Tamura - Topology

ashiato45 take notes

2016 年 8 月 31 日

5 Application and example of homology

5.1 $\ker\psi = \mathbb{Z}$ について

$C_q(S^m \times \{\pm 1\})$ について議論するために、これを構成する単体に名前をつける。(I との直積を取って柱を作ったときにやったと思います。) S^m の単体 x に対応する $S^m \times \{\pm 1\}$ の単体を $(x, \pm 1)$ とよぶことにする。一応の性質として、

- 任意の $S^m \times \{\pm 1\}$ の単体 x' について、S^m の単体 $x \in S^m$ と $i \in \{\pm 1\}$ が存在して、$y = (x, i)$ となる。
- 任意の S^m の単体 x, y について、$(x, +1) \neq (y, -1)$。

がある。

また、$a = \sum_{x:\ S^m の単体} c_q \cdot x \in C_q(S^m \times \{+1\})$ について、

$$(a, +1) := \sum_x c_q \cdot (x, +1) \tag{1}$$

と書くことにする。(単体の自由加群をそのまま $S^m \times \{+1\}$ に持っていった。)

$S^m \times \{\pm 1\}$ のチェインが

$$\dots \xrightarrow{\partial'_{q+1}} C_q(S^m \times \{\pm 1\}) \xrightarrow{\partial'_q} \dots \tag{2}$$

だとする。(いままでのは ∂_* で今回は ∂'_*。)

$\ker\partial'_q$ のことを調べる。$a \in C_q(S^m \times), b \in C_q(S^m)$ とする。$C(S^m \times \{\pm 1\})$ の任意の元は $(a, +1) + (b, -1)$ で代表できるので、これに ∂'_q をあてて 0 になったときを調べる。

$$\begin{aligned}
&\partial'_q((a, +1) + (b, -1)) = 0 && (3)\\
\overset{\boxed{S^m \times \{\pm 1\} のつくりかた}}{\iff} & (\partial_q a, +1) + (\partial_q b, -1) = 0 && (4)\\
\overset{\boxed{(x, +1) \neq (y, -1)}}{\iff} & (\partial_q a, +1) = (\partial_q b, -1) = 0. && (5)
\end{aligned}$$

とする。よって、

$$\begin{aligned}
\ker\partial'_q &= \{(a, +1) + (b, -1) \in C_q(S^m \times \{\pm 1\}); a, b \in \ker\partial_q\} && (6)\\
&= \{(a, +1); a \in \ker\partial_q\} \oplus \{(b, -1); b \in \ker\partial_q\}. && (7)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
H_q(S^m \times \{\pm 1\}) &\overset{\boxed{定義}}{=} \ker\partial'_q / \operatorname{Im}\partial'_q && (8)\\
&\overset{\boxed{さっきの}}{=} \{(a, +1); a \in \ker\partial_q\} / \operatorname{Im}\partial'_q \oplus \{(b, -1); b \in \ker\partial_q\} / \operatorname{Im}\partial'_q && (9)\\
&\simeq H_q(S^m) \oplus H_q(S^m) && (10)\\
&\simeq \mathbb{Z}^2. && (11)
\end{aligned}$$

となっている。また、この代表元は $S^m \times \{+1\}$ 側からの $[(a,+1)]$ と $S^m \times \{-1\}$ 側からの $[(b,-1)]$ のペア $([(a,+1)],[(b,-1)])$ とあらわせる。

これで ψ_q を調べる記号が整備できたのでやる。$i\colon S^m \times \{+1\} \to S^m \times I$ は複体の準同型で、埋め込み (つまり、$i((a,+1)) = (a,+1)$ と定義されている。) $j\colon S^m \times \{-1\} \to S^m \times I$ も同様。

ここから、ホモロジー群の間の準同型

$$i_q\colon H_q(S^m \times \{\pm 1\}) \to H_q(H^m \times D^1_+) \simeq H_q(S^m \times I), \quad [(a,+1)] + [(b,-1)] \mapsto [(a,+1)] + [(b,-1)] \tag{12}$$

と

$$j_q\colon H_q(S^m \times \{\pm 1\}) \to H_q(H^m \times D^1_-) \simeq H_q(S^m \times I), \quad [(a,+1)] + [(b,-1)] \mapsto [(a,+1)] + [(b,-1)] \tag{13}$$

が誘導される。このもとで、ψ_q は $\psi_q = (i_q, -j_q)$ と定義されていた。

ψ_q の核を調べる。$a, b \in C_q(S^m)$ とする。

$$\begin{aligned}
&(i_q, -j_q)([(a,+1)] + [(b,-1)]) = 0 && (14)\\
\Longleftrightarrow\ &([(a,+1)] + [(b,-1)], -[(a,+1)] - [(b,-1)]) = 0 && (15)\\
\Longleftrightarrow\ &[(a,+1)] + [(b,-1)] = 0. && (16)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\ker \psi_q &= \{([(a,+1)],[(b,-1)]) \in H_q(S^m \times \{\pm 1\}); a, b \in C_q(S^m), [(a,+1)] + [(b,-1)] = 0\} && (17)\\
&= \{([(a,+1)],[-(a,+1)]); a \in C_q(S^m)\} && (18)\\
&\simeq \mathbb{Z}. && (19)
\end{aligned}$$