的なものとする。 $p = \pi(x, y, z) = \pi(x/z, y/z, 1)$ となり、 $(x/z, y/z, 1)$ は p の斉次座標。
8. 上より、 p は写像 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の像に $((x/z, y/z)$ を引数として) なっている。
9. $\pi(\mathbb{R}^2) \cap H_\infty = \emptyset$ を示す。
 - (a) $\exists: \pi(x, y, z) \in p(\mathbb{R}^2) \cap H_\infty$ と仮定する。
 - (b) $\pi(x, y, z) \in H_\infty$ なので、 $z = 0$ である。
 - (c) $\pi(x, y, z) \in p(\mathbb{R}^2)$ なので、 $\pi(x, y, z) = \pi(\xi, \eta, 1)$ なる ξ, η が存在する。よって、 $z \neq 0$ である。
 - (d) 上 2 つは矛盾する。
 よって、 $\pi(\mathbb{R}^2) \cap H_\infty = \emptyset$ となる。

(証終)

8.2 射影空間と射影多様体

定義 1: $k^{n+1} - \{0\}$ の \sim による同値類の集合を体 k 上の n 次元射影空間といい、 $\mathbb{P}^n(k)$ とあらわす。つまり、

$$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1} - \{0\})/\sim \quad (4)$$

である。ゼロでないような $(n+1)$ 個の k の要素の組 $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$ は $\mathbb{P}^n(k)$ の点 p を決めるが、 (x_0, \dots, x_n) を p の斉次座標とよぶ。

$\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合を

$$U_0 = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(k); x_0 \neq 0\} \quad (5)$$

とすると、 k^n の点 (a_1, \dots, a_n) を $\mathbb{P}^n(k)$ の斉次座標 $(1, a_1, \dots, a_n)$ に写す写像 ϕ は k^n と $U_0 \subset \mathbb{P}^n(k)$ の間の一対一写像である。

証明

$\phi(a_1, \dots, a_n) = (1, a_1, \dots, a_n)$ の先頭が 0 でないので、 $\phi: k^n \rightarrow U_0$ は定まっている。

$\psi: U_0 \rightarrow k^n$ を $\psi(\underbrace{x_0}_{\neq 0}, \dots, x_n) = \psi(1, x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) = (x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$ となる。well-defined と逆写像は

示せる。

(証終)

$$\mathbb{P}^n(k) = \underbrace{k^n}_{\text{無限遠超平面, 頭が0のところ}} \cup \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}(k)}_{\text{頭が非0のところ}} \quad (6)$$

系 3: $i = 0, \dots, n$ それぞれに対して、

$$U_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(k); x_i \neq 0\} \quad (7)$$

とおく。

- (i) U_i の点は k^n の点と一対一に対応する。
- (ii) 補集合 $\mathbb{P}^n(k) - U_i$ は $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ 同一視できる。
- (iii) $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$ となる。

証明

i, ii は変数のつけかえで命題 2 に帰着する。iii は、 \cup をとることで $x_1 \neq 0 \vee \dots \vee x_n \neq 0$ で、 $\mathbb{P}^n(k)$ は全部座標が 0 になることはないので全体になっている。

(証終)

射影空間の多様体は、斉次なものを使わないとうまくいかない。

命題 4: $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ を斉次多様体とする。もし f が点 $p \in \mathbb{P}^n(k)$ のある斉次座標の組に対して消えていれば、 f は p の任意の斉次座標に対して消える。とくに $V(f) = \{p \in \mathbb{P}^n(k); f(p) = 0\}$ は $\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合として矛盾なく定義される。

証明

略。

(証終)

定義 5: k を体とし、 $f_1, \dots, f_s \in k[x_0, \dots, x_n]$ を斉次多項式とする。

$$V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}^n(k); f_i(a_0, \dots, a_n) = 0 \quad (1 \leq i \leq s)\} \quad (8)$$

とおいて、 $V(f_1, \dots, f_s)$ を f_1, \dots, f_s によって定義された射影多様体とよぶ。

「1 つの」斉次多項式で定義された射影多様体は「 n 次超曲面」という。

射影多様体と多様体を考える。 $x_0 = 1$ として $V \cap U_0$ に斉次多項式を落とすことを非斉次化という。

命題 6: $V = V(f_1, \dots, f_s)$ を射影多様体とする。すると $W = V \cap U_0$ はアフィン多様体 $V(g_1, \dots, g_s) \subset k^n$ と同一視できる。ここで、 $1 \leq i \leq s$ に対して、 $g_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(1, x_1, \dots, x_n)$ である*1。

証明

1. $\psi(W) \subset V(g_1, \dots, g_s)$ となる。 $\psi: U_0 \rightarrow k^n$ は、射影座標を頭が 1 になるように正規化して頭を落とす写像であった。
- (a) $\forall x_\bullet: (x_1, \dots, x_n) \in \psi(W)$ とする。 $\psi(1, x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ であり、 $(1, x_1, \dots, x_n) \in V$ となっている。

(b) 任意の i について、上の $(1, \dots, x_n) \in V$ より

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(1, x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (9)$$

(c) (a) おわり: 上より、 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ となる。

2. \supset を示す。

(a) $\forall a_\bullet: (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ とする。

(b) $(1, a_1, \dots, a_n) \in U_0$ である。

(c) 任意の i について、

$$f_i(1, a_1, \dots, a_n) = g_i(a_1, \dots, a_n) = 0. \quad (10)$$

(d) 上より、 $\phi(\mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)) \subset W$ となる。

3. ϕ と ψ は逆写像なので、 W と $\mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ の点は一対一に対応する。

(証終)

非斉次化の逆を考える。 $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ について、すべての項の全次数が $\deg(f)$ になるように各項に x_0 の冪をかけたものを f^h という。

命題 7: $g(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ を全次数 d の多項式とする。

(i) g を斉次成分の和に展開して、 $g = \sum_{i=0}^d g_i$ とかく。ここで g_i の全次数は i である。すると、

$$g^h(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d g_i(x_1, \dots, x_n) x_0^{d-i} \quad (11)$$

は全次数が d であるような $k[x_0, \dots, x_n]$ の斉次多項式である。この g^h を g の斉次化という。

(ii) 斉次多項式は次で計算できる。

$$g^h = x_0^d \cdot g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right). \quad (12)$$

(iii) g^h を非斉次化すると g になる。

$$g^h(1, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n). \quad (13)$$

(iv) $F(x_0, \dots, x_n)$ を斉次多項式とし、 x_0^e を F を割り切るような x_0 の冪乗のうち最高次のものとする。もし $f = F(1, x_1, \dots, x_n)$ が F の非斉次化なら、 $F = x_0^e \cdot f^h$ がなりたつ。

証明

(i) はあきらか。

(ii) を示す。

$$g^h(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d g_i(x_1, \dots, x_n) x_0^{d-i} \quad (14)$$

$$= x_0^d \sum_{i=0}^d \frac{g_i(x_1, \dots, x_n)}{x_0^i} \quad (15)$$

$$= x_0^d \sum_{i=0}^d g_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right). \quad (16)$$

(iii), (iv) はあきらか。

(証終)

8.3 射影化された代数-幾何対応

定義 1: $k[x_0, \dots, x_n]$ のイデアル I が斉次であるとは、各 $f \in I$ に対して、 f の斉次成分 f_i がまた I に属しているときに言う。

定理 2: $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ をイデアルとする。このとき、次は同値である。

- (i) I は $k[x_0, \dots, x_n]$ の斉次イデアルである。
- (ii) 斉次多項式 f_1, \dots, f_s を用いて、 $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ とあらわせる。
- (iii) 任意の多項式順序に対して、 I の簡約グレブナ基底は斉次多項式からなる。

証明

(ii) \Rightarrow (i) を示す。そのために、演習問題 2 を解く。

(演習 2-a) 「 $f = \sum_i f_i$ と $g = \sum_i g_i$ を 2 つの多項式の斉次成分の和への分解とする。このとき、 $f = g \iff \forall i: f_i = g_i$ を示せ。」 \Leftarrow はあきらか。 \Rightarrow を示す。 $f - g$ を考え、 $f - g = 0 \implies \forall i: f_i - g_i = 0$ を示せば十分。 i が次数をあらわしているとする。仮に何か $f_i \neq 0$ があるなら、それを打ち消すものが他の f_i にはない。

あるいは、 $\sum_{j \neq i} f_j = -f_i$ と変形し、両方の次数が違うので $f_i = 0$ である...というのを帰納的にやってもよい。

(演習 2-b) 「 $f = \sum_i f_i$ と $g = \sum_i g_i$ を 2 つの多項式の斉次成分の和への分解とする。このとき、 $h = fg$ の斉次成分は $h_k = \sum_{i+j=k} f_i \cdot g_j$ で与えられていることを示せ。」 $h = fg$ の項は $\{f_i \cdot g_j; i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n\}$ である。よって、 h の多重次数 k なのは、 $i + j = k$ となる (i, j) 達だけであり、成り立つ。

(演習 2-c) 「(ii) \Rightarrow (i) を示せ。」 $f \in I$ とし、これの斉次成分への分解 $f = \sum_d g_d$ とする。各 g_d は d 次である。 f_i たちに番号をつけかえて、 f_{ij} ただし i が多重次数で、 j がそれらのうちの番号とする。 $f \in I$ なので、 $f = \sum_{i,j} h_{ij} f_{ij}$ と $h_{ij} \in k[x_1, \dots, x_n]$ で表示される。さらに、 $h_{ij} = \sum_k h'_{ijk} f_{ij}$ と斉次成分に分解する。各 f_{ijk} は k 次である。さらに、(b) より、 $f = \sum_d \sum_{i+k=d} \sum_j h'_{ijk} f_{ij}$ と和をとりかえる。よって、 $\sum_d g_d = \sum_d \sum_{i+k=d} \sum_j h'_{ijk} f_{ij}$ となる。(a) より、各々の斉次成分が等しいので、 $g_d = h'_{ijk} f_{ij}$ となっている。よって、 $g_d \in I$ である。示された。

(i) \Rightarrow (ii) を示す。 I は斉次イデアルであるとする。

1. $\exists F_\bullet$: ヒルベルトの基底定理より、

$$I = \langle F_1, \dots, F_t \rangle \quad (17)$$

となる $F_1, \dots, F_t \in k[x_1, \dots, x_n]$ が存在する。(これは斉次とは限らない。)

2. $F_{\bullet\bullet}$: 各 j について、 F_j を斉次成分に分け、 $F_j = \sum_i F_{ji}$ と描く。

3. I は斉次イデアルであることと、各 j について $F_j \in I$ であること、各 F_{ji} が F_j の項であることから、 $F_{ji} \in I$ である。

4. I' : $I' = \langle F_{ji}; i, j \rangle$ とする。

5. 2 の $F_j = \sum_i F_{ji}$ より、 $F_j \in I'$ がわかり、 $I \subset I'$ である。

6. 3 より、 $I' \subset I$ である。

7. 5,6 より $I = I'$ であり、 I の基底として斉次なもの F_{ji} たちが得られた。

(ii) \iff (iii) を示す。演習問題 3 を解く。

(演習 3-a) 「割り算アルゴリズムを用いて、斉次多項式 f を斉次多項式たち f_1, \dots, f_s で割り算したとせよ。その結果、 $f = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + r$ という表示が得られる。このとき、商 a_1, \dots, a_s および、余り r は斉次多項式 (0 かもしれない。) であることを証明せよ。 r の全次数はいくらになるか?」はじめに暫定的な余り r は f になっているが、ここからある単項式 $c_\alpha x^\alpha$ として $f_i \cdot c_\alpha x^\alpha$ を引いて次数を下げて、 r の全次数は変化しない。そして

このとき、商 a_i には cx^α が追加されるが、この次数は $\deg(c_\alpha x^\alpha) = \deg(f) - \deg(f_i)$ である。よって、商も余りも (0 でなければ) 斉次であり続ける。 r は 0 でなければ全次数は $\deg(f)$ である。

(演習 3-b) 「 f, g を斉次多項式とすると、 S 多項式 $S(f, g)$ もまた斉次であることを示せ。」 $x^\gamma = \text{LCM}(\text{LM}(f), \text{LM}(g))$ として、

$$S(f, g) = \frac{x^\gamma}{\text{LT}(f)} f - \frac{x^\gamma}{\text{LT}(g)} g \quad (18)$$

であった。

$$(x^\gamma / \text{LT}(f) \cdot f \text{ の各項の次数}) = \deg\left(\frac{x^\gamma}{\text{LT}(f)} f\right) = \deg(x^\gamma). \quad (19)$$

同様に、 $(x^\gamma / \text{LT}(f) \cdot g \text{ の各項の次数}) = \deg(x^\gamma)$ である。よって、 $S(f, g)$ のどの項の次数も $\deg(x^\gamma)$ であり、斉次である。

(演習 3-c) 「ブッフベルガーのアルゴリズムを解析することによって、斉次イデアルは斉次多項式からなるグレブナ基底を持つことを示せ。」ブッフベルガーのアルゴリズムは S 多項式を追加し続けるものだが、スタートが斉次だったので追加したものも (b) より斉次しか追加されない。よって、停止時点でも斉次な多項式しかなく、斉次イデアルには斉次なグレブナ基底がある。

(演習 3-d) 「(ii) \iff (iii) を示せ。」(iii) \implies (ii) はあきらか。(ii) \implies (iii) を示す。(ii) を仮定する。ここからブッフベルガーのアルゴリズムを使うことで、(c) より I の斉次なグレブナ基底が得られる。斉次であることを保ちながら、これを極小グレブナ基底にすることができる^{*2}。さらにこれに簡約グレブナ基底を作るアルゴリズムを適用しても斉次であり続けることを示す。このアルゴリズムは、グレブナ基底の各元 g に対して、 g を $\bar{g}^{G-\{g\}}$ で置換するものであった。この操作で、 g が斉次であることは変化しないことを示す。実際、(a) より余りは斉次であり続けるし (割り算をして 0 になることはない。仮にそうなれば極小にしたことに反する。)、その次数は g と変わらない。よって、 I の斉次な基底から、斉次な簡約グレブナ基底を作ることができる。

(証終)

命題 3: $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ を斉次イデアルとして、斉次多項式 f_1, \dots, f_s に対して、 $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ であると仮定する。すると、

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \quad (20)$$

であり、したがって $\mathbf{V}(I)$ は射影多様体である。

証明

演習 5 を解く。

$$\mathbf{V}(I) = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k); \forall f \in I: f(a_0, \dots, a_n) = 0\} \quad (21)$$

$$= \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k); \forall i = 1, \dots, s: f_i(a_0, \dots, a_n) = 0\} \quad (22)$$

$$= \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s). \quad (23)$$

(証終)

射影多様体 $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ に対して、

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_0, \dots, x_n]; \forall (a_0 : \dots : a_n) \in V: f(a_0, \dots, a_n) = 0\} \quad (24)$$

とおく (ここで f は V の任意の点のすべての斉次座標に対して消えていなければならないことに注意せよ。)。もし k が無限体であれば、 $\mathbf{I}(V)$ は $k[x_0, \dots, x_n]$ の斉次イデアルである。

^{*2} 先頭項係数を 1 にして、不要なものを除く。

証明

イデアルであることはあきらか。 $I(V)$ が斉次であることを示す。

1. $\forall f: f \in I(V)$ とする。
2. $\forall p: p \in V$ とする。
3. 仮定より、 f は p のすべての斉次座標 (a_0, \dots, a_n) に対して消える。
4. f の任意の斉次成分 f_i は (a_0, \dots, a_n) で消える？
 (a) 演習問題 2-7 を解く。(これまでの文字は忘れる。)
 「 k を無限体とする。もし $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ が斉次多項式ではなく、しかも $p \in \mathbb{P}^n(k)$ のすべての斉次座標で消え f の任意の斉次成分 f_i も p で消えていなければならないことを示そう。

(演習 2-7-a) 「 f を斉次成分の和として、 $f = \sum_i f_i$ と表そう。 $p = (a_0, \dots, a_n)$ とするとき、次の式を示せ。

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \sum f_i(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \sum_i \lambda^i f_i(a_0, \dots, a_n). \quad (25)$$

」自明。

(演習 2-7-b) 「 f がすべての $\lambda \neq 0 \in k$ に対して消えれば、 $f_i(a_0, \dots, a_n) = 0$ がすべての i について成り立つことを示せ。」 $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ を $k[\lambda]$ の元と見る。これが $\lambda \neq 0$ で消えること、それに k が無限体であることから、この λ に関する方程式は無数の解を持つことになる。そのような多項式は 0 しかないので、 $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0_{k[\lambda]}$ である。(a) より、 $\sum_i \lambda^i f_i(a_0, \dots, a_n)$ も λ に関する 0 多項式であることがわかる。よって、すべての i について、 $f_i(a_0, \dots, a_n) = 0$ である。

(b) 3 は、 $\forall \lambda \neq 0: f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$ を主張しているの、(a) で解いた問と k が無限体であることより、 f のすべての斉次成分 f_i が $f_i(a_0, \dots, a_n) = 0$ をみたす。

よって、 f の任意の斉次成分 f_i は (a_0, \dots, a_n) で消える。

5. 2 おわり: 上より、任意の i について、 $f_i \in I(V)$ である。

6. 1 おわり: 上より、 f の任意の斉次成分が I に属するので、 $I(V)$ は斉次である。

(証終)

定理 5: k を無限体とする。写像

$$\text{射影多様体} \xrightarrow{I} \text{斉次イデアル} \quad (26)$$

と

$$\text{斉次イデアル} \xrightarrow{V} \text{射影多様体} \quad (27)$$

は包含関係を逆転させる。さらに、任意の射影多様体に対して、

$$V(I(V)) = V \quad (28)$$

が成り立つ。特に I は単射である。

証明

I の反転を示す。 $V(f_1, \dots, f_s) \subset V(g_1, \dots, g_t)$ とする。

$$I(V(g_1, \dots, g_t)) = \{f \in k[x_0, \dots, x_n]; f \text{ は } V(g_1, \dots, g_t) \text{ を消す}\} \quad (29)$$

$$\subset \{f \in k[x_0, \dots, x_n]; f \text{ は } V(f_1, \dots, f_s) \text{ を消す}\} \quad (30)$$

$$= I(V(f_1, \dots, f_s)). \quad (31)$$

V の反転を示す。 $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ とする。

$$V(\langle g_1, \dots, g_t \rangle) \stackrel{\text{命題 3}}{=} V(g_1, \dots, g_t) \quad (32)$$

$$\subset V(f_1, \dots, f_s) \quad (33)$$

$$\stackrel{\text{命題 3}}{=} V(\langle f_1, \dots, f_s \rangle). \quad (34)$$

$V(I(V)) = V$ を示す。

1. $V = V(f_1, \dots, f_s)$ とする。 $V(I(V(f_1, \dots, f_s))) = V(f_1, \dots, f_s)$ を示せばよい。

2. \subset を示す。

- (a) f_1, \dots, f_s は $V(f_1, \dots, f_s)$ を消す。
- (b) 上より、 $f_1, \dots, f_s \in I(V(f_1, \dots, f_s))$ となる。
- (c) 上より、 $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset I(V(f_1, \dots, f_s))$ がなりたつ。
- (d) 上と V の反転より、

$$V(I(V(f_1, \dots, f_s))) \subset V(\langle f_1, \dots, f_s \rangle) \stackrel{\text{命題 3}}{=} V(f_1, \dots, f_s). \quad (35)$$

3. \supset を示す。

- (a) $\forall (a_0 : \dots : a_n) : (a_0 : \dots : a_n) \in V(f_1, \dots, f_s)$ とする。 f_1, \dots, f_s 全ては $(a_0 : \dots : a_n)$ を消す。
- (b) $\forall f : f \in I(V(f_1, \dots, f_s))$ とする。 (f は $(a_0 : \dots : a_n)$ を消す?)
- (c) 上より、 f は $V(f_1, \dots, f_s)$ を消す。
- (d) 上と、(a) より、 f は $(a_0 : \dots : a_n)$ を消す。
- (e) (b) おわり: $(a_0 : \dots : a_n)$ は $I(V(f_1, \dots, f_s))$ のどれでも消える。
- (f) (a) おわり: $V(f_1, \dots, f_s)$ は $I(V(f_1, \dots, f_s))$ のどれでも消える。
- (g) 上より、

$$V(I(V(f_1, \dots, f_s))) = \{I(V(f_1, \dots, f_s)) \text{ のどれでも消える点} \} \quad (36)$$

$$\supset V(f_1, \dots, f_s). \quad (37)$$

4. 2,3 よりなりたつ。

(証終)

定理 6: k を無限体とする。

(i) $\mathbb{P}^n(k)$ に含まれる射影多様体の降鎖

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots \quad (38)$$

に対して、ある整数 N が存在して、 $V_N = V_{N+1} = \dots$ が成り立つ。

(ii) 任意の射影多様体 $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ は、有限個の既約な射影多様体の和集合として一意的に表される。

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_m. \quad (39)$$

ただし、 $i \neq j$ に対しては $V_i \not\subset V_j$ である。

証明

(i) を示す。鎖に I をとって昇鎖を作る。ネーター環の昇鎖は安定するので、ある N 以上 $I(V_N) = I(V_{N+1}) = \dots$ となる。定理 5 の I の単射より、 $V_N = V_{N+1} = \dots$ となる。

(ii) を示す。2 通りに書いて、1 個既約多様体とてもう片方のどこに含まれますか～みたいなことを言っていればできる。

(証終)

斉次イデアルの演算と射影多様体の演算を考える。

演習 6: I_1, \dots, I_l を $k[x_0, \dots, x_n]$ の斉次イデアルとする。

- (a) $I_1 + \dots + I_l$ は斉次。
- (b) $I_1 \cap \dots \cap I_l$ は斉次。
- (c) $I_1 \dots I_l$ は斉次。

証明

(a) を示す。定理 2 より、各 I_i には斉次な生成元 f_{i1}, \dots, f_{iN_i} がある。

$$I_1 + \dots + I_l = \langle f_1 + \dots + f_l; f_1 \in I_1, \dots, f_l \in I_l \rangle \quad (40)$$

$$\stackrel{\text{命題 4-3-2}}{=} \langle f_{11}, \dots, f_{1N_1}, \dots, f_{l1}, \dots, f_{lN_l}, \dots, f_{11}, \dots, f_{1N_1} \rangle. \quad (41)$$

生成元がすべて斉次なので、定理 2 より $I_1 + \dots + I_l$ も斉次イデアルである。

(b) を示す。 $f \in I_1 \cap \dots \cap I_l$ とする。 $i = 1, \dots, l$ とする。 $f \in I_i$ である。 I_i は斉次なので、 f の各項も I_i に属する。 i は任意なので、 f の各項も $I_1 \cap \dots \cap I_l$ に属する。 f は任意なので、 $I_1 \cap \dots \cap I_l$ は斉次。

(c) を示す。 I_\bullet の生成元を (a) のときと同様にする。命題 4-6-3 によれば、

$$I_1 \dots I_l = \langle f_{1i_1} \dots f_{li_l}; 1 \leq i_1 \leq N_1, \dots, 1 \leq i_l \leq N_l \rangle \quad (42)$$

となっている。生成元を斉次になるようにとっておいたので、各 j について f_{ji_j} の全次数は i に依らず一定であり、 $f_{1i_1} \dots f_{li_l}$ の全次数は i_1, \dots, i_l の選び方に依らず一定である。よって、 $I_1 \dots I_l$ は斉次な基底で生成されており、定理 2 より $I_1 \dots I_l$ は斉次イデアルである。

(証終) アフィンと同様に次が成り立つ。

練習問題 7: I_1, \dots, I_l を $k[x_0, \dots, x_n]$ の斉次イデアルとして、 $V_i = \mathbf{V}(I_i)$ を対応する $\mathbb{P}^n(k)$ の射影多様体とする。

- (a) $\mathbf{V}(I_1 + \dots + I_l) = \bigcap_{i=1}^l V_i$ である。
- (b)

$$\mathbf{V}(I_1 \cap \dots \cap I_l) = \mathbf{V}(I_1 \dots I_l) = \bigcup_{i=1}^l V_i. \quad (43)$$

斉次イデアルは

$$\sqrt{I} = \{f \in k[x_0, \dots, x_n]; \text{ある } m \geq 1 \text{ について } f^m \in I\}. \quad (44)$$

命題 7: $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ を斉次イデアルとする。すると、 \sqrt{I} も斉次イデアルである。

証明

1. $\forall f: f \in \sqrt{I}$ とする。斉次成分に興味があるので、 $f \neq 0$ としてよい。
2. $\exists m: m \geq 1$ があって、 $f^m \in I$ となる。
3. $f_i: f$ を斉次成分に分解する。 $f = \sum_i f_i$ としておく。

4. f_{\max} : f_{\max} をゼロでない斉次成分のうち、最大の全次数を持つような成分とする。

$$f = f_{\max} + \sum_{i < \max} f_i \quad (45)$$

となる。

5. 4 より、 f^m を展開することを考えると

$$(f^m)_{\max} = (f_{\max})^m \quad (46)$$

となる。

6. I が斉次イデアルであること、2 の $f^m \in I$ より、 $(f^m)_{\max} \in I$ だえる。

7. 5 と上より、 $(f_{\max})^m \in I$ である。

8. 上より、 $f_{\max} \in \sqrt{I}$ である。

9. g : $g = f - f_{\max}$ とする。

10. 1 と 8 より、 $f, f_{\max} \in \sqrt{I}$ なので、上より $g \in \sqrt{I}$ である。

11. 2-8 の議論を g に繰替えると、 $g_{\max} \in \sqrt{I}$ である。

12. 以降、9-11 の議論を繰替えることにより、 f のすべての項が \sqrt{I} に属することがわかる。

13. 1 おわり: $f \in \sqrt{I}$ は任意だったので、 \sqrt{I} は斉次イデアルである。

(証終)

射影幾何だと、弱形の零点定理はそのまま持ってこれない。

定理 8(射影幾何における弱形の零点定理) k を代数的閉体として、 I を $k[x_0, \dots, x_n]$ の斉次イデアルとする。すると次は同値である。

- (i) $V(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ は空である。
- (ii) G を I の (ある単項式順序に関する) 簡約グレブナ基底とする。すると任意の $0 \leq i \leq n$ に対して、 $\text{LT}(g)$ が x_i の非負冪であるような $g \in G$ が存在する。
- (iii) 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して、ある整数 $m_i \geq 0$ が存在して、 $x_i^{m_i} \in I$ が成り立つ。
- (iv) ある $r \geq 1$ が存在して、 $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$ が成り立つ。

証明

1. C_V : $C_V = V_a(I) \subset k^{n+1}$ を、 I で定義されるアフィン多様体とする。(これは、 I で定義される射影多様体の各点に対応する点をすべて含む。)
2. (ii) \implies (i) を示す。簡約グレブナ基底 G で、任意の i に対しある $g \in G$ が存在して、ある $m_i \geq 0$ に対して $\text{LT}(g) = x_i^{m_i}$ となるものがあるとする。
 - (a) 上の状況は、 $\langle \text{LT}(I) \rangle = \langle \text{LT}(G) \rangle = \langle x_0^{m_0}, x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n} \rangle$ となっている (G は簡約されている。)
 - (b) このとき、定理 6-3-6 によれば C_V は有限集合である。概略を示す。
 - i. $\forall i: i = 0, \dots, n$
 - ii. $\exists g$: (a) より、 $\text{LT}(g) = x_i^{m_i}$ となる g が存在する。
 - iii. 上より、 $(x_0, \dots, x_n) \in V(I)$ ならば $g = 0$ を満たさなければならない。
 - iv. g を x_i に関する方程式と見做せば、 x_i は m_i 個以下であることがわかる (代数的閉体であることは使っていない。)
 - v. i おわり。任意の i について x_i は m_i 個以下なので、 x は $m_0 \cdot \dots \cdot m_n$ 個以下である。
 よって、 C_V は有限集合である。
- (c) $\exists p$: $p \in V$ が存在したとする (背理法)。
- (d) (a_0, \dots, a_n) : (a_0, \dots, a_n) を p の斉次座標とする。
- (e) 任意の λ について、 $\lambda(a_0, \dots, a_n) \in C_V$ となる。
- (f) k は代数的閉体ゆえ無限体なので、上より C_V は無限に元を含む。

(g) (c) おわり: 上は、(b) に矛盾する。よって、 $V(I) = V = \emptyset$ である。

3. (iii) \implies (ii):

(a) G : G を I のグレブナ基底とする。

(b) $\forall i: i = 0, \dots, n$ とする。

(c) $\exists m_i$: (iii) より、 $x_i^{m_i} \in I$ となる $m_i \geq 0$ がある。

(d) 上より、

$$x_i^{m_i} = \text{LT}(x_i^{m_i}) \in \text{LT}(I) = \langle \text{LT}(I) \rangle = \langle \text{LT}(G) \rangle \quad (47)$$

となる。

(e) $\exists g$: 上より、 $\text{LT}(g) | x_i^{m_i}$ となる $g \in G$ が存在する。

(f) 上より、 $\text{LT}(g)$ は x_i の冪である。

(g) (b) おわり: 任意の $i = 0, \dots, n$ について、 $g \in G$ で $\text{LT}(g_i)$ が x_i の冪であるものが存在する。

4. (iv) \implies (iii):

(a) $\forall i: i = 0, \dots, n$

(b) $\exists r$: 仮定より、 $r \geq 1$ で、 $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$ となるものがある。

(c) 上より、 $x_i^r \in I$ である。

(d) (a) おわり: 任意の i について、ある整数 $m_i \geq 0$ が存在して、 $x_i^{m_i} \in I$ となる。

5. (i) \implies (iv):

(a) 仮定より、 $V = \emptyset$ である

(b) $C_V \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 & n \\ \vee & \vee \\ 0, \dots, 0 \end{pmatrix} \right\} ?$

i. $\exists (a_0, \dots, a_n)$: C_V がゼロでない点 (a_0, \dots, a_n) を持つとする (背理法)。

ii. 上より $(a_0, \dots, a_n) \neq 0$ なので、 $(a_0 : \dots : a_n) \in V$ となる。

iii. i おわり: 上は (a) に矛盾。

よって、 $C_V \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 & n \\ \vee & \vee \\ 0, \dots, 0 \end{pmatrix} \right\}$ 。

(c) 上に I_a をかける。 $I_a(\{(0, \dots, 0)\}) \subset I_a(C_V)$ となる。

(d) $I_a(\{(0, \dots, 0)\}) = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ である*3。

(e) k は代数的閉体なので、アフィン多様体の強形の零点定理により、

$$I_a(C_V) = I_a(V_a(I)) = \sqrt{I}. \quad (48)$$

(f) (c),(d),(e) より、

$$\langle x_0, \dots, x_n \rangle \stackrel{(d)}{=} I_a(\{(0, \dots, 0)\}) \stackrel{(c)}{\subset} I_a(C_V) \stackrel{(e)}{=} \sqrt{I}. \quad (49)$$

(g) $\exists r$: 上より、 $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$ となる $r \geq 1$ が存在する。(なぜなら、各 i について $x_i^{r_i} \in I$ となる r_i があるが、このとき $r = r_0 + r_1 + \dots + r_n$ とすれば、 $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r$ からどうしても $x_i^{r_i}$ が因子として入っている。)

(証終)

定理 9(射影幾何における強形の零点定理): k を代数的閉体として、 I を $k[x_0, \dots, x_n]$ の斉次イデアルとする。
 $V = V(I)$ が $\mathbb{P}^n(k)$ の空でない射影多様体であれば、 $I(V(I)) = \sqrt{I}$ が成り立つ。

証明

1. V : $V = V(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ とする。

*3 $f \in I_a(\{(0, \dots, 0)\})$ として、 f を x_0, \dots, x_n で割る。

2. $C_V: C_V = \mathbf{V}_a(I) \subset k^{n+1}$ とする。

3. 仮定より、 $V \neq \emptyset$ である。

4. $\mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}(V)$?

(a) \subset を示す。

i. $\forall f: f \in \mathbf{I}_a(C_V)$ とする。

ii. $\forall p: p \in V$ とする。

iii. $\forall (a_0, \dots, a_n): p$ の斉次座標を (a_0, \dots, a_n) とする。

iv. 上より、 $(a_0, \dots, a_n) \in C_V$ となる。

v. i より、 f は C_V で消える関数なので、 (a_0, \dots, a_n) を消す。

vi. iii おわり: f は p の斉次座標をすべて消す。

vii. ii おわり: f は V を消す。

viii. 上より、 $f \in \mathbf{I}(V)$ である。

ix. i おわり: $\mathbf{I}(C_V) \subset \mathbf{I}(V)$ である。

よって、 $\mathbf{I}(C_V) \subset \mathbf{I}(V)$ である。

(b) \supset を示す。

i. $\forall f: f \in \mathbf{I}(V)$ とする。

ii. $\forall a_0, \dots, a_n: (a_0, \dots, a_n) \in C_V - \{0\}$ とする。

iii. 上より、 $(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbf{I}(V)$ である。

iv. 上と (b) より、 f は $(a_0 : \dots : a_n) \in V$ を消す。

v. (b) おわり: 上より f は $C_V - \{0\}$ を消す。

vi. (a) と $\mathbf{I}(V)$ は斉次イデアルなので、 f の斉次成分はまた $\mathbf{I}(V)$ に属し、 V を消す。

vii. 上より、 f の定数項も V を消す。

viii. 上と $V \neq \emptyset$ より、 f の定数項は 0 である。

ix. 上より、 f は原点 0 を消す。

x. 上と (e) より、 f は C_V を消す。

xi. (a) おわり: 上より $\mathbf{I}(V) \subset \mathbf{I}(C_V)$ となる。

(c) (a), (b) より、 $\mathbf{I}(C_V) = \mathbf{I}(V)$ となる。

5. アフィン幾何の強形の零点定理より、 $\sqrt{I} = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I))$ となる。

6.

$$\sqrt{I} \stackrel{\boxed{5}, \text{零点定理}}{=} \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I)) = \mathbf{I}_a(C_V) \stackrel{\boxed{4}}{=} \mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)). \quad (50)$$

(証終)

演習問題 9(結局使わなかった.):

(a) $k[x_0, \dots, x_n]$ の任意の斉次イデアルで真部分集合になっているようなものは、 I_0 に含まれることお示せ。

(b) r 次の冪 I_0^r は $k[x_0, \dots, x_n]$ の全次数が r の単項式全体から生成されることを示せ。さらに、このことから全次数が r 以上であるような任意の斉次多項式は I_0^r に含まれていることを示せ。

(c) $V = \mathbf{V}(I_0) \subset \mathbb{P}^n(k)$, $C_V = \mathbf{V}_a(I_0) \subset k^{n+1}$ とおく。 $\mathbf{I}_a(C_V) \neq \mathbf{I}(V)$ であることを示せ。

証明

(a) 斉次イデアル $I \subsetneq k[x_0, \dots, x_n]$ とする。仮に I が定数を含んでいるならば I は全体になってしまうので、 I は定数を含まない。 $f \in I$ とする。先のことより、 f は定数ではない。 f は斉次なので、これは f が定数項を含まないことを意味する。したがって、 $f \in I_0$ であり、 II_0 である。

(b) $I_0^r = \langle k[x_0, \dots, x_n] \text{ の全次数 } r \text{ な単項式} \rangle$ を示す。これは、 $I_0 = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ なので、イデアルの積の生成元としてイデアルの生成元の積たち全体が取れることから明らか。

全次数が r 以上であるような任意の斉次多項式が I_0^r に属することは、そのような多項式の各項の出鱈目な r 次の因子を取れば、それが I_0^r に属することからわかる。

(c)

$$\mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I_0)) \quad (51)$$

$$= \langle x_0, \dots, x_n \rangle. \quad (52)$$

一方、

$$\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I_0)) \quad (53)$$

$$= \mathbf{I}(\mathbf{V}(\langle x_0, \dots, x_n \rangle)) \quad (54)$$

$$= \mathbf{I}(\emptyset) \quad (55)$$

$$= k[x_0, \dots, x_n]. \quad (56)$$

(証終)

定理 10: k を代数的閉体とする。 \mathbf{I} と \mathbf{V} は、空でない射影多様体と、 $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ に含まれる根基斉次イデアルとの間の、包含関係を逆転するような全単射写像を与える。つまり写像

$$\{\text{空でない射影多様体}\} \xrightarrow{\mathbf{I}} \{\langle x_0, \dots, x_n \rangle \text{ に真に含まれる根基斉次イデアル}\} \quad (57)$$

$$\{\langle x_0, \dots, x_n \rangle \text{ に真に含まれる根基斉次イデアル}\} \xrightarrow{\mathbf{V}} \{\text{空でない射影多様体}\} \quad (58)$$

は互いに逆写像を与えている。

証明

1. I を根基斉次イデアルとしたとき、 $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset \iff I \subsetneq \langle x_0, \dots, x_n \rangle$?

(a) 定理 8 より、 $\mathbf{V}(I) = \emptyset \iff \exists r \geq 1: \langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$

(b) 1 の仮定より I は根基イデアルなので、

$$\exists r \geq 1: \langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I \iff \langle x_0, \dots, x_n \rangle \subset I. \quad (59)$$

(c) (a)(b) より、

$$\mathbf{V}(I) = \emptyset \iff \langle x_0, \dots, x_n \rangle \subset I. \quad (60)$$

(d) 上の対偶をとり、

$$\mathbf{V}(I) \neq \emptyset \iff I \subsetneq \langle x_0, \dots, x_n \rangle. \quad (61)$$

2. I を $I \subsetneq \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ となる根基斉次イデアルとして、 $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$?

(a) $I \subsetneq \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ で、根基斉次イデアルなので、1 より $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$ である。

(b) 上と、 I が斉次であることから定理 9 より、 $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$ となる。

(c) I は根基なので、 $\sqrt{I} = I$ である。

(d) 上と (b) より、 $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$ である。

3. V を空でない射影多様体として、 $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$?

(a) 定理 5 と、 k が代数的閉体ゆえ無限体であることから $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ である。

4. 2,3 より \mathbf{I} と \mathbf{V} は互いに逆写像である。

(証終)

8.4 アフィン多様体の射影完備化

定義 1: イデアル $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ に対して、 I の斉次化を次のように定義する。

$$I^h = \langle f^h; f \in I \rangle \subset k[x_0, \dots, x_n] \quad (62)$$

ここで f^h は先の斉次化である。

命題 2: 任意のイデアル $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ に対して、その斉次化 I^h は $k[x_0, \dots, x_n]$ の斉次イデアルである。

証明

$g \in \langle f^h; f \in I \rangle$ とする。 N, F_\bullet を使って、 $g = \sum_{i=1}^N F_i f_i^h$ とする。 f_\bullet の番号を付け替えて、 f_{ij} が、 i が斉次の次数、 j がそのうちのインデックスになるようにする。 $g = \sum_{i=1}^N \sum_j F_{ij} f_{ij}^h$ となる。さらに、 F_{ij} を斉次分解して、 $F_{ij} = \sum_l F_{ijl}$ とする。 $g = \sum_{i=1}^N \sum_j \sum_l F_{ijl} f_{ij}^h$ となる。これを次数で分けて書くと、(存在しない添字の項は 0 として、)

$$g = \sum_d \sum_{i+l=d} \sum_j F_{ijl} f_{ij}^h \quad (63)$$

となる。このうち、 $\sum_{i+l=d} \sum_j F_{ijl} f_{ij}^h$ は d 次斉次成分になっているが、これは f_{ij}^h の一次結合なので I^h に属する。

(証終)

$\langle f_1^h, \dots, f_s^h \rangle$ は斉次な基底でできているので斉次イデアルだが、上の斉次化はこれよりも大きくなりうる。

次数付きの単項式順序: 単項式順序のうち、 $|\alpha| > |\beta|$ なら $x^\alpha > x^\beta$ となるもの。

定理 4: I を $k[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル、 $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ を $k[x_1, \dots, x_n]$ の次数付き単項式順序に関する I のグレブナ基底とする。すると $G^h = \{g_1^h, \dots, g_t^h\}$ は $I^h \subset k[x_0, \dots, x_n]$ の基底である。

証明

「 G^h は $k[x_0, \dots, x_n]$ の適当な単項式順序について I^h のグレブナ基底であることを示す。」

1. 記号を用意する。 $k[x_0, \dots, x_n]$ の単項式は、 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ と $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を使って、

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = x^\alpha x_0^d \quad (64)$$

と書く。

2. $>_h$: $k[x_0, \dots, x_n]$ の順序 $>_h$ を

$$x^\alpha x_0^d >_h x^\beta x_0^e \iff \begin{cases} x^\alpha > x^\beta \text{ または} \\ x^\alpha = x^\beta \text{ であって、かつ } d > e \text{ が成り立つ。} \end{cases} \quad (65)$$

と定める。これは単項式順序になっている。

3. 任意の $i \geq 1$ について、 $x_i >_h x_0$ が成立する。
4. 任意の $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ について、 $\text{LM}_{>_h}(f^h) = \text{LM}_{>}(f)$?
 - (a) $\forall f: f \in k[x_1, \dots, x_n]$
 - (b) $\alpha: x^\alpha = \text{LM}_{>}(f)$
 - (c) 上より x^α は f の最高全次数の斉次部分の単項式である。

- (d) 斉次化の定義より、 f^h の単項式たちにも x^α は存在する。
(e) $\forall \beta, e: x^\beta x_0^e$ を f^h にあらわれる他の多項式とする。
(f) x^β が f の x^α でない単項式なので、(b) より、 $\alpha > \beta$ となる。
(g) 上より、 $x^\alpha >_h x^\beta x_0^e$ である。
(h) (e) おわり: 上より、 $x^\alpha = \text{LM}_{>_h}(f^h)$ である。
(i) (b) と上より、任意の f について、 $\text{LM}_{>}(f) = \text{LM}_{>_h}(f^h)$ である。
任意の $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ について、 $\text{LM}_{>_h}(f^h) = \text{LM}_{>}(f)$ である。
5. 任意の i について、 I^h の定義と、 $g_i \in G \subset I$ より $g_i^h \in I^h$ である。
6. 上より、 $G^h \subset I^h$ である。
7. $\langle \text{LT}_{>_h}(I^h) \rangle$ は $\text{LT}_{>_h}(G^h)$ で生成される?
(a) $\forall F: F \in I^h$ とする。
(b) I^h は斉次イデアルなので F の各斉次成分は I^h に属する。
(c) 上より、(a) でとった F は斉次であると仮定してよい (生成を示したくて、 F を $\langle \text{LT}_{>_h}(G^h) \rangle$ で書けることさえ言えればいい。)。
(d) $\exists A_j, f_j: (a)$ より、

$$F = \sum_j A_j f_j^h \quad (66)$$

と $A_j \in k[x_0, \dots, x_n]$ と $f_j \in I$ を用いて書ける。

(e) $f: f$ を F の非斉次化とする。すなわち: $f = F(1, x_1, \dots, x_n)$ とする。

(f) (d)(e) と命題 2-7(iii) の「斉次化の頭に 1 を入れると戻る」より、

$$f = F(1, x_1, \dots, x_n) \quad (67)$$

$$= \sum_j A_j(1, x_1, \dots, x_n) f_j^h(1, x_1, \dots, x_n) \quad (68)$$

$$= \sum_j A_j(1, x_1, \dots, x_n) f_j. \quad (69)$$

(g) (d) で $f_j \in I$ としたことを言ったので上より、 $f \in I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ となる。

(h) $\exists e: (c)$ で F は斉次としておいたことと、命題 2-7(iv) の「斉次多項式 F を x_0 で e 回まで割れるなら、 $f = F(1, x_1, \dots, x_n)$ として、 $F = x_0^e \cdot f^h$ となる^{*4}」より、

$$F = x_0^e \cdot f^h \quad (70)$$

となる $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がある。

(i) 4 より、

$$\text{LM}_{>_h}(F) \stackrel{\boxed{(h)}}{=} x_0^e \cdot \text{LM}_{>_h}(f^h) \stackrel{\boxed{4}}{=} x_0^e \cdot \text{LM}_{>}(f). \quad (71)$$

(j) $\exists i: G$ は I のグレブナ基底であることと、(g) で $f \in I$ であることより、 $\text{LM}_{>}(f)$ はある $\text{LM}_{>}(g_i)$ で割り切れる。

(k) 上と、4 の $\text{LM}_{>}(g_i) = \text{LM}_{>_h}(g_i^h)$ より、 $\text{LM}_{>}(F)$ は $\text{LM}_{>_h}(g_i^h)$ で割り切れる。

(l) (a) おわり: 任意の $\text{LM}_{>}(F) \in \text{LT}_{>_h}(I^h)$ は $\text{LM}_{>_h}(g_i^h)$ の倍数になっている。示された。

$\langle \text{LT}_{>_h}(I^h) \rangle$ は $\text{LT}_{>_h}(G^h)$ で生成される。

8. 6 の $G^h \subset I^h$ と 7 の $\langle \text{LT}_{>_h}(I^h) \rangle$ が $\text{LT}_{>_h}(G^h)$ で生成されることより、 G^h は I^h のグレブナ基底。

(証終)

^{*4} まじ? と思ったが、非斉次化では次数は落ち、斉次化では次数は変わらないので、非斉次化 斉次化だと次数は落ちており、 x_0^e を補わないとまずい。

定義 6: アフィン多様体 $W \subset k^n$ に対して、 W の射影完備化とは、射影多様体 $\overline{W} = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \subset \mathbb{P}^n(k)$ のことである。

$W = \{0\}$ のときは $\overline{W} = \emptyset$ になってしまう。

$f_\bullet \in k[x_1, \dots, x_n]$ は $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ はアフィン多様体 $\subset k^n$ とも見えるし、射影多様体 $\subset \mathbb{P}^n(k) = k^{n+1}/\sim$ とも見える。また、射影多様体 $\subset \mathbb{P}(k^n) = k^{n+1}/\sim$ を $x_0 = 1$ としたアフィン多様体 k^{n+1} と同一視することがある。

命題 7:

$W \subset k^n$ をアフィン多様体とし、 $\overline{W} \subset \mathbb{P}^n(k)$ をその射影完備化とする。(独自) また、 $W \neq \{0\}$ とする。そんなことはなかった。 k^n と k^{n+1} で考えてることに注意。すると、次が成り立つ。

- (i) $\overline{W} \cap U_0 = \overline{W} \cap k^n = W$ 。(アフィン多様体とみて)
- (ii) \overline{W} は W を含むような $\mathbb{P}^n(k)$ における最小の射影多様体である。
- (iii) アフィン多様体 W が既約ならば、射影多様体 \overline{W} もまた既約である。
- (iv) \overline{W} のどの既約成分も無限遠超平面 $\mathbf{V}(x_0) \subset \mathbb{P}^n(k)$ に完全に含まれることはない。

証明

(i) を示す。

1. $G: k[x_1, \dots, x_n]$ の次数付き順序に関する $\mathbf{I}_a(W)$ のグレブナ基底とする。
2. 定理 4 と上より、 $\mathbf{I}_a(W)^h = \langle g^h; g \in G \rangle$ である。
3. k^n のサブセットと見て、2 より

$$\overline{W} \cap U_0 = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \cap U_0 \quad (72)$$

$$\stackrel{\boxed{2}}{=} \mathbf{V}(g^h; g \in G) \cap U_0 \quad (73)$$

$$\stackrel{\boxed{\text{同一視}}}{=} \mathbf{V}_a(g^h; g \in G) \cap \mathbf{V}_a(x_0 = 1) \quad (74)$$

$$= \mathbf{V}_a(g^h(1, x_1, \dots, x_n); g \in G). \quad (75)$$

4. 命題 2-7(iii) の「斉次化して $x_0 = 1$ にすると戻る」より、 $g^h(1, x_1, \dots, x_n) = g$ となる。
5. 3, 4 と 1 より、

$$\overline{W} \cap U_0 \stackrel{\boxed{3}}{=} \mathbf{V}_a(g^h(1, x_1, \dots, x_n); g \in G) \stackrel{\boxed{4}}{=} \mathbf{V}_a(g; g \in G) = \mathbf{V}_a(G) \stackrel{\boxed{1}}{=} \mathbf{V}_a(\mathbf{I}_a(W)) = W. \quad (76)$$

(ii) を示す。

1. $\forall V: \underbrace{W}_{\subset k^n} \subset V$ なる射影多様体。(V は一旦 k^{n+1} と見做すが、射影多様体の条件を満たすものとする。)($\overline{W} \subset V$?)
2. $F_1, \dots, F_s: V = \mathbf{V}(F_1, \dots, F_s)$ とする。
3. $f_1, \dots, f_s: f_i$ は F_i の非斉次化 $f_i = F_i(1, x_1, \dots, x_n)$ とする。
4. 2 より各 F_i は V を消す。
5. 上と 1 より F_i は W も消す。
6. 上と各 F_i が射影多様体 V の定義方程式であることと、3 で各 f_i が F_i の非斉次化であることから、各 f_i は W を消す。
7. 上より、各 i について、 $f_i \in \mathbf{I}_a(W)$ となる。
8. 上より、各 i について、 $f_i^h \in \mathbf{I}_a(W)^h$ となる。
9. 上より、各 i について、 f_i^h は $\mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) = \overline{W}$ を消す。
10. $\exists e_1, \dots, e_s$: 命題 2-7(iv) より、各 i についてある整数 e_i があって $F_i = x_0^{e_i} f_i^h$ となる。

11. 上と 9 より、各 F_i は \overline{W} を消す。
12. 上と 2 より、 $\overline{W} \subset \mathbf{V}(F_1, \dots, F_s) = V$ となる。
13. 1 おわり: 任意の $W \subset V$ なる任意の射影多様体 V について $\overline{W} \subset V$ なので、 \overline{W} は W を包む最小の射影多様体になる。

(iii) を示す。 W が既約 $\iff \overline{W}$ が既約なので、これを示す。対偶を示す。

1. W が既約でないなら \overline{W} が既約でないことを示す。 $W = W_1 \cup W_2$ と、空でないアフィン多様体 $W_1, W_2 \subset k^n$ に分解できるとする。

$$\overline{W} = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \quad (77)$$

$$= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_1 \cup W_2)^h) \quad (78)$$

$$= \mathbf{V}((\mathbf{I}_a(W_1) \cap \mathbf{I}_a(W_2))^h) \quad (79)$$

$$= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_1)^h \cap \mathbf{I}_a(W_2)^h) \quad (80)$$

$$= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_1)^h) \cup \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_2)^h) \quad (81)$$

$$= \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2. \quad (82)$$

- (ii) より、 $W_1 \subset \overline{W}_1$ かつ $W_2 \subset \overline{W}_2$ であり、 $W_1, W_2 \neq \emptyset$ なので、 $\overline{W}_1, \overline{W}_2 \neq \emptyset$ であり、 \overline{W} は既約ではない。
2. \overline{W} が既約でないなら W が既約でないことを示す。 $\overline{W} = V_1 \cup V_2$ と空でない既約多様体 $V_1, V_2 \subset \mathbb{P}^n(k)$ に分解されたとする。すると、(i) より

$$W = \overline{W} \cap U_0 = (V_1 \cap U_0) \cup (V_2 \cap U_0) \quad (83)$$

となる。 V_1, V_2 が空でないので、 $V_1 \cap U_0, V_2 \cap U_0$ は空でないアフィン多様体であり、 W は既約でない。

(iv) を示す:

(証終)