グレブナ基底と代数多様体入門 (Ideals, Varieties, and Algorithms)

ashiato45 のメモ，著者は D.Cox, J.Little, D.O'Shea

2015 年 7 月 8 日

1　幾何，代数，アルゴリズム

2　グレブナ基底

3　消去理論

4　代数と幾何の対応

5　多様体上の多項式関数と有理関数

6　ロボティクスの幾何の定理の自動証明

7　有限群の不変式論

8　射影代数幾何

8.1　射影平面

定義 1: $\mathbb{R}$ 上の射影平面 (projective plane) とは、$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ と表記される次の集合。

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \left\{\text{平行な直線からなる同値類ごとに1つの無限遠点}\right\}. \tag{1}$$

定義 2: $R^3 - \{0\}$ の $\sim$ による同値類の全体を $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ であらわす。つまり、

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 - \{0\})/\sim. \tag{2}$$

3 つ組 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ が $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ に対応するとき、(x, y, z) を p の斉次座標 (homogeneous coordinates) という。

定義 3: 同時にゼロではない実数 A, B, C が与えられたとき、次の集合

$$\left\{p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); p\text{の斉次座標}(x, y, z)\text{は}Ax + By + Cz = 0\text{を満たす}\right\} \tag{3}$$

を $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の射影直線とよぶ。これは well-defined であることは確認できる。

命題 4: $R^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \quad (x,y) \mapsto i(x,y,1)$ は一対一であって、その像は $z=0$ で定義される射影直線 H_∞ に一致する。

証明

1. $\forall p, x, y, x', y'$: (x,y) と (x',y') が同じ点 p にうつったとする。
2. $\exists\lambda\ (x,y,1) = \lambda(x',y',1)$
3. 上より、$\lambda = 1$ となる。
4. 上より、$(x,y) = (x',y')$ となる。
5. p の斉次座標を (x,y,z) とする。
6. $z = 0$ のとき、$p \in H_\infty$
7. $z \neq 0$ のとき、$\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ を標準的なものとする。$p = \pi(x,y,z) = \pi(x/z, y/z, 1)$ となり、$(x/z, y/z, 1)$ は p の斉次座標。
8. 上より、p は写像 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の像に ($(x/z, y/z)$ を引数として) なっている。
9. $\pi(\mathbb{R}^2) \cap H_\infty = \emptyset$ を示す。
   (a) $\exists$: $\pi(x,y,z) \in p(\mathbb{R}^2) \cap H_\infty$ と仮定する。
   (b) $\pi(x,y,z) \in H_\infty$ なので、$z = 0$ である。
   (c) $\pi(x,y,z) \in p(\mathbb{R}^2)$ なので、$\pi(x,y,z) = \pi(\xi,\eta,1)$ なる ξ,η が存在する。よって、$z \neq 0$ である。
   (d) 上 2 つは矛盾する。

   よって、$\pi(\mathbb{R}^2) \cap H_\infty = \emptyset$ となる。

(証終)

8.2 射影空間と射影多様体

定義 1: $k^{n+1} - \{0\}$ の $\sim$ による同値類の集合を体 k 上の n 次元射影空間といい、$\mathbb{P}^n(k)$ とあらわす。つまり、

$$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1} - \{0\})/\sim \tag{4}$$

である。ゼロでないような $(n+1)$ 個の k の要素の組 $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1}$ は $\mathbb{P}^n(k)$ の点 p を決めるが、$(x_0, \ldots, x_n)$ を p の斉次座標とよぶ。

$\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合を

$$U_0 = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n(k); x_0 \neq 0\} \tag{5}$$

とすると、k^n の点 $(a_1, \ldots, a_n)$ を $\mathbb{P}^n(k)$ の斉次座標 $(1, a_1, \ldots, a_n)$ に写す写像 ϕ は k^n と $U_0 \subset \mathbb{P}^n(k)$ の間の一対一写像である。

証明

$\phi(a_1, \ldots, a_n) = (1, a_1, \ldots, a_n)$ の先頭が 0 でないので、$\phi\colon k^n \to U_0$ は定まっている。

$\psi\colon U_0 \to k^n$ を $\psi(\underbrace{x_0}_{\neq 0}, \ldots, x_n) = \psi(1, x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0) = (x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$ となる。well-defined と逆写像は示せる。

(証終)

$$\mathbb{P}^n(k) = \underbrace{k^n}_{\text{無限遠超平面。頭が0のところ}} \cup \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}(k)}_{\text{頭が非0のところ}} \tag{6}$$

系 3: $i = 0, \ldots, n$ それぞれに対して、

$$U_i = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n(k); x_i \neq 0\} \tag{7}$$

とおく。

(i) U_i の点は k^n の点と一対一に対応する。
(ii) 補集合 $\mathbb{P}^n(k) - U_i$ は $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ 同一視できる。
(iii) $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$ となる。

証明
i,ii は変数のつけかえで命題 2 に帰着する。iii は、$\cup$ をとることで $x_1 \neq 0 \vee \ldots \vee x_n \neq 0$ で、$\mathbb{P}^n(k)$ は全部座標が 0 になることはないので全体になっている。

(証終)
射影空間の多様体は、斉次なものを使わないとうまくいかない。

命題 4: $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ を斉次多様体とする。もし f が点 $p \in \mathbb{P}^n(k)$ のある斉次座標の組に対して消えていれば、f は p の任意の斉次座標に対して消える。とくに $\mathbf{V}(f) = \{p \in \mathbb{P}^n(k); f(p) = 0\}$ は $\mathbb{P}^n(k)$ の部分集合として矛盾なく定義される。

証明
略。

(証終)

定義 5: k を体とし、$f_1, \ldots, f_s \in k[x_0, \ldots, x_n]$ を斉次多項式とする。

$$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n(k); f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0 \quad (1 \leq i \leq s)\} \tag{8}$$

とおいて、$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ を $f_1, \ldots, f_s$ によって定義された射影多様体とよぶ。

「1 つの」斉次多項式で定義された射影多様体は「n 次超曲面」という。
射影多様体と多様体を考える。$x_0 = 1$ として $V \cap U_0$ に斉次多項式を落とすことを非斉次化という。

命題 6: $V = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ を射影多様体とする。すると $W = V \cap U_0$ はアフィン多様体 $\mathbf{V}(g_1, \ldots, g_s) \subset k^n$ と同一視できる。ここで、$1 \leq i \leq s$ に対して、$g_i(x_1, \ldots, x_n) = f_i(1, x_1, \ldots, x_n)$ である[*1]。

証明
1. $\psi(W) \subset \mathbf{V}(g_1, \ldots, g_s)$ となる。$\psi: U_0 \to k^n$ は、射影座標を頭が 1 になるように正規化して頭を落とす写像であった。
   (a) $\forall x_\bullet$: $(x_1, \ldots, x_n) \in \psi(W)$ とする。$\psi(1, x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ であり、$(1, x_1, \ldots, x_n) \in V$ となっている。

(b) 任意の i について、上の $(1,\ldots,x_n)\in V$ より

$$g_i(x_1,\ldots,x_n)=f_i(1,x_1,\ldots,x_n)=0. \tag{9}$$

(c) (a) おわり: 上より、$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{V}(g_1,\ldots,g_s)$ となる。

2. $\supset$ を示す。
   (a) $\forall a_\bullet$: $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbf{V}(g_1,\ldots,g_s)$ とする。
   (b) $(1,a_1,\ldots,a_n)\in U_0$ である。
   (c) 任意の i について、

$$f_i(1,a_1,\ldots,a_n)=g_i(a_1,\ldots,a_n)=0. \tag{10}$$

   (d) 上より、$\phi(\mathbf{V}(g_1,\ldots,g_s))\subset W$ となる。
3. ϕ と ψ は逆写像なので、W と $\mathbf{V}(g_1,\ldots,g_s)$ の点は一対一に対応する。

(証終)

非斉次化の逆を考える。$f\in k[x_1,\ldots,x_n]$ について、すべての項の全次数が $\deg(f)$ になるように各項に x_0 の冪をかけたものを f^h という。

命題 7: $g(x_1,\ldots,x_n)\in k[x_1,\ldots,x_n]$ を全次数 d の多項式とする。

(i) g を斉次成分の和に展開して、$g=\sum_{i=0}^d g_i$ とかく。ここで g_i の全次数は i である。すると、

$$g^h(x_0,\ldots,x_n)=\sum_{i=0}^d g_i(x_1,\ldots,x_n)x_0^{d-i} \tag{11}$$

は全次数が d であるような $k[x_0,\ldots,x_n]$ の斉次多項式である。この g^h を g の斉次化という。

(ii) 斉次多項式は次で計算できる。

$$g^h=x_0^d\cdot g(\frac{x_1}{x_0},\ldots,xfrax_nx_0). \tag{12}$$

(iii) g^h を非斉次化すると g になる。

$$g^h(1,x_1,\ldots,x_n)=g(x_1,\ldots,x_n). \tag{13}$$

(iv) $F(x_0,\ldots,x_n)$ を斉次多項式とし、x_0^e を F を割り切るような x_0 の冪乗のうち最高次のものとする。もし $f=F(1,x_1,\ldots,x_n)$ が F の非斉次化なら、$F=x_0^e\cdot f^h$ がなりたつ。

証明

(i) はあきらか。

(ii) を示す。

$$g^h(x_0,\ldots,x_n)=\sum_{i=0}^d g_i(x_1,\ldots,x_n)x_0^{d-i} \tag{14}$$

$$=x^d\sum_{i=0}^d\frac{g_i(x_1,\ldots,x_n)}{x_0^i} \tag{15}$$

$$=x^d\sum_{i=0}^d g_i(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}). \tag{16}$$

(iii),(iv) はあきらか。

(証終)

8.3 射影化された代数-幾何対応

定義 1: $k[x_0,\ldots,x_n]$ のイデアル I が斉次であるとは、各 $f\in I$ に対して、f の斉次成分 f_i がまた I に属しているときに言う。

定理 2: $I\subset k[x_0,\ldots,x_n]$ をイデアルとする。このとき、次は同値である。

(i) I は $k[x_0,\ldots,x_n]$ の斉次イデアルである。

(ii) 斉次多項式 $f_1,\ldots,f_s$ を用いて、$I=\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ とあらわせる。

(iii) 任意の多項式順序に対して、I の簡約グレブナ基底は斉次多項式からなる。

証明

(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す。そのために、演習問題 2 を解く。

(演習 2-a)「$f=\sum_i f_i$ と $g=\sum_i g_i$ を 2 つの多項式の斉次成分の和への分解とする。このとき、$f=g \iff {}^\forall i\colon f_i=g_i$ を示せ。」$\Leftarrow$ はあきらか。$\Rightarrow$ を示す。$f-g$ を考え、$f=0 \implies {}^\forall i\colon f_i=0$ を示せば十分。i が次数をあらわしているとする。仮に何か $f_i\neq 0$ があるなら、それを打ち消すものが他の $f_\bullet$ にはない。

あるいは、$\sum_{j\neq i} f_i=-f_i$ と変形し、両方の次数が違うので $f_i=0$ である…というのを帰納的にやってもよい。

(演習 2-b)「$f=\sum_i f_i$ と $g=\sum_i g_i$ を 2 つの多項式の斉次成分の和への分解とする。このとき、$h=fg$ の斉次成分は $h_k=\sum_{i+j=k} f_i\cdot g_j$ で与えられていることを示せ。」$h=fg$ の項は $\left\{f_i\cdot g_j; i,j\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}\right\}$ である。よって、h の多重次数 k なものは、$i+j=k$ となる (i,j) 達だけであり、成り立つ。

(演習 2-c)「(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示せ。」$f\in I$ とし、これの斉次成分への分解 $f=\sum_d g_d$ とする。各 g_d は d 次である。f_i たちに番号をつけかえて、f_{ij} ただし i が多重次数で、j がそれらのうちの番号とする。$f\in I$ なので、$f=\sum_{i,j} h_{ij}f_{ij}$ と $h_{ij}\in k[x_1,\ldots,x_n]$ で表示される。さらに、$h_{ij}=\sum_k h_{ijk}f_{ij}$ と斉次成分に分解する。各 f_{ijk} は k 次である。さらに、(b) より、$f=\sum_d\sum_{i+k=d}\sum_j h'_{ijk}f_{ij}$ と和をとりかえる。よって、$\sum_d g_d=\sum_d\sum_{i+k=d}\sum_j h'_{ijk}f_{ij}$ となる。(a) より、各々の斉次成分が等しいので、$g_d=h'_{ijk}f_{ij}$ となっている。よって、$g_d\in I$ である。示された。

(i) $\Longrightarrow$ (ii) を示す。I は斉次イデアルであるとする。

1. $\exists F_\bullet$: ヒルベルトの基底定理より、
$$I=\langle F_1,\ldots,F_t\rangle \tag{17}$$
となる $F_1,\ldots,F_t\in k[x_1,\ldots,x_n]$ が存在する。(これは斉次とは限らない。)
2. $F_{\bullet\bullet}$: 各 j について、F_j を斉次成分に分け、$F_j=\sum_i F_{ji}$ と描く。
3. I は斉次イデアルであることと、各 j について $F_j\in I$ であること、各 F_{ji} が F_j の項であることから、$F_{ji}\in I$ である。
4. I': $I'=\langle F_{ji}; i,j\rangle$ とする。
5. 2 の $F_j=\sum_i F_{ji}$ より、$F_j\in I'$ がわかり、$I\subset I'$ である。
6. 3 より、$I'\subset I$ である。
7. 5,6 より $I=I'$ であり、I の基底として斉次なもの F_{ji} たちが得られた。

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) を示す。演習問題 3 を解く。

(演習 3-a)「割り算アルゴリズムを用いて、斉次多項式 f を斉次多項式たち $f_1,\ldots,f_s$ で割り算したとせよ。その結果、$f=a_1f_1+\cdots+a_sf_s+r$ という表示が得られる。このとき、商 $a_1,\ldots,a_s$ および、余り r は斉次多項式 (0 かもしれない。) であることを証明せよ。r の全次数はいくらになるか?」はじめに暫定的な余り r は f になっているが、ここからある単項式 $c\alpha x^\alpha$ として $f_i\cdot c_\alpha x^\alpha$ を引いて次数を下げても、r の全次数は変化しない。そして

このとき、商 a_i には cx^α が追加されるが、これの次数は $\deg(c_\alpha x^\alpha) = \deg(f) - \deg(f_i)$ である。よって、商も余りも (0 でなければ) 斉次であり続ける。r は 0 でなければ全次数は $\deg(f)$ である。

(演習 3-b)「f, g を斉次多項式とすると、S 多項式 $S(f,g)$ もまた斉次であることを示せ。」$x^\gamma = \mathrm{LCM}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))$ として、

$$S(f,g) = \frac{x^\gamma}{\mathrm{LT}(f)} f - \frac{x^\gamma}{\mathrm{LT}(g)} g \tag{18}$$

であった。

$$(x^\gamma/\mathrm{LT}(f) \cdot f\text{の各項の次数}) = \deg(\frac{x^\gamma}{\mathrm{LT}(f)} f) = \deg(x^\gamma). \tag{19}$$

同様に、$(x^\gamma/\mathrm{LT}(f) \cdot g\text{の各項の次数}) = \deg(x^\gamma)$ である。よって、$S(f,g)$ のどの項の次数も $\deg(x^\gamma)$ であり、斉次である。

(演習 3-c)「ブッフベルガーのアルゴリズムを解析することによって、斉次イデアルは斉次多項式からなるグレブナ基底を持つことを示せ。」ブッフベルガーのアルゴリズムは S 多項式を追加し続けるものだが、スタートが斉次だったので追加したものも (b) より斉次しか追加されない。よって、停止時点でも斉次な多項式しかなく、斉次イデアルには斉次なグレブナ基底がある。

(演習 3-d)「(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) を示せ。」(iii) $\Longrightarrow$ (ii) はあきらか。(ii) $\Longrightarrow$ (iii) を示す。(ii) を仮定する。ここからブッフベルガーのアルゴリズムを使うことで、(c) より I の斉次なグレブナ基底が得られる。斉次であることを保ちながら、これを極小グレブナ基底にすることができる[*2]。さらにこれに簡約グレブナ基底を作るアルゴリズムを適用しても斉次であり続けることを示す。このアルゴリズムは、グレブナ基底の各元 g に対して、g を $\overline{g}^{G-\{g\}}$ で置換するものであった。この操作で、g が斉次であることは変化しないことを示す。実際、(a) より余りは斉次であり続けるし (割り算をして 0 になることはない。仮にそうなれば極小にしたことに反する。)、その次数は g と変わらない。よって、I の斉次な基底から、斉次な簡約グレブナ基底を作ることができる。

(証終)

命題 3: $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ を斉次イデアルとして、斉次多項式 $f_1, \ldots, f_s$ に対して、$I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ であると仮定する。すると、

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) \tag{20}$$

であり、したがって $\mathbf{V}(I)$ は射影多様体である。

証明
演習 5 を解く。

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(I) &= \left\{(a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k); {}^\forall f \in I \colon f(a_0, \ldots, a_n) = 0\right\} && (21)\\
&= \left\{(a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k); {}^\forall i = 1, \ldots, s \colon f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0\right\} && (22)\\
&= \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s). && (23)
\end{aligned}$$

(証終)

射影多様体 $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ に対して、

$$\mathbf{I}(V) = \left\{f \in k[x_0, \ldots, x_n]; {}^\forall(a_0 : \cdots : a_n) \in V \colon f(a_0, \ldots, a_n) = 0\right\} \tag{24}$$

とおく (ここで f は V の任意の点のすべての斉次座標に対して消えていなければならないことに注意せよ。)。もし k が無限体であれば、$\mathbf{I}(V)$ は $k[x_0, \ldots, x_n]$ の斉次イデアルである。

[*2] 先頭項係数を 1 にして、不要なものを除く。

証明

イデアルであることはあきらか。$\mathbf{I}(V)$ が斉次であることを示す。

1. $\forall f$: $f \in \mathbf{I}(V)$ とする。
2. $\forall p$: $p \in V$ とする。
3. 仮定より、f は p のすべての斉次座標 $(a_0, \ldots, a_n)$ に対して消える。
4. f の任意の斉次成分 f_i は $(a_0, \ldots, a_n)$ で消える？
   (a) 演習問題 2-7 を解く。(これまでの文字は忘れる。) 「k を無限体とする。もし $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ が斉次多項式ではなく、しかも $p \in \mathbb{P}^n(k)$ のすべての斉次座標で消え f の任意の斉次成分 f_i も p で消えていなければならないことを示そう。

   (演習 2-7-a)「f を斉次成分の和として、$f = \sum_i f_i$ と表そう。$p = (a_0, \ldots, a_n)$ とするとき、次の式を示せ。

$$f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \sum f_i(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \sum_i \lambda^i f_i(a_0, \ldots, a_n). \tag{25}$$

   」自明。

   (演習 2-7-b)「f がすべての $\lambda \neq 0 \in k$ に対して消えれば、$f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0$ がすべての i について成り立つことを示せ。」$f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$ を $k[\lambda]$ の元と見る。これが $\lambda \neq 0$ で消えること、それに k が無限体であることから、この λ に関する方程式は無数の解を持つことになる。そのような多項式は 0 しかないので、$f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0_{k[\lambda]}$ である。(a) より、$\sum_i \lambda^i f_i(a_0, \ldots, a_n)$ も λ に関する 0 多項式であることがわかる。よって、すべての i について、$f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0$ である。

   (b) 3 は、${}^{\forall}\lambda \neq 0$: $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0$ を主張しているので、(a) で解いた問と k が無限体であることより、f のすべての斉次成分 f_i が $f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0$ をみたす。

   よって、f の任意の斉次成分 f_i は $(a_0, \ldots, a_n)$ で消える。
5. 2 おわり: 上より、任意の i について、$f_i \in \mathbf{I}(V)$ である。
6. 1 おわり: 上より、f の任意の斉次成分が I に属するので、$\mathbf{I}(V)$ は斉次である。

(証終)

定理 5: k を無限体とする。写像

$$\text{射影多様体} \xrightarrow{\mathbf{I}} \text{斉次イデアル} \tag{26}$$

と

$$\text{斉次イデアル} \xrightarrow{\mathbf{V}} \text{射影多様体} \tag{27}$$

は包含関係を逆転させる。さらに、任意の射影多様体に対して、

$$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V \tag{28}$$

が成り立つ。特に $\mathbf{I}$ は単射である。

証明

$\mathbf{I}$ の反転を示す。$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) \subset \mathbf{V}(g_1, \ldots, g_t)$ とする。

$$\begin{aligned}\mathbf{I}(\mathbf{V}(g_1, \ldots, g_t)) &= \left\{f \in k[x_0, \ldots, x_n]; f\text{は}\mathbf{V}(g_1, \ldots, g_t)\text{を消す}\right\} && (29)\\ &\subset \left\{f \in k[x_0, \ldots, x_n]; f\text{は}\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)\text{を消す}\right\} && (30)\\ &= \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_t)). && (31)\end{aligned}$$

$\mathbf{V}$ の反転を示す。$\langle f_1,\ldots,f_s\rangle \subset \langle g_1,\ldots,g_t\rangle$ とする。

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\langle g_1,\ldots,g_t\rangle) &\overset{\boxed{\text{命題 3}}}{=} \mathbf{V}(g_1,\ldots,g_t) && (32)\\ &\subset \mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s) && (33)\\ &\overset{\boxed{\text{命題 3}}}{=} \mathbf{V}(\langle f_1,\ldots,f_s\rangle). && (34)\end{aligned}$$

$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ を示す。

1. $V = \mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ とする。$\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))) = \mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ を示せばよい。
2. $\subset$ を示す。
   (a) $f_1,\ldots,f_s$ は $\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ を消す。
   (b) 上より、$f_1,\ldots,f_s \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))$ となる。
   (c) 上より、$\langle f_1,\ldots,f_s\rangle \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))$ がなりたつ。
   (d) 上と $\mathbf{V}$ の反転より、

$$\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))) \subset \mathbf{V}(\langle f_1,\ldots,f_s\rangle) \overset{\boxed{\text{命題 3}}}{=} \mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s). \tag{35}$$

3. $\supset$ を示す。
   (a) $\forall(a_0:\cdots:a_n)$: $(a_0:\cdots:a_n) \in \mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ とする。$f_1,\ldots,f_s$ 全ては $(a_0:\cdots:a_n)$ を消す。
   (b) $\forall f$: $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))$ とする。(f は $(a_0:\cdots:a_n)$ を消す？)
   (c) 上より、f は $\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ を消す。
   (d) 上と、(a) より、f は $(a_0:\cdots:a_n)$ を消す。
   (e) (b) おわり: $(a_0:\cdots:a_n)$ は $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))$ のどれでも消える。
   (f) (a) おわり: $\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$ は $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))$ のどれでも消える。
   (g) 上より、

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))) &= \left\{\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))\text{のどれでも消える点}\right\} && (36)\\ &\supset \mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s). && (37)\end{aligned}$$

4. 2,3 よりなりたつ。

(証終)

定理 6: k を無限体とする。

(i) $\mathbb{P}^n(k)$ に含まれる射影多様体の降鎖

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots \tag{38}$$

に対して、ある整数 N が存在して、$V_N = V_{N+1} = \ldots$ が成り立つ。

(ii) 任意の射影多様体 $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ は、有限個の既約な射影多様体の和集合として一意的に表される。

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_m. \tag{39}$$

ただし、$i \neq j$ に対しては $V_i \not\subset V_j$ である。

証明

(i) を示す。鎖に $\mathbf{I}$ をとって昇鎖を作る。ネーター環の昇鎖は安定するので、ある N 以上 $\mathbf{I}(V_N) = \mathbf{I}(V_{N+1}) = \ldots$ となる。定理 5 の $\mathbf{I}$ の単射より、$V_N = V_{N+1} = \ldots$ となる。

(ii) を示す。2 通りに書いて、1 個既約多様体とってもう片方のどこに含まれますか〜みたいなことを言っていればできる。

(証終)
斉次イデアルの演算と射影多様体の演算を考える。

演習 6: $I_1, \ldots, I_l$ を $k[x_0, \ldots, x_n]$ の斉次イデアルとする。

(a) $I_1 + \cdots + I_l$ は斉次。
(b) $I_1 \cap \ldots \cap I_l$ は斉次。
(c) $I_1 \ldots I_l$ は斉次。

証明
(a) を示す。定理 2 より、各 I_i には斉次な生成元 $f_{i1}, \ldots, f_{iN_i}$ がある。

$$I_1 + \cdots + I_l = \langle f_1 + \cdots + f_l; f_1 \in I_1, \ldots, f_l \in I_l \rangle \tag{40}$$

$$\overset{\boxed{\text{命題 4-3-2}}}{=} \langle f_{11}, \ldots, f_{1N_1}, \ldots, f_{i1}, \ldots, f_{iN_i}, \ldots, f_{l1}, \ldots, f_{lN_l} \rangle \,. \tag{41}$$

生成元がすべて斉次なので、定理 2 より $I_1 + \cdots + I_l$ も斉次イデアルである。
(b) を示す。$f \in I_1 \cap \ldots \cap I_l$ とする。$i = 1, \ldots, l$ とする。$f \in I_i$ である。I_i は斉次なので、f の各項も I_i に属する。i は任意なので、f の各項も $I_1 \cap \ldots \cap I_l$ に属する。f は任意なので、$I_1 \cap \ldots \cap I_l$ は斉次。
(c) を示す。$I_\bullet$ の生成元を (a) のときと同様にする。命題 4-6-3 によれば、

$$I_1 \ldots I_l = \langle f_{1i_1} \ldots f_{li_l}; 1 \leq i_1 \leq N_1, \ldots, 1 \leq i_N \leq N_l \rangle \tag{42}$$

となっている。生成元を斉次になるようにとっておいたので、各 j について f_{ji_j} の全次数は i に依らず一定であり、$f_{1i_1} \ldots f_{li_l}$ の全次数は $i_1, \ldots, i_l$ の選び方に依らず一定である。よって、$I_1 \ldots I_l$ は斉次な基底で生成されており、定理 2 より $I_1 \ldots I_l$ は斉次イデアルである。

(証終) アフィンと同様に次が成り立つ。

練習問題 7: $I_1, \ldots, I_l$ を $k[x_0, \ldots, x_n]$ の斉次イデアルとして、$V_i = \mathbf{V}(I_i)$ を対応する $\mathbb{P}^n(k)$ の射影多様体とする。

(a) $\mathbf{V}(I_1 + \cdots + I_l) = \bigcap_{i=1}^l V_i$ である。
(b)

$$\mathbf{V}(I_1 \cap \ldots \cap I_l) = \mathbf{V}(I_1 \ldots I_l) = \bigcup_{i=1}^{l} V_i. \tag{43}$$

斉次イデアルは

$$\sqrt{I} = \left\{ f \in k[x_0, \ldots, x_n]; \text{ある} m \geq 1 \text{について} f^m \in I \right\}. \tag{44}$$

命題 7: $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ を斉次イデアルとする。すると、$\sqrt{I}$ も斉次イデアルである。

証明
1. $\forall f$: $f \in \sqrt{I}$ とする。斉次成分に興味があるので、$f \neq 0$ としてよい。
2. $\exists m$: $m \geq 1$ があって、$f^m \in I$ となる。
3. f_i: f を斉次成分に分解する。$f = \sum_i f_i$ としておく。

4. $f_{\max}$: $f_{\max}$ をゼロでない斉次成分のうち、最大の全次数を持つような成分とする。

$$f = f_{\max} + \sum_{i<\max} f_i \tag{45}$$

となる。

5. 4 より、f^m を展開することを考えると

$$(f^m)_{\max} = (f_{\max})^m \tag{46}$$

となる。

6. I が斉次イデアルであること、2 の $f^m \in I$ より、$(f^m)_{\max} \in I$ だえる。
7. 5 と上より、$(f_{\max})^m \in I$ である。
8. 上より、$f_{\max} \in \sqrt{I}$ である。
9. g: $g = f - f_{\max}$ とする。
10. 1 と 8 より、$f, f_{\max} \in \sqrt{I}$ なので、上より $g \in \sqrt{I}$ である。
11. 2-8 の議論を g に繰替えすと、$g_{\max} \in \sqrt{I}$ である。
12. 以降、9-11 の議論を繰替えすことによい、f のすべての項が $\sqrt{i}$ に属することがわかる。
13. 1 おわり:$f \in \sqrt{I}$ は任意だったので、$\sqrt{I}$ は斉次イデアルである。

(証終)

射影幾何だと、弱形の零点定理はそのまま持ってこれない。

定理 8(射影幾何における弱形の零点定理) k を代数的閉体として、I を $k[x_0, \ldots, x_n]$ の斉次イデアルとする。すると次は同値である。

(i) $\mathbf{V}(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ は空である。

(ii) G を I の (ある単項式順序に関する) 簡約グレブナ基底とする。すると任意の $0 \leq i \leq n$ に対して、$\mathrm{LT}(g)$ が x_i の非負冪であるような $g \in G$ が存在する。

(iii) 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して、ある整数 $m_i \geq 0$ が存在して、$x_i^{m_i} \in I$ が成り立つ。

(iv) ある $r \geq 1$ が存在して、$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r \subset I$ が成り立つ。

証明

1. C_V: $C_V = \mathbf{V}_a(I) \subset k^{n+1}$ を、I で定義されるアフィン多様体とする。(これは、I で定義される射影多様体の各点に対応する点をすべて含む。)
2. (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す。簡約グレブナ基底 G で、任意の i に対しある $g \in G$ が存在して、ある $m_i \geq 0$ に対して $\mathrm{LT}(g) = x_i^{m_i}$ となるものがあるとする。
   (a) 上の状況は、$\langle \mathrm{LT}(I) \rangle = \langle \mathrm{LT}(G) \rangle = \langle x_0^{m_0}, x_1^{m_1}, \ldots, x_n^{m_n} \rangle$ となっている (G は簡約されている。)。
   (b) このとき、定理 6-3-6 によれば C_V は有限集合である。概略を示す。
      i. $\forall i$: $i = 0, \ldots, n$
      ii. $\exists g$: (a) より、$\mathrm{LT}(g) = x_i^{m_i}$ となる g が存在する。
      iii. 上より、$(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{V}(I)$ ならば $g = 0$ を満たさなければならない。
      iv. g を x_i に関する方程式と見做せば、x_i は m_i 個以下であることがわかる (代数的閉体であることは使っていない。)。
      v. i おわり。任意の i について x_i は m_i 個以下なので、x は $m_0 \cdot \ldots \cdot m_n$ 個以下である。

      よって、C_V は有限集合である。
   (c) $\exists p$: $p \in V$ が存在したとする (背理法)。
   (d) $(a_0, \ldots, a_n)$: $(a_0, \ldots, a_n)$ を p の斉次座標とする。
   (e) 任意の λ について、$\lambda(a_0, \ldots, a_n) \in C_V$ となる。
   (f) k は代数的閉体ゆえ無限体なので、上より C_V は無限に元を含む。

(g) (c) おわり: 上は、(b) に矛盾する。よって、$\mathbf{V}(I) = V = \emptyset$ である。

3. (iii) $\Longrightarrow$ (ii):

(a) G: G を I のグレブナ基底とする。

(b) $\forall i$: $i = 0, \ldots, n$ とする。

(c) $\exists m_i$: (iii) より、$x_i^{m_i} \in I$ となる $m_i \geq 0$ がある。

(d) 上より、

$$x_i^{m_i} = \mathrm{LT}(x_i^{m_i}) \in \mathrm{LT}(I) = \langle \mathrm{LT}(I) \rangle = \langle \mathrm{LT}(G) \rangle \tag{47}$$

となる。

(e) $\exists g$: 上より、$\mathrm{LT}(g) | x_i^{m_i}$ となる $g \in G$ が存在する。

(f) 上より、$\mathrm{LT}(g)$ は x_i の冪である。

(g) (b) おわり: 任意の $i = 0, \ldots, n$ について、$g \in G$ で $\mathrm{LT}(g_i)$ が x_i の冪であるものが存在する。

4. (iv) $\Longrightarrow$ (iii):

(a) $\forall i$: $i = 0, \ldots, n$

(b) $\exists r$: 仮定より、$r \geq 1$ で、$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r \subset I$ となるものがある。

(c) 上より、$x_i^r \in I$ である。

(d) (a) おわり: 任意の i について、ある整数 $m_i \geq 0$ が存在して、$x_i^{m_i} \in I$ となる。

5. (i) $\Longrightarrow$ (iv):

(a) 仮定より、$V = \emptyset$ である

(b) $C_V \subset \left\{ (\overset{\overset{0}{\vee}}{0}, \ldots, \overset{\overset{n}{\vee}}{0}) \right\}$？

i. $\exists (a_0, \ldots, a_n)$: C_V がゼロでない点 $(a_0, \ldots, a_n)$ を持つとする (背理法)。

ii. 上より $(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$ なので、$(a_0 : \cdots : a_n) \in V$ となる。

iii. i おわり: 上は (a) に矛盾。

よって、$C_V \subset \left\{ (\overset{\overset{0}{\vee}}{0}, \ldots, \overset{\overset{n}{\vee}}{0}) \right\}$。

(c) 上に $\mathbf{I}_a$ をかける。$\mathbf{I}_a(\{(0, \ldots, 0)\}) \subset \mathbf{I}_a(C_V)$ となる。

(d) $\mathbf{I}_a(\{(0, \ldots, 0)\}) = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ である[*3]。

(e) k は代数的閉体なので、アフィン多様体の強形の零点定理により、

$$\mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I)) = \sqrt{I}. \tag{48}$$

(f) (c),(d),(e) より、

$$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle \overset{\boxed{\text{(d)}}}{=} \mathbf{I}_a(\{(0, \ldots, 0)\}) \overset{\boxed{\text{(c)}}}{\subset} \mathbf{I}_a(C_V) \overset{\boxed{\text{(e)}}}{=} \sqrt{I}. \tag{49}$$

(g) $\exists r$: 上より、$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r \subset I$ となる $r \geq 1$ が存在する。(なぜなら、各 i について $x_i^{r_i} \in I$ となる r_i があるが、このとき $r = r_0 + r_1 + \cdots + r_n$ とすれば、$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r$ からどうとっても $x_i^{r_i}$ が因子として入っている。)

(証終)

> 定理 9(射影幾何における強形の零点定理): k を代数的閉体として、I を $k[x_0, \ldots, x_n]$ の斉次イデアルとする。$V = \mathbf{V}(I)$ が $\mathbb{P}^n(k)$ の空でない射影多様体であれば、$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$ が成り立つ。

証明

1. V: $V = \mathbf{V}(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ とする。

[*3] $f \in \mathbf{I}_a(\{(0, \ldots, 0)\})$ として、f を $x_0, \ldots, x_n$ で割る。

2. C_V: $C_V = \mathbf{V}_a(I) \subset k^{n+1}$ とする。
3. 仮定より、$V \neq \emptyset$ である。
4. $\mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}(V)$？
   (a) $\subset$ を示す。
      i. $\forall f$: $f \in \mathbf{I}_a(C_V)$ とする。
      ii. $\forall p$: $p \in V$ とする。
      iii. $\forall (a_0, \dots, a_n)$: p の斉次座標を $(a_0, \dots, a_n)$ とする。
      iv. 上より、$(a_0, \dots, a_n) \in C_V$ となる。
      v. i より、f は C_V で消える関数なので、$(a_0, \dots, a_n)$ を消す。
      vi. iii おわり: f は p の斉次座標をすべて消す。
      vii. ii おわり: f は V を消す。
      viii. 上より、$f \in \mathbf{I}(V)$ である。
      ix. i おわり: $\mathbf{I}(C_V) \subset \mathbf{I}(V)$ である。

      よって、 $\mathbf{I}(C_V) \subset \mathbf{I}(V)$ である。
   (b) $\supset$ を示す。
      i. $\forall f$: $f \in \mathbf{I}(V)$ とする。
      ii. $\forall a_0, \dots, a_n$: $(a_0, \dots, a_n) \in C_V - \{0\}$ とする。
      iii. 上より、$(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbf{I}(V)$ である。
      iv. 上と (b) より、f は $(a_0 : \dots : a_n) \in V$ を消す。
      v. (b) おわり: 上より f は $C_V - \{0\}$ を消す。
      vi. (a) と $\mathbf{I}(V)$ は斉次イデアルなので、f の斉次成分はまた $\mathbf{I}(V)$ に属し、V を消す。
      vii. 上より、f の定数項も V を消す。
      viii. 上と $V \neq \emptyset$ より、f の定数項は 0 である。
      ix. 上より、f は原点 0 を消す。
      x. 上と (e) より、f は C_V を消す。
      xi. (a) おわり: 上より $\mathbf{I}(V) \subset \mathbf{I}(C_V)$ となる。
   (c) (a),(b) より、$\mathbf{I}(C_V) = \mathbf{I}(V)$ となる。
5. アフィン幾何の強形の零点定理より、$\sqrt{I} = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I))$ となる。
6.

$$\sqrt{I} \overset{\boxed{5,\text{零点定理}}}{=} \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I)) = \mathbf{I}_a(C_V) \overset{\boxed{4}}{=} \mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)). \tag{50}$$

(証終)

演習問題 9(結局使わんかった。):

(a) $k[x_0, \dots, x_n]$ の任意の斉次イデアルで真部分集合になっているようなものは、I_0 に含まれることぉお示せ。
(b) r 次の冪 I_0^r は $k[x_0, \dots, x_n]$ の全次数が r の単項式全体から生成されることを示せ。さらに、このことから全次数が r 以上であるような任意の斉次多項式は I_0^r に含まれていることを示せ。
(c) $V = \mathbf{V}(I_0) \subset \mathbb{P}^n(k), C_V = \mathbf{V}_a(I_0) \subset k^{n+1}$ とおく。$\mathbf{I}_a(C_V) \neq \mathbf{I}(V)$ であることを示せ。

証明

(a) 斉次イデアル $I \subsetneq k[x_0, \dots, x_n]$ とする。仮に I が定数を含んでいるならば I は全体になってしまうので、I は定数を含まない。$f \in I$ とする。先のことより、f は定数ではない。f は斉次なので、これは f が定数項を含まないことを意味する。したがって、$f \in I_0$ であり、$I \subset I_0$ である。
(b) $I_0^r = \langle k[x_0, \dots, x_n]\text{の全次数}r\text{な単項式}\rangle$ を示す。これは、$I_0 = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ なので、イデアルの積の生成元としてイデアルの生成元の積たち全体が取れることから明らか。

全次数が r 以上であるような任意の斉次多項式が I_0^r に属することは、そのような多項式の各項の出鱈目な r 次の因子を取れば、それが I_0^r に属することからわかる。

(c)

$$\mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I_0)) \tag{51}$$
$$= \langle x_0, \ldots, x_n \rangle . \tag{52}$$

一方、

$$\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I_0)) \tag{53}$$
$$= \mathbf{I}(\mathbf{V}(\langle x_0, \ldots, x_n \rangle)) \tag{54}$$
$$= \mathbf{I}(\emptyset) \tag{55}$$
$$= k[x_0, \ldots, x_n]. \tag{56}$$

(証終)

定理 10: k を代数的閉体とする。$\mathbf{I}$ と $\mathbf{V}$ は、空でない射影多様体と、$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ に含まれる根基斉次イデアルとの間の、包含関係を逆転するような全単射写像を与える。つまり写像

$$\{\text{空でない射影多様体}\} \xrightarrow{\mathbf{I}} \{\langle x_0, \ldots, x_n \rangle \text{ に真に含まれる根基斉次イデアル}\} \tag{57}$$
$$\{\langle x_0, \ldots, x_n \rangle \text{ に真に含まれる根基斉次イデアル}\} \xrightarrow{\mathbf{V}} \{\text{空でない射影多様体}\} \tag{58}$$

は互いに逆写像を与えている。

証明

1. I を根基斉次イデアルとしたとき、$\mathbf{V}(I) \neq \emptyset \iff I \subsetneq \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$?
   (a) 定理 8 より、$\mathbf{V}(I) = \emptyset \iff {}^{\exists}r \geq 1\colon \langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r \subset I$
   (b) 1 の仮定より I は根基イデアルなので、
$$ {}^{\exists}r \geq 1\colon \langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r \subset I \iff \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \subset I. \tag{59}$$
   (c) (a)(b) より、
$$\mathbf{V}(I) = \emptyset \iff \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \subset I. \tag{60}$$
   (d) 上の対偶をとり、
$$\mathbf{V}(I) \neq \emptyset \iff I \subsetneq \langle x_0 \ldots, x_n \rangle . \tag{61}$$
2. I を $I \subsetneq \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ となる根基斉次イデアルとして、$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$?
   (a) $I \subsetneq \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ で、根基斉次イデアルなので、1 より $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$ である。
   (b) 上と、I が斉次であることから定理 9 より、$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$ となる。
   (c) I は根基なので、$\sqrt{I} = I$ である。
   (d) 上と (b) より、$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$ である。
3. V を空でない射影多様体として、$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$?
   (a) 定理 5 と、k が代数的閉体ゆえ無限体であることから $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ である。
4. 2,3 より $\mathbf{I}$ と $\mathbf{V}$ は互いに逆写像である。

(証終)

8.4　アフィン多様体の射影完備化

定義 1: イデアル $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ に対して、I の斉次化を次のように定義する。

$$I^h = \langle f^h; f \in I \rangle \subset k[x_0, \dots, x_n] \tag{62}$$

ここで f^h は先の斉次化である。

命題 2: 任意のイデアル $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ に対して、その斉次化 I^h は $k[x_0, \dots, x_n]$ の斉次イデアルである。

証明

$g \in \langle f^h; f \in I \rangle$ とする。$N, F_\bullet$ を使って、$g = \sum_{i=1}^N F_i f_i^h$ とする。$f_\bullet$ の番号を付け替えて、f_{ij} が、i が斉次の次数、j がそのうちでのインデックスになるようにする。$g = \sum_{i=}^N \sum_j F_{ij} f_{ij}^h$ となる。さらに、F_{ij} を斉次分解して、$F_{ij} = \sum_l F_{ijl}$ とする。$g = \sum_{i=1}^N \sum_j \sum_l F_{ijl} f_{ij}^h$ となる。これを次数で分けて書くと、(存在しない添字の項は 0 として、)

$$g = \sum_d \sum_{i+l=d} \sum_j F_{ijl} f_{ij}^h \tag{63}$$

となる。このうち、$\sum_{i+l=d} \sum_j F_{ijl} f_{ij}^h$ は d 次斉次成分になっているが、これは f_{ij}^h の一次結合なので I^h に属する。

(証終)

$\langle f_1^h, \dots, f_s^h \rangle$ は斉次な基底でできているので斉次イデアルだが、上の斉次化はこれよりも大きくなりうる。

次数つきの単項式順序: 単項式順序のうち、$|\alpha| > |\beta|$ なら $x^\alpha > x^\beta$ となるもの。

定理 4: I を $k[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル、$G = \{g_1, \dots, g_t\}$ を $k[x_1, \dots, x_n]$ の次数付き単項式順序に関する I のグレブナ基底とする。すると $G^h = \{g_1^h, \dots, g_t^h\}$ は $I^h \subset k[x_0, \dots, x_n]$ の基底である。

証明

「G^h は $k[x_0, \dots, x_n]$ の適当な単項式順序について I^h のグレブナ基底であることを示す。」

1. 記号を用意する。$k[x_0, \dots, x_n]$ の単項式は、$\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ と $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を使って、

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = x^\alpha x_0^d \tag{64}$$

   と書く。
2. $>_h$: $k[x_0, \dots, x_n]$ の順序 $>_h$ を

$$x^\alpha x_0^d >_h x^\beta x_0^e \iff \begin{cases} x^\alpha > x^\beta \text{または} \\ x^\alpha = x^\beta \text{であって、かつ} d > e \text{が成り立つ。} \end{cases} \tag{65}$$

   と定める。これは単項式順序になっている。
3. 任意の $i \geq 1$ について、$x_i >_h x_0$ が成立する。
4. 任意の $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ について、$\mathrm{LM}_{>_h}(f^h) = LM_>(f)$?
   (a) $\forall f$: $f \in k[x_1, \dots, x_n]$
   (b) α: $x^\alpha = \mathrm{LM}_>(f)$
   (c) 上より x^α は f の最高全次数の斉次部分の単項式である。

(d) 斉次化の定義より、f^h の単項式たちにも x^α は存在する。
(e) $\forall \beta, e$: $x^\beta x_0^e$ を f^h にあらわれる他の多項式とする。
(f) x^β が f の x^α でない単項式なので、(b) より、$\alpha > \beta$ となる。
(g) 上より、$x^\alpha >_h x^\beta x_0^e$ である。
(h) (e) おわり: 上より、$x^\alpha = \mathrm{LM}_{>_h}(f^h)$ である。
(i) (b) と上より、任意の f について、$\mathrm{LM}_>(f) = \mathrm{LM}_{>_h}(f^h)$ である。

任意の $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ について、$\mathrm{LM}_{>_h}(f^h) = \mathrm{LM}_>(f)$ である。

5. 任意の i について、I^h の定義と、$g_i \in G \subset I$ より $g_i^h \in I^h$ である。
6. 上より、$G^h \subset I^h$ である。
7. $\langle \mathrm{LT}_{>_h}(I^h) \rangle$ は $\mathrm{LT}_{>_h}(G^h)$ で生成される？
   (a) $\forall F$: $F \in I^h$ とする。
   (b) I^h は斉次イデアルなので F の各斉次成分は I^h に属する。
   (c) 上より、(a) でとった F は斉次であると仮定してよい (生成を示したくて、F を $\langle \mathrm{LT}_{>_h}(G^h) \rangle$ で書けることさえ言えればいい。)。
   (d) $\exists A_j, f_j$: (a) より、
$$F = \sum_j A_j f_j^h \tag{66}$$
   と $A_j \in k[x_0, \ldots, x_n]$ と $f_j \in I$ を用いて書ける。
   (e) f: f を F の非斉次化とする。すなわち: $f = F(1, x_1, \ldots, x_n)$ とする。
   (f) (d)(e) と命題 2-7(iii) の「斉次化の頭に 1 を入れると戻る」より、
$$\begin{aligned} f &= F(1, x_1, \ldots, x_n) &(67)\\ &= \sum_j A_j(1, x_1, \ldots, x_n) f_j^h(1, x_1, \ldots, x_n) &(68)\\ &= \sum_j A_j(1, x_1, \ldots, x_n) f_j. &(69)\end{aligned}$$
   (g) (d) で $f_j \in I$ としたことを言ったので上より、$f \in I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ となる。
   (h) $\exists e$: (c) で F は斉次としておいたことと、命題 2-7(iv) の「斉次多項式 F を x_0 で e 回まで割れるなら、$f = F(1, x_1, \ldots, x_n)$ として、$F = x_0^e \cdot f^h$ となる[*4]」より、
$$F = x_0^e \cdot f^h \tag{70}$$
   となる $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がある。
   (i) 4 より、
$$\mathrm{LM}_{>_h}(F) \overset{\boxed{\text{(h)}}}{=} x_0^e \cdot \mathrm{LM}_{>_h}(f^h) \overset{\boxed{4}}{=} x_0^e \cdot \mathrm{LM}_>(f). \tag{71}$$
   (j) $\exists i$: G は I のグレブナ基底であることと、(g) で $f \in I$ であることより、$\mathrm{LM}_>(f)$ はある $\mathrm{LM}_>(g_i)$ で割り切れる。
   (k) 上と、4 の $\mathrm{LM}_>(g_i) = \mathrm{LM}_{>_h}(g_i^h)$ より、$\mathrm{LM}_>(F)$ は $\mathrm{LM}_{>_h}(g_i^h)$ で割り切れる。
   (l) (a) おわり: 任意の $\mathrm{LM}_>(F) \in \mathrm{LT}_{>_h}(I^h)$ は $\mathrm{LM}_{>_h}(g_i^h)$ の倍数になっている。示された。

   $\langle \mathrm{LT}_{>_h}(I^h) \rangle$ は $\mathrm{LT}_{>_h}(G^h)$ で生成される。
8. 6 の $G^h \subset I^h$ と 7 の $\langle \mathrm{LT}_{>_h}(I^h) \rangle$ が $\mathrm{LT}_{>_h}(G^h)$ で生成されることより、G^h は I^h のグレブナ基底。

(証終)

[*4] まじ？ と思ったが、非斉次化では次数は落ち、斉次化では次数は変わらないので、非斉次化→斉次化だと次数は落ちており、x_0^e を補わないとまずい。

定義 6: アフィン多様体 $W \subset k^n$ に対して、W の射影完備化とは、射影多様体 $\overline{W} = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \subset \mathbb{P}^n(k)$ のことである。

$W = \{0\}$ のときは $\overline{W} = \emptyset$ になってしまう。

$f_\bullet \in k[x_1, \ldots, x_n]$ は $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ はアフィン多様体 $\subset k^n$ とも見えるし、射影多様体 $\subset \mathbb{P}^n(k) = k^{n+1}/\sim$ とも見える。また、射影多様体 $\subset \mathbb{P}(k^n) = k^{n+1}/\sim$ を $x_0 = 1$ としたアフィン多様体 k^{n+1} と同一視することがある。

命題 7:

$W \subset k^n$ をアフィン多様体とし、$\overline{W} \subset \mathbb{P}^n(k)$ をその射影完備化とする。(独自) また、$W \neq \{0\}$ とする。←そんなことはなかった。k^n と k^{n+1} で考えてることに注意。すると、次が成り立つ。

(i) $\overline{W} \cap U_0 = \overline{W} \cap k^n = W$。(アフィン多様体とみて)

(ii) $\overline{W}$ は W を含むような $\mathbb{P}^n(k)$ における最小の射影多様体である。

(iii) アフィン多様体 W が既約ならば、射影多様体 $\overline{W}$ もまた既約である。

(iv) $\overline{W}$ のどの既約成分も無限遠超平面 $\mathbf{V}(x_0) \subset \mathbb{P}^n(k)$ に完全に含まれることはない。

証明

(i) を示す。

1. G: $k[x_1, \ldots, x_n]$ の次数付き順序に関する $\mathbf{I}_a(W)$ のグレブナ基底とする。
2. 定理 4 と上より、$\mathbf{I}_a(W)^h = \langle g^h; g \in G \rangle$ である。
3. k^n のサブセットと見て、2 より

$$\overline{W} \cap U_0 = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \cap U_0 \tag{72}$$

$$\overset{\boxed{2}}{=} \mathbf{V}(g^h; g \in G) \cap U_0 \tag{73}$$

$$\overset{\boxed{\text{同一視}}}{=} \mathbf{V}_a(g^h; g \in G) \cap \mathbf{V}_a(x_0 = 1) \tag{74}$$

$$= \mathbf{V}_a(g^h(1, x_1, \ldots, x_n); g \in G). \tag{75}$$

4. 命題 2-7(iii) の「斉次化して $x_0 = 1$ にすると戻る」より、$g^h(1, x_1, \ldots, x_n) = g$ となる。
5. 3,4 と 1 より、

$$\overline{W} \cap U_0 \overset{\boxed{3}}{=} \mathbf{V}_a(g^h(1, x_1, \ldots, x_n); g \in G) \overset{\boxed{4}}{=} \mathbf{V}_a(g; g \in G) = \mathbf{V}_a(G) \overset{\boxed{1}}{=} \mathbf{V}_a(\mathbf{I}_a(W)) = W. \tag{76}$$

(ii) を示す。

1. $\forall V$: $\underbrace{W}_{\subset k^n} \subset V$ なる射影多様体。(V は一旦 k^{n+1} と見做すが、射影多様体の条件を満たすものとする。)($\overline{W} \subset V$?)
2. $F_1, \ldots, F_s$: $V = \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s)$ とする。
3. $f_1, \ldots, f_s$: f_i は F_i の非斉次化 $f_i = F_i(1, x_1, \ldots, x_n)$ とする。
4. 2 より各 F_i は V を消す。
5. 上と 1 より F_i は W も消す。
6. 上と各 F_i が射影多様体 V の定義方程式であることと、3 で各 f_i が F_i の非斉次化であることから、各 f_i は W を消す。
7. 上より、各 i について、$f_i \in \mathbf{I}_a(W)$ となる。
8. 上より、各 i について、$f_i^h \in \mathbf{I}_a(W)^h$ となる。
9. 上より、各 i について、f_i^h は $\mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) = \overline{W}$ を消す。
10. $\exists e_1, \ldots, e_s$: 命題 2-7(iv) より、各 i についてある整数 e_i があって $F_i = x_0^{e_i} f_i^h$ となる。

11. 上と 9 より、各 F_i は $\overline{W}$ を消す。
12. 上と 2 より、$\overline{W} \subset \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) = V$ となる。
13. 1 おわり: 任意の $W \subset V$ なる任意の射影多様体 V について $\overline{W} \subset V$ なので、$\overline{W}$ は W を包む最小の射影多様体になる。

(iii) を示す。W が既約 $\iff$ $\overline{W}$ が既約なので、これを示す。対偶を示す。

1. W が既約でないなら $\overline{W}$ が既約でないことを示す。$W = W_1 \cup W_2$ と、空でないアフィン多様体 $W_1, W_2 \subset k^n$ に分解できるとする。

$$
\begin{aligned}
\overline{W} &= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) && (77)\\
&= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_1 \cup W_2)^h) && (78)\\
&= \mathbf{V}((\mathbf{I}_a(W_1) \cap \mathbf{I}_a(W_2))^h) && (79)\\
&= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_1)^h \cap \mathbf{I}_a(W_2)^h) && (80)\\
&= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_1)^h) \cup \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W_2)^h) && (81)\\
&= \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2. && (82)
\end{aligned}
$$

(ii) より、$W_1 \subset \overline{W}_1$ かつ $W_2 \subset \overline{W}_2$ であり、$W_1, W_2 \neq \emptyset$ なので、$\overline{W}_1, \overline{W}_2 \neq \emptyset$ であり、$\overline{W}$ は既約ではない。
2. $\overline{W}$ が既約でないなら W が既約でないことを示す。$\overline{W} = V_1 \cup V_2$ と空でない既約多様体 $V_1, V_2 \subset \mathbb{P}^n(k)$ に分解されたとする。すると、(i) より

$$
W = \overline{W} \cap U_0 = (V_1 \cap U_0) \cup (V_2 \cap U_0) \tag{83}
$$

となる。V_1, V_2 が空でないので、$V_1 \cap U_0, V_2 \cap U_0$ は空でないアフィン多様体であり、W は既約でない。

(iv) を示す:

1. $V_\bullet$: $\overline{W} = V_1 \cup \ldots \cup V_m$ を既約な分解とする。さらに、余計なものは除かれているとする。
2. どれか既約成分が無限遠超平面 $\mathbf{V}(x_0)$ に含まれているとする (背理法)。それが V_1 であるとして一般性を失なわない。
3. 上の $V_1 \subset \mathbf{V}(x_0)$ なので、$V_1 \cap \mathbf{V}(x_0) = \emptyset$ である。
4.

$$
\begin{aligned}
W &\overset{\boxed{\text{(i)}}}{=} \overline{W} \cap U_0 && (84)\\
&\overset{\boxed{1}}{=} (V_1 \cup \ldots \cup V_m) \cap U_0 && (85)\\
&= (V_1 \cap U_0) \cup ((V_2 \cup \ldots \cup V_m) \cap U_0) && (86)\\
&\overset{\boxed{3}}{=} (V_2 \cup \ldots \cup V_m) \cap U_0. && (87)
\end{aligned}
$$

5. 上より、$W \subset V_2 \cup \ldots \cup V_m$ となる。
6. 上と射影完備化の定義より、$\overline{W} \subset V_2 \cup \ldots \cup V_m$ となる。
7. 1 より $V_2 \cup \ldots \cup V_m \subset \overline{W}$ である。
8. 7,8 より、$V_2 \cup \ldots \cup V_m = \overline{W}$ である。
9. 1 と上より、$V_1 \subset V_2 \cup \ldots \cup V_m$ である。
10. 上で V_1 との $\cap$ をとり、

$$
V_1 = (V_2 \cup \ldots \cup V_m) \cap V_1 = (V_2 \cap V_1) \cup \ldots \cup (V_m \cap V_1). \tag{88}
$$

11. $\exists i$: 上と 1 の V_1 の既約性より、ある i について $V_1 = V_1 \cap V_i$ である。
12. 上より、$V_1 = V_1 \cap V_i \subset V_i$ となる。
13. 2 おわり: 上は、1 で余計なものを除いたことに矛盾する。よって、どの $\overline{W}$ の既約成分も無限遠超平面 $\mathbf{V}(x_0)$ に含まれることはない。

(証終)

定理 8: k を代数的閉体とし、$I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ を任意の[*5]イデアルとする。すると $\mathbf{V}(I^h) \subset \mathbb{P}^n(k)$ は $\mathbf{V}_a(I) \subset k^n$ の射影完備化である。

証明

1. W: $W = \mathbf{V}_a(I)$ とする。
2. Z: $Z = \mathbf{V}(I^h) \subset \mathbb{P}^n(k)$ とする。
3. 命題 7(i) と k が代数的閉体であることより、

$$W \overset{\boxed{\text{命題 7(i)}}}{=} \overline{W} \cap V_0 \tag{89}$$
$$= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \cap V_0 \tag{90}$$
$$= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I))^h) \cap V_0 \tag{91}$$
$$\subset \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I))^h) \tag{92}$$
$$= \mathbf{V}(\sqrt{I}^h) \tag{93}$$
$$\overset{\boxed{☆}}{\subset} \mathbf{V}(I^h) \tag{94}$$
$$= Z. \tag{95}$$

よって、$W \subset Z$ となっている。

4. (最小性を示す)
5. $\forall V, F_1, \ldots, F_s$: $V = \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s)$ を $W \subset V$ なる射影多様体とする。
6. 上より、$f_i = F_i(1, x_1, \ldots, x_n)$ と非斉次化として、

$$W \subset U(F_1, \ldots, F_s) \cap U_0 \tag{96}$$
$$= \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s, x_0 - 1) \tag{97}$$
$$= \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s). \tag{98}$$

7. 上より、各 i について $f_i \in \mathbf{I}_a(W)$ となる。
8. 上と 1 と、k が代数的閉体であることから $f_i \in \mathbf{I}_a(W) = \sqrt{I}$ である。
9. $\forall i$:
10. 8 より、$f_i \in \sqrt{I}$ となる。
11. $\exists m$: $m \geq 1$ が存在して、$f_i^m \in I$ となる。
12. 上より、$(f_i^m)^h \in I^h$ となる。
13. 上と 2 より、$(f_i^m)^h$ は Z を消す。
14. $(f_i^m)^h = (f_i^h)^m$?
    (a) $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ として、$(fg)^h = f^h g^h$?
        i. f, g の全次数を d, e としておく。
        ii. 命題 2-7(ii) より、

$$(fg)^h = x_0^{d+e} \cdot (fg)(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) \tag{99}$$
$$= (x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})) \cdot (x_0^e \cdot g(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})) \tag{100}$$
$$= f^h \cdot g^h. \tag{101}$$

よって、$(fg)^h = f^h \cdot g^h$ となる。

    (b) 上よりあきらか。よって、$(f_i^m)^h = (f_i^h)^m$ となる。
15. 13 と 14 より、$(f_i^h)^m$ は Z を消す。

16. 上より、f_i^h は Z を消す。
17. 命題 2-7(iv) より、F_i は f_i^h の倍数である。
18. 上と 16 より、F_i は Z を消す。
19. 9 おわり: 上より、$Z \subset \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) = V$ である。
20. Z は W を含む最小の射影多様体である。
21. 命題 7 より、$\overline{W}$ も W を含む最小の射影多様体なので、上より $\overline{W} = Z$ である。

(証終)

8.5 射影的消去理論

以下、

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \mapsto (1, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \tag{102}$$

によって、$k^n \times k^m$ を $\mathbb{P}^n \times k^m$ の $x_0 \neq 0$ で決まる部分集合と同一視する。

定義 2: k を体とする。

(i) 多項式 $F \in k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ は、ある整数 $l \geq 0$ に対して

$$F = \sum_{|\alpha|=l} h_\alpha(y_1, \ldots, y_m) x^\alpha \tag{103}$$

と表されるとき、$(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次であるという。ただし上の式で、x^α は $x_0, \ldots, x_n$ の多重次数 α の単項式、また $h_\alpha \in k[y_1, \ldots, y_m]$ である。

(ii) $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次多項式 $F_1, \ldots, F_s \in k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ によって定義された多様体 $\mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbb{P}^n \times k^m$ とは、次の集合

$$\{(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{P}^n \times k^m; F_i(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0 \quad (1 \leq i \leq s)\} \tag{104}$$

のことである。

($\mathbb{P}^n \times k^m$ の多様体を定義するために斉次多項式の概念を拡張した。) (ii) のほうは well-defined である。

定義 4: $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次多項式で生成されたイデアル $I \subset k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ が与えられたとき、I の射影的消去イデアルとは集合

$$\hat{I} = \left\{ f \in k[y_1, \ldots, y_m]; {}^\forall 0 \leq i \leq n \colon {}^\exists e_i \geq 0 \colon x_i^{e_i} f \in I \right\}. \tag{105}$$

のことである。

$k[y_1, \ldots, y_m]$ のイデアルになっていることはあきらか。

命題 5: $V = \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbb{P}^n \times k^m$ を $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次多項式で定義された多様体とし、$\pi \colon \mathbb{P}^n \times k^m \to k^m$ を射影とする。このとき、$\hat{I}$ を $I = \langle F_1, \ldots, F_s \rangle$ の射影的消去イデアルとすれば、k^m の中で

$$\pi(V) \subset \mathbf{V}(\hat{I}) \tag{106}$$

が成り立つ。

証明

1. $\forall a_\bullet, b_\bullet$: $(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in V$ とする。
2. $\forall f$: $f \in \hat{I}$
3. $\forall i$:
4. $\exists e_i$: 2 と射影的消去イデアルの定義により、$x_i^{e_i} f(y_1, \ldots, y_m) \in I$ となる $e_i \geq 0$ が存在する。
5. 上より、$x_i^{e_i} f(y_1, \ldots, y_m)$ は V を消す。
6. 3 おわり: 上より、任意の i について $a_i^{e_i} f(b_1, \ldots, b_m) = 0$ となる。
7. $\exists i$: 1 より、$(a_0, \ldots, a_n)$ は斉次座標なので $a_i \neq 0$ となる i がある。
8. 上と 4 より、$f(b_1, \ldots, b_m) = 0$ となる。
9. 1 おわり: 上より、f は $\pi(V)$ を消す。
10. 2 と上より、$\pi(V) \subset \mathbf{V}(\hat{I})$ となる。

(証終)

定理 6(射影化された拡張定理): k を代数的閉体とし、$V = \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbb{P}^n \times k^m$ を $k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ の $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次多項式で定義された多様体とする。$I = \langle F_1, \ldots, F_s \rangle$ の射影的消去イデアルを、$\hat{I} \subset k[y_1, \ldots, y_m]$ で表す。また

$$\pi\colon \mathbb{P}^n \times k^m \to k^m \tag{107}$$

を後半の m 個への座標空間への射影とするならば、

$$\pi(V) = \mathbf{V}(\hat{I}) \tag{108}$$

が成り立つ。

証明

命題 5 より $\pi(V) \subset \mathbf{V}(\hat{I})$ は成立しているので、$\mathbf{V}(\hat{I}) \subset \pi(V)$ を示したい。

1. $\forall \mathbb{c}, c_\bullet$: $\mathbb{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbf{V}(\hat{I})$ とする。
2. 任意の i について、$F(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})$ は $x_0, \ldots, x_n$ についての斉次多項式である。
3. $d_\bullet$: 各 i について、 $F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})$ の $x_0, \ldots, x_n$ の多項式としての全次数を d_i とする。
4. $\mathbb{c} \notin \pi(V)$ とする。(背理法)
5. 上より、
$$F_1(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}) = \cdots = F_s(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}) = 0 \tag{109}$$
は $\mathbb{P}^n$ の空集合を定義する。(これを満足するような斉次座標の $x_\bullet$ は存在しない。) ($\mathbf{V}(F_1(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}), \ldots, F_s(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})) = \emptyset$ である。)
6. $\exists r$: k は代数的閉体であることから、上の空集合であることに射影化された零点定理の弱形 (定理 3-8) を使って、ある $r \geq 0$ が存在して
$$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r \subset \langle F_1(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}), \ldots, F_s(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}) \rangle . \tag{110}$$
7. $\forall \alpha$: $|\alpha| = r$ となる多重次数とする。
8. $H_\bullet$: 上と 6 より、$|\alpha| = r$ なる単項式 x^α は $F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})$ たちの多項式係数線形結合としてあらわされる:
$$x^\alpha = \sum_{i=1}^{s} H_i(x_0, \ldots, x_n) F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}). \tag{111}$$
となる $H_\bullet$ がある。
9. 3(d_i の次数),7(α の次数),8(x^α の表現) より、H_i は全次数 $r - d_i$ の斉次多項式として一般性を失なわない。($F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})$ はもともと斉次。)

10. 7 おわり: 各 H_i を $|\beta_i| = r - d_i$ なる x^{β_i} の k 係数線形結合で書くと、8 より、任意の $|\alpha| = r$ なる α について、

$$x^\alpha = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\beta_i|=r-d_i} (\text{なにか係数}) x^{\beta_i} F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}) \tag{112}$$

となっている。

11. 上より、

$$x^{\beta_i} F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}), \quad i = 0, \ldots, s, \quad |\beta_i| = r - d_i \tag{113}$$

が $x_0, \ldots, x_n$ に関する全次数 r の斉次多項式すべての空間を張る。

12. N_r: 「$x_0, \ldots, x_n$ に関する全次数 r の斉次多項式すべての空間」の次元を N_r とする。実際はこれは $n+1$ 文字から r 文字選ぶ方法の数になっている。
13. $G_\bullet$: 11 の基底たちを、12 より N_r 個選んでこれを「$x_0, \ldots, x_n$ に関する全次数 r の斉次多項式すべての空間」の基底にすることができる。その基底を

$$G_j(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c}), \quad j = 1, \ldots, N_r \tag{114}$$

とする (x^{β_i} の部分は、これが $x_\bullet$ の関数なので折り込んでよい。)。

14. $a_{\bullet\bullet}$: 13 の $G_\bullet$ の定義より、これは 11 のような $x_\bullet$ について r 次の斉次多項式式 $x^{\beta_i} F_i(x_0, \ldots, x_n, \mathbb{c})$ たちでできているのだから、これを斉次分解することにより各 $j = 1, \ldots, N_r$ について

$$G_j = \sum_{|\alpha|=r} a_{j\alpha}(y_1, \ldots, y_m) x^\alpha \tag{115}$$

となる $a_{j\alpha} \in k$ が存在する。

15. 上について、$|\alpha| = r$ となる単項式の個数は 12 の定義より N_r だったので、$a_{j\alpha}$ は j を固定すると N_r 個ある。
16. $D(y_1, \ldots, y_m)$: 上より、$a_\bullet$ は正方形に並べられるので行列式

$$D(y_1, \ldots, y_m) = \det(a_{j\alpha}(y_1, \ldots, y_m); 1 \leq j \leq N_r, |\alpha| = r) \tag{116}$$

が考えられる。

17. 14 の式で $(y_1, \ldots, y_m) = \mathbb{c}$ と代入し j を走らせながら並べることにより、

$$\underbrace{(G_1, \ldots, G_{N_r})(\mathbb{c})}_{N_r \times N_r} = \underbrace{(a_{j\alpha}; 1 \leq j \leq N_r, |\alpha| = r)(y_1, \ldots, y_m)}_{N_r \times N_r} \cdot \underbrace{(x_\alpha; |\alpha| = r)}_{N_r \times N_r}. \tag{117}$$

となる。ただし、左の行列と右の行列は多項式なので、それを項毎に α についての適当な順序で並べたベクトルと見做している。

18. 上は、「$x_0, \ldots, x_n$ に関する全次数 r の斉次多項式すべての空間」の基底の変換の式になっているので ($G_\bullet$ が基底なのは 13 による。$x_\bullet$ は標準的な基底。) $(a_{j\alpha}; 1 \leq j \leq N_r, |\alpha| = r)(y_1, \ldots, y_m)$ は正則である。
19. 上より、$D(\mathbb{c}) \neq 0$ である。
20. $D(y_1, \ldots, y_m) = 0$ だとすると $D(\mathbb{c}) = 0$ となるので上に矛盾する。したがって、$D(y_1, \ldots, y_m) \neq 0_{k[y_1, \ldots, y_m]}$ となる。
21. 17 の式

$$(a_{j\alpha}; 1 \leq j \leq N_r, |\alpha| = r)(y_1, \ldots, y_m) \cdot (x_\alpha; |\alpha| = r) = (G_1, \ldots, G_{N_r})(\mathbb{c}) \tag{118}$$

は x_α たちについての $k(y1, \ldots, y_m)$ 上での

22. M_α: $(a_{j\alpha}; 1 \leq j \leq N_r, |\alpha| = r)(y_1, \ldots, y_m)$ の第 α 列を $\begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_{N_r} \end{pmatrix}$ に取り替えたものとする。

23. 上と 21 とクラメルの公式と 20 の非零より、

$$x^\alpha = \frac{\det(M_\alpha)}{D(y_1, \ldots, y_m)}. \tag{119}$$

24. $H_{j\alpha}$: $H_{j\alpha}$ を $(a_{j\alpha}; 1 \le j \le N_r, |\alpha| = r)(y_1, \ldots, y_m)$ から j 列 α 行を除いた小行列の行列式とする。(j 列 α 行での展開のやつ。)
25. 23 で、$\det(M_\alpha)$ を α 列目で展開することで、24 も利用し

$$x^\alpha D(y_1, \ldots, y_m) = \sum_{j=1}^{N_r} H_{j\alpha}(y_1, \ldots, y_m) G_j(x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m). \tag{120}$$

26. 13 の定義より、各 G_j は $x^{\beta_i} F_i$ の形をしていたので、

$$x^\alpha D(y_1, \ldots, y_m) \in \langle F_1, \ldots, F_s \rangle = I. \tag{121}$$

27. 上より、$D(y_1, \ldots, y_m) \in \hat{I}$ となる。
28. 上より、$D(y_1, \ldots, y_m)$ は $\mathbf{V}(\hat{I})$ を消す。
29. 1 より $\mathbb{c} \in \mathbf{V}(\hat{I})$ なので、上より、$D(y_1, \ldots, y_m)$ は $\mathbb{c}$ を消す: $D(\mathbb{c}) = 0$ となる。
30. 上と 19 は矛盾する。
31. 4 おわり: $\mathbb{c} \in \pi(V)$ となる。
32. 1 おわり: $\mathbf{V}(\hat{I}) \subset \pi(V)$ となる。

(証終)

命題 7: $I \subset k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ をイデアルとする。十分大きなすべての整数 e に対して、

$$\hat{I} = (I : \langle x_0^e, \ldots, x_n^e \rangle) \cap k[y_1, \ldots, y_m] \tag{122}$$

が成り立つ。

証明

1. イデアル商の定義より、

$$^\forall 0 \le i \le n\colon f \in I : \langle x_0^e, \ldots, x_n^e \rangle \implies x_i^e f \in I \tag{123}$$

である。

2. 上より、任意の $e \ge 0$ に対して、

$$(I : \langle x_0^e, \ldots, x_n^e \rangle) \cap k[y_1, \ldots, y_m] \subset \hat{I} \tag{124}$$

となる。($f \in \hat{I} \subset k[y_1, \ldots, y_m]$ のための条件は、$x_0, \ldots, x_n$ の適当な冪を f にかければ I に入るということだった。)

3.

$$I : \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \subset I : \left\langle x_0^2, \ldots, x_n^2 \right\rangle \subset \ldots \tag{125}$$

という昇鎖がある。

4. $\exists e$: 上の昇鎖は安定するので、e 以降安定するとする:

$$I : \langle x_0^e, \ldots, x_n^e \rangle = I : \left\langle x_0^{e+1}, \ldots, x_n^{e+1} \right\rangle = \ldots \tag{126}$$

である。

5.

$$^\forall d \ge 0\colon I : \left\langle x_0^d, \ldots, x_n^d \right\rangle \subset I : \langle x_0^e, \ldots, x_n^e \rangle . \tag{127}$$

6. $\forall f$: $f \in \hat{I}$ とする。
7. 上より、

$$^{\forall}0 \leq i \leq n: {}^{\exists}e_i \geq 0: x_i^{e_i} f \in I. \tag{128}$$

8. d: $d = \max(e_0, \dots, e_n)$ とする。
9. 上の定義と 7 より、$x_i^d f \in I$ がすべての i で成立する。
10. 上より、$f \in I : \langle x_0^d, \dots, x_n^d \rangle$ である。
11. 6 で、$f \in \hat{I} \subset k[y_1, \dots, y_n]$ と 5 より、

$$f \in (I : \langle x_0^e, \dots, x_n^e \rangle) \cap k[y_1, \dots, y_m]. \tag{129}$$

12. 上より、

$$\hat{I} \subset \langle I : \langle x_0^e, \dots, x_n^e \rangle \rangle \cap k[y_1, \dots, y_m]. \tag{130}$$

13. 2,12 より、

$$\hat{I} = \langle I : \langle x_0^e, \dots, x_n^e \rangle \rangle \cap k[y_1, \dots, y_m]. \tag{131}$$

(証終)

定義: $F \in k[x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ において $x_i = 1$ について、

$$F^{(i)} = F(x_0, \dots, \overset{\overset{i}{\vee}}{1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in k[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]. \tag{132}$$

イデアルの非斉次化を

$$I^{(i)} = \left\{ F^{(i)}; F \in I \right\} \subset k[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]. \tag{133}$$

とする。$I = \langle F_1, \dots, F_s \rangle$ のときには、$I^{(i)} = \left\langle F_1^{(i)}, \dots, F_s^{(i)} \right\rangle$ が成立する。

命題 8: $I \subset k[x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ を $(x_0, \dots, x_n)$ 斉次多項式で生成されたイデアルとする。すると、

$$\hat{I} = I_n^{(0)} \cap I_n^{(1)} \cap \dots \cap I_n^{(n)} \tag{134}$$

が成り立つ。

証明

1. $\hat{I} = I^{(0)} \cap \dots \cap I^{(n)} \cap k[y_1, \dots, y_m]$ を示す。
2. $\forall f$: $f \in \hat{I}$ とする。
3. $\forall i$:
4. 2 より、$x_i^{e_i} f(y_1, \dots, y_m) \in I$
5. 上で $x_i = 1$ として、$f(y_1, \dots, y_m) \in I^{(i)}$ となる。
6. 3 おわり: $f(y_1, \dots, y_m) \in I^{(0)} \cap \dots \cap I^{(n)}$
7. 2 おわり: $\hat{I} \subset I^{(0)} \cap \dots \cap I^{(n)} \cap k[y_1, \dots, y_m]$ となる。
8. $\forall i$:
9. $\forall f$: $f \in I^{(i)}$
10. $\exists F$: $I^{(i)}$ の定義より、f はある $F \in I$ で $x_i = 1$ とおくことで得られる。
11. F は $(x_0, \dots, x_n)$ 斉次として一般性を失なわない？
    (a) $F_\bullet$: F を $(x_0, \dots, x_n)$ 斉次に分解する: $F = \sum_{j=0}^{d} F_j$ となる。

(b) I が $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式で生成されていることから、各 $F_j \in I$ となる。 これは定理 3-2 と同様に示せる。概略としては、$F \in I$ から F を I の生成元の一次結合で書き、それを $x_\bullet$ 斉次なものたちで整理する。あとは、次数で $F=\sum_{j=0}^d F_j$ と比較し、$F_j \in I$ を得る

(c) $\sum_{j=0}^d x_i^{d-j}F_j$ は I に含まれる $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式。(全次数は、F_j が (a) より j となるようにしておいたので、x_i^{d-i} をかけて d 次。)

(d) 上の $\sum_{j=0}^d x_i^{d-j}F_j$ は $x_i=1$ とすれば非斉次化され f に一致する。

(e) 上より、$F \in I$ は $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次と仮定してよい。もとの F から、斉次になるように作り直すことができた。

12. 9 おわり: $f \in I^{(i)}$ について、$(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式 F が存在して、$f = F(x_1,\dots,\overset{\overset{i}{\vee}}{x_i},\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ となる。
13. $\bullet^h$: 記号を定める。$f \in k[x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ に対して、x_i を用いて $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式 $f^h \in k[x_0,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ を作ることで斉次化作用素 $\bullet^h$ を定める。
14. $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式 F について、$f = F(x_0,\dots,\overset{\overset{i}{\vee}}{1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ と非斉次化するとき、ある整数 $e \geq 0$ について $F = x_i^e f^h$ となる?

(a) $i=0$ として一般性を失なわない。

(b) $F=\sum_{|\alpha|=l} h_\alpha(y_1,\dots,y_n)x^\alpha$ と分解する。

(c) さらに、x_0 だけ特別扱いする。

$$F=\sum_{j=0}^{l}\sum_{|\beta|=l-j} h_{(j,\beta)}(y_1,\dots,y_n)x^{(j,\beta)} \tag{135}$$

とする。

(d)

$$f=\sum_{j=0}^{l}\sum_{|\beta|=l-j} h_{(j,\beta)}(y_1,\dots,y_n)x^{(0,\beta)} \tag{136}$$

(e) l' を、$h_{(l',\beta)}(y_1,\dots,y_n)\neq 0$ なる β があるような l' のうち最小のものとする。すると、

$$f=\sum_{j=l'}^{l}\sum_{|\beta|=l-j} h_{(j,\beta)}(y_1,\dots,y_n)x^{(0,\beta)} \tag{137}$$

となり、f の $(x_1,\dots,x_n)$ についての全次数は $l-l'$ となる。

(f) 上より、

$$f^h=\sum_{j=l'}^{l}\sum_{|\beta|=l-j} h_{(j,\beta)}(y_1,\dots,y_n)x^{(j-l',\beta)} \tag{138}$$

となる。全次数は変わらず $l-l'$ である。

(g) (c),(f) より、

$$F=f^h\cdot x_0^{l'} \tag{139}$$

となる。

15. $\forall f$: $f \in I^{(i)} \cap k[y_1,\dots,y_m]$ とする。
16. $\exists F$: 9-12 より、$f=F(x_i=1)$ と、非斉次化して f になる $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次多項式 $F \in I$ がある。
17. 15 より、f は $x_0,\dots,x_n$ を含まないので、($(x_0,\dots,x_n)$ に関する全次数が $-\infty$ であり、) $f=f^h$ である。
18. $\exists e$: 14 より、$F=x_i^e f^h$ となる $e\geq 0$ が存在する。
19. 上と 17 より、$F=x_i^e f$ である。

20. 上と 16 より、$x_i^e f \in I$ である。
21. 15 おわり: 任意の i について、$e_i \geq 0$ があって、$x_i^{e_i} f \in I$ となる。
22. 上より、$f \in \hat{I}$ である。
23. 15 おわり:

$$I^{(0)} \cap \ldots \cap I^{(n)} \cap k[y_1, \ldots, y_m] \subset \hat{I}. \tag{140}$$

24. 7,23 より、

$$I^{(0)} \cap \ldots \cap I^{(n)} \cap k[y_1, \ldots, y_m] = \hat{I}. \tag{141}$$

(証終)

定義: $I \subset k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ について、I の $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次化 I^h を

$$I^h = \langle f^h; f \in I \rangle \subset k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]. \tag{142}$$

命題 9: イデアル $I \subset k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ の $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次化を I^h とする。

(i) I^h の射影的消去イデアルは I の第 n 消去イデアルに一致する。つまり $\hat{I^h} = I_n \subset k[y_1, \ldots, y_m]$ が成り立つ。

(ii) k が代数的閉体のとき、$\overline{V} = \mathbf{V}(I^h)$ は、アフィン多様体 $V = \mathbf{V}_a(I) \subset k^n \times k^m$ を含む $\mathbb{P}^n \times k^m$ における最小の多様体である。$\overline{V}$ を V の $\mathbb{P}^n \times k^m$ における射影完備化とよぶ。

証明

(i) を示す。

1. I^h を x_0 について非斉次化すれば、$(I^h)^{(0)} = I$ となる (h で x_0 をつけたし、それを 1 にしたのでもとにもどる。)。
2. 命題 8 より (あるいはその証明より)

$$\hat{I^h} = (I^h)_n^{(0)} \cap \ldots \cap (I^h)_n^{(n)} \cap k[y_1, \ldots, y_n] \tag{143}$$

である。

3. 1 と 2 より、

$$\hat{I^h} \subset (I^h)_n^{(0)} = I_n. \tag{144}$$

4. $\forall f$: $\forall f \in I_n$
5. $f \in k[y_1, \ldots, y_n]$ なので、f $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次になっている。($-\infty$ 次。)
6. 上と 4 の $f \in I_n \subset I$ より、$f = f^h \in I^h$ となる。
7. 上より、任意の i について $x_i^0 f \in I^h$ である。(1 をかけただけ)
8. 上と射影的消去イデアルの定義より、$f \in \hat{I^h}$ となる。
9. 4 おわり: $I_n \subset \hat{I^h}$ となる。
10. 3,9 より、$I_n = \hat{I^h}$ となる。

(ii) を示す。略証。

1. (まず $\mathbf{V}_a(I) = V \subset \overline{V} = \mathbf{V}(I^h)$ を示す。)

2.

$$\begin{aligned} V &= \mathbf{V}_a(I) && (145)\\ &= \mathbf{V}_a(I^h, x_0 - 1) && (146)\\ &\subset \mathbf{V}_a(I^h). && (147) \end{aligned}$$

3. (次に、最小性を示す。)
4. $\forall F_1, \ldots, F_s$: $V = \mathbf{V}_a(I) \subset \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s)$ と、$F_1, \ldots, F_s \in k[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ となる $(x_0, \ldots, x_n)$ 斉次多項式を考える。
5. $f_\bullet$: 各 i について、f_i を F_i の非斉次化とする。
6.

$$\begin{aligned} V &\subset \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s) \cap (U_0 \times k^m) && (148)\\ &= \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s, x_0 - 1) && (149)\\ &= \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s). && (150) \end{aligned}$$

7. 上より、$f_1, \ldots, f_s \in \mathbf{I}_a(V) = \sqrt{I}$ となる。
8. $\exists m_i$:

$$^\forall i\text{: } ^\exists m_i \geq 0\text{: } f_i^{m_i} \in I. \tag{151}$$

9. 上より、

$$^\forall i\text{: } ^\exists m_i \geq 0\text{: } (f_i^{m_i})^h \in I^h. \tag{152}$$

10. 上で、冪と斉次化を交換して (多分できる)

$$^\forall i\text{: } ^\exists m_i \geq 0\text{: } (f_i^h)^{m_i} \in I^h. \tag{153}$$

11. 上より、各 $(f_i^h)^{m_i}$ は $\mathbf{V}(I^h)$ を消す。
12. 上より、各 f_i^h は $\mathbf{V}(I^h)$ を消す。
13. 各 F_i は f_i^h の倍数である。
14. 上と 12 より、各 F_i は $\mathbf{V}(I^h)$ を消す。
15. 上より、$\mathbf{V}(I^h) \subset \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_s)$ である。
16. 4 おわり: 4 より、$\mathbf{V}_a(I)$ を包む $\mathbb{P}^n \times k^m$ の多様体は $\mathbf{V}(I^h)$ を包む。
17. 2,16 より、$\mathbf{V}(I^h)$ は $\mathbf{V}_a(I)$ を包む最小の $\mathbb{P}^n \times k^m$ の多様体である。

(証終)

系 10: k を代数的閉体とし、イデアル $I \subset k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ に対して $V = \mathbf{V}_a(I) \subset k^n \times k^m$ とおく。すると

$$\mathbf{V}(I_n) = \pi(\overline{V}) \tag{154}$$

が成り立つ。ただし $\overline{V} \subset \mathbb{P}^n \times k^m$ は V の射影完備化であり、$\pi\colon \mathbb{P}^n \times k^m \to k^m$ は射影である。

証明

1. 命題 9 より、$\overline{V} = \mathbf{V}(I^h)$ である。
2. 命題 9 より、$\hat{I^h} = I_n$ である。
3. 定理 6 を多様体 $\mathbf{V}(I^h)$、イデアル I^h に使うと、$\pi(\mathbf{V}(I^h)) = \mathbf{V}(\hat{I^h})$ がわかる。
4.

$$\mathbf{V}(I_n) \overset{\boxed{2}}{=} \mathbf{V}(\hat{I^h}) \overset{\boxed{3}}{=} \pi(\mathbf{V}(I^h)) \overset{\boxed{1}}{=} \pi(\overline{V}). \tag{155}$$

(証終)

命題 11: $>$ を $k[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ の単項式順序であって、$x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m$ の単項式 $x^\alpha y^\gamma, x^\beta y^\delta$ に対して

$$|\alpha| > |\beta| \implies x^\alpha y^\gamma > x^\beta y^\delta \tag{156}$$

となるようなものとする。$G = \langle g_1,\dots,g_s\rangle$ が $Ik[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ の $>$ に関するグレブナ基底であれば、$G^h = \left\{g_1^h,\dots,g_s^h\right\}$ は $I^h \subset k[x_0,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ の基底である。

証明

Pending.

(証終)

先に演習問題を解く。

演習 16: $(x_0,\dots,x_n)$ を $\mathbb{P}^n$ の斉次座標、$(y_0,\dots,y_m)$ を $\mathbb{P}^m$ の斉次座標とする。

(a) 「$h \in k[x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_m]$ は

$$h = \sum_{|\alpha|=k,|\beta|=l} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \tag{157}$$

と書けるとき、双斉次とよばれる。このとき、h は双次数 (k,l) を持つという。$h_1,,h_s$ が双斉次のとき、多様体

$$\mathbf{V}(h_1,\dots,h_s) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \tag{158}$$

は矛盾なく定義できることを示せ。また $J \subset k[x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_m]$ が双斉次多項式で生成されたイデアルであるとき、$\mathbf{V}(J) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ をどのように定義すればよいかを説明せよ。また、$\mathbf{V}(J)$ は多様体であることを証明せよ。」明らか。

(b) 「J が双斉次多項式で生成されていれば、$V = \mathbf{V}(J) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ が定義できた。J は $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次でもあるから、その射影的消去イデアル $\hat{J} \subset k[y_0,\dots,y_m]$ が構成できる。$\hat{J}$ は斉次イデアルであることを証明せよ。」$(x_0,\dots,x_n)$ 斉次化を I^h とする。命題 9 より $\hat{J}^h = J_n$ となる。また、J はすでに $(x_0,\dots,x_n)$ 斉次なので、$J^h = J$ である。よって、$\hat{J} = J_n$ となる。J は斉次イデアルになっているので (グレブナ基底を考えれば) J_n も斉次イデアルになっている。よって、$\hat{J}$ は斉次イデアルである。

(c) $\mathbf{V}(J)$ を $\mathbb{P}^n \times k^{m+1}$ の多様体とみなし、定理 6 より $\pi(V) = \mathbf{V}(\hat{J})$ を得る。

定理 12: k を代数的閉体とする。すべて同じ全次数を持ち、$\mathbb{P}^n$ において共通零点を持たないような斉次多項式 $f_0,\dots,f_m \in k[x_0,\dots,x_n]$ によって定義される写像を $F\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ とする。$k[x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_m]$ におけるイデアル $I = \langle y_0 - f_0,\dots,y_m - f_m\rangle$ を考え、$I_{n+1} = I \cap k[y_0,\dots,y_m]$ とおく。すると I_{n+1} は $k[y_0,\dots,y_m]$ の斉次イデアルであって、

$$F(\mathbb{P}^n) = \mathbf{V}(I_{n+1}) \tag{159}$$

が成り立つ。

証明

1. I_{n+1} は斉次イデアル？

2. d: 各 f_i の全次数 (これらは仮定より一致する) を d とする。
3. 各 x_i にウェイト 1 を与え、y_j にウェイト d を与える。
4. $f \in k[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m]$ がウェイト付き斉次多項式とは、f の単項式がすべて同じウェイトを持つ場合をいう。
5. I の生成元 $y_i - f_i$ たちはすべてウェイト d を持つ。
6. 上より、I はウェイトつき斉次イデアルである。
7. G: G を I のグレブナ基底とする。
8. 定理 3-2 と同様の定理が示せて、上と 6 より G はウェイトつきの斉次多項式からなる。
9. lex 順序をとると、消去定理により、$G \cap k[y_0, \ldots, y_m]$ は $I_{n+1} = I \cap k[y_0, \ldots, y_m]$ の基底になる。
10. 8,9 より、I_{n+1} はウェイト付き斉次多項式からなる基底を持つ。
11. 3 より y_i たちは同じウェイトを持つ。
12. 上より、$k[y_0, \ldots, y_m]$ の多項式について、「これが斉次である $\iff$ これがウェイト付き斉次である」となる。
13. $h \in k[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m]$ はもしそれが

$$h = \sum_{|\alpha|=k, |\beta|=l} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \tag{160}$$

とかけていれば、双斉次であるという。このとき、$h_1, \ldots, h_s$ が双斉次なら、$\mathbf{V}(h_1, \ldots, h_s) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ が定義され、多様体になる。$J \subset k[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m]$ が双斉次多項式で生成されたイデアルなら、多様体 $\mathbf{V}(J) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ が定義される。
14. J が双斉次多項式で生成されたイデアルなら、演習 16 より、$\hat{J} \subset k[y_0, \ldots, y_m]$ は斉次イデアルである。
15. J が双斉次多項式で生成されたイデアルなら $\pi\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^m$ で $\pi(\mathbf{V}(J)) = \mathbf{V}(\hat{J})$ となる。(演習 16 より。)
16. J: $J = \langle y_i f_j - y_j f_i \rangle$ とする。
17. $\mathbf{V}(J) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ が $F\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ のグラフ？
    i. $(F\text{のグラフ}) \subset \mathbf{V}(J)$？
        A. $\forall p$: $p \in \mathbb{P}^n$ とする。
        B. $\forall i$:
        C. $y_i = f_i(p)$ である。
        D. A,B おわり:$(p, F(p)) \in \mathbf{V}(J)$ となる。
    ii. $\mathbf{V}(J) \subset (F\text{のグラフ})$？
        A. $\forall p, q$: $(p, q) \in \mathbf{V}(J)$ とする。
        B. $p_\bullet, q_\bullet$: p の第 i 斉次座標を p_i とし、q についても同様にする。
        C. 16 より、任意の i, j について $q_i f_j(p) = q_j f_i(p)$ となる。
        D. $\exists j$: $q_\bullet$ は斉次座標なので、$q_j \neq 0$ となる j がある。
        E. $\exists i$: 仮定より $f_\bullet$ たちがすべて 0 になるようなことはないので、、$f_i(p) \neq 0$ となる i がある。
        F. C,D,E より、$q_i f_j(p) = q_j f_i(p) \neq 0$ となる。
        G. 上より、$q_i \neq 0$ である。
        H. λ: $\lambda = q_i / f_i(p)$ とする。
        I. 16 より、$q = \lambda f(p)$ である。
        J. A おわり: 上より、$(p, q) \in (F\text{のグラフ})$ となる。

    よって、$\mathbf{V}(J) = (F\text{のグラフ})$ となる。
18. 上とグラフ、射影の性質より、$\pi(\mathbf{V}(J)) = F(\mathbb{P}^n)$ である。
19. 15 より、$\mathbf{V}(\hat{J}) = F(\mathbb{P}^n)$ である。
20. 上より、F の像は $\mathbb{P}^m$ の多様体である。
21. $\mathbf{V}(\hat{J}) = \mathbf{V}(I_{n+1})$？ つまり、$\mathbf{V}_a(\hat{J}) = \mathbf{V}_a(I_{n+1})$？
    (a) $\mathbf{V}_a(I) \subset k^{n+1} \times k^{n+1}$ は $(f_0, \ldots, f_m)$ で決まる写像 $k^{n+1} \to k^{n+1}$ のグラフである。
    (b) $\pi\colon k^{n+1} \times k^{m+1} \to k^{m+1}$ とする。
    (c) $\pi(\mathbf{V}_a(I)) = \mathbf{V}_a(\hat{J})$？

i. 15 より、$\mathbf{V}(\hat{J}) = F(\mathbb{P}^m)$ である。

ii. 上より、原点を除いて考えれば

$$q \in \mathbf{V}_a(\hat{J}) \iff {}^{\exists}p \in k^{n+1}\colon q = F(p). \tag{161}$$

iii. $\exists\lambda$: 上より、$q = \lambda F(p)$ となる $\lambda \neq 0$ がある。

iv. λ': $\lambda' = \sqrt[d]{\lambda}$ とする。

v. $q = F(\lambda' p)$ となる。

vi. 上より、

$$ {}^{\exists}p \in k^{n+1}\colon q = F(p) \iff q \in \pi(\mathbf{V}_a(I)). \tag{162}$$

vii. ii,vi より、

$$q \in \mathbf{V}_a(\hat{J}) \iff q \in \pi(\mathbf{V}_a(I)). \tag{163}$$

よて、$\mathbf{V}_a(\hat{J}) = \mathbf{V}_a(I_{n+1})$ となる。

(d) 閉包定理により、$\mathbf{V}_a(I_{n+1})$ は $\pi(\mathbf{V}_a(I))$ を含む最小の多様体。

(e) (c)(d) より、$\mathbf{V}_a(\hat{J}) = \mathbf{V}_a(I_{n+1})$ となる。

よって、$\mathbf{V}_a(\hat{J}) = \mathbf{V}_a(I_{n+1})$ であり、$\mathbf{V}(\hat{J}) = \mathbf{V}(I_{n+1})$ となる。

22. 19 と 21 より、$F(\mathbb{P}^n) = \mathbf{V}(I_{n+1})$ である。

(証終)