先端データ解析論 (杉山将先生・本多淳也先生)
第 12 回レポート

ashiato45

2017 年 7 月 17 日

宿題 1

まず、L が半正定値であることを示す。$\alpha \in \mathbb{R}^n$ とする。

$$
\begin{aligned}
\alpha^\top L\alpha &= \alpha^\top (D-W)\alpha && (1)\\
&= \sum_i \alpha_i^2 \sum_j W_{ij} - \sum_i \sum_j \alpha_i W_{ij} \alpha_j && (2)\\
&= \sum_i \sum_{j\neq i} \alpha_i^2 W_{ij} - 2\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j W_{ij}\alpha_i\alpha_j && (3)\\
&= \sum_i \sum_{j>i} \alpha_i^2 W_{ij} + \sum_i \sum_{j<i} \alpha_i^2 W_{ij} - 2\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j W_{ij} && (4)\\
&= \sum_{i<j} \alpha_i^2 W_{ij} + \sum_{i<j} \alpha_j^2 W_{ij} - 2\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j W_{ij} && (5)\\
&= \sum_{i<j} W_{ij}(\alpha_i - \alpha_j)^2 && (6)\\
&\geq 0. && (7)
\end{aligned}
$$

よって、L は半正定値である。

次に、$\sqrt{D}$ が可逆であることを示す。このためには、D が可逆であることを言えばよい。D が非可逆であると仮定する。D は対角行列なので、対角成分に 0 があることになる。D の定義より、W のある列の総和が 0 になることになる。W は類似度行列なので非負行列であり、W のある列が 0 ということになる。これは W が可逆であることに反する。よって、D は可逆であり、$\sqrt{D}$ も可逆である。

L は半正定値なので、$D^{-1/2}LD^{-1/2}$ も半正定値行列である。よって、$(D^{-1/2}LD^{-1/2})\psi = \lambda\psi$ をみたす λ は非負になる。よって、$L\psi = \lambda D\psi$ をみたす λ も非負であり、この固有値問題の固有値は 0 以上である。

$(L\vec{1})_i = D_{ii} - \sum_j W_{ij} = 0$ なので、$\vec{1}$ は固有値問題 $L\psi = \gamma D\psi$ の固有ベクトルであり、対応する固有値は $\lambda = 0$ である。

先に固有値は 0 以上であることを示し、実際固有値 0 となる固有ベクトルが存在するので、固有値問題の最小固有値は 0 であり、対応する固有ベクトルは $\vec{1}$ である。