

# Test problems in mechanics and special relativity

Z. K. Silagadze

Budker Institute of Nuclear Physics and  
Novosibirsk State University, 630 090, Novosibirsk, Russia

## Abstract

These test problems were used by the author as weekly control works for the first year physics students at Novosibirsk State University in 2005. Solutions of the problems are also given (in Russian). The problems were taken from or inspired by the sources listed at the end.



# Тестовые задачи по механике и теории относительности

З. К. Силагадзе

Институт Ядерной Физики им. Будкера и  
Новосибирский Государственный Университет, 630 090, Новосибирск

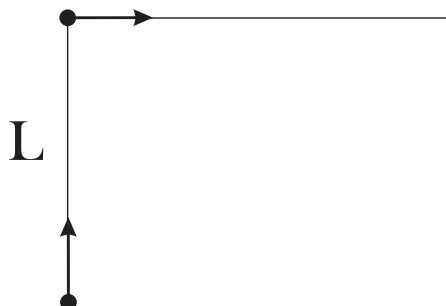
## Аннотация

Эти задачи были использованы автором для недельных контрольных работ по механике и теории относительности для студентов-первокурсников физического факультета Новосибирского Государственного Университета в 2005 году. Приводятся также решения задач. Источники задач, или вдохновения, приведены в списке литературы.

# Контрольная работа 1

## 1.2

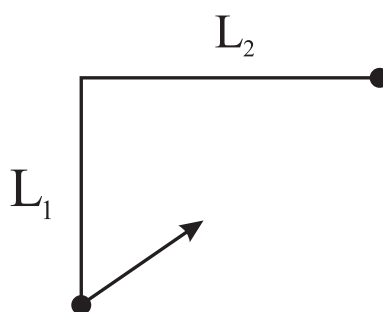
Заяц бежит по прямой со скоростью  $u$ . Его начинает преследовать собака со скоростью  $V$  и в ходе погони всегда бежит в направлении на зайца. В начальный момент времени их положения показаны на рисунке. Найти уравнение траектории собаки в системе зайца.



A rabbit runs in a straight line with a speed  $u$ . A dog with a speed  $V$  starts to pursuit it and during the pursuit always runs in the direction towards the rabbit. At the initial moment of time their positions are shown in the figure. Find the equation of the dog's trajectory in the rabbit's frame.

## 1.3

Пусть скорости собаки и зайца в предыдущей задаче равны по величине и их начальное расположение таково (см. рисунок). Какому пределу стремится расстояние между ними со временем?



Let speeds of the dog and the rabbit from the previous problem are equal in magnitude and their initial positions are as shown in the figure. To what limit converges the distance between them?

## 1.4

Параболические координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\phi$  определяются формулами

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \phi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \phi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta).$$

Выразить орты параболической системы через декартовы орты. Найти выражения для дифференциала длины дуги, площади, объема для этих координат.

Parabolic coordinates  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\phi$  are defined by formulas

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \phi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \phi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta).$$

Express coordinate orts of the parabolic system through Cartesian orts. Find elements of line, area and volume for these coordinates.

## 1.5

Электрон в постоянном магнитном поле движется по винтовой линии

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = bt.$$

Найти радиус кривизны его траектории.

An Electron in a constant magnetic field moves in a helical orbit

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = bt.$$

Find the radius of curvature of its trajectory.

## 1.6

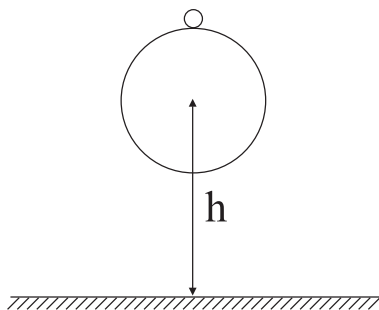
Точка движется по плоскости так, что угол между вектором скорости и радиус-вектором во все время движения равен  $\alpha$ . Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент  $r(0) = r_0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$ .

A point moves on a plane so that the angle between its velocity and radius-vector is equal to  $\alpha$  all the time. Find the trajectory of the point, if at the initial moment  $r(0) = r_0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$ .

## Контрольная работа 2

### 2.1

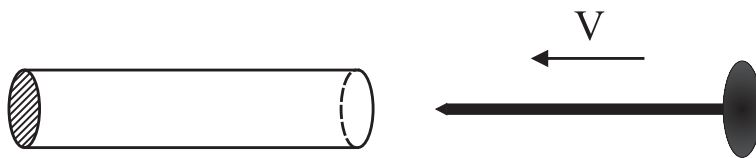
На баскетбольный мяч лежит мячик настольного тенниса. Мяч падает без начальной скорости с высоты 1 м. Оцените, на какую высоту подскочит мячик.



A tennis ball sits atop a basketball as the two are dropped without initial speed from height 1 m. Estimate the height the tennis ball will rebound.

### 2.2

У полого цилиндра один конец заклеен бумагой. Со стороны открытого конца к нему летит гвоздь с большой скоростью  $V$ . Шляпа гвоздя больше чем диаметр цилиндра, а их собственные длины равны. В системе цилиндра гвоздь сокращен  $\gamma$ -раз и поэтому не может пробить бумагу. Но в системе гвоздя сокращен цилиндр и поэтому бумага пробивается. Что происходит на самом деле в каждой из систем?



One end of the hollow cylinder is sealed by a paper. A nail with the large velocity  $V$  flies towards the open end. The hat of the nail is larger than diameter of the cylinder, and their proper lengths are equal. In the cylinder's frame the nail is contracted  $\gamma$ -times and consequently cannot perforate the paper. But in the nail's frame it's the cylinder that's length-contracted and consequently the paper is pierced. What occurs actually in each of frames?

### 2.3

Найти радиус кривизны  $R$  траектории точки, если известны ее скорость  $\vec{V}$  и ускорение  $\vec{a}$ .

Assuming that the velocity  $\vec{V}$  and acceleration  $\vec{a}$  of a point are known find the radius of curvature  $R$  of its trajectory.

### 2.4

Параболические координаты на плоскости определяются так  $x = \sigma\tau$ ,  $y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$ . Найти орты  $\vec{e}_\sigma$ ,  $\vec{e}_\tau$  и элемент площади.

Parabolic coordinates on a plane are defined as  $x = \sigma\tau$ ,  $y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$ . Find the coordinate orts  $\vec{e}_\sigma$ ,  $\vec{e}_\tau$  and the element of area.

### 2.5

Точка движется на поверхности шара так, что ее скорость сохраняет постоянный угол  $\alpha$  к меридиану. Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент ее сферические координаты равны  $\theta_0$  и  $\varphi_0$ .

A point moves on the surface of a sphere so that its velocity vector keeps a constant angle  $\alpha$  to the meridian. Find the trajectory of the point if at the initial moment its spherical coordinates were  $\theta_0$  and  $\varphi_0$ .

### 2.6

Пусть многомерное обобщение векторного произведения сохраняет следующие свойства обычного трехмерного векторного произведения:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{A} &= 0, \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0, \\ |\vec{A} \times \vec{B}| &= |\vec{A}| |\vec{B}|, \text{ если } \vec{A} \cdot \vec{B} = 0.\end{aligned}$$

Доказать, что это возможно только в семимерном пространстве.

Let a multidimensional generalization of the cross product keeps the following properties of the usual three-dimensional vector product:

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0,$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0,$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}|, \text{ if } \vec{A} \cdot \vec{B} = 0.$$

Prove that this is possible only in seven-dimensional space.

## Контрольная работа 3

### 3.1

В системе  $S$  стержень имеет длину  $L$  и движется со скоростью  $u$  вдоль оси  $x$ . Какую длину имеет стержень в системе  $S'$ , которая движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ ?

In the frame  $S$  a rod has length  $L$  and moves with a speed  $u$  along the  $x$  axis. What is the length of the rod in the system  $S'$  which moves with a speed  $V$  along the  $x$  axis?

### 3.2

Если ввести координаты  $x_+ = ct + x$ ,  $x_- = ct - x$ , то преобразование Лоренца можно записать так  $x'_+ = e^{-\psi} x_+$ ,  $x'_- = e^{\psi} x_-$ . Найти  $\psi$  как функцию  $V$  (параметр  $\psi$  называется быстрой, а  $x_+$  и  $x_-$  – координатами светового конуса).

If one introduces the following coordinates  $x_+ = ct + x$ ,  $x_- = ct - x$ , the Lorentz transformations can be written in the form  $x'_+ = e^{-\psi} x_+$ ,  $x'_- = e^{\psi} x_-$ . Find  $\psi$  as a function of  $V$  (the parameter  $\psi$  is called rapidity, and  $x_+$  and  $x_-$  – coordinates of the light cone).

### 3.3

Найти результат релятивистского сложения  $n$  коллинеарных скоростей  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Что получится, если  $V_1 = V_2 = \dots = V_n$ ?

Find the result of relativistic addition of  $n$  collinear velocities  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . What does one get if  $V_1 = V_2 = \dots = V_n$ ?

### 3.4

Длинная люминисцентная лампа параллельна оси  $x$  и движется вдоль этой оси со скоростью  $V$ . Лампа вспыхивает мгновенно в своей системе отсчета. С какой скоростью распространяется вспышка вдоль лампы с точки зрения неподвижного наблюдателя?

The long luminescent lamp is parallel to the axis  $x$  and moves along this axis with a speed  $V$ . The lamp flashes instantly in its proper frame. With what speed propagates the flash along the lamp from the point of view of the motionless observer?

### 3.5

Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega'$ . Показать, что для наблюдателя, который движется вдоль оси цилиндра со скоростью  $V$ , цилиндр окажется скрученным и найти величину кручения на единицу длины цилиндра.

A cylinder rotates about its axis with angular velocity  $\omega'$ . Show that for an observer who moves along the axis of the cylinder with a speed  $V$  the cylinder will appear twisted and find the torsion magnitude per unit length of the cylinder.

## Контрольная работа 4

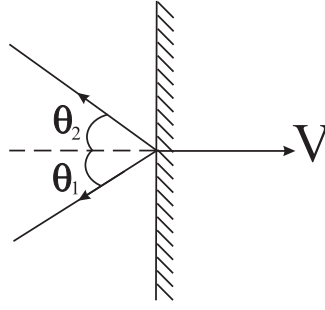
### 4.1

Найти скорость наблюдателя, если далекий и маленький фонарь впереди ему кажется два раза больше, чем неподвижному наблюдателю рядом.

Find the speed of an observer if a distant and small lantern ahead looks to him twice as large as to the motionless observer nearby.

### 4.2

Массивное зеркало движется перпендикулярно своей плоскости со скоростью  $V$ . Найти угол отражения  $\theta_2$  для луча света от такого зеркала, если угол падения равен  $\theta_1$ .



A massive mirror moves perpendicularly to its plane with the speed  $V$ . Find the angle of reflection  $\theta_2$  for a light ray from such mirror if its angle of incidence equals to  $\theta_1$ .

### 4.3

Две системы отсчета движутся со скоростями  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$ . Доказать, что их относительная скорость  $V$  удовлетворяет соотношению

$$\beta^2 = \frac{(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2)^2 - (\vec{\beta}_1 \times \vec{\beta}_2)^2}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2},$$

где  $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$ .

Two reference frames move with speeds  $\vec{V}_1$  and  $\vec{V}_2$ . Prove that their relative velocity  $V$  satisfies the relation

$$\beta^2 = \frac{(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2)^2 - (\vec{\beta}_1 \times \vec{\beta}_2)^2}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2},$$

where  $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$ .

### 4.4

Стержень движется со скоростью  $V$ . Какой угол  $\theta$  составляет стержень с направлением движения, если в его системе покоя этот угол равен  $\theta'$ ?

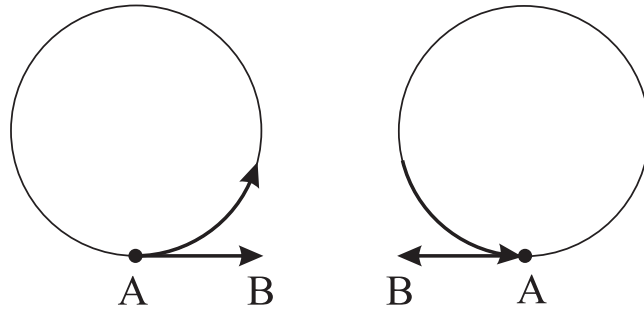
A rod moves with the speed  $V$ . What angle  $\theta$  makes the rod with the direction of its motion if this angle is equal to  $\theta'$  in its rest frame?

### 4.5

Вектор  $\overrightarrow{AB}$  переносится по окружности с постоянной по величине скоростью  $V$  так, что в каждой сопутствующей инерциальной системе отсчета вектор



переносится параллельно самому себе. Найти минимальное значение  $V$  для которого после полного оборота вектор смотрит в противоположную к первоначальному сторону.



A vector  $\overrightarrow{AB}$  is transferred on a circle with the constant in magnitude speed  $V$  so that in every instantaneous comoving inertial frame the vector is transferred parallel to itself. Find the minimal  $V$  for which after a full turn the vector points opposite to its initial direction.

## Контрольная работа 5

### 5.1

Частица налетает на такую же неподвижную частицу и происходит упругое столкновение. Доказать, что угол разлета частиц после столкновения всегда меньше, чем  $90^\circ$ .

A particle collides with another identical particle at rest. Prove that the opening angle between outgoing particle velocities after the elastic scattering is always less than  $90^\circ$ .

### 5.2

Под каким углом к оси  $x$  летит фотон с частотой  $\nu$  в системе  $S$ , если в системе  $S'$ , движущегося вдоль оси  $x$ , фотон имеет частоту  $\nu'$  и летит под углом  $\theta'$  к оси  $x$ .

Under what angle to the  $x$ -axis moves the photon with frequency  $\nu$  in frame  $S$  if in frame  $S'$ , moving along the  $x$ -axis, the photon has frequency  $\nu'$  and flies under the angle  $\theta'$  to the  $x$ -axis.

### 5.3

$K^0$ -мезон распадается по схеме  $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ . Найти энергию  $K$ -мезона, если максимально возможная энергия  $\pi$ -мезонов из этого распада  $\alpha$ -раз больше минимальной. Для каких  $\alpha$  не будет  $\pi$ -мезонов летящих в заднюю полусферу?

$K^0$ -meson decays under the scheme  $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ . Find the energy of the  $K^0$ -meson if the greatest possible energy of  $\pi$ -mesons from this decay is  $\alpha$ -times larger than the minimal one. For what  $\alpha$  there will be no  $\pi$ -mesons flying into the backward hemisphere?

### 5.4

Найти относительную скорость  $\pi^+$  и  $\pi^-$  мезонов из распада  $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ .

Find the relative velocity of the  $\pi^+$  and  $\pi^-$  mesons from the decay  $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ .

### 5.5

4-ускорение  $a^\mu$  определяется выражением  $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$ , где  $u^\mu$  - 4-скорость и  $\tau$  - собственное время. Найдите скалярные произведения  $a \cdot u$  и  $a \cdot a$ , если частица движется прямолинейно и зависимость ее скорости от лабораторной времени  $V(t)$  известна.

4-acceleration  $a^\mu$  is defined by expression  $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$ , where  $u^\mu$  is 4-velocity and  $\tau$  - proper time. Find scalar products  $a \cdot u$  and  $a \cdot a$  if the particle moves rectilinearly and the dependence of its speed on laboratory time  $V(t)$  is known.

## Контрольная работа 6

### 6.1

Два фотона с частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$  движутся в противоположных направлениях. Найти массу этой системы и скорость ее центра масс.

Two photons with frequencies  $\nu_1$  and  $\nu_2$  are moving in opposite directions. Find the mass of this system and the speed of its center of mass.

## 6.2

Неподвижный  $\phi$ -мезон распадается по схеме  $\phi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ . найти минимальный угол разлета  $\gamma$ -квантов от последующего распада  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ .

$\phi$ -meson at rest decays under the scheme  $\phi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ . Find the minimal opening angle between the  $\gamma$ -quanta from the subsequent decay  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ .

## 6.3

Быстрый электрон, имеющий скорость  $V$ , сталкивается с неподвижным ядром массы  $M$  и испускает тормозной фотон. Какую максимальную энергию может иметь этот фотон?

A fast electron with the speed  $V$  collides with a motionless nucleus of mass  $M$  and emits a bremsstrahlung photon. What maximal energy this photon can have?

## 6.4

К чему стремится отношение максимальных углов разлета в распадах  $\phi \rightarrow K^+K^-$  и  $\phi \rightarrow \pi^+\pi^-$  для очень больших энергии  $\phi$ -мезона?

To what limit tends the ratio of the maximal opening angles in decays  $\phi \rightarrow K^+K^-$  and  $\phi \rightarrow \pi^+\pi^-$  for very energetic  $\phi$ -meson?

## 6.5

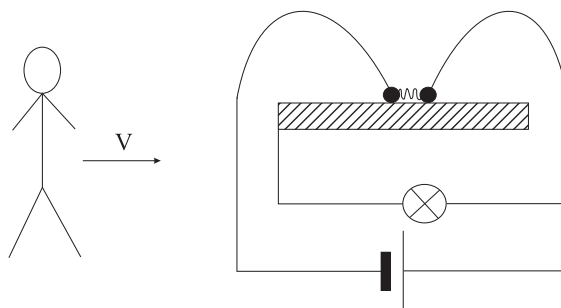
Неподвижный  $\omega$ -мезон распадается по схеме  $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ . В каких пределах может меняться энергия  $\pi^-$ -мезона, если энергия  $\pi^+$ -мезона равна  $E_1 = 300$  МэВ?

$\omega$ -meson at rest decays under the scheme  $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ . In what limits can vary the energy of the  $\pi^-$ -meson if the energy of the  $\pi^+$ -meson is equal to  $E_1 = 300$  MeV?

## Контрольная работа 7

### 7.1

В центре металлического желоба лежат два металлических шара связанных нитью. Между шарами находится сжатая пружина. Нить пережигают и шары приобретают одинаковые по величине и противоположные скорости  $u$ . Пока шары не упали с желоба, лампочка в показанной на рисунке схеме не горит, т.к. элемент питания коротко замкнут. Но шары упадут одновременно и лампочка все равно не загорится. Однако, в системе наблюдателя, который движется со скоростью  $V$  как на рисунке, правый шар падает раньше и лампочка должен загориться. Объясните парадокс.



In the center of a metal gutter two metal spheres connected by a strand lay. Between spheres there is a compressed spring. The strand is burnt through and the spheres acquire identical in magnitude and opposite speeds  $u$ . While spheres have not fallen from the gutter, the bulb in the electric scheme shown in the figure does not burn, since the electric element is short circuited. But spheres will fall simultaneously and the bulb will not light up either. However, in the frame of an observer which moves with the speed  $V$  as in the figure, the right sphere falls earlier and the bulb should light up. Explain the paradox.

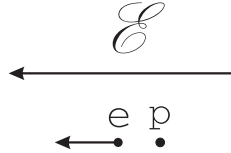
### 7.2

Ракета удаляется от Земли с постоянным собственным ускорением  $g$ . Через время  $\tau$  после старта ракеты, радиолокатор посылает ей вдогонку короткий сигнал с частотой  $\nu$ . Какую частоту отраженного сигнала зафиксируют на Земле?

A rocket leaves the Earth with constant proper acceleration  $g$ . After time  $\tau$  from its start, a radar sends to it a short signal with frequency  $\nu$ . What frequency of the reflected signal will be registered on the Earth?

### 7.3

Электрон и протон находятся рядом в электрическом поле. Причем в начальный момент времени протон неподвижен, а электрон имеет энергию  $E$  и движется в направлении поля. Для каких  $E$  пойдет реакция  $e^- + p \rightarrow e^- + p + e^- + e^+$  когда электрон и протон столкнутся?



An electron and a proton are close to each other in the electric field. At the initial moment of time the proton is motionless and the electron has the energy  $E$  and moves in the direction of the field. For what  $E$  would the reaction  $e^- + p \rightarrow e^- + p + e^- + e^+$  be allowed when the electron and the proton do collide?

### 7.4

Ракета удаляется от Земли с постоянным в сопутствующей системе ускорением  $g$ . Как связаны 4-координаты события  $(ct', x', y', z')$  в системе ракеты с 4-координатами события  $(ct, x, y, z)$  в системе Земли?

A rocket leaves the Earth with constant proper acceleration  $g$ . How are related the 4-coordinates  $(ct', x', y', z')$  of an event in the rocket's frame with 4-coordinates of the event  $(ct, x, y, z)$  in the Earth's frame?

### 7.5

Идеальное зеркало массой 1 кг ускоряется лучом лазера мощности  $9 \cdot 10^9$  Вт, расположенного на Земле. За какое время зеркало улетит на расстояние  $10^{15}$  м?

An ideal mirror of mass 1 kg is accelerated by a beam of the laser of power  $9 \cdot 10^9$  watts, located on the Earth. For what time will the mirror depart on the distance  $10^{15}$  m?

## Контрольная работа 8

### 8.1

Однородный стержень длины  $l$  опирается на гладкую горизонтальную поверхность и начинает падать на плоскость без начальной скорости из вертикального положения. найти траекторию верхнего конца стержня.

A homogeneous rod of length  $l$  leans on a smooth horizontal surface and starts to fall on the plane without initial speed from the vertical position. Find the trajectory of the top end of the rod.

### 8.2

Электрон в начальный момент покоился на расстоянии  $H$  от бесконечной проводящей незаряженной плоскости. Найти время, за которое электрон достигнет плоскости.

At the initial moment an electron at rest was situated upon distance  $H$  from the infinite, conducting, not charged plane. Find the time for which the electron will reach the plane.

### 8.3

Точка с массой  $m$  движется в поле с потенциалом

$$U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{a} \right).$$

Найти закон движения точки.

A point with mass  $m$  moves in a field with potential

$$U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{a} \right).$$

Find  $x(t)$ .

### 8.4

Шарик массы  $m$  падает с высоты  $H$  на горизонтальную плиту и упруго отскакивает. Найти высоту последующего подъема шарика, если сила сопротивления

воздуха  $F = -\alpha V^2$ .

A ball of mass  $m$  falls from the height  $H$  on a horizontal plate and elastically rebounds. Find the height of the subsequent rise of the ball, if the air resistance force is  $F = -\alpha V^2$ .

## 8.5

Электрон движется в поле магнитного монополя

$$\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Как зависит момент импульса электрона  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  от его радиус-вектора?

An electron moves in the field of a magnetic monopole

$$\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Find the angular momentum of the electron  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  as a function of its radius-vector.

## 8.6

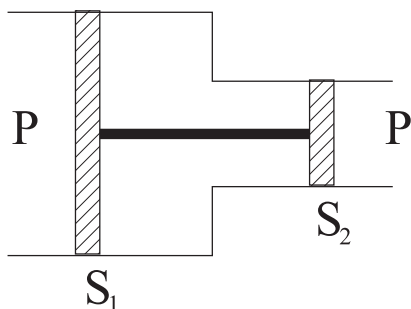
Однородное и постоянное электрическое поле  $\mathcal{E}$  направлено вдоль оси  $x$ . Из начала координат, вдоль оси  $y$  вылетает релятивистский протон с энергией  $E_0$ . Найти его траекторию.

A homogeneous and constant electric field  $\mathcal{E}$  is directed along the  $x$ -axis. A relativistic proton with initial energy  $E_0$  darts along the  $y$ -axis from the beginning of coordinates. Find its trajectory.

# Контрольная работа 9

## 9.1

Два поршня, способные двигаться без трения в герметично соединенных трубах, связаны жестким стержнем, как показано на рисунке. Площади поршней равны  $S_1$  и  $S_2$ . В равновесии объем воздуха между поршнями равен  $V$ . Найти частоту малых колебаний поршней, если их суммарная

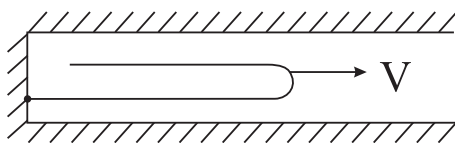


масса вместе со стержнем равна  $m$ . Температура поддерживается постоянной. Атмосферное давление равно  $p$ .

Two pistons capable to move without friction in tightly connected pipes are connected by a rigid rod, as shown in the figure. The areas of pistons are equal to  $S_1$  and  $S_2$  respectively. At equilibrium the air volume between the pistons is equal to  $V$ . Find the frequency of small oscillations of the pistons if their total mass together with the rod is  $m$ . The temperature is kept constant. The atmospheric pressure is equal to  $p$ .

## 9.2

Тонкий и гибкий нерастяжимый канат длины  $L$ , сложенный пополам, уложен в тонкой горизонтальной гладкой трубке. Один конец нити закреплен, и примыкающая к нему половина каната покоится, а второй половине сообщается начальная скорость  $V_0$ . Найти длину покоящейся части каната в тот момент, когда скорость точки изгиба станет равной скорости звука  $u$ .



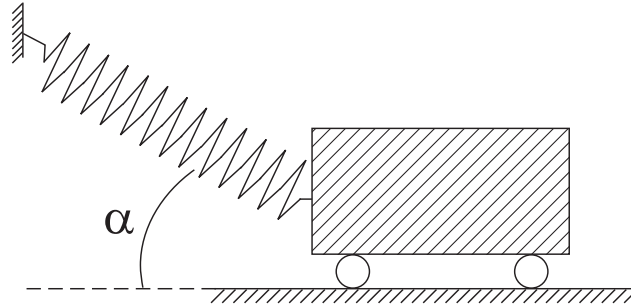
The thin and flexible not extensible rope of length  $L$ , combined half-and-half, is laid in a thin horizontal smooth tube. One end of the rope is fixed, and the half of the rope connected to it is at rest, while the initial velocity  $V_0$  is given to the second half. Find the length of the motionless part of the rope at the moment when the speed of the bending point becomes equal to the speed of sound  $u$ .

## 9.3

Тело, масса которого равна  $m$ , может перемещаться по горизонтальной прямой. К нему прикреплена пружина, коэффициент жесткости которой



$k$ . Второй конец пружины укреплен в неподвижной точке, как показано на рисунке. При угле  $\alpha = \alpha_0$  пружина не деформирована. Найти частоту малых колебаний тела.



A body of mass  $m$  can move on a horizontal straight line with a spring of rigidity  $k$  attached to it. The second end of the spring is fixed as shown in the figure. When the angle  $\alpha = \alpha_0$ , the spring is not deformed. Find the frequency of small oscillations of the body.

#### 9.4

Найти изменение периода гармонического осциллятора при малой ангармонической добавке  $\delta U = \frac{m\beta x^4}{4} \ll U$  к потенциалу  $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ .

Find the change of the oscillator period when a small anharmonic perturbation  $\delta U = \frac{m\beta x^4}{4} \ll U$  is added to the harmonic potential  $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ .

#### 9.5

Фотон и электрон движутся навстречу. После лобового столкновения происходит реакция  $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+$ . Найти энергию фотона, если все продукты реакции покоятся.

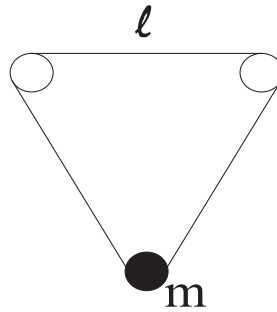
Photon and electron move towards each other. After a head-on collision the reaction  $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+$  happens. Find the energy of the photon if all reaction products are at rest.

## Контрольная работа 10

### 10.1

Шарик массы  $m$  прикреплен к концам упругой безмассовой нити, которая перекинута через два горизонтальных гладких стержня. Стержни находятся

на одном уровне и расстояние между ними  $l$ . Длина нити в ненапряженном состоянии  $2l$ . Найти частоту малых вертикальных колебаний шарика, если в состоянии равновесия нить образует равносторонний треугольник.



A ball of mass  $m$  is attached to the ends of an elastic massless string which is stretched over two horizontal smooth cores. The cores are at the same level and the distance between them is  $l$ . The length of not deformed string is  $2l$ . Find the frequency of small vertical oscillations of the ball if at equilibrium the string forms a equilateral triangle.

## 10.2

Линейному осциллятору частоты  $\omega$  передается энергия под воздействием силы  $F(t) = F_0 e^{-t^2/\tau^2}$ . Каков должен быть  $\tau$ , чтобы передача энергии была максимально эффективной? В момент времени  $t = -\infty$  осциллятор покоился в положении равновесия.

Energy is transferred to a linear oscillator of frequency  $\omega$  under influence of the force  $F(t) = F_0 e^{-t^2/\tau^2}$ . For what  $\tau$  is the energy transfer maximally effective? At the time  $t = -\infty$  the oscillator was at rest in the equilibrium point.

## 10.3

Найти закон вынужденных колебаний линейного одномерного осциллятора под воздействием силы  $F(t)$  при наличии силы трения  $F_{\text{тр}} = -\alpha V$ .

Find the law of forced oscillations of a linear one-dimensional oscillator under influence of the force  $F(t)$  in presence of the friction force  $F_{\text{тр}} = -\alpha V$ .

## 10.4

Песочные часы, в котором установился стационарный поток песка, поставили на весы. Доказать, что показания весов будет больше чем  $Mg$ , где  $M$  масса

песочных часов (вместе песком разумеется).

An hourglass, in which the stationary stream of the sand was established, have been put on a sensitive balance. Prove that the display of the balance will be more than  $Mg$ , where  $M$  is the mass of the hourglass (with the sand of course).

## 10.5

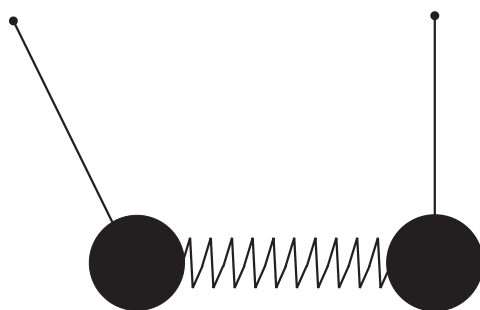
Из-за релятивистских эффектов период гармонического осциллятора зависит от амплитуды. Считая, что релятивистские эффекты маленькие, найти соответствующую поправку.

Because of the relativistic effects the period of harmonic oscillator depends on its amplitude. Assuming the relativistic effects are small, find the corresponding correction.

## Контрольная работа 11

### 11.1

Две одинаковые математические маятники, массы  $m$  и частоты  $\omega$ , связаны слабой пружиной жесткости  $k \ll m\omega^2$ . Расстояние между точками подвеса маятников равно длине не деформированной пружины. Один маятник отклонили от положения равновесия на маленькую величину. Через какое время колебания полностью перейдут ко второму маятнику?



Two identical mathematical pendula, with mass  $m$  and frequency  $\omega$ , are connected by a weak spring of rigidity  $k \ll m\omega^2$ . The distance between the hanging points of the pendula equals to the length of the not deformed spring. One pendulum is set at a small distance from the equilibrium point and begins to swing. What time it takes the oscillations to pass completely to the second pendulum?

## 11.2

Электрон движется по окружности радиуса  $R$  в однородном магнитном поле. Величина поля медленно возрастает. Какой будет радиус орбиты электрона когда поле увеличится в два раза? Лагранжиан заряженной частицы в однородном магнитном поле, направленным вдоль оси  $z$ , имеет вид (в системе CGSE)

$$\mathcal{L} = \frac{mV^2}{2} + \frac{qB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

An electron moves on a circle of radius  $R$  in a homogeneous magnetic field. The field slowly increases. What will be radius of the electron orbit when the magnetic field will increase twice? Lagrangian of a charged particle in a homogeneous magnetic field, directed along the  $z$ -axis, looks like (in the CGSE system of units)

$$\mathcal{L} = \frac{mV^2}{2} + \frac{qB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

## 11.3

Маленькому кольцу, надетому на проволочную горизонтальную окружность радиуса  $R$ , сообщили начальную скорость  $V_0 \ll \sqrt{gR}$ . Коэффициент трения кольца о проволоку равен  $\mu$ . Через какое время кольцо остановится?

To a small ring on a horizontal circular wire of radius  $R$  an initial velocity  $V_0 \ll \sqrt{gR}$  have been imparted. The friction coefficient between the ring and the wire is equal to  $\mu$ . After what time will the ring stop?

## 11.4

На крыше с углом наклона  $\varphi$  лежит свинцовый лист длины  $l$ . Коэффициент трения свинца о крышу  $\mu > \operatorname{tg} \varphi$ . Коэффициент линейного расширения свинца  $\alpha$ . В течении  $N$  суток устойчивой погоды суточный перепад температуры составлял  $\Delta t$ . На какое расстояние сползет лист?

On a roof with an angle of inclination  $\varphi$  a lead leaf of length  $l$  lays. The friction coefficient between the lead and the roof  $\mu > \operatorname{tg} \varphi$ . Linear thermal expansion coefficient of lead is  $\alpha$ . During  $N$  days of steady weather daily temperature drop was  $\Delta t$ . On what distance will the leaf slip?

## 11.5

Неподвижный  $\tau$  лептон испытывает радиационный распад  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ . В каких пределах может меняться энергия фотона, если массы подсистем  $(\pi^- \pi^0)$  и  $(\nu_\tau \gamma)$  равны друг другу и составляют одну треть массы  $\tau$  лептона  $m_\tau$ . Масса нейтрино  $\nu_\tau$  равна нулю.

$\tau$  lepton at rest undergoes radiative decay  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ . In what limits change the energy of the photon if invariant masses of subsystems  $(\pi^- \pi^0)$  and  $(\nu_\tau \gamma)$  are equal to each other and constitute one third of the  $\tau$  lepton mass  $m_\tau$ . The mass of  $\nu_\tau$  neutrino is equal to zero.

## Контрольная работа 12

### 12.1

При каком направлении начальной скорости космический аппарат упадет на поверхность Земли вне зависимости от величины начальной скорости?

At what direction of the initial speed a space vehicle will fall to Earth's surface irrespective of the initial speed magnitude?

### 12.2

В каком центральном поле точка движется по траектории

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\epsilon\varphi)?$$

Здесь  $p$ ,  $e$  и  $\epsilon$  – некоторые константы.

In what central force field does a point move on the trajectory

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\epsilon\varphi)?$$

Here  $p$ ,  $e$  and  $\epsilon$  are some constants.

### 12.3

Найти наивыгоднейший (с точки зрения минимизации потребной начальной скорости) угол запуска к горизонту баллистической ракеты на северном

полюсе, чтобы она попала на экватор.

Find the optimal launching angle to the horizon of a ballistic missile on the North Pole (from the point of view of minimization of the initial speed) for the missile to land on the equator.

## 12.4

Как изменится третий закон Кеплера, если учесть движение Солнца, вызванное притяжением соответствующей планеты?

How does Kepler's third law get modified if the movement of the Sun, caused by an attraction of the corresponding planet, is taken into account?

## 12.5

Два спутника, имеющие равные массы, движутся в одном направлении по компланарным орбитам, одна из которых – круговая радиуса  $R$ , а другая – эллиптическая с расстояниями перигея и апогея  $R$  и  $8R$  соответственно. Полагая, что спутники путем непосредственной стыковки соединились друг с другом в точке соприкосновения их орбит и дальнейшее движение продолжили вместе, найти апогей их новой орбиты.

Two satellites, having equal masses, move in the same direction on coplanar orbits, one of which is circular of radius  $R$ , and the another – elliptic with the perigee and apogee distances  $R$  and  $8R$  respectively. Assuming that the satellites have been joined to each other at the contiguity point of their orbits and the further movement have continued together, Find the apogee of their new orbit.

## 12.6

Для каких значений момента импульса  $L$  релятивистской частицы возможны круговые орбиты в потенциале

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0?$$

For what values of the angular momentum  $L$  are circular orbits possible in the

potential

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

for relativistic particles?

## Контрольная работа 13

### 13.1

Найти зависимость угла рассеяния от прицельного параметра для быстрых электронов, пролетающих мимо очень тяжелого магнитного монополя.

Find the dependence of the scattering angle on the impact parameter for fast electrons flying past a very heavy magnetic monopole.

### 13.2

Найти сечение рассеяния на угол, больший  $90^\circ$ , в центральном поле с потенциалом

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0.$$

Налетающая частица имеет кинетическую энергию  $T$ .

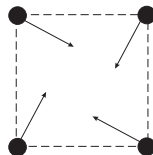
Find the cross section for scattering at angles greater than  $90^\circ$  in the central force field with the potential

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0.$$

The incoming particle has a kinetic energy  $T$ .

### 13.3

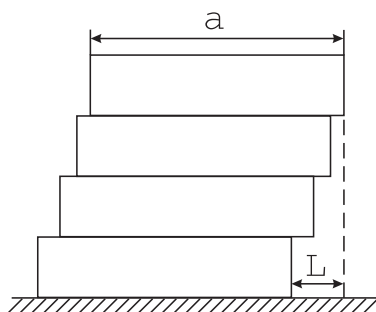
Четыре звезды одинаковой массы  $M$ , находясь очень далеко друг от друга, расположены в вершинах квадрата и имеют одинаковые по величине скорости  $V$ , прицельные параметры которых, относительно центра квадрата, тоже одинаковы и равны  $b$ . Найти угол рассеяния звезд.



Four stars of identical mass  $M$ , being very far from each other, are located at vertexes of a square and have identical in magnitude speeds  $V$ . Impact parameters of the stars, with regard to the center of the square, are also identical and equal  $b$ . Find the scattering angle of the stars.

### 13.4

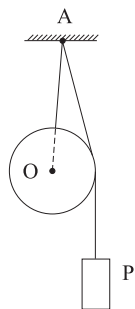
Одинаковые гладкие пластины длины  $a$  укладываются одна на другой. Какое минимальное количество пластин понадобится, чтобы построить равновесную конструкцию с пролетом  $L = 3a$ ?



Identical smooth plates of length  $a$  are placed one on another. What minimum number of plates is required to construct an equilibrium construction with overhang  $L = 3a$ ?

### 13.5

Однородный шар веса  $Q$  и радиуса  $R$  и гиря веса  $P$  подвешены на веревках в точке  $A$ , как показано на рисунке. Расстояние от  $A$  до центра шара  $AO = l$ . Определить, какой угол образует прямая  $AO$  с вертикалью при равновесии.



A homogeneous sphere of weight  $Q$  and radius  $R$  and a weight  $P$  are suspended on cords fixed in a point  $A$ , as shown in the figure. The distance from the point

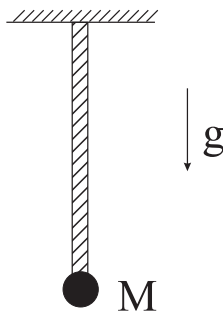


$A$  to the center of the sphere  $AO = l$ . Find the angle the straight line  $AO$  forms with the vertical at balance.

## Контрольная работа 14

### 14.1

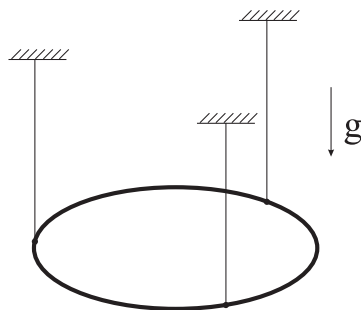
Тело массы  $M$  висит на гибком канате массы  $m$ . Найти частоту вертикальных колебаний, если коэффициент жесткости каната равен  $k$ .



A body of mass  $M$  hangs on a flexible rope of mass  $m$ . Find the frequency of vertical oscillations if the coefficient of rigidity of the rope is equal to  $k$ .

### 14.2

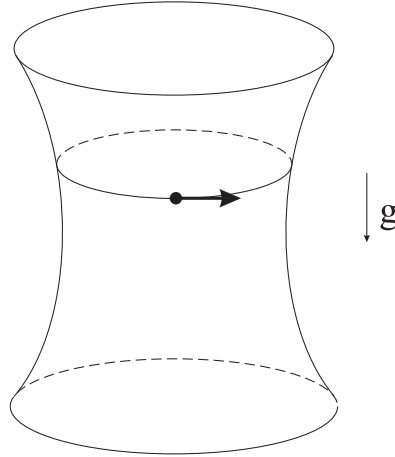
Кольцо массы  $m$  подвешено симметрично на трех нерастяжимых нитях длины  $l$  каждый. Найти частоту малых крутильных колебаний кольца относительно вертикальной оси проходящей через его центр.



A ring of mass  $m$  is suspended symmetrically on three not extensible strings of length  $l$  each. Find the frequency of the small torsion oscillations of the ring around the vertical axis passing through its center.

### 14.3

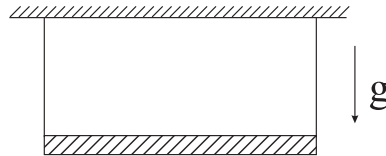
Частица движется внутри чашки по круговой горизонтальной орбите радиуса  $r$ . Поверхность чашки имеет форму гиперболоида вращения  $\rho^2 - z^2 = R^2$  (в цилиндрических координатах). Для каких значений радиуса  $r$  такое движение становится неустойчивым?



A particle moves inside a cup on a circular horizontal orbit of radius  $r$ . The surface of the cup has the form of a hyperboloid of revolution  $\rho^2 - z^2 = R^2$  (in cylindrical coordinates). For what values of radius  $r$  does the orbit become unstable?

### 14.4

Однородный стержень массы  $M$  подвешен на двух вертикальных нерастяжимых нитях одинаковой длины, прикрепленных к концам стержня. Найти натяжение одной из нитей в момент обрыва другой.



A homogeneous core of mass  $M$  is suspended on two vertical not extensible strings of identical lengths, attached to the ends of the core. Find the tension of one string at the moment of breakage of another.

### 14.5

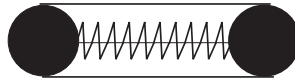
Однородный цилиндр с горизонтальной осью скатывается под действием силы тяжести со скольжением по наклонной плоскости при коэффициенте

трения скольжения  $\mu$ . При каком угле наклона плоскости к горизонту это возможно?

A homogeneous cylinder with a horizontal axis rolls down under gravity with sliding on an inclined plane at sliding friction coefficient  $\mu$ . For what inclination angles of the plane to the horizon is this possible?

## 14.6

На концах трубки со сжатой легкой пружиной удерживаются нитью одинаковые шарики массой  $m$ . При разрыве нити шарики разлетаются с одинаковыми скоростями  $u$ . Объясните как сохраняется импульс при этом процессе с точки зрения наблюдателя, который движется вдоль оси трубки с релятивистской скоростью  $V > u$ .

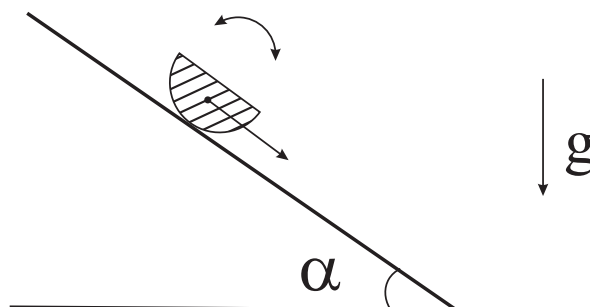


On the ends of a tube with the compressed massless spring two identical balls of mass  $m$  are kept by a string. At a breakage of the string the balls fly away with identical in magnitude speeds  $u$ . Explain how momentum is conserved in this process from the point of view of an observer who moves along the axis of the tube with relativistic speed  $V > u$ .

## Контрольная работа 15

### 15.1

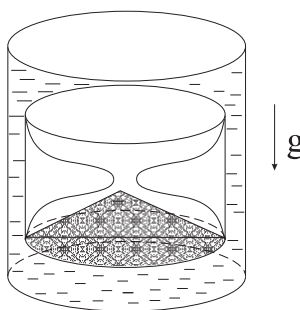
Полуцилиндр радиуса  $R$  скользит по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту и совершает малые колебания вокруг своей оси, которая перпендикулярна к плоскости рисунка. Найти частоту этих колебаний. Трение отсутствует.



A half cylinder of radius  $R$  slides on an inclined plane with the angle of inclination  $\alpha$  to the horizon and performs small oscillations around its axis which is perpendicular to the plane of the figure. Find the frequency of these oscillations. Friction is absent.

## 15.2

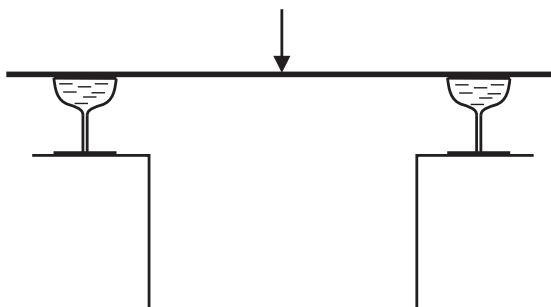
Песочные часы плавают в трубке, полностью заполненной водой, немного давя на верхнюю крышку трубки. Весь песок находится в нижней части часов. Начнут ли часы всплывать, если трубку перевернуть? Внутренний диаметр трубки лишь ненамного больше внешнего диаметра песочных часов.



In a sealed tube completely filled with water a run out hourglass floats pressing a little on the top cover of the tube. The tube is flipped over. Does the hourglass start to float to the top? The internal diameter of the tube is only somewhat larger than the external diameter of the hourglass.

## 15.3

Два бакала с вином стоят около краев двух соседних столов. На них опирается длинный и тонкий однородный деревянный стержень. Прольется ли вино, если с размаха ударить железной палкой ровно по середине стержня?



A broomstick rests on two wine glasses as shown in the figure. Will the wine spill out after a strong downward blow to the center of the broomstick with an

iron rod?

#### 15.4

Найти угол рассеяния электрона с прицельным параметром  $\rho$  и со скоростью  $V$  в поле магнитного монополя

$$\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Find the scattering angle of an electron with the impact parameter  $\rho$  and velocity  $V$  in the field of a magnetic monopole

$$\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

#### 15.5

Однородный шар катится без проскальзывания по поверхности поворотного стола, который вращается с угловой скоростью  $\Omega$ . Найти траекторию шара, если в начальный момент времени радиус-вектор центра шара равен  $\vec{r}_0$ , а его скорость  $\vec{V}_0$  (Относительно лабораторной системы).

A homogeneous ball rolls without slipping on the surface of a turntable which rotates with angular velocity  $\Omega$ . Find the trajectory of the ball if at the initial moment of time the radius vector of the ball equals to  $\vec{r}_0$  and its velocity is  $\vec{V}_0$  (with regard to the laboratory frame).

#### 15.6

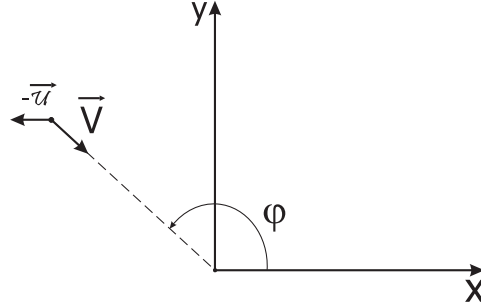
Проволочка, концы которой закреплены, находится в неоднородном магнитном поле. При этом натяжение проволоки равно  $T$ . Какой ток течет по проволочке, если ее форма совпадает с траекторией протона с импульсом  $p$  в этом поле?

A current-carrying wire with fixed ends is placed in a non-uniform magnetic field. The tension of the wire equals to  $T$ . What current does flow in the wire if its form coincides with the trajectory of a proton with momentum  $p$  in this field?

# Решения

## Контрольная работа 1

### 1.1



Разложим скорость собаки (в системе зайца) на радиальную и тангенциальную компоненты

$$V_r = -V + u \cos(\pi - \varphi) = -V - u \cos \varphi, \quad V_\varphi = u \sin(\pi - \varphi) = u \sin \varphi.$$

Но  $V_r = \dot{r}$  и  $V_\varphi = r\dot{\varphi}$ . Поэтому

$$\dot{r} = -V - u \cos \varphi, \quad r\dot{\varphi} = u \sin \varphi.$$

Делим первое уравнение на второе и учтем

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{d\varphi},$$

получаем

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{V + u \cos \varphi}{u \sin \varphi}.$$

Поэтому

$$\ln \frac{r}{L} = - \int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{V + u \cos \varphi}{u \sin \varphi} d\varphi.$$

Но

$$- \int \frac{V + u \cos \varphi}{u \sin \varphi} d\varphi = \int \frac{\frac{V}{u} + z}{1 - z^2} dz,$$

где  $z = \cos \varphi$ . Далее разложим

$$\frac{\frac{V}{u} + z}{1 - z^2} = \frac{A}{1 - z} + \frac{B}{1 + z}, \quad A = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{V}{u} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left( \frac{V}{u} - 1 \right).$$

Следовательно,

$$\int \frac{\frac{V}{u} + z}{1 - z^2} dz = \ln [(1 + z)^B (1 - z)^{-A}].$$

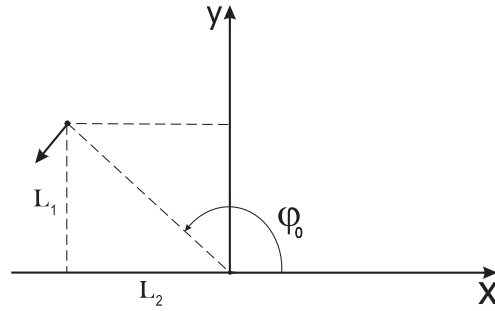
Поэтому

$$-\int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{V + u \cos \varphi}{u \sin \varphi} d\varphi = \ln \frac{(1 + \cos \varphi)^B}{(1 - \cos \varphi)^A} = \ln \left[ \left( \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{V}{u}} \frac{1}{\sin \varphi} \right]$$

и уравнение траектории будет

$$r = \frac{L}{\sin \varphi} \left( \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{V}{u}}.$$

## 1.2



Из

$$\dot{r} = -u(1 + \cos \varphi), \quad r\dot{\varphi} = u \sin \varphi$$

получаем

$$\dot{r}(1 - \cos \varphi) + r\dot{\varphi} \sin \varphi = -u(1 - \cos^2 \varphi) + u \sin^2 \varphi = 0.$$

Но

$$\dot{r}(1 - \cos \varphi) + r\dot{\varphi} \sin \varphi = \frac{d}{dt}(r - r \cos \varphi).$$

Следовательно,

$$r(1 - \cos \varphi) = C,$$

где  $C$  некоторая константа. При  $t = 0$  имеем (см. рисунок)

$$r_0 = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}, \quad \cos \varphi_0 = -\frac{L_2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}.$$

Поэтому  $C = L_2 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2}$ .

В системе зайца  $\varphi \rightarrow \pi$ , когда  $t \rightarrow \infty$ . Действительно,  $\dot{\varphi} = \frac{u}{r} \sin \varphi > 0$ , если  $\varphi < \pi$ , и  $\varphi$  все время растет. Но при приближении к  $\pi$ , как  $\dot{\varphi}$ , так и  $\dot{r}$  стремятся к нулю.

Следовательно, расстояние стремится к предельному значению

$$r_{min} = \frac{C}{1 - \cos \pi} = \frac{L_2 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2}}{2}.$$

### 1.3

Найдем инфинитезимальные смещения вдоль координат  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\phi$ :

$$d_{(\xi)} \vec{r} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \cos \phi \vec{i} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \sin \phi \vec{j} + \vec{k} \right] d\xi,$$

$$d_{(\eta)} \vec{r} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \cos \phi \vec{i} + \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \sin \phi \vec{j} - \vec{k} \right] d\eta,$$

$$d_{(\phi)} \vec{r} = \sqrt{\xi \eta} (-\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}) d\phi.$$

Где, например,  $d_{(\xi)} \vec{r} = (dx)_{\eta, \phi = \text{const}} \vec{i} + (dy)_{\eta, \phi = \text{const}} \vec{j} + (dz)_{\eta, \phi = \text{const}} \vec{k}$ . Орты - это единичные вектора по этим направлениям. Поэтому просто нормируем соответствующие инфинитезимальные смещения. Например

$$\vec{e}_\xi = \frac{d_{(\xi)} \vec{r}}{|d_{(\xi)} \vec{r}|}, \quad |d_{(\xi)} \vec{r}| = \frac{1}{2} d\xi \sqrt{1 + \frac{\eta}{\xi}}.$$

В результате получим

$$\vec{e}_\xi = \frac{1}{\sqrt{\xi + \eta}} [\sqrt{\eta} \cos \phi \vec{i} + \sqrt{\eta} \sin \phi \vec{j} + \sqrt{\xi} \vec{k}],$$

$$\vec{e}_\eta = \frac{1}{\sqrt{\xi + \eta}} [\sqrt{\xi} \cos \phi \vec{i} + \sqrt{\xi} \sin \phi \vec{j} + \sqrt{\eta} \vec{k}],$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}.$$

Элемент объема  $dV = |d_{(\xi)} \vec{r} \cdot [d_{(\eta)} \vec{r} \times d_{(\phi)} \vec{r}]|$ . Замечая, что абсолютное значение детерминанта

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \cos \phi & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \sin \phi & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \cos \phi & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \sin \phi & -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{\xi \eta} \sin \phi & \sqrt{\xi \eta} \cos \phi & 0 \end{vmatrix}$$



равен  $\frac{1}{4}(\xi + \eta)$ , получаем

$$dV = \frac{\xi + \eta}{4} d\xi d\eta d\phi.$$

Элементы площади равны

$$dS_{(\xi, \eta)} = |d_{(\xi)}\vec{r} \times d_{(\eta)}\vec{r}| = \frac{\xi + \eta}{4\sqrt{\xi\eta}} d\xi d\eta,$$

$$dS_{(\xi, \phi)} = |d_{(\xi)}\vec{r} \times d_{(\phi)}\vec{r}| = \frac{1}{2}\sqrt{\eta(\xi + \eta)} d\xi d\phi,$$

$$dS_{(\eta, \phi)} = |d_{(\eta)}\vec{r} \times d_{(\phi)}\vec{r}| = \frac{1}{2}\sqrt{\xi(\xi + \eta)} d\eta d\phi.$$

Наконец, элемент дуги

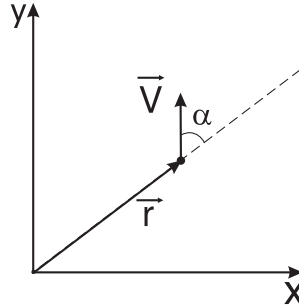
$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \frac{1}{4}(\xi + \eta) \left[ \frac{(d\xi)^2}{\xi} + \frac{(d\eta)^2}{\eta} \right] + \xi\eta(d\phi)^2.$$

#### 1.4

Величина скорости электрона  $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{b^2 + a^2\omega^2}$  не меняется со временем. Следовательно, тангенциальное ускорение равно нулю и нормальное ускорение совпадает с величиной полного ускорения:  $g_n = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = a\omega^2$ . Но  $g_n = \frac{V^2}{R}$  и радиус кривизны

$$R = \frac{V^2}{g_n} = a + \frac{b^2}{a\omega^2}.$$

#### 1.5



Компоненты скорости в полярной системе координат  $V_r = \dot{r} = V \cos \alpha$ , и  $V_\varphi = r\dot{\phi} = V \sin \alpha$ . Поэтому

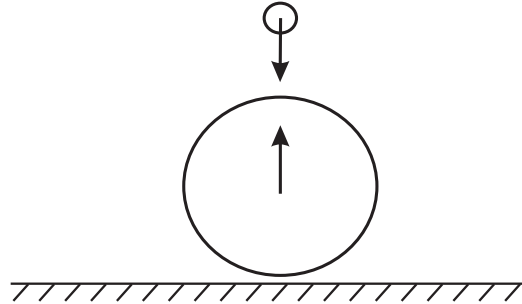
$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Интегрируя, получаем уравнение траектории

$$r = r_0 e^{(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \alpha}.$$

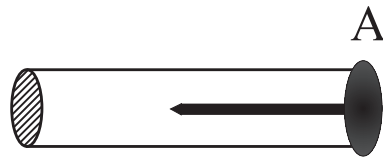
## Контрольная работа 2

### 2.1



Во время падения мяча из-за воздушного потока теннисный мячик оторвется и, следовательно столкнется уже отскочившим мячом. Для оценки можно считать, что и мяч, и мячик движутся на встречу со скоростью  $V \approx \sqrt{2gh}$ , где  $h = 1$  м. В системе покоя мяча, мячик движется со скоростью  $2V$  и отскакивает с такой же скоростью, так как его масса много меньше массы баскетбольного мяча. Т.е. мячик отскакивает как бы от стенки. Следовательно, в системе земли скорость мячика после удара будет  $2V + V = 3V$ . Высота подъема пропорциональна квадрату начальной скорости, поэтому теннисный мячик подскочит на высоту  $3^2 h = 9$  м. реальная высота подскока будет несколько меньше из-за сопротивления воздуха и потерь энергий при ударах, но все равно эта высота будет значительно больше, чем 1 м.

### 2.2



В системе гвоздя ясно, что бумага пробивается, поэтому весь вопрос в том, как это достигается в системе цилиндра. В момент столкновения кончик гвоздя находится на расстоянии  $\frac{L}{\gamma}$  от начала цилиндра. Но он не

может мгновенно остановиться. Он вообще не “знает”, что столкновение произошло, т.к. сигнал о столкновении может распространяться вдоль гвоздя со скоростью не больше, чем скорость света  $c$ . Так как в системе цилиндра кончик гвоздя убегает от этого сигнала со скоростью  $V$ , то он почувствует последствия столкновения не раньше, чем  $\frac{L}{\gamma(c-V)}$ . Все это время он движется со скоростью  $V$  и, следовательно, к этому моменту времени окажется от начала цилиндра на расстоянии  $\frac{L}{\gamma} + \frac{LV}{\gamma(c-V)} = L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ . Так как  $L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > L$ , то гвоздь не может не пробить бумагу.

## 2.3

тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{V}}{V}.$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{a^2 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{V})^2}{V^2}} = \frac{|\vec{a} \times \vec{V}|}{V}.$$

Но  $a_n = \frac{V^2}{R}$ , поэтому радиус кривизны

$$R = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^3}{|\vec{a} \times \vec{V}|}.$$

## 2.4

Найдем инфинитезимальные смещения вдоль координат  $\sigma$  и  $\tau$ .

$$d_{(\sigma)}\vec{r} = (d\vec{r})_{\tau=const} = d\sigma[\tau\vec{i} - \sigma\vec{j}], \quad d_{(\tau)}\vec{r} = (d\vec{r})_{\sigma=const} = d\tau[\sigma\vec{i} + \tau\vec{j}].$$

Орты  $\vec{e}_\sigma$  и  $\vec{e}_\tau$  отличаются от  $d_{(\sigma)}\vec{r}$  и  $d_{(\tau)}\vec{r}$  только нормировкой. Поэтому

$$\vec{e}_\sigma = \frac{\tau\vec{i} - \sigma\vec{j}}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \quad \text{и} \quad \vec{e}_\tau = \frac{\sigma\vec{i} + \tau\vec{j}}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}}.$$

Элемент площади  $dS = |d_{(\sigma)}\vec{r} \times d_{(\tau)}\vec{r}| = (\sigma^2 + \tau^2) d\sigma d\tau$ .

## 2.5

Найдем орты сферической системы координат.

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}.$$

Поэтому инфинитезимальные смещения вдоль координат  $r, \theta$  и  $\varphi$  будут

$$d_{(r)}\vec{r} = dr[\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}],$$

$$d_{(\theta)}\vec{r} = r d\theta[\cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}]$$

и

$$d_{(\varphi)}\vec{r} = r \sin \theta d\varphi[-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}].$$

Нормируя, получаем орты:

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k},$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}.$$

Поэтому  $\vec{r} = r\vec{e}_r$  и скорость точки на поверхности шара (когда  $r = \text{const}$ ) будет  $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\dot{\vec{e}}_r$ . Но  $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$  так как

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}[\cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}] + \dot{\varphi}\sin\theta[-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}].$$

Меридиан направлен вдоль  $\vec{e}_\theta$ . Поэтому, согласно условию,  $\vec{V} \cdot \vec{e}_\theta = V \cos \alpha$ . Но тогда  $\vec{V} \cdot \vec{e}_\varphi = V \sin \alpha$ , так как  $\vec{e}_\theta$  и  $\vec{e}_\varphi$  взаимно-перпендикулярны и лежат в одной (касательной к шару) плоскости с  $\vec{V}$ . Поставляя в эти равенства  $\vec{V} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$ , получаем

$$r\dot{\theta} = V \cos \alpha,$$

$$r\dot{\varphi}\sin\theta = V \sin \alpha.$$

Поделим одно на другое и учтем  $\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} = \frac{d\theta}{d\varphi}$ , получим

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\varphi} = \text{ctg } \alpha.$$

используя

$$\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{-1}{2} \int \left[ \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} \right] d \cos \theta = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \ln \text{tg } \frac{\theta}{2},$$

получаем уравнение траектории

$$\text{tg } \frac{\theta}{2} = \text{tg } \frac{\theta_0}{2} e^{(\varphi - \varphi_0) \text{ctg } \alpha}.$$

Эта кривая называется локсодромией.

## 2.6

Векторное произведение антикоммутативно, т.к.

$$0 = (\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{A}.$$

Также можно доказать, что смешанное произведение  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$  меняет знак при перестановке любых двух сомножителей. Например,

$$0 = ((\vec{A} + \vec{C}) \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{C}) = (\vec{C} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} + (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}.$$

Для любых двух векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , норма  $|\vec{A} \times \vec{B}|^2$  равна

$$\left| \left( \vec{A} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \vec{B} \right) \times \vec{B} \right|^2 = \left| \vec{A} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \vec{B} \right|^2 |\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2.$$

Следовательно, для любых двух векторов справедливо соотношение

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2.$$

Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned} & |\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{A}|^2 = \\ & = |\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A})|^2 + |\vec{A}|^4 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 |\vec{A}|^2 - 2|\vec{A}|^2 (\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A})) \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

Но это равно нулю, так как

$$|\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A})|^2 = |\vec{A}|^2 |\vec{B} \times \vec{A}|^2 = |\vec{A}|^4 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 |\vec{A}|^2$$

и

$$(\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A})) \cdot \vec{B} = (\vec{B} \times \vec{A}) \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2.$$

Следовательно,

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{A}. \quad (1)$$

однако, хорошо известное для трехмерного векторного произведения соотношение

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (2)$$

в общем случае не выполняется. Чтобы доказать это, рассмотрим тернарное произведение (которое равно нулю, если выполняется (2))

$$\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) - \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) + \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

Тождество (1) означает, что тернарное произведение, наподобие смешанного произведения, тоже кососимметричная функция своих аргументов. Например,

$$0 = \{\vec{A} + \vec{B}, \vec{A} + \vec{B}, \vec{C}\} = \{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\} + \{\vec{B}, \vec{A}, \vec{C}\}.$$

Пусть  $\vec{e}_i$ ,  $i = 1 \div n$  некоторый ортонормированный базис в  $n$ -мерном векторном пространстве. Тогда

$$(\vec{e}_i \times \vec{A}) \cdot (\vec{e}_i \times \vec{B}) = ((\vec{e}_i \times \vec{B}) \times \vec{e}_i) \cdot \vec{A} = [\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i] \cdot \vec{A}$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^n (\vec{e}_i \times \vec{A}) \cdot (\vec{e}_i \times \vec{B}) = (n-1) \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (3)$$

Используя это тождество, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \{\vec{e}_i, \vec{A}, \vec{B}\} \cdot \{\vec{e}_i, \vec{C}, \vec{D}\} = \\ & = (n-5)(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) + 2(\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - 2(\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}). \end{aligned} \quad (4)$$

Поэтому

$$\sum_{i,j=1}^n \{\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{A}\} \cdot \{\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{B}\} = (n-1)(n-3) \vec{A} \cdot \vec{B} \quad (5)$$

и

$$\sum_{i,j,k=1}^n \{\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\} \cdot \{\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\} = n(n-1)(n-3). \quad (6)$$

Последнее уравнение показывает, что некоторые  $\{\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\}$  не равны нулю, если  $n > 3$ . Таким образом тождество (2) действительно справедливо только для обычного трехмерного векторного произведения ( $n = 3$  случай, конечно, не интересен, потому что это соответствует тождественно равному нулю векторному произведению).

Далее заметим, что используя

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= (\vec{A} + \vec{C}) \times \vec{B} \times (\vec{A} + \vec{C}) - \vec{A} \times \vec{B} \times \vec{A} - \vec{C} \times \vec{B} \times \vec{C} = \\ &= 2\vec{A} \cdot \vec{C} \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{B} \vec{C} - \vec{B} \cdot \vec{C} \vec{A} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) &= \frac{1}{2} \left[ \vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) + (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) - \right. \\ &\quad \left. - (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) - ((\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}) \times \vec{D} + ((\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}) \times \vec{D} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})) \times \vec{D} - (\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})) \times \vec{D} - \vec{A} \times ((\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{D}) + \\
& + \vec{A} \times ((\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{D}) + \vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) \Big],
\end{aligned}$$

можно проверить следующее равенство

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times \{\vec{B}, \vec{C}, \vec{D}\} &= -\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \times \vec{D}\} + \vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) - \{\vec{A}, \vec{C}, \vec{D} \times \vec{B}\} + \\
& + \vec{A} \times (\vec{C} \times (\vec{D} \times \vec{B})) - \{\vec{A}, \vec{D}, \vec{B} \times \vec{C}\} + \vec{A} \times (\vec{D} \times (\vec{B} \times \vec{C})) = \\
&= -\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \times \vec{D}\} - \{\vec{A}, \vec{C}, \vec{D} \times \vec{B}\} - \{\vec{A}, \vec{D}, \vec{B} \times \vec{C}\} + 3\vec{A} \times \{\vec{B}, \vec{C}, \vec{D}\}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из

$$\begin{aligned}
3\{\vec{B}, \vec{C}, \vec{D}\} &= \{\vec{B}, \vec{C}, \vec{D}\} + \{\vec{C}, \vec{D}, \vec{B}\} + \{\vec{D}, \vec{B}, \vec{C}\} = \\
&= \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D}) + \vec{C} \times (\vec{D} \times \vec{B}) + \vec{D} \times (\vec{B} \times \vec{C}).
\end{aligned}$$

Следовательно, тернарное произведение удовлетворяет интересному соотношению

$$2 \vec{A} \times \{\vec{B}, \vec{C}, \vec{D}\} = \{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \times \vec{D}\} + \{\vec{A}, \vec{C}, \vec{D} \times \vec{B}\} + \{\vec{A}, \vec{D}, \vec{B} \times \vec{C}\} \quad (7)$$

Поэтому должно выполняться равенство

$$\begin{aligned}
& 4 \sum_{i,j,k,l=1}^n |\vec{e}_i \times \{\vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_l\}|^2 = \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^n |\{\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k \times \vec{e}_l\} + \{\vec{e}_i, \vec{e}_k, \vec{e}_l \times \vec{e}_j\} + \{\vec{e}_i, \vec{e}_l, \vec{e}_j \times \vec{e}_k\}|^2.
\end{aligned}$$

Левую сторону можно легко вычислить с помощью (3) и (6):

$$4 \sum_{i,j,k,l=1}^n |\vec{e}_i \times \{\vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_l\}|^2 = 4n(n-1)^2(n-3).$$

Чтобы вычислит правую сторону, можно использовать следующее равенство

$$\sum_{i,j=1}^n \{\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{A}\} \cdot \{\vec{e}_i, \vec{e}_j \times \vec{B}, \vec{C}\} = -(n-3)(n-6)\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}), \quad (8)$$

которое следует из (4) и из равенства

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n (\vec{e}_i \times \vec{A}) \cdot ((\vec{e}_i \times \vec{B}) \times \vec{C}) = \\
&= \sum_{i=1}^n (\vec{e}_i \times \vec{A}) \cdot [2\vec{e}_i \cdot \vec{C} \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{C} \vec{e}_i - \vec{e}_i \cdot \vec{B} \vec{C} - \vec{e}_i \times (\vec{B} \times \vec{C})] =
\end{aligned}$$

$$= -(n-4)\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}).$$

Теперь, имея (5) и (8) под рукой, можно довольно просто вычислить

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j,k,l=1}^n |\{\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k \times \vec{e}_l\} + \{\vec{e}_i, \vec{e}_k, \vec{e}_l \times \vec{e}_j\} + \{\vec{e}_i, \vec{e}_l, \vec{e}_j \times \vec{e}_k\}|^2 = \\ & = 3n(n-1)^2(n-3) + 6n(n-1)(n-3)(n-6) = 3n(n-1)(n-3)(3n-13). \end{aligned}$$

Следовательно, должны иметь

$$4n(n-1)^2(n-3) = 3n(n-1)(n-3)(3n-13)$$

и

$$3n(n-1)(n-3)(3n-13) - 4n(n-1)^2(n-3) = 5n(n-1)(n-3)(n-7) = 0.$$

Это показывает, что нетривиальное векторное произведение определено только в пространствах с размерностями три и семь.

## Контрольная работа 3

### 3.1

Пусть  $L_0$  собственная длина стержня. Тогда  $L = \frac{L_0}{\gamma_u}$  и  $L_0 = \gamma_u L$ . В системе  $S'$  стержень имеет скорость

$$u' = u \ominus V = \frac{u - V}{1 - \frac{uV}{c^2}}.$$

Поэтому длина стержня в этой системе  $L' = \frac{L_0}{\gamma_{u'}} = \frac{\gamma_u}{\gamma_{u'}} L$ . Но

$$\gamma_{u \ominus V} = \gamma_u \gamma_V \left(1 - \frac{uV}{c^2}\right).$$

Поэтому

$$L' = \frac{L}{\gamma_V \left(1 - \frac{uV}{c^2}\right)}.$$

### 3.2

Согласно преобразованию Лоренца имеем  $ct' + x' = \gamma[ct - \beta x + x - \beta ct] = \gamma(1 - \beta)(ct + x)$  и  $ct' - x' = \gamma(1 + \beta)(ct - x)$ . Но

$$\gamma(1 - \beta) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, \text{ и } \gamma(1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta)}.$$



следовательно,  $x'_+ = e^{-\psi}x_+$ ,  $x'_- = e^{\psi}x_-$ , где

$$e^{\psi} = \gamma(1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \text{ или } \psi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Заметим, что

$$\text{th } \psi = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}} = \frac{\gamma(1 + \beta) - \gamma(1 - \beta)}{\gamma(1 + \beta) + \gamma(1 - \beta)} = \beta.$$

### 3.3

Пусть система  $S_1$  движется со скоростью  $V_1$  относительно  $S$ , а система  $S_2$  со скоростью  $V_2$  относительно  $S_1$ . Тогда

$$x_-^{(1)} = \sqrt{\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1}} x_- \text{ и } x_-^{(2)} = \sqrt{\frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2}} x_-^{(1)}.$$

Следовательно,

$$x_-^{(2)} = \sqrt{\frac{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}} x_-.$$

С другой стороны

$$x_-^{(2)} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} x_- ,$$

где

$$\beta = \beta_1 \oplus \beta_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

соответствует релятивистской сумме скоростей  $V_1$  и  $V_2$ . В случае  $n$  скоростей получим

$$\frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \frac{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2) \cdots (1 + \beta_n)}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \cdots (1 - \beta_n)}.$$

отсюда можно определить  $\beta$ . В частности, если  $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n$ , то

$$\beta = \frac{(1 + \beta_1)^n - (1 - \beta_1)^n}{(1 + \beta_1)^n + (1 - \beta_1)^n}.$$

### 3.4

Рассмотрим точку  $A$  лампы с координатой  $x'$  в системе лампы. Вспышка в точке  $A$  в этой системе происходит при  $t' = 0$ , поэтому в системе неподвижного наблюдателя вспышка происходит при  $t = \gamma(t' + \frac{V}{c^2}x') = \gamma \frac{V}{c^2}x'$  и в точке

с координатой  $x = \gamma(x' + Vt') = \gamma x' = \frac{c^2}{V}t$ . Это показывает, что в этой системе вспышка распространяется со скоростью  $\frac{c^2}{V}$ . То что эта скорость превосходит скорость света в вакууме  $c$  связано с тем, что вспышки разных частей лампы причинно не связаны друг с другом, т.к. в системе лампы они происходят одновременно. Если причиной вспышки является подача напряжения, например, на левый конец, то вспышка в системе лампы будет распространяться с конечной скоростью  $u' < c$ . Тогда в точке  $x'$  вспышка произойдет при  $t' = \frac{x'}{u'}$ . Соответственно в Л-системе будем иметь

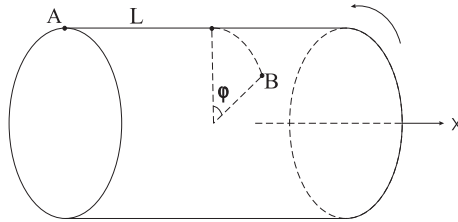
$$t = \gamma \left( \frac{x'}{u'} + \frac{V}{c^2} x' \right) = \gamma x' \left( \frac{1}{u'} + \frac{V}{c^2} \right) \text{ и } x = \gamma \left( x' + V \frac{x'}{u'} \right) = \gamma x' \left( 1 + \frac{V}{u'} \right).$$

Т.е. скорость распространения вспышки в этой системе будет

$$u = \frac{x}{t} = \frac{1 + \frac{V}{u'}}{\frac{1}{u'} + \frac{V}{c^2}} = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}} = u' \oplus V < c.$$

### 3.5

Представим себе, что вдоль образующей цилиндра поставлены точки. Каждый поперечный срез цилиндра представляет собой часы, где соответствующая точка играет роль конца стрелы. В системе  $S'$  эти часы синхронизованы, т.е. одновременно показывают, например, 12<sup>00</sup>. В системе  $S$  они уже не синхронизованы, т.е. когда часы с левого конца цилиндра показывают 12<sup>00</sup>, часы с других частей цилиндра показывают другое время. Следовательно, наши точки в системе  $S$  уже не лежат на одной линии в каждый данный момент времени. Это показывает, что цилиндр в системе  $S$  должен быть скрученным.



Посмотрим более внимательно. Пусть в момент  $t = 0$  точка  $B$ , которая находится на расстоянии  $L$  вдоль цилиндра от точки  $A$ , повернута на угол  $\varphi$ . Координатам  $x_A = 0$ ,  $t_A = 0$  и  $x_B = L$ ,  $t_B = 0$  в системе  $S'$  соответствует  $x'_A = 0$ ,  $t'_A = 0$  и  $x'_B = \gamma(x_B - Vt_B) = \gamma L$ ,  $t'_B = \gamma(t_B - \frac{V}{c^2}x_B) = -\gamma \frac{V}{c^2}L$ . При этом, в этой системе точка  $B$  в момент  $t'_B$  тоже повернута на угол

$\varphi$ , т.к. поперечные размеры при преобразовании Лоренца не меняются и, следовательно, поперечный угол тоже не меняется. За время  $t'_A - t'_B = \gamma \frac{V}{c^2} L$  точка  $B$  должна успеть повернуться на угол  $\varphi$ , т.к. в системе  $S'$  часы синхронизированы и когда  $A$  показывает 0,  $B$  тоже должен показывать такое-же время. Другими словами, в любой момент времени, в том числе и при  $t' = 0$ , все точки должны лежать на одной линии в системе  $S'$ . Следовательно,  $\varphi = \gamma \frac{V}{c^2} L \omega'$ , т.к. в системе  $S'$  цилиндр вращается с угловой скоростью  $\omega'$ . Таким образом в системе  $S$  имеем кручение на единицу длины  $\frac{\varphi}{L} = \gamma \frac{V}{c^2} \omega'$ . Из нашего рассуждения ясно, что кручение происходит в противоположном к вращению направлении (см. рисунок).

## Контрольная работа 4

### 4.1

В системе  $S$  компоненты скорости фотона  $c_x = c \cos \theta$ ,  $c_y = c \sin \theta$ . В системе  $S'$  будем иметь

$$c'_y = c \sin 2\theta = \frac{c_y}{\gamma \left(1 - \frac{c_x V}{c^2}\right)},$$

или

$$\sin 2\theta = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}.$$

Но  $\theta \ll 1$ , поэтому  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\sin 2\theta \approx 2\theta$  и  $\cos \theta \approx 1$ . Следовательно,

$$2 = \frac{1}{\gamma(1 - \beta)} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

и  $\beta = \frac{3}{5}$ .

### 4.2

В Л-системе компоненты скорости падающего фотона суть  $c_x = c \cos \theta_1$ ,  $c_y = c \sin \theta_1$ . В системе зеркала будем иметь

$$c'_x = \frac{c_x - V}{1 - \frac{c_x V}{c^2}} = \frac{c \cos \theta_1 - V}{1 - \beta \cos \theta_1}, \quad c'_y = \frac{c_y}{\gamma \left(1 - \frac{c_x V}{c^2}\right)} = \frac{c \sin \theta_1}{\gamma(1 - \beta \cos \theta_1)}.$$

А после отражения  $c''_x = -c'_x$  и  $c''_y = c'_y$ . Поэтому в Л-системе  $y$ -компонента скорости отраженного фотона будет

$$c \sin \theta_2 = \frac{c''_y}{\gamma \left(1 + \frac{c''_x V}{c^2}\right)} = \frac{c \sin \theta_1}{\gamma^2 \left(1 - \beta \frac{c'_x}{c}\right)} \frac{1}{1 - \beta \cos \theta_1}.$$

Но

$$1 - \beta \frac{c'}{c} = 1 - \beta \frac{\cos \theta_1 - \beta}{1 - \beta \cos \theta_1} = \frac{1}{1 - \beta \cos \theta_1} (1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_1).$$

Окончательно

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{\gamma^2 (1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_1)} = \frac{(1 - \beta^2) \sin \theta_1}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_1}.$$

### 4.3

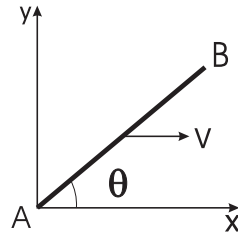
В Л-системе 4-скорости систем  $S_1$  и  $S_2$  имеют вид  $u_1 = (\gamma_1 c, \gamma_1 \vec{V}_1)$  и  $u_2 = (\gamma_2 c, \gamma_2 \vec{V}_2)$ , тогда как в системе  $S_1$  будем иметь  $u'_1 = (c, \vec{0})$ ,  $u'_2 = (\gamma c, \gamma \vec{V})$ , где  $\vec{V}$  есть относительная скорость  $S_1$  и  $S_2$  (скорость  $S_2$  в системе  $S_1$ ). Но скалярное произведение 4-векторов инвариантно:  $u_1 \cdot u_2 = u'_1 \cdot u'_2$ . Следовательно,  $\gamma_1 \gamma_2 (c^2 - \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \gamma c^2$ . Отсюда  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 (1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)$ . Но

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2} = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2 + (\vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2 - \beta_1^2 \beta_2^2}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2}.$$

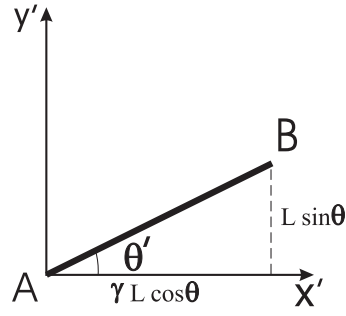
С другой стороны  $(\vec{\beta}_1 \times \vec{\beta}_2)^2 = \beta_1^2 \beta_2^2 (1 - \cos^2 \theta) = \beta_1^2 \beta_2^2 - (\vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2$ , и окончательно

$$\beta^2 = \frac{(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2)^2 - (\vec{\beta}_1 \times \vec{\beta}_2)^2}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2}.$$

### 4.4

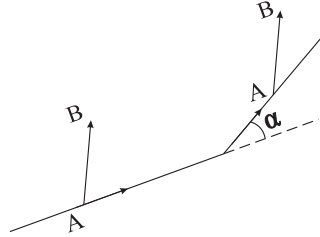


Пусть в момент времени  $t = 0$  стержень в  $S$ -системе занимает положение как на рисунке. Тогда в системе  $S'$  будем иметь  $t'_A = 0$ ,  $x'_A = 0$ ,  $y'_A = 0$  и  $t'_B = -\gamma \frac{V}{c^2} x_B = -\gamma \frac{V}{c^2} L \cos \theta$ ,  $x'_B = \gamma x_B = \gamma L \cos \theta$ ,  $y'_B = y_B = L \sin \theta$ , где  $L$  – длина стержня в системе  $S$ . Несмотря на то, что  $t'_A \neq t'_B$ , точки  $(x'_A, y'_A)$  и  $(x'_B, y'_B)$  определяют ориентацию стержня в системе  $S'$ , так как в этой системе стержень неподвижен. Следовательно,  $\tan \theta' = \frac{\tan \theta}{\gamma}$  и  $\tan \theta = \gamma \tan \theta'$ .



#### 4.5

Пусть  $S$  лабораторная система отсчета в которой в начальный момент  $\overrightarrow{AB}$  составляет нулевой угол с осью  $x$ , а после полного оборота меняет ориентацию на  $180^\circ$ . Заменим движение по окружности на движение по правильному  $N$ -угольнику, где  $N \rightarrow \infty$ . Пусть двигаясь по  $n$ -ой грани многоугольника, которая наклонена под углом  $\varphi$  к оси  $x$  системы  $S$ , вектор  $\overrightarrow{AB}$  составляет угол  $\beta$  с осью  $x$ , а при переходе на следующую грань, с углом наклона  $\varphi + \alpha$ ,  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ , угол становится  $\beta + d\beta$ .



Рассмотрим систему  $\tilde{S}$ , которая неподвижна относительно  $S$ , но ось  $x$  которой повернута на угол  $\varphi$  и смотрит вдоль  $n$ -ой грани. Тогда в системе  $\tilde{S}$  вектор  $\overrightarrow{AB}$  составляет угол  $\theta = \beta - \varphi$  с осью  $x$  при движении по  $n$ -ой грани и угол  $\theta + d\beta$  – при движении по  $(n + 1)$ -ой грани. Выберем начало отсчета времени так, что  $t = 0$  соответствует переходу от  $n$ -ой грани к  $(n + 1)$ -ой. Перед переходом, при  $t = 0_-$ , координаты точек  $A$  и  $B$  имеют вид  $\tilde{x}_A = 0, \tilde{y}_A = 0, \tilde{x}_B = \tilde{l} \cos \theta, \tilde{y}_B = \tilde{l} \sin \theta$ . Пусть  $S'$  – система в которой  $\overrightarrow{AB}$  покоится при движении вдоль  $n$ -ой грани. По преобразованиям Лоренца находим

$$t'_A = 0, \quad x'_A = 0, \quad y'_A = 0, \quad t'_B = -\gamma \frac{V}{c^2} \tilde{x}_B, \quad x'_B = \gamma \tilde{x}_B, \quad y'_B = \tilde{y}_B.$$

Несмотря на то, что  $t'_A \neq t'_B$ , угол наклона вектора  $\overrightarrow{AB}$  к оси  $x$  в системе  $S'$  определяется из

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{y'_B}{x'_B} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\gamma},$$

т.к. в системе  $S'$  вектор  $\overrightarrow{AB}$  неподвижен.

После перехода на  $(n+1)$ -ую грань, вектор  $\overrightarrow{AB}$  уже движется относительно  $S'$ . Сразу после перехода, при  $t = 0_+$ , будем иметь

$$\tilde{x}_A = 0, \tilde{y}_A = 0, \tilde{x}_B = \tilde{l} \cos(\theta + d\beta), \tilde{y}_B = \tilde{l} \sin(\theta + d\beta).$$

Найдем момент времени  $t = t_B$  такой, что событию  $(t_B, \tilde{x}_B(t_B))$  отвечает время  $t'_B = 0$  в системе  $S'$ . Имеем

$$t'_B = \gamma \left( t_B - \frac{V}{c^2} \tilde{x}_B(t_B) \right).$$

Следовательно,  $t_B = \frac{V}{c^2} \tilde{x}_B(t_B)$ . Но  $\tilde{x}_B(t_B) = \tilde{x}_B + (V \cos d\varphi) t_B \approx \tilde{x}_B + V t_B$ , где  $d\varphi = \frac{2\pi}{N}$ . Отсюда

$$\tilde{x}_B(t_B) \approx \frac{\tilde{x}_B}{1 - (V/c)^2} = \gamma^2 \tilde{x}_B \text{ и } t_B = \frac{V}{c^2} \gamma^2 \tilde{x}_B.$$

Поэтому  $x'_B = \gamma(\tilde{x}_B(t_B) - V t_B) \approx \gamma \tilde{x}_B = \gamma \tilde{l} \cos(\theta + d\beta)$  и  $y'_B = \tilde{y}_B(t_B) = \tilde{y}_B + (V \sin d\varphi) t_B \approx \tilde{y}_B + V t_B d\varphi = \tilde{l} \sin(\theta + d\beta) + (\gamma^2 - 1) \tilde{l} d\varphi \cos(\theta + d\beta)$ .

Следовательно, угол наклона  $\theta'_+$ , после перехода на  $(n+1)$ -ую грань, определяется из

$$\operatorname{tg} \theta'_+ = \frac{1}{\gamma} [\operatorname{tg}(\theta + d\beta) + (\gamma^2 - 1) d\varphi].$$

Но в системе  $S'$  вектор  $\overrightarrow{AB}$  переносится параллельно самому себе, т.е.  $\theta'_+ = \theta'_-$  и, следовательно,  $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\theta + d\beta) + (\gamma^2 - 1) d\varphi$ . Но

$$\operatorname{tg}(\theta + d\beta) = \frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg}(d\beta)}{1 - \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg}(d\beta)} \approx \frac{\operatorname{tg} \theta + d\beta}{1 - d\beta \operatorname{tg} \theta} \approx \operatorname{tg} \theta + (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) d\beta.$$

Поэтому получаем

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = -(\gamma^2 - 1) \cos^2 \theta,$$

или с учетом  $\theta = \beta - \varphi$ ,

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = -[1 + (\gamma^2 - 1) \cos^2 \theta].$$

Следовательно,

$$\varphi = - \int_0^\theta \frac{d\theta}{1 + (\gamma^2 - 1) \cos^2 \theta}.$$

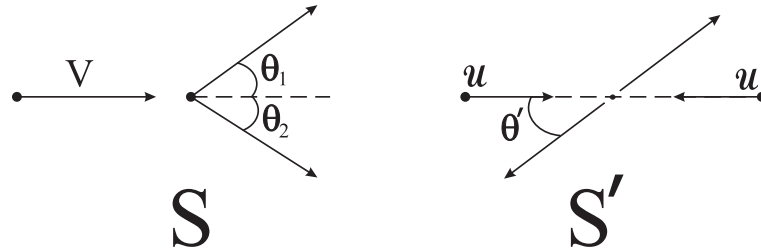
Интеграл можно взять с помощью подстановки  $\operatorname{tg} \theta = x$ :

$$\int \frac{d\theta}{1 + (\gamma^2 - 1) \cos^2 \theta} = \int \frac{dx}{\gamma^2 + x^2} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{x}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\gamma}.$$

Окончательно,  $\operatorname{tg} \theta = -\gamma \operatorname{tg} (\gamma \varphi)$ . По условию задачи, после полного оборота  $\theta = \pi$ . Поэтому должны иметь  $\operatorname{tg} (\gamma 2\pi) = 0$ , т.е.  $\gamma$  полуцелое число (целым  $\gamma$  соответствует  $\theta = 0$ ). Минимальная скорость,  $V = \frac{\sqrt{5}}{3} c$ , получается при  $\gamma = \frac{3}{2}$ .

## Контрольная работа 5

### 5.1



Пусть  $S'$  система центра масс, который движется со скоростью  $u$ . Вторая частица, которая неподвижна в системе  $S$ , в системе  $S'$  движется со скоростью  $-u$ . Следовательно, первая частица в этой системе движется со скоростью  $u$  (чтобы суммарный импульс равнялся нулю). Пусть угол рассеяния в системе  $S'$  равен  $\theta'$ . Скорости частиц по величине не поменяются, т.к. рассеяние упругое. Следовательно, после рассеяния  $V'_{1,x} = u \cos \theta'$ ,  $V'_{1,y} = u \sin \theta'$ ,  $V'_{2,x} = -u \cos \theta'$  и  $V'_{2,y} = -u \sin \theta'$ . По формуле сложения скоростей, в системе  $S$  будем иметь

$$V_{1,x} = \frac{V'_{1,x} + u}{1 + \frac{V'_{1,x}u}{c^2}} = u \frac{1 + \cos \theta'}{1 + \beta_u^2 \cos \theta'}, \quad V_{1,y} = \frac{V'_{1,y}}{\gamma_u \left(1 + \frac{V'_{1,x}u}{c^2}\right)} = u \frac{\sin \theta'}{\gamma_u (1 + \beta_u^2 \cos \theta')},$$

$$V_{2,x} = u \frac{1 - \cos \theta'}{1 - \beta_u^2 \cos \theta'} \quad \text{и} \quad V_{2,y} = -u \frac{\sin \theta'}{\gamma_u (1 - \beta_u^2 \cos \theta')}.$$

Заметим, что  $V_{1,x} > 0$  и  $V_{2,x} > 0$ . Поэтому в системе  $S$  углы рассеяния  $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$  и  $\theta_2 < \frac{\pi}{2}$ . Более того,

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \left| \frac{V_{1,y}}{V_{1,x}} \right| = \frac{\sin \theta'}{\gamma_u (1 + \cos \theta')}$$

и

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \left| \frac{V_{2,y}}{V_{2,x}} \right| = \frac{\sin \theta'}{\gamma_u (1 - \cos \theta')}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{1}{\gamma_u^2}.$$

Или

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{\gamma_u^2} \operatorname{ctg} \theta_2 = \frac{1}{\gamma_u^2} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) < \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_2 \right),$$

т.к.  $\gamma_u > 1$ . Следовательно,  $\theta_1 < \frac{\pi}{2} - \theta_2$  и  $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ .

## 5.2

В системе  $S'$  фотон имеет  $y$ -компоненту импульса

$$p'_y = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta'.$$

Но  $p'_y = p_y$  и в системе  $S$

$$p_y = \frac{h\nu}{c} \sin \theta.$$

Следовательно  $\nu' \sin \theta' = \nu \sin \theta$  и

$$\sin \theta = \frac{\nu'}{\nu} \sin \theta'.$$

## 5.3

Рассмотрим распад в системе покоя  $K^0$ -мезона. В этой системе, каждый пион имеет энергию  $\varepsilon' = \frac{m_K}{2}$  (положили  $c = 1$ ) и импульс

$$p' = \sqrt{\varepsilon'^2 - m_\pi^2} = \frac{m_K}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m_K^2}}.$$

В Л-системе энергия  $\pi$ -мезона, который в системе покоя вылетел под углом  $\theta'$ , будет  $\varepsilon = \gamma(\varepsilon' + \beta p'_x) = \gamma(\varepsilon' + \beta p' \cos \theta')$ . Поэтому

$$\alpha = \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{min}} = \frac{\varepsilon' + \beta p'}{\varepsilon' - \beta p'} = \frac{1 + \beta \beta'_\pi}{1 - \beta \beta'_\pi},$$

где

$$\beta'_\pi = \frac{p'}{\varepsilon'} = \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m_K^2}}$$



есть скорость  $\pi$ -мезона в системе покоя  $K^0$ -мезона. Отсюда скорость  $K^0$ -мезона

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{1}{\beta'_\pi}.$$

Для энергии  $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$  (восстановили  $c$ ) после некоторой алгебры получим

$$E = m_K c^2 \frac{\alpha + 1}{2} \sqrt{\frac{m_K^2 - 4m_\pi^2}{\alpha m_K^2 - (\alpha + 1)^2 m_\pi^2}}.$$

В Л-системе импульс пиона будет

$$p_x = \gamma \left( p'_x + \beta \frac{\varepsilon'}{c} \right) = \gamma p' \left( \cos \theta' + \frac{\beta}{\beta'_\pi} \right).$$

Видно, что  $p_x \geq 0$ , если  $\frac{\beta}{\beta'_\pi} \geq 1$ . Т.е. должны иметь

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \geq \beta_\pi^2 = 1 - \frac{4m_\pi^2}{m_K^2}.$$

Отсюда

$$\alpha \geq \frac{m_K^2}{2m_\pi^2} - 1.$$

## 5.4

Для относительной скорости в задаче 4.3 получили

$$\beta_u^2 = \frac{(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2)^2 - (\vec{\beta}_1 \times \vec{\beta}_2)^2}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2}.$$

Так как распад симметричный, то  $\beta_1 = \beta_2$  и будет иметь

$$\beta_u^2 = \frac{2\beta_1^2(1 - \cos \theta) - \beta_1^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta_1^2 \cos \theta)^2}.$$

Но  $2(1 - \cos \theta) - \sin^2 \theta = 2(1 - \cos \theta) - (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) = (1 - \cos \theta)^2$ . Следовательно

$$\beta_u^2 = \beta_1^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(1 - \beta_1^2 \cos \theta)^2}.$$

Энергия  $\pi$ -мезона после распада  $E_1 = \frac{E}{2}$ , импульс  $p_1 = \sqrt{E_1^2 - m_\pi^2} = \frac{E}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{E^2}}$  (положили  $c = 1$ ). Поэтому  $\beta_1 = \frac{p_1}{E_1} = \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{E^2}}$ . Но  $\cos \theta$

однозначно определяется заданием  $E$ . Действительно, из законов сохранения энергии  $m_K \gamma = 2m_\pi \gamma_1$  и импульса  $m_K \beta \gamma = 2m_\pi \beta_1 \cos \theta$  следует

$$\cos \theta = \frac{\beta}{\beta_1}.$$

Поэтому получаем  $\beta_u^2 = \frac{(\beta_1 - \beta)^2}{(1 - \beta_1 \beta)^2}$ . Отсюда  $1 - \beta_u^2 = \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta^2)}{(1 - \beta_1 \beta)^2}$ , или  $\gamma_u = \gamma_1 \gamma (1 - \beta_1 \beta)$ . С другой стороны,

$$\gamma_1 (1 - \beta_1 \beta) = \gamma_1 (1 - \beta_1^2 \cos \theta) = \frac{1}{m_\pi^2 \gamma_1} p_1 \cdot p_2,$$

где  $p_1, p_2$  – 4-импульсы пионов. Из законов сохранения 4-импульса  $p_K = p_1 + p_2$  следует  $m_K^2 = (p_1 + p_2)^2 = 2m_\pi^2 + 2p_1 \cdot p_2$  и, следовательно,

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{m_K^2 - 2m_\pi^2}{2}.$$

Окончательно,

$$\gamma_u = \frac{1}{m_\pi^2} p_1 \cdot p_2 = \frac{m_K^2}{2m_\pi^2} - 1$$

и

$$\beta_u = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_u^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m_K^2}}}{1 - \frac{2m_\pi^2}{m_K^2}}$$

не зависит от  $E$ .

Более просто этот результат можно получить, если заметить, что  $\gamma_u = \gamma_{\vec{V}_1 \ominus \vec{V}_2} = \gamma_1 \gamma_2 (1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)$  и

$$\frac{m_K^2 - 2m_\pi^2}{2} = p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = m_\pi^2 (1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2).$$

Следовательно,  $\gamma_u = \frac{m_K^2 - 2m_\pi^2}{2m_\pi^2}$  даже для несимметричного распада.

Еще один простой способ: рассмотрим распад в системе покоя одного из пионов. В этой системе до распада  $K^0$ -мезон движется с некоторой скоростью  $V'$ , а второй пион после распада со скоростью  $u$ . Закон сохранения энергии будет иметь вид  $m_K \gamma' = m_\pi + m_\pi \gamma_u$  (напомним, что  $c = 1$ ), а закон сохранения импульса  $m_K \beta' \gamma' = m_\pi \beta_u \gamma_u$ . Поэтому

$$\gamma'^2 = \frac{m_\pi^2}{m_K^2} (\gamma_u + 1)^2$$

и

$$(\beta' \gamma')^2 = \gamma'^2 - 1 = \left( \frac{m_\pi}{m_K} \right)^2 \beta_u^2 \gamma_u^2 = \frac{m_\pi^2}{m_K^2} (\gamma_u^2 - 1).$$

Отсюда

$$\frac{m_\pi^2}{m_K^2}(\gamma_u + 1)^2 - 1 = \frac{m_\pi^2}{m_K^2}(\gamma_u^2 - 1), \quad 1 = \frac{m_\pi^2}{m_K^2}[\gamma_u^2 + 2\gamma_u + 1 - \gamma_u^2 + 1] = \frac{2m_\pi^2}{m_K^2}(\gamma_u + 1)$$

и, следовательно,

$$\gamma_u = \frac{m_K^2}{2m_\pi^2} - 1.$$

## 5.5

Дифференцируя  $u \cdot u = c^2$ , сразу получаем  $a \cdot u = 0$ . Найдём компоненты  $a_\mu$ .

$$a_0 = \frac{du_0}{d\tau} = c\gamma \frac{d\gamma}{dt}.$$

Но

$$\frac{d\gamma}{dt} = \beta \dot{\beta} \gamma^3,$$

т.к.  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Здесь  $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$  - известная функция по условию. Следовательно,  $a_0 = c\gamma^4 \beta \dot{\beta}$ .

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \gamma \frac{d(\vec{V}\gamma)}{dt} = \gamma c \frac{d(\vec{\beta}\gamma)}{dt} = \gamma c (\dot{\vec{\beta}}\gamma + \vec{\beta}\beta\dot{\gamma}).$$

Т.к. движение прямолинейное,  $\vec{\beta} = \beta \vec{n}$  и  $\dot{\vec{\beta}} = \dot{\beta} \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  - единичный вектор. Поэтому

$$\vec{a} = \gamma^2 c \dot{\beta} \vec{n} (1 + \beta^2 \gamma^2) = c\gamma^4 \dot{\beta} \vec{n}.$$

Следовательно,  $a_\mu = (c\gamma^4 \beta \dot{\beta}, c\gamma^4 \dot{\beta} \vec{n})$  и

$$a \cdot a = (c\gamma^4 \dot{\beta})^2 (\beta^2 - 1) = -c^2 \gamma^6 \dot{\beta}^2.$$

## Контрольная работа 6

### 6.1

4-импульсы фотонов

$$p_1 = \left( \frac{h\nu_1}{c}, \frac{h\nu_1}{c} \vec{n} \right) \quad \text{и} \quad p_2 = \left( \frac{h\nu_2}{c}, -\frac{h\nu_2}{c} \vec{n} \right),$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор.

$$M^2 c^2 = (p_1 + p_2)^2 = \frac{h^2}{c^2} [(\nu_1 + \nu_2)^2 - (\nu_1 - \nu_2)^2] = 4 \frac{h^2}{c^2} \nu_1 \nu_2.$$

Поэтому масса системы

$$M = \frac{2h}{c^2} \sqrt{\nu_1 \nu_2},$$

а скорость

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}c^2}{E} = c \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \vec{n}.$$

## 6.2

Рассмотрим распад  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ . Из сохранения 4-импульса  $p = k_1 + k_2$  получаем (положили  $c = 1$ )  $m_{\pi^0}^2 = 2k_1 \cdot k_2 = 2E_1 E_2 (1 - \cos \theta) = 4E_1 E_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$  и

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{m_{\pi^0}^2}{4E_1 E_2} = \frac{m_{\pi^0}^2}{4E_1 (E - E_1)}.$$

Когда  $E_1 = \frac{E}{2} = E_2$ ,  $E_1(E - E_1)$  достигает максимума и, следовательно, минимальный угол разлета определяется из

$$\sin^2 \frac{\theta_{min}}{2} = \frac{m_{\pi^0}^2}{E^2} = \frac{1}{\gamma_{\pi^0}^2},$$

или  $\theta_{min} = 2 \arcsin \frac{1}{\gamma_{\pi^0}}$ . Этот угол тем меньше, чем больше  $\gamma_{\pi^0}$ . Т.е. в распаде  $\phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  надо обеспечить максимальную энергию  $\pi^0$ -мезона. Рассмотрим  $\pi^+ \pi^-$  систему как одну частицу 4-импульсом  $p^*$ . Тогда  $p_\phi - p_{\pi^0} = p^*$  и  $(p_\phi - p_{\pi^0})^2 = m_\phi^2 - 2m_\phi E + m_{\pi^0}^2 = m^{*2}$ . Отсюда

$$E = \frac{m_\phi^2 + m_{\pi^0}^2 - m^{*2}}{2m_\phi}$$

и она максимальна, когда  $m^*$  минимальна. Но в системе центра масс  $\pi^+ \pi^-$  составной частицы  $m^{*2} = (E'_+ + E'_-, \vec{0})^2 = 4(m_{\pi^\pm}^2 + p'^2)$ . Отсюда видно, что минимум достигается при  $p' = 0$  и  $m_{min}^{*2} = 4m_{\pi^\pm}^2$ . Поэтому

$$E_{max} = \frac{m_\phi^2 + m_{\pi^0}^2 - 4m_{\pi^\pm}^2}{2m_\phi}$$

и самый минимальный угол разлета  $\gamma$ -квантов будет

$$\theta_{min} = 2 \arcsin \frac{2m_{\pi^0} m_\phi}{m_\phi^2 + m_{\pi^0}^2 - 4m_{\pi^\pm}^2}.$$

### 6.3

Рассмотрим электрон и ядро до столкновения как одну частицу с массой  $M_1$ , а после столкновения – как одну частицу с массой  $M_2$ . Причем  $M_1^2 = (p_e + p_A)^2 = m^2 + M^2 + 2ME$ , где  $p_A$  – 4-импульс неподвижного ядра. Из  $p_1 = k = p_2$ , где  $k$  4-импульс фотона, а  $p_{1,2}$  4-импульсы системы электрон-ядро до и после столкновения, получим в системе центра масс  $M_1^2 - 2M_1 E'_\gamma = M_2^2$ . Т.е. в этой системе энергия тормозного фотона  $E'_\gamma = \frac{M_1^2 - M_2^2}{2M_1}$ . В Л-системе будем иметь  $E_\gamma = \gamma_1 E'_\gamma (1 + \beta_1 \cos \theta')$ , где  $\beta_1, \gamma_1$  относятся к системе электрон-ядро до столкновения. Видно, что  $E_\gamma$  максимальна когда  $\theta' = 0$  и  $M_2$  минимальна. Но  $M_{2,min} = m + M$ , т.к. в система покоя электрон-ядро (после столкновения)  $M_2 = \sqrt{m^2 + p'^2} + \sqrt{M^2 + p'^2}$ , где  $p'$  – величина импульса частиц в этой системе. Поэтому

$$E_{\gamma,max} = \gamma_1 \frac{M_1^2 - (m + M)^2}{2M_1} (1 + \beta_1).$$

Но  $M_1^2 - (m + M)^2 = m^2 + M^2 + 2ME - m^2 - M^2 - 2mM = 2M(E - m)$  и

$$\frac{\gamma_1(1 + \beta_1)}{M_1} = \frac{\gamma_1^2(1 + \beta_1)}{M_1 \gamma_1} = \frac{1}{E + M} \frac{1}{1 - \beta_1},$$

где  $M_1 \gamma_1 = E + M$  есть энергия системы электрон-ядро до столкновения, а  $\beta_1 = \frac{p}{E + M}$  – скорость центра масс этой системы. Следовательно,  $E_{\gamma,max} = \frac{M(E - m)}{E + M - p}$ . Если восстановить  $c$  (выше мы предполагали  $c = 1$ ):

$$E_{\gamma,max} = \frac{M(E - mc^2)}{\frac{E}{c^2} + M - \frac{p}{c}} = \frac{mMc^2(\gamma - 1)}{m\gamma + M - m\beta\gamma}.$$

Окончательно

$$E_{\gamma,max} = mc^2(\gamma - 1) \left[ 1 + \frac{m}{M} \gamma (1 - \beta) \right]^{-1}, \text{ где } \gamma = \left[ 1 - \frac{V^2}{c^2} \right]^{-1/2}.$$

Т.к.  $\frac{m}{M} \ll 1$ , то  $E_{\gamma,max}$  практически равна кинетической энергии электрона.

Ответ можно записать еще в таком виде

$$E_{\gamma,max} = \frac{Mc^2(E - mc^2)}{E - pc + Mc^2} = \frac{mc^2(\gamma - 1)}{1 + \frac{m}{M} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}}.$$

## 6.4

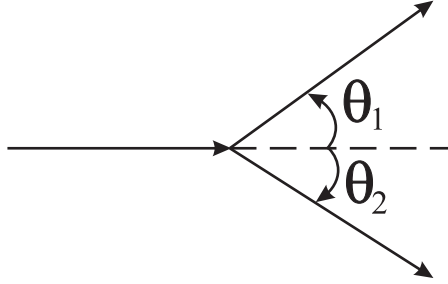
Рассмотрим распад  $A \rightarrow B^+ B^-$  в системе покоя частицы  $A$ . Пусть в этой системе  $B^+$  имеет скорость  $\beta'_B$  и вылетает под углом  $\theta'$  относительно скорости  $A$  в лабораторной системе. Тогда для скорости  $B^+$  в Л-системе будем иметь

$$\beta_{1,x} = \frac{\beta'_B \cos \theta' + \beta_A}{1 + \beta'_B \beta_A \cos \theta'} \text{ и } \beta_{1,y} = \frac{\beta'_B \sin \theta'}{\gamma_A (1 + \beta'_B \beta_A \cos \theta')}.$$

А для скорости  $B^-$ :

$$\beta_{2,x} = \frac{-\beta'_B \cos \theta' + \beta_A}{1 - \beta'_B \beta_A \cos \theta'} \text{ и } \beta_{2,y} = \frac{-\beta'_B \sin \theta'}{\gamma_A (1 - \beta'_B \beta_A \cos \theta')}.$$

Поэтому  $B^+$  и  $B^-$  в Л-системе вылетают под углами ( $\theta_1$  отсчитывается



против часовой стрелки, а  $\theta_2$  – по часовой)

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{\beta'_B \sin \theta'}{\gamma_A (\beta_A + \beta'_B \cos \theta')} \text{ и } \text{tg } \theta_2 = \frac{\beta'_B \sin \theta'}{\gamma_A (\beta_A - \beta'_B \cos \theta')}.$$

Угол разлета  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  и

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{tg } \theta_1 + \text{tg } \theta_2}{1 - \text{tg } \theta_1 \text{tg } \theta_2} = \frac{2\beta_A \beta'_B \gamma_A \sin \theta'}{\gamma_A^2 (\beta_A^2 - \beta_B'^2 \cos^2 \theta') - \beta_B'^2 \sin^2 \theta'}.$$

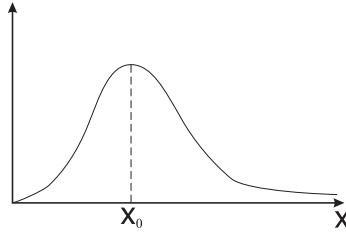
Но  $\gamma_A^2 (\beta_A^2 - \beta_B'^2 \cos^2 \theta') - \beta_B'^2 \sin^2 \theta' = \gamma_A^2 (\beta_A^2 - \beta_B'^2) + \beta_B'^2 (\gamma_A^2 - 1) \sin^2 \theta' = \gamma_A^2 [\beta_A^2 - \beta_B'^2 + \beta_A^2 \beta_B'^2 \sin^2 \theta']$ , т.к.  $\gamma_A^2 - 1 = \gamma_A^2 \beta_A^2$ . Поэтому

$$\text{tg } \theta = \frac{2\beta_A \beta'_B}{\gamma_A} \frac{\sin \theta'}{\beta_A^2 - \beta_B'^2 + \beta_A^2 \beta_B'^2 \sin^2 \theta'}.$$

Функция

$$f(x) = \frac{x}{\beta_A^2 - \beta_B'^2 + \beta_A^2 \beta_B'^2 x^2}$$

показана на рисунке.



Она имеет максимум в точке

$$x_0 = \sqrt{\frac{1}{\beta_B'^2} - \frac{1}{\beta_A'^2}}.$$

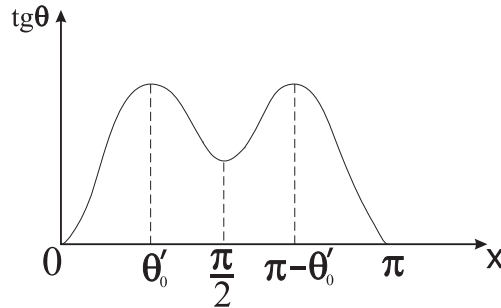
Заметим, что в нашем случае  $\beta_A > \beta_B'$ , т.к. энергия  $K$ -мезона очень большая. Кроме того  $x = \sin \theta'$  и, следовательно, должны иметь  $x_0^2 \leq 1$ , или

$$\beta_A^2 \leq \frac{\beta_B'^2}{1 - \beta_B'^2},$$

что дает  $\beta_A \leq \beta_B' \gamma_B' = \frac{1}{m_B} p'$ , где  $p'$  есть импульс  $B^\pm$  в системе покоя частицы  $A$ . Но в этой системе закон сохранения энергии дает  $m_A = 2\sqrt{p'^2 + m_B^2}$ . Отсюда  $p' = m_B \sqrt{\frac{m_A^2}{4m_B^2} - 1}$  и получаем условие

$$\beta_A \leq \sqrt{\frac{m_A^2}{4m_B^2} - 1}.$$

В случае распада  $\phi \rightarrow \pi^+ \pi^-$  условие  $x_0^2 \leq 1$  не ограничивает  $\beta_\phi$ , так как  $\sqrt{\frac{m_\phi^2}{4m_\pi^2} - 1} > 1$ . Когда  $\theta'$  меняется от 0 до  $\pi$ ,  $\text{tg } \theta$  меняется так



Максимальному углу разлета соответствует  $\theta'_0$  и

$$\sin \theta'_0 = \sqrt{\frac{1}{\beta_\pi'^2} - \frac{1}{\beta_\phi'^2}}.$$

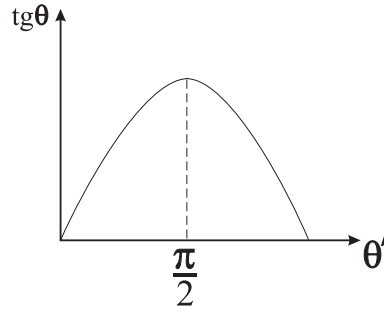
Следовательно,

$$\operatorname{tg} \theta_{max} = \frac{2\beta_\phi \beta'_\pi \sqrt{\beta_\phi^2 - \beta_\pi'^2} / \beta'_\pi \beta_\phi}{\gamma_\phi} = \frac{1}{\gamma_\phi \sqrt{\beta_\phi^2 - \beta_\pi'^2}}.$$

Так как  $\gamma_\phi \gg 1$ , то

$$\theta_{max}^{(\pi)} \approx \frac{1}{\gamma_\phi \sqrt{1 - \beta_\pi'^2}} = \frac{\gamma'_\pi}{\gamma_\phi}.$$

Но для распада  $\phi \rightarrow K^+ K^-$ ,  $\sqrt{\frac{m_\phi^2}{4m_K^2} - 1} < 1$  и для больших энергии  $\phi$ -мезона, когда  $\beta_\phi > \sqrt{\frac{m_\phi^2}{4m_K^2} - 1}$ , максимум  $x_0$  лежит вне физической области (т.е. не достигается ни при каком  $\theta'$ ). В этом случае  $\operatorname{tg} \theta$  меняется так



и максимальный угол разлета соответствует  $\theta' = \frac{\pi}{2}$ , т.е. симметричному разлету. Тогда

$$\operatorname{tg} \theta_{max} = \frac{2\beta_\phi \beta'_K}{\gamma_\phi} \frac{1}{\beta_\phi^2 - \beta_K'^2 + \beta_\phi^2 \beta_K'^2} \approx \frac{2\beta'_K}{\gamma_\phi}.$$

Следовательно,  $\theta_{max}^{(K)} \approx \frac{2\beta'_K}{\gamma_\phi}$ . Поэтому в пределе очень больших энергии  $\phi$ -мезона

$$\frac{\theta_{max}(\phi \rightarrow K^+ K^-)}{\theta_{max}(\phi \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \approx \frac{2\beta'_K}{\gamma'_\pi}.$$

Как уже нашли,  $\gamma_B'^2 \beta_B'^2 = \gamma_B'^2 - 1 = \frac{m_A^2}{4m_B^2} - 1$ . Т.е.  $\gamma'_B = \frac{m_A}{2m_B}$  и  $\beta'_B = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_B'^2}} = \sqrt{1 - \frac{4m_B^2}{m_A^2}}$ . Поэтому, окончательно,

$$\frac{\theta_{max}(\phi \rightarrow K^+ K^-)}{\theta_{max}(\phi \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \approx \frac{4m_\pi}{m_\phi} \sqrt{1 - \frac{4m_K^2}{m_\phi^2}} \approx 0.14.$$



## 6.5

Закон сохранения 4-импульса  $p = q_0 + q_+ + q_-$  дает (предполагаем  $c = 1$ )  
 $(p - q_0)^2 = m_\omega^2 + m_{\pi^0}^2 - 2m_\omega E_0 = (q_+ + q_-)^2 = 2m_{\pi^\pm}^2 + 2(E_+ E_- - p_+ p_- \cos \theta)$ .  
 Отсюда угол разлета между  $\pi^+$  и  $\pi^-$

$$\cos \theta = \frac{2E_1 E_- - m_\omega^2 - m_{\pi^0}^2 + 2m_{\pi^\pm}^2 + 2m_\omega(m_\omega - E_1 - E_-)}{2\sqrt{E_1^2 - m_{\pi^\pm}^2}\sqrt{E_-^2 - m_{\pi^\pm}^2}},$$

так как  $E_+ = E_1$  и  $E_0 = m_\omega - E_+ - E_-$ . Но  $\cos^2 \theta \leq 1$ , что дает условие  $4(E_1^2 - m_{\pi^\pm}^2)(E_-^2 - m_{\pi^\pm}^2) \geq [2E_1 E_- - m_\omega^2 - m_{\pi^0}^2 + 2m_{\pi^\pm}^2 + 2m_\omega(m_\omega - E_1 - E_-)]^2$ .  
 После некоторой алгебры, получим  $4E_-^2(m_\omega^2 - 2m_\omega E_1 + m_{\pi^\pm}^2) + 4E_-(E_1 - m_\omega)(m_\omega^2 - 2m_\omega E_1 - m_{\pi^0}^2 + 2m_{\pi^\pm}^2) + (m_\omega^2 - 2m_\omega E_1 - m_{\pi^0}^2 + 2m_{\pi^\pm}^2)^2 - 4m_{\pi^\pm}^2(E_1^2 - m_{\pi^\pm}^2) \leq 0$ . Удобно перейти к безразмерным величинам

$$x_1 = \frac{E_1}{m_\omega}, \quad x = \frac{E_-}{m_\omega}, \quad \mu = \frac{m_{\pi^\pm}}{m_\omega} \quad \text{и} \quad \mu_0 = \frac{m_{\pi^0}}{m_\omega}.$$

Тогда  $4x^2(1 - 2x_1 + \mu^2) - 4x(1 - x_1)(1 - 2x_1 - \mu_0^2 + 2\mu^2) + (1 - 2x_1 - \mu_0^2 + 2\mu^2)^2 + 4\mu^2(x_1^2 - \mu^2) \leq 0$ . Но  $16(1 - x_1)^2(1 - 2x_1 - \mu_0^2 + 2\mu^2)^2 - 16(1 - 2x_1 + \mu^2)(1 - 2x_1 - \mu_0^2 + 2\mu^2)^2 - 64\mu^2(x_1^2 - \mu^2)(1 - 2x_1 + \mu^2) = 16(x_1^2 - \mu^2)[(1 - 2x_1 - \mu_0^2 + 2\mu^2)^2 - 4\mu^2(1 - 2x_1 + \mu^2)]$  и  $(1 - 2x_1 - \mu_0^2 + 2\mu^2)^2 - 4\mu^2(1 - 2x_1 + \mu^2) = (1 - 2x_1 - \mu_0^2)^2 + 4\mu^4 + 4\mu^2(1 - 2x_1 - \mu_0^2) - 4\mu^2(1 - 2x_1 + \mu^2) = (1 - 2x_1 - \mu_0^2)^2 - 4\mu^2\mu_0^2 = (1 - 2x_1 - \mu_0^2 - 2\mu\mu_0)(1 - 2x_1 - \mu_0^2 + 2\mu\mu_0)$ . Поэтому, окончательно,  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ , где

$$x_{\min} = \frac{(1 - x_1)(1 - 2x_1 - \mu_0^2 + 2\mu^2) - \sqrt{D}}{2(1 - 2x_1 + \mu^2)},$$

$$x_{\max} = \frac{(1 - x_1)(1 - 2x_1 - \mu_0^2 + 2\mu^2) + \sqrt{D}}{2(1 - 2x_1 + \mu^2)},$$

и

$$D = (x_1^2 - \mu^2)(1 - 2x_1 - \mu_0^2 - 2\mu\mu_0)(1 - 2x_1 - \mu_0^2 + 2\mu\mu_0).$$

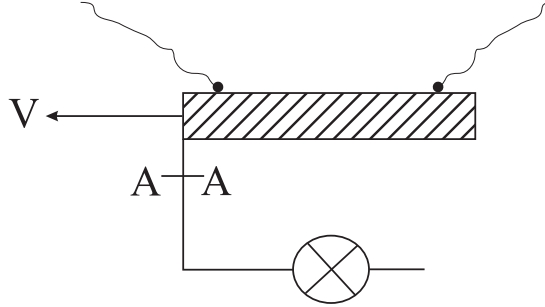
## Контрольная работа 7

### 7.1

Если собственная длина желоба  $2L$ , координаты событий падения шаров в системе  $S$  равны  $t_L = \frac{L}{u}$ ,  $x_L = -L$  и  $t_R = \frac{L}{u}$ ,  $x_R = L$ . В системе наблюдателя ( $S'$ ) будем иметь

$$t'_L = \gamma_V \left( \frac{L}{u} + \frac{V}{c^2} L \right) \quad \text{и} \quad t'_R = \gamma_V \left( \frac{L}{u} - \frac{V}{c^2} L \right),$$

т.е. правый шар падает раньше. Но после его падения состояние тока в сечении  $AA$  не может измениться мгновенно: информация о том, что короткое замыкание исчезло дойдет не раньше, чем через время  $\tau' = \frac{2L/\gamma V}{c-V}$ .



Но

$$t'_R + \tau' = L\gamma_V \left[ \frac{1}{u} - \frac{V}{c^2} + 2\frac{1}{c} \left( 1 + \frac{V}{c} \right) \right] = L\gamma_V \left[ \frac{1}{u} + \frac{V}{c^2} + \frac{2}{c} \right] = t'_L + 2\gamma_V \frac{L}{c} > t'_L.$$

Следовательно, к тому времени когда в системе  $S'$  сечение  $AA$  “узнает”, что короткое замыкание исчезло, левый шар тоже окажется упавшим и лампочка не зажгется.

## 7.2

Пусть сигнал догоняет ракету в момент, когда скорость ракеты равна  $V$ . В сопутствующей инерциальной СО частота сигнала будет  $\nu' = \gamma\nu(1 - \beta)$ . После отражения, в этой системе частота не поменяется, а импульс фотона поменяет знак. Поэтому в Л-системе частота отраженного сигнала будет

$$\nu_{\text{отр}} = \gamma\nu'(1 - \beta) = \nu\gamma^2(1 - \beta)^2 = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \nu.$$

Следовательно,  $\nu_{\text{отр}} = Z\nu$ , где

$$Z = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = \frac{2}{1 + \beta} - 1.$$

Посмотрим как меняется  $Z$  со временем.

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{2}{(1 + \beta)^2} \frac{d\beta}{dt}.$$

Но

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{g}{c\gamma^3}$$

(ускорение ракеты в Л-системе  $\gamma^3$ -раз меньше). Поэтому

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{2g}{c\gamma^3} \frac{1}{(1+\beta)^2} = -\frac{2g}{c}(1-\beta)\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = -\frac{2g}{c}(1-\beta)\sqrt{Z}.$$

Перейдем к запаздывающему времени  $t_- = t - \frac{x}{c} = \frac{x_-}{c}$  (вспомните переменные светового конуса). Тогда  $dt_- = dt - \frac{dx}{c} = (1-\beta)dt$  и уравнение для  $Z$  перепишется так

$$\frac{dZ}{dt_-} = -\frac{2g}{c}\sqrt{Z},$$

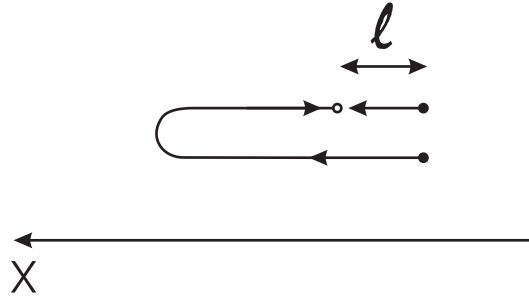
или

$$\frac{dZ}{2\sqrt{Z}} = -\frac{g}{c}dt_-.$$

Интегрируя и принимая во внимание, что в начальный момент  $t = 0$ ,  $x = 0$  и, следовательно,  $t_- = 0$ ,  $Z(0) = 1$  (т.к.  $\beta(0) = 0$ ), получаем  $\sqrt{Z}-1 = -\frac{g}{c}t_-$ . Сигнал прошел расстояние  $x$  за время  $t - \tau$ . Поэтому  $x = c(t - \tau)$  и  $t_- = t - \frac{x}{c} = \tau$ . Окончательно,  $\sqrt{Z} = 1 - \frac{g\tau}{c}$  и  $Z = \left(1 - \frac{g\tau}{c}\right)^2$ . Следовательно,

$$\nu_{\text{отр}} = \left(1 - \frac{g\tau}{c}\right)^2 \nu.$$

### 7.3



Импульсы электрона и протона перед столкновением будут  $p_{e,x} = p_{e,0} - e\mathcal{E}t$  и  $p_{p,x} = e\mathcal{E}t$ . Следовательно,  $p_{e,x} + p_{p,x} = p_0$ , где  $p_0 = p_{e,0}$  — начальный импульс электрона. Работа электрических сил определяется только конечными и начальными положениями частиц. Поэтому перед столкновением энергий частиц будут  $E_e = E_0 - e\mathcal{E}l$  и  $E_p = m_p c^2 + e\mathcal{E}l$ . Т.е.  $E_e + E_p = E_0 + m_p c^2$ . Следовательно, суммарный 4-импульс перед столкновением будет (положили  $c = 1$ )  $(E_0 + m_p, p_0, 0, 0)$ . Из сохранения 4-импульса следует  $(E_0 + m_p)^2 - p_0^2 = (p'_e + p'_p + q_{e+} + q_{e-})^2$ , где  $p'_e$ ,  $p'_p$  — 4-импульсы электрона и протона после столкновения, а  $q_{e+}$ ,  $q_{e-}$  — 4-импульсы новых частиц. Но

$(E_0 + m_p)^2 - p_0^2 = E_0^2 - p_0^2 + 2E_0m_p + m_p^2 = m_e^2 + m_p^2 + 2E_0m_p$  и  $(p'_e + p'_p + q_{e^+} + q_{e^-})^2 \geq (m_e + m_p + 2m_e)^2 = 9m_e^2 + m_p^2 + 6m_em_p$  (инвариантная масса  $(p'_e + p'_p + q_{e^+} + q_{e^-})^2$  минимальна, когда в системе центра масс все частицы неподвижны). Следовательно,  $m_e^2 + m_p^2 + 2E_0m_p \geq 9m_e^2 + m_p^2 + 6m_em_p$  и (восстановили  $c$ )

$$E_0 \geq m_ec^2 \left( 3 + 4 \frac{m_e}{m_p} \right).$$

## 7.4

Сперва некоторые соотношения для ракеты. Так как в системе земли ускорение ракеты  $a = \frac{g}{\gamma^3}$ , то  $\dot{\beta} \equiv \frac{d\beta}{dt} = \frac{g}{c\gamma^3}$ . Но  $\dot{\gamma} = \gamma^3\beta\dot{\beta}$  и

$$\frac{d}{dt}(\beta\gamma) = \dot{\beta}\gamma + \beta\dot{\gamma} = \dot{\beta}\gamma(1 + \beta^2\gamma^2) = \dot{\beta}\gamma^3 = \frac{g}{c}.$$

Следовательно,  $\beta\gamma = \frac{gt}{c}$  и  $\gamma = \sqrt{1 + \beta^2\gamma^2} = \sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}$ . За время  $\tau$  ракета улетит на расстояние

$$L = \int_0^\tau V(t)dt = c \int_0^\tau \beta dt = c \int_0^\beta \beta \frac{c\gamma^3}{g} d\beta = \frac{c^2}{2g} \int_0^{\beta^2} (1 - x)^{-3/2} dx = \frac{c^2}{g}(\gamma - 1).$$

При этом собственное время ракеты

$$t' = \int_0^\tau \frac{dt}{\gamma} = \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}} = \frac{c}{g} \operatorname{arcsch} \frac{g\tau}{c}.$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{c}{g} \operatorname{sh} \left( \frac{gt'}{c} \right) \quad \text{и} \quad \gamma(t) = \sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}} = \operatorname{ch} \left( \frac{gt'}{c} \right), \quad \beta^2(t) = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \operatorname{th}^2 \left( \frac{gt'}{c} \right),$$

т.е.

$$\beta(t) = \operatorname{th} \left( \frac{gt'}{c} \right).$$

Координаты в системе ракеты  $S'$  совпадают с координатами в мгновенной сопутствующей системе  $\tilde{S}'$ . Но в момент  $t = 0$  начала систем  $S$  и  $\tilde{S}'$  не совпадают и часы  $\tilde{S}'$  показывают не нуль, а некоторое время

$$t'_0 = t' - \frac{\tau}{\gamma} = t' - \frac{c}{g} \operatorname{th} \left( \frac{gt'}{c} \right).$$

Поэтому рассмотрим еще две инерциальные системы:  $\tilde{S}'_1$  который в момент  $t = 0$  находился в той же точке с координатой

$$x_0 = L - V\tau = \frac{c^2}{g} \left[ \text{ch} \left( \frac{gt'}{c} \right) - 1 \right] - \frac{c^2}{g} \text{th} \left( \frac{gt'}{c} \right) \text{sh} \left( \frac{gt'}{c} \right) = \frac{c^2}{g} \frac{1}{\text{ch} \left( \frac{gt'}{c} \right)} - \frac{c^2}{g},$$

где находился начало системы  $\tilde{S}'$ , но часы  $\tilde{S}'_1$  при этом показывали  $t'_1 = 0$ . Вторая система  $S_1$  неподвижна относительно Земли, но ее начало находится в точке с координатой  $x_0$  (в системе Земли). Следовательно, в момент  $t = t'_1 = 0$  начала  $S_1$  и  $\tilde{S}'_1$  совпадают. Поэтому стандартные формулы преобразования Лоренца применимы для этих систем без модификации и получаем  $x_1 = \gamma(\tilde{x}'_1 + V\tilde{t}'_1)$  и  $t_1 = \gamma(\tilde{t}'_1 + \frac{V}{c^2}\tilde{x}'_1)$ . Но  $x = x_0 + x_1$  (заметим, что  $x_0 < 0$ ) и  $t = t_1$ . С другой стороны,  $\tilde{x}'_1 = \tilde{x}' = x'$  и  $\tilde{t}'_1 = \tilde{t}' - \tilde{t}'_0 = t' - \tilde{t}'_0 = \frac{c}{g} \text{th} \left( \frac{gt'}{c} \right)$ . Поэтому

$$x_1 = \text{ch} \left( \frac{gt'}{c} \right) \left[ x' + \frac{c^2}{g} \text{th}^2 \left( \frac{gt'}{c} \right) \right]$$

и

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_0 &= -\frac{c^2}{g} + \text{ch} \left( \frac{gt'}{c} \right) \left[ x' + \frac{c^2}{g} \text{th}^2 \left( \frac{gt'}{c} \right) + \frac{c^2}{g} \frac{1}{\text{ch}^2 \left( \frac{gt'}{c} \right)} \right] = \\ &= \text{ch} \left( \frac{gt'}{c} \right) \left[ x' + \frac{c^2}{g} \right] - \frac{c^2}{g}. \end{aligned}$$

Кроме того

$$t = t_1 = \text{ch} \left( \frac{gt'}{c} \right) \left[ \frac{c}{g} \text{th} \left( \frac{gt'}{c} \right) + \frac{x'}{c} \text{th} \left( \frac{gt'}{c} \right) \right] = \frac{c}{g} \text{sh} \left( \frac{gt'}{c} \right) \left[ 1 + \frac{g}{c^2} x' \right].$$

Окончательно получаем, что координаты события  $(ct', x', y', z')$  в системе ракеты и координаты  $(ct, x, y, z)$  в системе Земли связаны соотношениями

$$t = \frac{c}{g} \text{sh} \left( \frac{gt'}{c} \right) \left[ 1 + \frac{g}{c^2} x' \right], \quad x = \text{ch} \left( \frac{gt'}{c} \right) \left[ x' + \frac{c^2}{g} \right] - \frac{c^2}{g}, \quad y = y', \quad z = z'.$$

## 7.5

Получим уравнение движения для зеркала. За время  $dt$  на зеркало упадет участок луча лазера длиной  $dl = (c - V)dt$ . Лазер этот участок излучит за время  $dt_0 = \frac{dl}{c} = (1 - \beta)dt$ . Следовательно, на зеркало упало световой энергии  $\mathcal{E} = Ndt_0 = N(1 - \beta)dt$ , где  $N$  – мощность лазера. Если из этой

энергии  $\mathcal{E}'$  отразилась, то законы сохранения энергии и импульса будут иметь вид  $\mathcal{E} + E = \mathcal{E}' + E + dE$  и  $\frac{\mathcal{E}}{c} + p = -\frac{\mathcal{E}'}{c} + p + dp$ . Отсюда  $d(E + cp) = 2\mathcal{E} = 2N(1 - \beta)dt$ . Но  $E = mc^2\gamma$  и  $p = mc\beta\gamma$ . Вводя запаздывающее время  $t_- = t - \frac{x}{c}$  и замечая, что  $dt_- = (1 - \beta)dt$ , получаем

$$\frac{d}{dt_-} [\gamma(1 + \beta)] = \frac{2N}{mc^2}.$$

Отсюда

$$\gamma(1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \frac{2N}{mc^2} t_- + 1,$$

т.к. в начальный момент  $t_- = 0$  и  $\beta = 0$ . Следовательно,

$$\beta = \frac{\left(\frac{2N}{mc^2} t_- + 1\right)^2 - 1}{\left(\frac{2N}{mc^2} t_- + 1\right)^2 + 1}.$$

Зеркало улетит на расстояние

$$x = \int_0^t c\beta dt = c \int_0^{t_-} \frac{\beta}{1 - \beta} dt_-.$$

Но

$$\frac{\beta}{1 - \beta} = \frac{\left(\frac{2N}{mc^2} t_- + 1\right)^2 - 1}{2}$$

и

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{2} \int_0^{t_-} \left[ \left( \frac{2N}{mc^2} t_- + 1 \right)^2 - 1 \right] dt_- = \frac{mc^2}{12N} \left[ \left( \frac{2N}{mc^2} t_- + 1 \right)^3 - 1 \right] - \frac{t_-}{2}.$$

Отсюда

$$2\frac{x}{c} + t_- = t + \frac{x}{c} = \frac{mc^2}{6N} \left[ \left( \frac{2N}{mc^2} t_- + 1 \right)^3 - 1 \right],$$

или

$$6\frac{N}{mc^2} t_+ = \left( \frac{2N}{mc^2} t_- + 1 \right)^3 - 1,$$

где  $t_{\pm} = t \pm \frac{x}{c}$ . Но

$$\frac{Nx}{mc^3} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{15}}{1 \cdot 27 \cdot 10^{24}} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$2\left(\frac{ct}{x} + 1\right) = \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{ct}{x} - 1 \right) + 1 \right]^3 - 1.$$

Пусть

$$\frac{2}{3} \left( \frac{ct}{x} - 1 \right) + 1 = \tau.$$

Для  $\tau$  будем иметь уравнение  $3\tau + 2 = \tau^3$ . Или  $3(\tau + 1) = \tau^3 + 1 = (\tau + 1)(\tau^2 - \tau + 1)$ . Следовательно,  $(\tau + 1)(\tau^2 - \tau - 2) = (\tau + 1)^2(\tau - 2) = 0$ . Устраивает только  $\tau = 2$ , т.к.  $\tau > 0$ . Поэтому

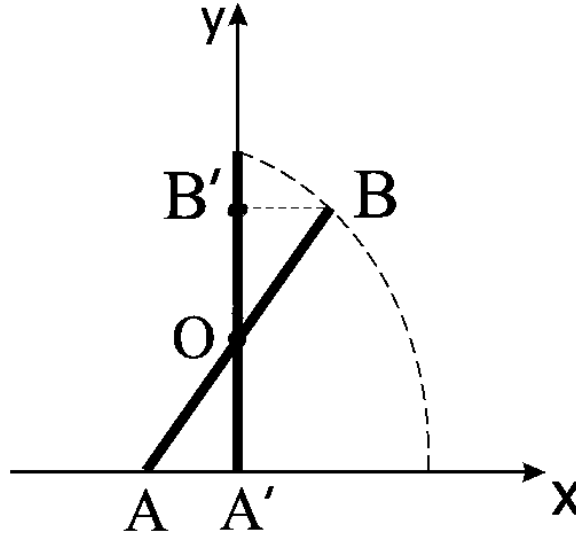
$$\frac{ct}{x} = \frac{3\tau - 1}{2} = \frac{5}{2} \text{ и } t = \frac{5x}{2c} = \frac{5}{2} \frac{10^{15}}{3 \cdot 10^8} = \frac{5}{6} 10^7 \text{ сек.}$$

Таким образом, зеркало улетит на расстояние  $10^{15}$  м за  $\frac{5}{6} 10^7$  сек.

## Контрольная работа 8

### 8.1

Пусть координаты верхнего конца в некоторый момент времени  $x$  и  $y$ . В  $x$ -направлении на стержень сила не действует, поэтому центр масс стержня  $O$  будет падать вертикально и всегда будет находится на оси  $y$ . Т.к. стержень однородный,  $AO = OB$  и, следовательно,  $A'O = OB' = \frac{y}{2}$ . Тогда из прямоугольного треугольника  $OB'B$  получаем  $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{l^2}{4}$ . Это и есть уравнение траектории верхнего конца и представляет собой эллипс.



### 8.2

Электрон притягивается к плоскости с силой  $\frac{e^2}{(2z)^2}$ , где  $z$  – расстояние до плоскости. Следовательно, уравнение движения будет  $m\ddot{z} = -\frac{e^2}{4z^2}$ . Умножаем

обе части на  $\dot{z}$ ,

$$m\dot{z}\ddot{z} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\dot{z}^2) = -\frac{e^2}{4z^2} \dot{z} = \frac{e^2}{4} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{z} \right).$$

Отсюда  $\frac{m\dot{z}^2}{2} - \frac{e^2}{4z} = \text{const}$ . Но вначале  $z = H$  и  $\dot{z} = 0$ . Следовательно,  $\text{const} = -\frac{e^2}{4H}$  и

$$\frac{m\dot{z}^2}{2} = \frac{e^2}{4} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{H} \right).$$

Поэтому (заметим, что  $\dot{z} < 0$ , т.к. ось  $z$  у нас направлена вертикально вверх)

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{\frac{e^2}{2m} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{H} \right)}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$T = -\int_H^0 \frac{dz}{\sqrt{\frac{e^2}{2m} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{H} \right)}} = \int_0^H \frac{dz}{\sqrt{\frac{e^2}{2m} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{H} \right)}}.$$

Сделаем подстановку

$$\sqrt{\frac{1}{z} - \frac{1}{H}} = \sqrt{\frac{1}{H}} \operatorname{tg} \varphi,$$

т.е.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{H} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{1}{H \cos^2 \varphi} \quad \text{и} \quad z = H \cos^2 \varphi.$$

Получаем

$$T = 2 \frac{H}{l} \sqrt{2mH} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi H}{l} \sqrt{\frac{mH}{2}}.$$

### 8.3

Закон сохранения энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U_0 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{a} \right) = E.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - U_0 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{a} \right) \right)}$$



и (выбираем начало отсчета так, что в момент  $t = 0$  координата  $x = 0$ )

$$t = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{U_0}{E} \operatorname{tg}^2\left(\frac{y}{a}\right)}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^x \frac{\cos\left(\frac{y}{a}\right) dy}{\sqrt{1 - \frac{E+U_0}{E} \sin^2\left(\frac{y}{a}\right)}}.$$

Сделаем подстановку

$$\sqrt{\frac{E+U_0}{E}} \sin\left(\frac{y}{a}\right) = \sin \varphi.$$

Тогда

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{E+U_0}{E}} \cos\left(\frac{y}{a}\right) dy = \cos \varphi d\varphi$$

и

$$t = a \sqrt{\frac{m}{2(E+U_0)}} \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\cos \varphi} = a \sqrt{\frac{m}{2(E+U_0)}} \varphi_{\max},$$

где

$$\sin \varphi_{\max} = \sqrt{\frac{E+U_0}{E}} \sin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{E+U_0}{E}} \sin\left(\frac{x}{a}\right) = \sin\left(\sqrt{\frac{2(E+U_0)}{m}} \frac{t}{a}\right)$$

и, окончательно,

$$x = a \arcsin \left[ \sqrt{\frac{E}{E+U_0}} \sin \left( \sqrt{\frac{2(E+U_0)}{m}} \frac{t}{a} \right) \right].$$

## 8.4

Рассмотрим сначала движение шарика вниз. Ось  $x$  направим вниз. Изменение кинетической энергии шарика

$$\Delta \frac{mV^2}{2} = mg\Delta x - \alpha V^2 \Delta x.$$

Но  $\Delta \frac{mV^2}{2} = mV\Delta V$  и получаем  $mV\frac{dV}{dx} = mg - \alpha V^2$ . Отсюда  $\frac{mVdV}{mg - \alpha V^2} = dx$  и

$$H = \int_0^{V_{\max}} \frac{\frac{1}{2}m dV^2}{mg - \alpha V^2} = -\frac{m}{2\alpha} \ln \left( 1 - \frac{\alpha V_{\max}^2}{mg} \right).$$

Это определяет скорость шарика перед ударом

$$V_{max}^2 = \frac{mg}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{2\alpha H}{m}}\right).$$

Т.к. удар упругий, шарик отскочит с такой же скоростью. Рассмотрим теперь движение вверх. Ось  $x$  направим вверх. Будем иметь

$$\Delta \frac{mV^2}{2} = -mg\Delta x - \alpha V^2 \Delta x.$$

Или  $mV \frac{dV}{dx} = -(mg + \alpha V^2)$ . Отсюда высота подъема

$$h = \int_0^h dx = - \int_{V_{max}}^0 \frac{\frac{1}{2}m dV^2}{mg + \alpha V^2} = \frac{m}{2\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha V_{max}^2}{mg}\right).$$

Подставляя  $V_{max}^2$ , окончательно получаем

$$h = \frac{m}{2\alpha} \ln \left[2 - e^{-\frac{2\alpha H}{m}}\right].$$

## 8.5

Заметим, что  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ , т.к.  $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{V} \times \vec{p} = 0$ . Но

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} \vec{V} \times \vec{B} = \frac{eg}{c} \frac{\vec{V} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{eg}{cr^3} \vec{r} \times (\vec{V} \times \vec{r}).$$

Используя  $\vec{r} \times (\vec{V} \times \vec{r}) = r^2 \vec{V} - (\vec{r} \cdot \vec{V}) \vec{r}$ , получаем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{eg}{c} \left( \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3} \vec{r} \right).$$

Но  $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\vec{r}^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(r^2) = r\dot{r}$ . Таким образом

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{eg}{c} \left( \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2} \vec{r} \right) = \frac{eg}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right).$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{L} - \frac{eg}{c} \frac{\vec{r}}{r} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \vec{L} - \frac{eg}{c} \frac{\vec{r}}{r} = \vec{L}_0 - \frac{eg}{c} \frac{\vec{r}_0}{r_0},$$

где  $L_0$  и  $r_0$  есть значения момента импульса и радиус-вектора в начальный момент времени. Окончательно,

$$\vec{L} = \vec{L}_0 + \frac{eg}{c} \left( \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r}_0}{r_0} \right).$$

## 8.6

Согласно решению задачи 5.29 из [1],

$$V_x = \frac{e\mathcal{E}c^2t}{\sqrt{E_0^2 + (e\mathcal{E}ct)^2}} \text{ и } V_y = \frac{E_0V_0}{\sqrt{E_0^2 + (e\mathcal{E}ct)^2}}.$$

Отсюда

$$x = \int_0^t V_x dt = \frac{1}{2e\mathcal{E}} \int_0^t \frac{d(e\mathcal{E}ct)^2}{\sqrt{E_0^2 + (e\mathcal{E}ct)^2}} = \frac{E_0}{e\mathcal{E}} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{e\mathcal{E}ct}{E_0} \right)^2} - 1 \right)$$

и

$$y = \int_0^t V_y dt = \frac{E_0V_0}{e\mathcal{E}c} \int_0^t \frac{d(e\mathcal{E}ct)}{\sqrt{E_0^2 + (e\mathcal{E}ct)^2}} = \frac{E_0V_0}{e\mathcal{E}c} \operatorname{arcsch} \frac{e\mathcal{E}ct}{E_0}.$$

Из второго уравнения

$$\frac{e\mathcal{E}ct}{E_0} = \operatorname{sh} \frac{e\mathcal{E}cy}{E_0V_0}$$

подставим в первом:

$$x = \frac{E_0}{e\mathcal{E}} \left( \operatorname{ch} \frac{e\mathcal{E}cy}{E_0V_0} - 1 \right).$$

Это и есть уравнение траектории.

## Контрольная работа 9

### 9.1

Пусть поршни сдвинулись справа на  $x$ . Объем воздуха между поршнями станет  $V' = V - S_1x + S_2x = V - (S_1 - S_2)x$ , а давление

$$p' = \frac{pV}{V'} = \frac{p}{1 - \frac{1}{V}(S_1 - S_2)x} \approx p + \frac{p}{V}(S_1 - S_2)x.$$

Возвращающая сила будет

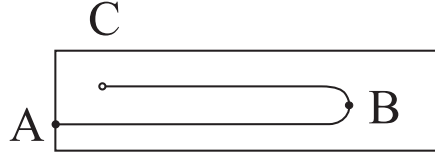
$$F = S_1p' + S_2p - S_1p - S_2p' = (S_1 - S_2)(p' - p) \approx \frac{p}{V}(S_1 - S_2)^2x.$$

Следовательно, эффективный коэффициент жесткости  $k = \frac{p}{V}(S_1 - S_2)^2$  и частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{p}{mV}} (S_1 - S_2).$$

## 9.2

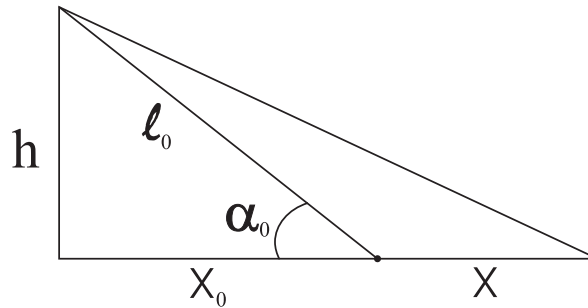
В пределе бесконечно легкой сгибаемости каната, между частями  $AB$  и  $BC$  нет упругого взаимодействия.



Поэтому, после окончания первоначального импульса силы, который сообщает верхней половине скорость  $V$ , в точке  $A$  сила натяжения исчезнет ( $AB$  покоится и со стороны  $BC$  на него не действует сила. Поэтому и в точке  $A$  не может действовать на  $AB$  никакая сила). Это означает, что импульс каната сохраняется. Если  $C$  отстоит от конца трубки на  $x$ , то  $AB = \frac{1}{2}(L + x)$  (это следует из  $L = x + 2BC$ ). Поэтому скорость точки изгиба 2-раза меньше, чем  $\dot{x}$  и когда она равна  $u$ , верхняя половина движется со скоростью  $2u$ . Следовательно,  $\frac{1}{2}(L - x)\frac{M}{L}2u = \frac{M}{2}V_0$ . Отсюда  $x = \left(1 - \frac{V_0}{2u}\right)L$  и

$$AB = L \left(1 - \frac{V_0}{4u}\right).$$

## 9.3



Пусть тело сместилось на  $x$ . Новая длина пружины

$$l = \sqrt{h^2 + (x_0 + x)^2} \approx \sqrt{l_0^2 + 2x_0x} = l_0 \sqrt{1 + 2 \cos \alpha_0 \frac{x}{l_0}} \approx l_0 \left(1 + \cos \alpha_0 \frac{x}{l_0}\right),$$

т.к.  $x \ll x_0$  и  $x_0 = l_0 \cos \alpha_0$ . Сила натяжения пружины  $F = k\Delta l = k(l - l_0) \approx k \cos \alpha_0 x$ . Ее проекция на горизонтальное направление  $F_x = F \cos \alpha \approx k \cos^2 \alpha_0 x$ . Следовательно, эффективный коэффициент жесткости

для горизонтального направления  $k_{\text{эфф}} = k \cos^2 \alpha_0$  и частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эфф}}}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \alpha_0.$$

## 9.4

Период движения

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = 2\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - U(x)} dx.$$

Изменение периода

$$\Delta T = 2\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \Delta I,$$

где

$$\Delta I = \int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} \sqrt{E - U - \delta U} dx - \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - U(x)} dx.$$

Но

$$\sqrt{E - U - \delta U} \approx \sqrt{E - U} \left( 1 - \frac{\delta U}{2(E - U)} \right)$$

и

$$\int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} \sqrt{E - U} dx - \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - U} dx \approx 0,$$

так как

$$\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} \sqrt{E - U} dx \quad \text{и} \quad \int_{x_1+\delta x_1}^{x_1} \sqrt{E - U} dx$$

величины второго порядка малости (вблизи точек поворота  $\sqrt{E - U} \approx 0$ ).  
Следовательно,

$$\Delta I \approx -\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta U}{\sqrt{E - U}} dx \approx -\frac{m\beta}{8} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}}}.$$

После подстановки  $y = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x$ , будем иметь

$$\Delta I \approx -\frac{\beta E^2}{\sqrt{2m} m \omega^5} \int_{-1}^1 \frac{y^4 dy}{\sqrt{1 - y^2}} = -\frac{2\beta E^2}{\sqrt{2m} m \omega^5} \int_0^1 \frac{y^4 dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Если сделать еще одну подстановку  $y = \sin \theta$ , получим

$$\Delta I \approx -\frac{2\beta E^2}{\sqrt{2m} m \omega^5} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta.$$

Но

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{4}(1 - \cos 2\theta)^2 = \frac{1}{4} \left[ 1 - 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) \right]$$

и

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos 4\theta d\theta = 0.$$

Поэтому

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi}{16}$$

и

$$\Delta I \approx -\frac{3\beta E^2 \pi}{8\sqrt{2m} m \omega^5}.$$

Тогда

$$\Delta T = 2\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \Delta I \approx -\frac{3\pi\beta E}{2m\omega^5}.$$

Т.е. новый период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{3\pi\beta E}{2m\omega^5} = \frac{2\pi}{\omega} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{\beta E}{m\omega^4} \right).$$

Поправка мала, если  $\frac{\beta E}{m\omega^4} \ll 1$ .

## 9.5

Пусть энергия фотона  $E$ . Т.к. после реакции продукты покоятся, импульс электрона по величине равен импульсу фотона  $E$  (положили  $c = 1$ ), а энергия электрона  $E_e = \sqrt{m^2 + E^2}$ , где  $m$  – масса электрона. Закон сохранения энергии дает  $E + \sqrt{m^2 + E^2} = 3m$ . Отсюда (восстановили  $c$ )

$$E = \frac{4}{3}mc^2.$$



## 10.2

Переданная энергия  $E = \frac{m}{2}|z|^2$ , где

$$z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t'^2}{\tau^2}} e^{-i\omega t'} dt', \quad t \rightarrow \infty.$$

Но  $|e^{i\omega t}| = 1$ , поэтому

$$|z|^2 = \frac{F_0^2}{m^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{\tau^2} - i\omega t'} dt' \right|^2.$$

Но

$$\frac{t'^2}{\tau^2} + i\omega t' = \frac{t'^2}{\tau^2} + 2i\omega \frac{t'}{\tau} \frac{\tau}{2} + \left(\frac{i\omega\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{t'}{\tau} + i\frac{\omega\tau}{2}\right)^2 + \frac{\omega^2\tau^2}{4}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{\tau^2} - i\omega t'} dt' = e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{t'}{\tau} + i\frac{\omega\tau}{2})^2} dt' = \tau e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \tau e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}}.$$

Следовательно, передается энергия

$$E(\tau) = \frac{\pi F_0^2}{2m} \tau^2 e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}}.$$

Найдем максимум функции  $f(x) = xe^{-\alpha x}$ .  $f'(x) = e^{-\alpha x} - \alpha xe^{-\alpha x} = 0$  дает  $x = \frac{1}{\alpha}$ . Следовательно, максимально эффективно энергия передается при

$$\tau^2 = \frac{2}{\omega^2} \quad \text{и} \quad E_{max} = \frac{\pi F_0^2}{2m} \frac{2}{\omega^2} e^{-1} = \frac{\pi F_0^2}{m\omega^2 e}.$$

## 10.3

Уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = \frac{F(t)}{m}.$$

Обозначим  $\frac{\alpha}{m} = 2\beta$ . Надо решить уравнение

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}.$$



Пусть  $z = \dot{x} + \lambda_1 x$  и подберем  $\lambda_2$  так, чтобы было  $\dot{z} + \lambda_2 z = \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x$ .  
Но  $\dot{z} + \lambda_2 z = \ddot{x} + \lambda_1\dot{x} + \lambda_2\dot{x} + \lambda_1\lambda_2 x$ . Т.е.

$$\begin{cases} 2\beta = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \omega^2 = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

и  $\lambda_1, \lambda_2$  есть решения уравнения  $\lambda^2 - 2\beta\lambda + \omega^2 = 0$ . Т.е.

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} = \beta \pm i\Omega, \quad \text{где } \Omega = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}.$$

Будем предполагать, что  $\omega > \beta$ , т.е. трение маленькое. Пусть  $\lambda_1 = \beta + i\Omega$  и  $\lambda_2 = \beta - i\Omega$ . Тогда  $z = \dot{x} + \beta x + i\Omega x$  и уравнение будет

$$\dot{z} + (\beta - i\Omega)z = \frac{F(t)}{m}.$$

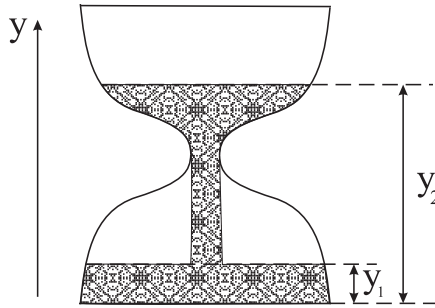
Решение однородного уравнения пропорционально  $e^{-(\beta-i\Omega)t}$ . Поэтому возьмем  $z = A(t)e^{-(\beta-i\Omega)t}$ . Для  $A(t)$  получим уравнение

$$\dot{A}(t) = \frac{F(t)}{m}e^{(\beta-i\Omega)t}.$$

Окончательно

$$z = e^{-(\beta-i\Omega)t} \left\{ z_0 + \int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{(\beta-i\Omega)t'} dt' \right\}.$$

## 10.4



Пусть  $M$  – масса песочных часов (включая песок). Положение центра масс определяется уравнением

$$My_{\text{ц.м.}} = \int_0^{y_1(t)} y\rho S(y)dy + \int_h^{y_2(t)} y\rho S(y)dy + C,$$

где  $h$  – высота узкого места часов,  $\rho$  – плотность песка,  $S(y)$  есть поперечное сечение часов на высоте  $y$  и  $C$  соответствует вкладу в  $M_{\text{ц.м.}}$  от каркаса песочных часов и от той части песка, которая в полете. Т.к. поток стационарный,  $C$  не зависит от времени. Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{f(t)} F(x) dx &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_0^{f(t+\Delta t)} F(x) dx - \int_0^{f(t)} F(x) dx \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{f(t)}^{f(t)+f'(t)\Delta t} F(x) dx = f'(t) F[f(t)], \end{aligned}$$

т.к.

$$f(t + \Delta t) \approx f(t) + f'(t)\Delta t \quad \text{и} \quad \int_a^{a+\Delta a} F(x) dx \approx F(a)\Delta a.$$

Поэтому будем иметь

$$M\dot{y}_{\text{ц.м.}} = \rho [\dot{y}_1 y_1 S(y_1) + \dot{y}_2 y_2 S(y_2)].$$

Если поток песка равен  $\mu$ , то  $\mu = \rho S(y_1) \dot{y}_1 = -\rho S(y_2) \dot{y}_2$ , т.к.  $\rho S(y_1) \Delta y_1 = \rho S(y_2) (-\Delta y_2)$  есть количество песка, которое переносится из верхней половины в нижнюю за время  $\Delta t$ . Следовательно,  $M\dot{y}_{\text{ц.м.}} = \mu(y_1 - y_2)$ . В начальный момент времени  $\dot{y}_{\text{ц.м.}} = -\frac{\mu}{M}H$ ,  $H$  – высота часов (вернее, высота верхнего уровня песка при  $t = 0$ ). Эту скорость центр масс приобретает в начальный период установления стационарного потока. Дифференцируя еще раз, имеем  $M\ddot{y}_{\text{ц.м.}} = \mu(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$ . Но

$$\dot{y}_1 = \frac{\mu}{\rho S(y_1)} \quad \text{и} \quad \dot{y}_2 = -\frac{\mu}{\rho S(y_2)}.$$

Следовательно,

$$M\ddot{y}_{\text{ц.м.}} = \frac{\mu^2}{\rho} \left[ \frac{1}{S(y_1)} + \frac{1}{S(y_2)} \right] > 0.$$

Т.е. ускорение направлено вверх, несмотря на то что центр масс опускается вниз. С другой стороны,  $M\ddot{y}_{\text{ц.м.}} = F - Mg$ , где  $F$  – показание весов. Поэтому  $F > Mg$  всегда, пока существует стационарный поток песка.

## 10.5

Энергия  $E = mc^2\gamma + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  сохраняется. В начальный момент  $x = A$  и  $\gamma = 1$ , поэтому  $E = mc^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ . Следовательно,

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} - \frac{\omega^2}{2c^2} x^2 = 1 + \frac{\omega^2}{2c^2} (A^2 - x^2).$$

Период колебаний

$$T = 4 \int_0^A \frac{dx}{V} = \frac{4}{c} \int_0^A \frac{dx}{\beta}.$$

Но  $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$ . Следовательно,

$$T = \frac{4}{c} \int_0^A \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} dx = \frac{8c}{\omega^2} \frac{d}{dA^2} \int_0^A \sqrt{\gamma^2 - 1} dx.$$

Т.к.

$$y = \frac{\omega^2}{2c^2}(A^2 - x^2) \ll 1,$$

то

$$\sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{(1 + y)^2 - 1} \approx \sqrt{2y \left(1 + \frac{y}{2}\right)} \approx \sqrt{2y} \left(1 + \frac{y}{4}\right).$$

Поэтому  $T = T_0 + T_1$ , где

$$T_0 = \frac{8c}{\omega^2} \frac{d}{dA^2} \int_0^A \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}(A^2 - x^2)} dx = \frac{8}{\omega} \frac{d}{dA^2} \int_0^A \sqrt{A^2 - x^2} dx.$$

Сделаем подстановку  $x = A \sin \varphi$ . Тогда

$$\int_0^A \sqrt{A^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A^2 \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{A^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{\pi A^2}{4}$$

и  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ .

$$T_1 = \frac{\omega}{c^2} \frac{d}{dA^2} \int_0^A (A^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{\omega}{c^2} \frac{d}{dA^2} \left[ A^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi \right].$$

Но

$$\cos^4 \varphi = \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \right]^2 = \frac{1}{4} \left[ 1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\varphi) \right]$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{16} \pi.$$

Далее,

$$\frac{dA^4}{dA^2} = 2A^2 \quad \text{и} \quad T_1 = \frac{3\pi}{8} \frac{\omega A^2}{c^2}.$$

Окончательно,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left[ 1 + \frac{3}{16} \frac{\omega^2 A^2}{c^2} \right].$$

Замечание:

$$\frac{d}{dA^2} \int_0^A \sqrt{\gamma^2 - 1} dx = \int_0^A \left( \frac{\partial}{\partial A^2} \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) dx + \frac{dA}{dA^2} \sqrt{\gamma^2(x, A) - 1} \Big|_{x=A}.$$

Но второй член зануляется, т.к.  $\gamma(x, A) = 1$  при  $x = A$ .

## Контрольная работа 11

### 11.1

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  смещения шариков из положения равновесия (т. к. колебания маленькие, вертикальными смещениями пренебрегаем). Уравнения движения будут  $m\ddot{x}_1 = -m\omega^2 x_1 + k(x_2 - x_1)$  и  $m\ddot{x}_2 = -m\omega^2 x_2 - k(x_2 - x_1)$  или  $\ddot{x}_1 + \left(\omega^2 + \frac{k}{m}\right) x_1 = \frac{k}{m} x_2$ ,  $\ddot{x}_2 + \left(\omega^2 + \frac{k}{m}\right) x_2 = \frac{k}{m} x_1$ . Вводя новые переменные  $X = x_1 + x_2$  и  $x = x_1 - x_2$ , получаем  $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$  и  $\ddot{x} + \left(\omega^2 + 2\frac{k}{m}\right) x = 0$ . В начальный момент времени  $x_1(0) = A$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ . Т.е.  $X(0) = x(0) = A$  и  $\dot{X}_0 = \dot{x}_0 = 0$ . Поэтому  $X(t) = A \cos \omega t$  и  $x(t) = A \cos \sqrt{\omega^2 + 2\frac{k}{m}} t$ . Но  $x_1(t) = (X + x)/2$ ,  $x_2 = (X - x)/2$ . Следовательно,

$$x_1 = \frac{A}{2} \left[ \cos \omega t + \cos \sqrt{\omega^2 + 2\frac{k}{m}} t \right]$$

и

$$x_2(t) = \frac{A}{2} \left[ \cos \omega t - \cos \sqrt{\omega^2 + 2\frac{k}{m}} t \right].$$

Но

$$\sqrt{\omega^2 + 2\frac{k}{m}} \approx \omega + \frac{k}{m\omega}$$

и

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Поэтому

$$x_1(t) \approx A \cos \omega t \cos \frac{kt}{2m\omega}, \quad x_2(t) = A \sin \omega t \sin \frac{kt}{2m\omega}.$$

Это показывает, что когда  $\frac{kt}{2m\omega} = \frac{\pi}{2}$ , колебания первого шарика затухают, а колебания второго максимальны. Следовательно, через время

$$t = \frac{\pi m \omega}{k} = T \frac{m \omega^2}{2k}$$

колебания полностью перейдут ко второму маятнику. Здесь  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  есть период колебаний, когда шарики не связаны.

## 11.2

Перейдем к цилиндрическим координатам. Тогда  $V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$  и  $x\dot{y} - y\dot{x} = \rho \cos \varphi (\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi) - \rho \sin \varphi (\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi) = \rho^2 \dot{\varphi}$ . Поэтому

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qB}{2c} \rho^2 \dot{\varphi}$$

и обобщенный импульс, соответствующий координате  $\varphi$ , будет

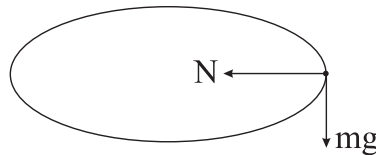
$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \dot{\varphi} + \frac{qB}{2c} \rho^2.$$

$\oint p_\varphi d\varphi$  адиабатический инвариант. Но когда электрон вращается в магнитном поле  $B$ , его угловая скорость  $\omega = \dot{\varphi}$  определяется из  $m\omega^2 \rho = \frac{q}{c} VB = \frac{qB}{c} \omega \rho$ . Т.е.  $\dot{\varphi} = \frac{qB}{mc}$ . Поэтому

$$\oint p_\varphi d\varphi = \oint \left( \frac{qB}{c} \rho^2 + \frac{qB}{2c} \rho^2 \right) d\varphi = 3\pi \frac{qB}{c} \rho^2.$$

Следовательно, произведение  $B\rho^2$  является инвариантом и когда поле увеличится в два раза, радиус орбиты электрона уменьшится  $\sqrt{2}$  раза. Заметим, что инвариантность  $\rho^2 B$  означает, что поток магнитной индукции сквозь орбиту электрона является адиабатическим инвариантом.

## 11.3



На кольцо действует как сила притяжения  $mg$ , так и сила реакции  $N$ . Поэтому сила трения  $F = \mu \sqrt{N^2 + m^2 g^2}$ . Но  $N$  сообщает кольцу центростремительно

ускорение. Поэтому  $mV^2/R = N$  и

$$F = \mu mg \sqrt{1 + \frac{V^4}{g^2 R^2}}.$$

Следовательно, скорость кольца уменьшается по закону

$$m \frac{dV}{dt} = -F = -\mu mg \sqrt{1 + \frac{V^4}{g^2 R^2}}$$

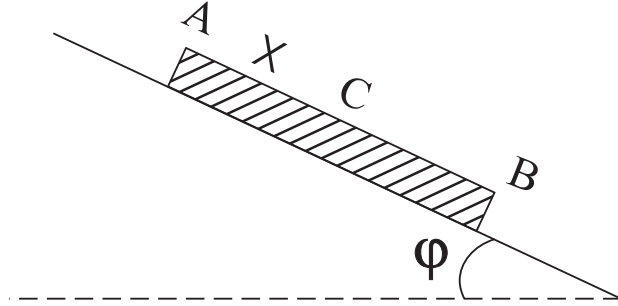
и кольцо остановится через время

$$T = \frac{1}{\mu g} \int_0^{V_0} \frac{dV}{\sqrt{1 + \frac{V^4}{g^2 R^2}}} \approx \frac{1}{\mu g} \int_0^{V_0} \left(1 - \frac{V^4}{2g^2 R^2}\right) dV = \frac{1}{\mu g} \left[ V_0 - \frac{V_0^5}{10g^2 R^2} \right].$$

Окончательно

$$T = \frac{V_0}{\mu g} \left[ 1 - \frac{V_0^4}{10g^2 R^2} \right].$$

#### 11.4



Рассмотрим процесс теплового расширения свинцового листа. пусть при этом точка  $C$  на расстоянии  $x$  от верхнего края неподвижна относительно крыши. тогда участок  $AC$  при расширении движется вверх, а участок  $CB$  вниз. Это определяет направление сил трения действующих на них. Так как ускорения центр масс  $AC$  и  $CB$  очень маленькие, можно считать, что действующие на них силы уравновешены. Для  $AC$  это дает уравнение

$$\frac{m}{l} x g \sin \varphi + \mu \frac{m}{l} x g \cos \varphi - T = 0,$$

где  $T$  есть сила с которой  $CB$  действует на  $AC$ . Аналогично для  $CB$  будем иметь

$$\frac{m}{l} (l - x) g \sin \varphi - \mu \frac{m}{l} (l - x) g \cos \varphi + T = 0.$$

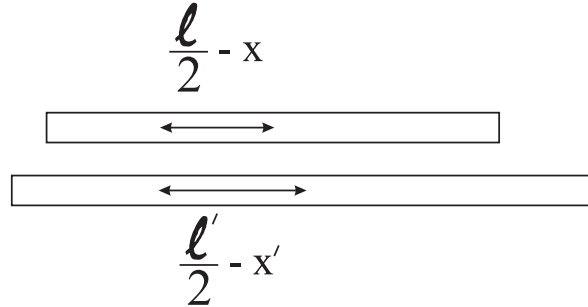
Складывая эти уравнения, получаем

$$\frac{m}{l}lg \sin \varphi - \mu \frac{m}{l}(l - 2x)g \cos \varphi = 0.$$

Отсюда

$$x = \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\mu} \right).$$

если температура увеличивается на  $\Delta t$ , длина листа станет  $l' = (1 + \alpha \Delta t)l$ .



При этом его центр масс сместится, как показывает рисунок. Смещение равно  $\Delta = \left( \frac{l'}{2} - x' \right) - \left( \frac{l}{2} - x \right)$ , где  $x' = \frac{l'}{2} \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\mu} \right)$ . Следовательно,

$$\Delta = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\mu}(l' - l) = \alpha \Delta t l \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\mu}.$$

Когда температура понижается, участок  $AC$  движется вниз, а участок  $CB$  вверх. Поэтому уравнения будут (мы используем те же самые обозначения  $x$  и  $T$ , хотя численно они могут быть другими):

$$\frac{m}{l}xg \sin \varphi - \mu \frac{m}{l}xg \cos \varphi + T = 0 \text{ и } \frac{m}{l}(l - x)g \sin \varphi + \mu \frac{m}{l}(l - x)g \cos \varphi - T = 0.$$

Отсюда  $\frac{2x}{l} = 1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\mu}$  и  $x = \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\mu} \right)$ . Смещение центра масс вниз будет

$$\Delta' = \left( x - \frac{l}{2} \right) - \left( x' - \frac{l'}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\mu}(l - l') = \alpha \Delta t l \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\mu} = \Delta.$$

Следовательно, за одни сутки центр масс смещается вниз на

$$2\Delta = \alpha l \Delta t \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\mu}.$$

За  $N$  суток смещение составит

$$\alpha N l \Delta t \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\mu}.$$

## 11.5

Энергия и импульс подсистемы  $(\nu_\tau \gamma)$  определяются из законов сохранения энергии и импульса при распаде  $\tau^- \rightarrow (\pi^- \pi^0) + (\nu_\tau \gamma)$  и равны  $E = \frac{m_\tau}{2}$ ,  $p = \sqrt{E^2 - \left(\frac{m_\tau}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{6} m_\tau$  (положили  $c = 1$ ). Далее рассмотрим “распад”  $(\nu_\tau \gamma) \rightarrow \nu_\tau + \gamma$ . С учетом  $(p_{\nu\gamma} - p_\gamma)^2 = p_\nu^2 = 0$ ,  $p_{\nu\gamma}^2 = m_{\nu\gamma}^2 = \frac{m_\tau^2}{9}$ ,  $p_\nu^2 = 0$  и  $p_{\nu\gamma} \cdot p_\gamma = E E_\gamma - \vec{p} \cdot \vec{p}_\gamma = E_\gamma(E - p \cos \theta)$ , получаем

$$\frac{m_\tau^2}{9} - 2E_\gamma(E - p \cos \theta) = 0.$$

Поэтому

$$E_\gamma = \frac{m_\tau^2}{18(E - p \cos \theta)}$$

и, так как  $E^2 - p^2 = m_{\nu\gamma}^2 = \frac{1}{9} m_\tau^2$ ,

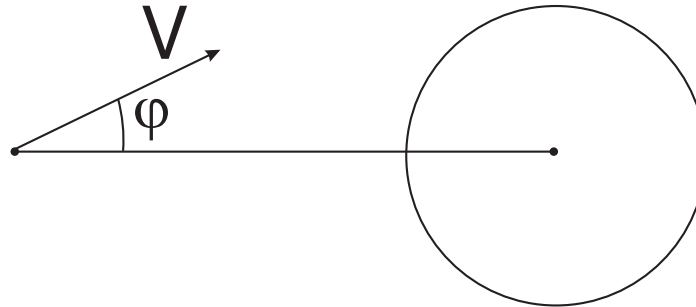
$$E_{\gamma, \min} = \frac{m_\tau^2}{18(E + p)} = \frac{1}{2}(E - p), \quad E_{\gamma, \max} = \frac{m_\tau^2}{18(E - p)} = \frac{1}{2}(E + p).$$

Следовательно (восстановили  $c$ ),

$$\frac{m_\tau c^2}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \leq E_\gamma \leq \frac{m_\tau c^2}{4} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right).$$

## Контрольная работа 12

### 12.1



Пусть космический аппарат находится на расстоянии  $r$  от центра Земли и его скорость  $\vec{V}$  составляет угол  $\varphi$  с направлением на центр. Аппарат упадет на Землю, если  $r_{\min} = \frac{p}{1+e} \leq R$ ,  $R$  – радиус Земли. Но

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{2Ep}{\alpha}}.$$



Поэтому получаем

$$\left(\frac{p}{R} - 1\right)^2 = \frac{p^2}{R^2} - 2\frac{p}{R} + 1 \leq e^2 = 1 + \frac{2Ep}{\alpha}.$$

Или

$$\frac{p}{R^2} \leq \frac{2}{\alpha} \left(E + \frac{\alpha}{R}\right).$$

Учтем здесь

$$E = \frac{mV^2}{2} - \frac{\alpha}{r} \quad \text{и} \quad p = \frac{L^2}{m\alpha} = \frac{mV^2}{\alpha} \sin^2 \varphi r^2,$$

будем иметь

$$mV^2 \left( \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi - 1 \right) \leq 2 \frac{\alpha}{rR} (r - R).$$

Это неравенство будет удовлетворяться при любом значении  $V$ , только если

$$\sin^2 \varphi \frac{r^2}{R^2} - 1 \leq 0, \quad \text{или} \quad \sin \varphi \leq \frac{r}{R}.$$

Т.е. вектор скорости аппарата должен лежать внутри телесного угла, с которым Земля видна из аппарата.

## 12.2

Из неравенств

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r)$$

и  $L = mr^2\dot{\varphi}$ , получаем

$$\frac{E}{L^2} = \frac{1}{2mr^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} + \frac{U(r)}{L^2}.$$

Но

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \left( \frac{ds}{d\varphi} \right)^2, \quad \text{где} \quad s = \frac{1}{r}.$$

Поэтому

$$U = E - \frac{L^2}{2m} \left[ \left( \frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right].$$

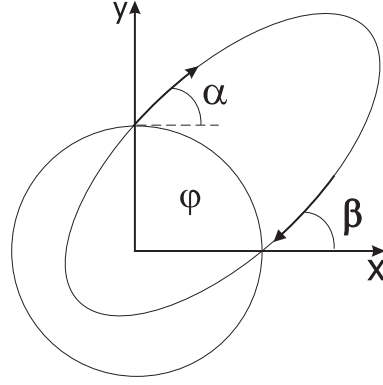
Подставляя здесь

$$s = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\varepsilon\varphi)],$$

получаем

$$U(r) = E - \frac{L^2\varepsilon^2}{2mp^2}(e^2 - 1) - \frac{L^2(1 - \varepsilon^2)}{2mr^2} - \frac{L^2\varepsilon^2}{mp} \frac{1}{r}.$$

### 12.3



Угол  $\varphi$  отсчитываем от оси  $x$ . При движении ракеты  $\dot{\varphi} < 0$ , поэтому в качестве вектора Гамильтона берем

$$\vec{u} = \vec{V} + \frac{\tilde{\alpha}}{L} \vec{e}_{\varphi}.$$

Здесь  $\tilde{\alpha} = GmM$  (так обозначили, т.к.  $\alpha$  у нас обозначает угол). Сохранение его  $x$ -проекции дает

$$V \cos \alpha - \frac{\tilde{\alpha}}{L} = -V \cos \beta$$

(на полюсе и на экваторе величина скорости ракеты будет одно и то же, из сохранения энергии). Сохранение  $y$ -проекции дает

$$V \sin \alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{L} - V \sin \beta.$$

Следовательно,

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\tilde{\alpha}}{VL} = \cos \alpha + \cos \beta.$$

Или

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Отсюда  $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = 1$ , и  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Тогда

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{VL} = \frac{\tilde{\alpha}}{mV^2 R \cos \alpha}.$$

Следовательно,

$$V^2 = \frac{\tilde{\alpha}}{mR \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)}$$

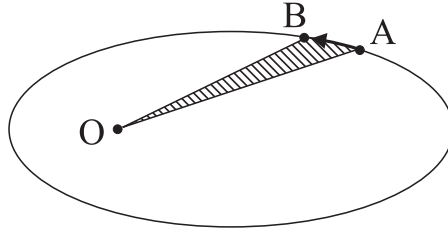
минимальна, когда максимальна  $\cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)$ . Но

$$\frac{d}{d\alpha} [\cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)] = -2 \cos \alpha \sin \alpha + \cos 2\alpha = \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 0$$

дает  $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$  и  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ . Следовательно, оптимальный угол запуска ракеты составляет  $\frac{\pi}{8}$ .

## 12.4

Момент импульса  $L = mr^2\dot{\varphi}$ . Но  $\frac{1}{2}r^2d\varphi$  есть площадь сектора  $OAB$ . Следовательно,  $\frac{1}{2} \int r^2 d\varphi = \frac{L}{2m} \int dt$  означает, что  $\frac{LT}{2m}$  = площадь эллипса =  $\pi ab$ , где  $T$ - период обращения.



Но из  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  следует, что

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = a\sqrt{-\frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = L\sqrt{\frac{a}{m\alpha}},$$

т.к.

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \quad \text{и} \quad E = -\frac{\alpha}{2a}.$$

Поэтому получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}} a \sqrt{a}.$$

При рассмотрении задачи двух тел (Солнце с массой  $M$  и планета с массой  $m$ ), в предыдущих формулах мы должны сделать замену  $m \rightarrow \mu = \frac{mM}{m+M}$  и  $\alpha = GmM$ . Поэтому будем иметь

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{G(m+M)}} a.$$

Следовательно,

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{m_2 + M}{m_1 + M} \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Третий закон Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

получится, только если пренебречь массами планет по сравнению с массой Солнца.

## 12.5

Так как

$$E = -\frac{\alpha}{2a} = -\frac{\alpha}{r_{\min} + r_{\max}},$$

энергии спутников равны

$$E_1 = -\frac{\alpha}{2R} = \frac{mV_1^2}{2} - \frac{\alpha}{R} \text{ и } E_2 = -\frac{\alpha}{8R} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{\alpha}{R},$$

где  $V_1$  и  $V_2$  их скорости в перигее и  $\alpha = GmM$ . Отсюда

$$V_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{mR}} \text{ и } V_2 = \sqrt{\frac{7\alpha}{4mR}}.$$

Из сохранения импульса  $2mV = mV_1 + mV_2$ , находим скорость после стыковки

$$V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) = \frac{\sqrt{7} + 2}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{mR}}.$$

Поэтому полная энергия после стыковки будет

$$E = \frac{2mV^2}{2} - \frac{2\alpha}{R} = \frac{(\sqrt{7} + 2)^2 \alpha}{16 R} - \frac{2\alpha}{R} = -\frac{21 - 4\sqrt{7}}{16} \frac{\alpha}{R}.$$

С другой стороны

$$E = -\frac{2\alpha}{R + r},$$

где  $r$  – новый апогей. Поэтому получаем

$$r = \frac{11 + 4\sqrt{7}}{21 - 4\sqrt{7}} R = \frac{343 + 128\sqrt{7}}{329} R \approx 2.07R.$$

## 12.6

При круговом движении

$$\left| \frac{d\vec{p}}{dr} \right| = \frac{p\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{pV}{R}$$

Поэтому должно быть

$$\frac{pV}{R} = \left| -\frac{dU}{dr} \right|_{r=R} = \frac{\alpha\beta}{R^{\beta+1}}.$$

Но  $L = pR$  (при круговом движении). Следовательно,

$$\frac{LV}{R^2} = \frac{\alpha\beta}{R^{\beta+1}} \text{ и } V = \frac{\alpha\beta}{LR^{\beta-1}}.$$

Ограничение на  $L$  возникает, если  $\beta = 1$ . Тогда  $\frac{\alpha}{L} = V < c$  дает

$$L > \frac{\alpha}{c}.$$

Если  $\beta \neq 1$ , круговые орбиты возможны для всех значений момента импульса.

Если  $\beta = 1$ , радиус круговой орбиты находится так: из  $\frac{pV}{R} = \frac{\alpha}{R^2}$  имеем

$$\frac{mV^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\alpha}{R} \text{ и } R = \frac{\alpha}{mV^2} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Подставляя сюда  $V = \frac{\alpha}{L}$ , будем иметь

$$R = \frac{L^2}{m\alpha} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{L^2 c^2}}.$$

## Контрольная работа 13

### 13.1

Сила, которая действует на электрон, равна (в системе CGSE)

$$\vec{F} = \frac{e}{c} \vec{V} \times \vec{B} = \frac{eg}{cr^3} \vec{V} \times \vec{r}.$$

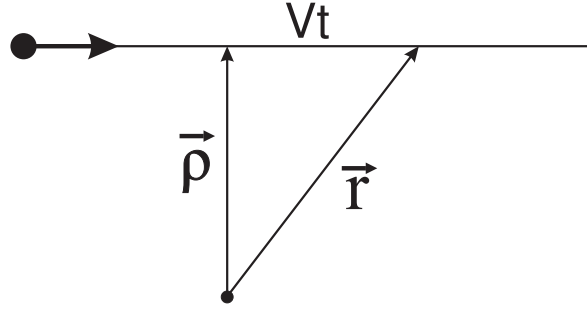
Изменение импульса

$$\Delta \vec{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F} dt = \frac{eg}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{V} \times \vec{r}}{r^3} dt.$$

Так как электрон быстрый, при вычислении интеграла можно считать, что электрон движется по прямой с неизменной скоростью.

Тогда  $\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{V}t$  и  $\vec{V} \times \vec{r} = \vec{V} \times \vec{\rho}$ . Кроме того,  $r = \sqrt{\rho^2 + V^2 t^2}$ . Поэтому

$$\Delta \vec{p} \approx \frac{eg}{c} \vec{V} \times \vec{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(\rho^2 + V^2 t^2)^{3/2}} = \frac{eg}{c} \frac{\vec{V} \times \vec{\rho}}{\rho^2} \frac{t}{\sqrt{\rho^2 + V^2 t^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2eg}{c} \frac{\vec{V} \times \vec{\rho}}{V\rho^2}.$$



Импульс электрона после рассеяния  $\vec{q} = \vec{p} + \Delta\vec{p}$ , причем  $q \approx p$ , так как  $\Delta\vec{p} \perp \vec{p}$ . Пусть  $\theta$  – угол рассеяния. Тогда

$$|\vec{q} \times \vec{p}| = p^2 \sin \theta = |\Delta\vec{p} \times \vec{p}| = \frac{2eg}{cV\rho^2} |\vec{p} \times (\vec{V} \times \vec{\rho})|.$$

Но  $\vec{p} \times (\vec{V} \times \vec{\rho}) = \vec{V} (\vec{p} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho} (\vec{p} \cdot \vec{V}) = -\vec{\rho} pV$ , так как  $\vec{p} \perp \vec{\rho}$  и  $\vec{p} \parallel \vec{V}$ . Поэтому получаем

$$p^2 \sin \theta \approx \frac{2eg}{cV\rho^2} \rho pV \quad \text{и} \quad \theta \approx \sin \theta \approx \frac{2eg}{c\rho p}.$$

### 13.2

Так как момент импульса  $L = mr^2|\dot{\varphi}|$ , то энергия частицы

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r).$$

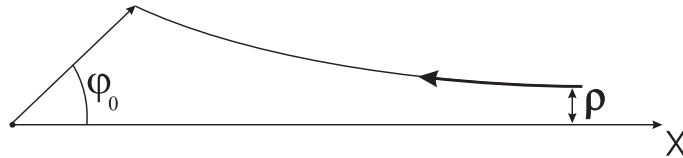
Отсюда ( для  $\dot{r} < 0$  )

$$dt = - \left[ \frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{L^2}{m^2r^2} \right]^{-1/2} dr.$$

С другой стороны, из  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}$  получаем ( заметим, что  $\dot{\varphi} > 0$  и  $|\dot{\varphi}| = \dot{\varphi}$  )

$$\varphi_0 = - \int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{L}{2mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{L^2}{m^2r^2}}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{T}}}.$$

Так как  $E = T = \frac{mV_{\infty}^2}{2}$  и  $L = m\rho V_{\infty}$ .



Это справедливо для любого центрального потенциала. В случае  $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$  будем иметь

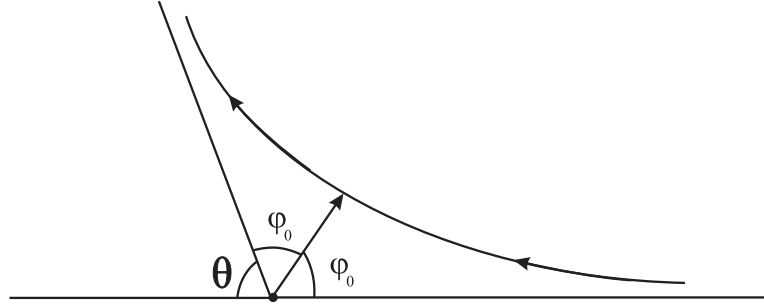
$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - (\rho^2 + \frac{\alpha}{T}) \frac{1}{r^2}}},$$

причем  $1 - (\rho^2 + \frac{\alpha}{T}) \frac{1}{r_{min}^2} = 0$  (при  $r = r_{min}$ ,  $\dot{r} = 0$ ). Сделаем подстановку  $s = \frac{1}{r}$ . Тогда

$$\varphi_0 = \int_0^{s_0} \frac{\rho ds}{\sqrt{1 - (\rho^2 + \frac{\alpha}{T}) s^2}}, \quad s_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \frac{\alpha}{T}}}.$$

Но

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x \quad \text{и} \quad \varphi_0 = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{\alpha}{T}}} \arcsin \left( \sqrt{\rho^2 + \frac{\alpha}{T}} s \right) \Big|_0^{s_0} = \frac{\pi \rho}{2\sqrt{\rho^2 + \frac{\alpha}{T}}}.$$



Угол рассеяния  $\theta$  и  $\varphi_0$  связаны так  $\theta = \pi - 2\varphi_0$ . Поэтому

$$\theta = \pi - \frac{\pi \rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{\alpha}{T}}} = \pi \left[ 1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{\alpha}{T}}} \right].$$

Если  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , прицельный параметр будет определяться из

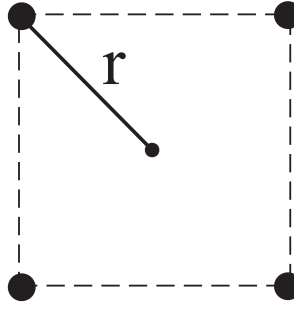
$$\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{\alpha}{T}}} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда  $\rho^2 = \frac{\alpha}{3T}$  и сечение рассеяния на угол, больший  $90^\circ$ , будет

$$\sigma = \pi \rho^2 = \frac{\alpha \pi}{3T}.$$

### 13.3

Из симметрии задачи ясно, что звезды всегда будут в вершинах некоторого квадрата. Пусть расстояние от звезд до центра этого квадрата равно  $r$ . Тогда сторона квадрата будет  $a = \sqrt{2}r$ . Сила притяжения, действующая



на звезду со стороны других звезд, направлена к центру и по величине равна

$$F = G \frac{M^2}{(2r)^2} + 2G \frac{M^2}{a^2} \cos 45^\circ = \frac{GM^2}{r^2} \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

То есть можно считать, что каждая звезда движется в центральном поле притяжения

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = GM^2 \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$$

с центром в центре первоначального квадрата. По формуле Резерфорда

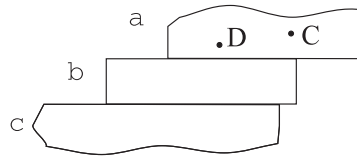
$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{MV^2 b}$$

находим угол рассеяния звезд

$$\theta = 2 \arctan \left[ \frac{GM}{bV^2} \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4} \right].$$

### 13.4

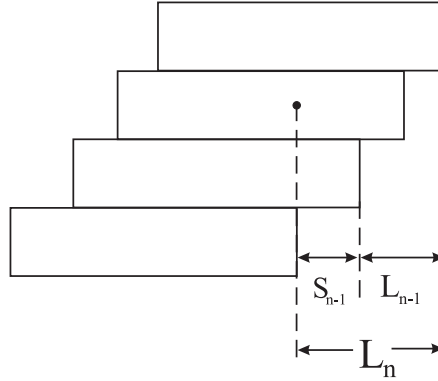
Докажем, что в оптимальной ситуации центр тяжести любой верхней части конструкции находится на одной вертикали с правым краем пластины, на которой она опирается.



Пусть это не так и центр тяжести  $C$  верхней части  $a$  находится левее края пластины  $b$ . Тогда часть  $a$  можно сдвинуть вправо скажем на  $x$  и она все равно устойчиво будет опираться на пластину  $b$ . При этом центр тяжести  $D$  системы  $b + a$  тоже сдвинется вправо, но на меньшую величину  $y = \frac{M}{M+m}x$ , где  $M$  – масса части  $a$  и  $m$  – масса пластины. Если теперь



систему  $b + a$  сдвинем влево на  $y$ , ее центр масс  $D$  окажется в прежней точке и  $b + a$  будет снова устойчиво опираться на нижнюю часть  $c$ . После этих манипуляций пролет увеличится на  $x - y = \frac{m}{M+m}x$ . Это доказывает сделанное утверждение. Следовательно, максимальный пролет  $L_n$  удовлетворяет рекуррентному соотношению  $L_n = S_{n-1} + L_{n-1}$ , где  $S_{n-1}$  есть расстояние по горизонтали от правого нижнего края верхней конструкции из  $(n - 1)$  пластин до ее центра масс ( см. рисунок ).



С другой стороны, для центра масс конструкции из  $n$  пластин, когда центр масс верхней части из  $(n - 1)$  пластин проходит через правый край нижней пластины, имеем

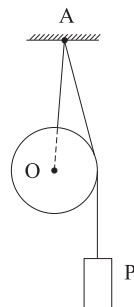
$$S_n = \frac{m}{m + (n - 1)m} \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \frac{1}{n}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} L_n &= S_{n-1} + L_{n-1} = S_{n-1} + S_{n-2} + L_{n-2} = \dots = S_{n-1} + S_{n-2} + \dots + S_1 = \\ &= \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) \approx \frac{a}{2} \ln n \end{aligned}$$

при  $n \gg 1$ . Тогда  $L_n = 3a$  дает  $\ln n = 6$  и  $n = e^6 \approx 400$ .

### 13.5



При равновесии центр тяжести системы находится на одной вертикали с точкой подвеса  $A$ . Пусть прямая  $AO$  образует угол  $\varphi$  с вертикалью и начало системы отсчета находится в точке  $A$ . Тогда в равновесии

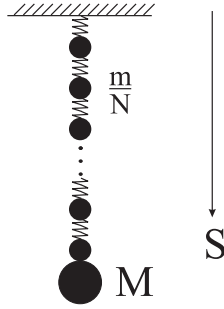
$$0 = x_{\text{ц.м.}} = \frac{1}{P+Q}[-Ql \sin \varphi + P(R - l \sin \varphi)]$$

(центр шара находится влево от вертикали на расстоянии  $l \sin \varphi$  и гиря находится вправо от вертикали на расстоянии  $R - l \sin \varphi$ ). Следовательно,  $PR = (Q + P)l \sin \varphi$  и

$$\sin \varphi = \frac{R}{l} \frac{P}{Q + P}.$$

## Контрольная работа 14

### 14.1



Заменяем канат на систему  $N$  грузиков массы  $\frac{m}{N}$  каждый и  $N$  невесомых пружин длины  $\frac{l}{N}$  каждый. Жесткость маленькой пружинки будет в  $N$ -раз больше, чем жесткость каната (т.к. у нее длина в  $N$ -раз меньше). Поэтому уравнение движения  $i$ -го грузика будет

$$\frac{m}{N} \ddot{S}_i = \frac{m}{N} g - Nk \left( S_i - S_{i-1} - \frac{l}{N} \right) + Nk \left( S_{i+1} - S_i - \frac{l}{N} \right), \quad i < N,$$

где  $S_i$  - его координата. Это уравнение можно записать так

$$\ddot{S}_i = g + \frac{kN^2}{m} \left[ S_{i+1} - S_i - (S_i - S_{i-1}) \right].$$

Нас интересует предел  $N \rightarrow \infty$  поэтому введем непрерывную переменную  $x$  через  $x = i \frac{l}{N}$  и будем рассматривать  $S_i$  как функцию  $x$ :  $S_i \equiv S(x, t)$ . Тогда

$$S_{i+1} - S_i = S(x + dx, t) - S(x, t) = \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} dx,$$

где  $dx = \frac{l}{N}$ , и

$$S_i - S_{i-1} = S(x, t) - S(x - dx, t) = \frac{\partial S(x - dx, t)}{\partial x} dx.$$

Поэтому, в пределе  $N \rightarrow \infty$ ,  $S_{i+1} - S_i - (S_i - S_{i-1})$  можно заменить на

$$\left[ \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial S(x - dx, t)}{\partial x} \right] dx = \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} (dx)^2 = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{l^2}{N^2}$$

и уравнение движения переписывается так

$$\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial t^2} - \frac{kl^2}{m} \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} = g.$$

Но это для  $i < N$ , т.е.  $x < l$ . Для последнего грузика вместе с телом  $M$ , уравнение движения будет

$$\left( M + \frac{m}{N} \right) \ddot{S}_N = \left( M + \frac{m}{N} \right) g - Nk \left( x_N - x_{N-1} - \frac{l}{N} \right).$$

Для перехода к непрерывному пределу, заметим что

$$N(x_N - x_{N-1}) \rightarrow N[S(l, t) - S(l - dx, t)] \rightarrow N \frac{\partial S(l - dx, t)}{\partial x} dx \rightarrow l \frac{\partial S(l, t)}{\partial x}.$$

Следовательно, в непрерывном пределе получим уравнение

$$\frac{\partial^2 S(l, t)}{\partial t^2} = g - \frac{kl}{M} \left[ \frac{\partial S(l, t)}{\partial l} - 1 \right].$$

Кроме этого будем иметь граничное условие  $S(0, t) = 0$ , т.к. чем ближе точка подвеса, тем меньше растягивается соответствующий участок каната. Пусть  $S(x, t) = S_0(x) + A(x) \cos \omega t$ , где  $S_0(x)$  соответствует положению равновесия. Т.е.

$$-\frac{kl^2}{m} \frac{d^2 S_0(x)}{dx^2} = g \quad \text{и} \quad 0 = g - \frac{kl}{M} \left[ \frac{dS_0(l)}{dl} - 1 \right].$$

Подстановка  $S(x, t)$  в уравнения движения дает

$$A\omega^2 + \frac{kl^2}{m} \frac{d^2 A}{dx^2} = 0,$$

и, при  $x = l$ ,

$$\omega^2 A(l) = \frac{kl}{M} \frac{dA(l)}{dl}.$$

Поэтому

$$A(x) = a_1 \cos \left( \sqrt{\frac{m\omega^2}{k}} \frac{x}{l} \right) + a_2 \sin \left( \sqrt{\frac{m\omega^2}{k}} \frac{x}{l} \right),$$

где  $a_1, a_2$  - некоторые константы. Условие  $S(0, t) = 0$  дает  $A(0) = 0$  и  $a_1 = 0$ . Тогда как  $\omega^2 A(l) = \frac{kl}{M} \frac{dA(l)}{dl}$  условие означает

$$\omega^2 \sin \left[ \sqrt{\frac{m}{k}} \omega \right] = \frac{kl}{M} \sqrt{\frac{m}{k}} \omega \frac{1}{l} \cos \left[ \sqrt{\frac{m}{k}} \omega \right].$$

Или

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \omega \operatorname{tg} \left[ \sqrt{\frac{m}{k}} \omega \right] = \frac{m}{M}.$$

Это трансцендентное уравнение определяет частоту вертикальных колебаний  $\omega$ . Рассмотрим несколько предельных случаев. Если  $m \rightarrow 0$ ,

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \omega \operatorname{tg} \left[ \sqrt{\frac{m}{k}} \omega \right] \rightarrow \frac{m}{k} \omega^2$$

и получим  $\omega^2 = \frac{k}{M}$ . Если  $M \rightarrow 0$ , то  $\operatorname{tg} \left[ \sqrt{\frac{m}{k}} \omega \right] = \infty$  и  $\sqrt{\frac{m}{k}} \omega = \frac{\pi}{2} + n\pi$ , или

$$\omega = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть теперь  $\frac{m}{M} \ll 1$ . Используя  $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{1}{3}x^3$ , получим

$$\frac{m}{k} \omega^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{m}{k} \omega^2 \right) \approx \frac{\frac{m}{k} \omega^2}{1 - \frac{1}{3} \frac{m}{k} \omega^2} = \frac{m}{M}.$$

Решая относительно  $\omega^2$ , будем иметь

$$\omega^2 = \frac{k}{M + \frac{1}{3}m} \approx \frac{k}{M} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{m}{M} \right).$$

## 14.2

Пусть кольцо радиуса  $r$  повернулось на маленький угол  $\theta$ . Тогда оно поднимется на высоту

$$h = l - \sqrt{l^2 - r^2 \theta^2} \approx \frac{r^2 \theta^2}{2l}.$$

Заметим, что

$$\dot{h} = \frac{r^2 \theta \dot{\theta}}{l} = \frac{r \theta}{l} r \dot{\theta} \ll r \dot{\theta},$$

поэтому энергией поступательного движения  $\frac{m\dot{h}^2}{2}$  можно пренебречь по сравнению с энергией вращательного движения  $\frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2$ . Полная энергия кольца

$$E = \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + mgh = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mg\frac{r^2}{l}\theta^2.$$

Поэтому  $0 = \frac{dE}{dt} = mr^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta)$  дает уравнение движения  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ . Следовательно, частота крутильных колебаний  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

### 14.3

Из-за цилиндрической симметрии,  $z$ -компонента углового момента  $L_z = m\rho^2\dot{\varphi}$  сохраняется. Энергия частицы

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}\dot{z}^2 + mgz = \frac{m}{2}(1 + z'^2)\dot{\rho}^2 + \frac{L_z^2}{2m\rho^2} + mgz,$$

где  $z' = \frac{dz}{d\rho}$ . Энергия сохраняется, поэтому

$$0 = \frac{dE}{dt} = \dot{\rho} \left[ m\ddot{\rho}(1 + z'^2) + m\dot{\rho}^2 z' z'' - \frac{L_z^2}{4m\rho^3} + mgz' \right]$$

и получим уравнение движения

$$m(1 + z'^2)\ddot{\rho} + m\dot{\rho}^2 z' z'' - \frac{L_z^2}{4m\rho^3} + mgz' = 0.$$

Пусть  $\rho = r + x$ , где  $r$  – радиус равновесной круговой орбиты, а  $x$  – возмущение. Тогда

$$\frac{L_z^2}{4mr^3} = mgz'(r), \quad z'(\rho) \approx z'(r) + z''(r)x, \quad \frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{(r+x)^3} \approx \frac{1}{r^3} \left( 1 - \frac{3x}{r} \right),$$

и, с точностью до линейных по  $x$  членов, уравнение движения станет

$$m \left( 1 + z'^2(r) \right) \ddot{x} + \frac{L_z^2}{4mr^3} \frac{3x}{r} + mgz''(r)x = 0.$$

Или, если учтем  $\frac{L_z^2}{4mr^3} = mgz'(r)$ ,

$$\left( 1 + z'^2(r) \right) \ddot{x} + g \left[ z''(r) + 3 \frac{z'(r)}{r} \right] x = 0.$$

Если  $z''(r) + 3 \frac{z'(r)}{r} > 0$ , будем иметь осцилляции около равновесной орбиты с частотой

$$\omega = \sqrt{g \frac{z''(r) + 3 \frac{z'(r)}{r}}{1 + z'^2(r)}}.$$

Если  $z''(r) + 3\frac{z'(r)}{r} < 0$ , возмущение  $x(t)$  будет экспоненциально расти и орбита не будет стабильной. Если  $z''(r) + 3\frac{z'(r)}{r} = 0$ , возмущение будет расти линейно со временем, и орбита тоже не будет стабильной. Таким образом, условием устойчивого равновесия является  $z''(r) + 3\frac{z'(r)}{r} > 0$ . Из  $\rho^2 - z^2 = R^2$  следует, что  $zz' = \rho$ . Т.е.  $z' = \frac{\rho}{z}$ . Тогда

$$z'' = \frac{1}{z} - \frac{\rho z'}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{\rho^2}{z^3}.$$

Поэтому

$$z''(r) + 3\frac{z'(r)}{r} = \frac{1}{z} - \frac{r^2}{z^3} + 3\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \left( 4 - \frac{r^2}{z^2} \right).$$

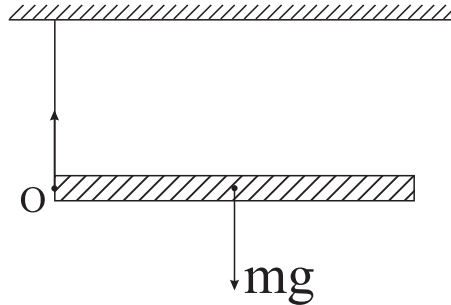
Но  $z > 0$  (иначе вертикальной компоненты силы реакции опоры не будет). Следовательно, орбита устойчива, если

$$4 > \frac{r^2}{z^2} = \frac{r^2}{r^2 - R^2}.$$

Отсюда  $3r^2 > 4R^2$  и

$$r > \frac{2}{\sqrt{3}}R.$$

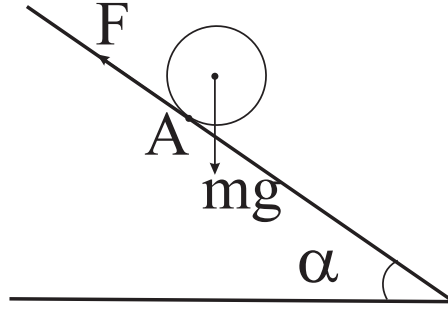
#### 14.4



Стержень начнет вращаться относительно точки  $O$  с угловым ускорением  $\dot{\omega} = \frac{mg(l/2)}{I}$ , где  $l$  — длина стержня, а  $I = \frac{ml^2}{12} + m(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{3}ml^2$  — его момент относительно  $O$ . Следовательно,  $\dot{\omega} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$ . Тогда центр масс стержня будет двигаться с линейным ускорением  $a = \dot{\omega}\frac{l}{2} = \frac{3}{4}g$ . С другой стороны,  $a = \frac{mg - T}{m}$ . Следовательно,  $T = m(g - a) = \frac{1}{4}mg$ .

#### 14.5

Сила трения  $F$  раскручивает цилиндр с угловым ускорением  $\dot{\omega} = \frac{FR}{I} = \frac{2F}{mR}$ . В точке касания  $A$  скорость равна нулю. Поэтому  $V - \omega R = 0$ , где  $V$  есть



скорость центра масс цилиндра. Тогда  $a = \dot{\omega}R = \frac{2F}{m}$ . С другой стороны,  $ma = mg \sin \alpha - F$ . Следовательно,  $F = \frac{1}{3}mg \sin \alpha$ . Но сила трения не может превысить максимальное значение  $\mu N = \mu mg \cos \alpha$ . Следовательно  $\frac{1}{3}mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha$  и если  $\operatorname{tg} \alpha \leq 3\mu$ , цилиндр будет скатываться без скольжения. Раз цилиндр скатывается со скольжением, значит  $\alpha > \operatorname{arctg}(3\mu)$ .

## 14.6

Скорость шариков в системе наблюдателя находим по формуле сложения скоростей:

$$V_1 = \frac{u + V}{1 + \frac{uV}{c^2}} \quad \text{и} \quad V_2 = \frac{V - u}{1 - \frac{uV}{c^2}}.$$

Суммарный импульс шариков (после разрыва цепи) будет

$$mV_1\gamma_1 + mV_2\gamma_2 = mV_1\gamma_V\gamma_u \left(1 + \frac{uV}{c^2}\right) + mV_2\gamma_V\gamma_u \left(1 - \frac{uV}{c^2}\right) = 2mV\gamma_V\gamma_u.$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\gamma_{\vec{V} \oplus \vec{u}} = \gamma_V \gamma_u \left(1 + \frac{\vec{u} \cdot \vec{V}}{c^2}\right).$$

Заметим, что  $p_1 + p_2 \neq 2mV\gamma_V = q_1 + q_2$  — сумма импульсов шариков до разрыва цепи. Дело в том, что сжатая пружина имеет упругую энергию покоя  $E$  и, следовательно, массу  $M = \frac{E}{c^2}$ .  $E$  находим из закона сохранения энергии в системе покоя трубки

$$E + 2mc^2 = 2mc^2\gamma_u$$

(При этом мы массой не деформированной пружины пренебрегли). Следовательно,

$$M = \frac{E}{c^2} = 2m(\gamma_u - 1)$$

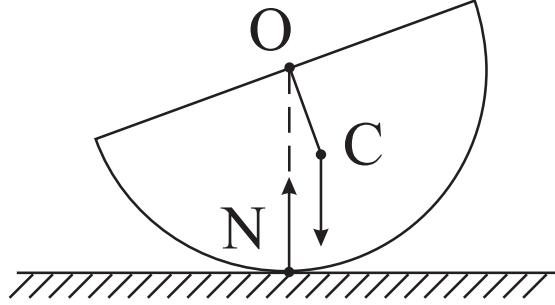
и импульс сжатой пружины будет  $q = MV\gamma_V = 2mV\gamma_V(\gamma_u - 1)$ . Поэтому суммарный импульс до разрыва цепи есть

$$q + q_1 + q_2 = 2mV\gamma_V(\gamma_u - 1) + 2mV\gamma_V = 2mV\gamma_V\gamma_u = p_1 + p_2.$$

## Контрольная работа 15

### 15.1

В системе полуцилиндра сила инерции  $-mg \sin \alpha$  компенсирует компоненту силы тяжести вдоль наклонной плоскости. Поэтому задача эквивалентна нахождению частоты малых колебаний полуцилиндра на гладкой горизонтальной поверхности в эффективном поле тяжести  $g \cos \alpha$ .



Так как в горизонтальном направлении сила не действует, центр тяжести полуцилиндра движется только по вертикали. При малых колебаниях этим смещением по вертикали тоже можно пренебречь и считать, что полуцилиндр вращается вокруг центра масс. При наклоне полуцилиндра на угол  $\varphi \ll 1$ , сила реакции опоры  $N \approx mg \cos \alpha$  создает возвращающий момент  $Nb \sin \varphi \approx (mgb \cos \alpha)\varphi$ , где  $b$  – расстояние от центра масс  $C$  до геометрического центра цилиндра  $O$ . Следовательно, уравнение движения будет  $I_c \ddot{\varphi} = -(mgb \cos \alpha)\varphi$  и частота малых колебаний

$$\omega^2 = \frac{mgb \cos \alpha}{I_c}.$$

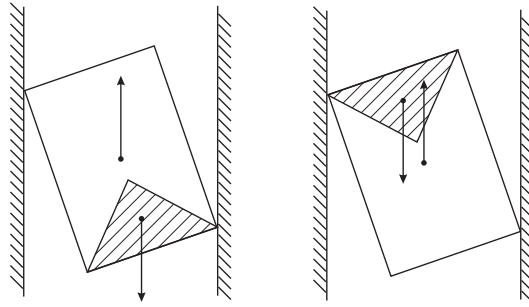
Момент инерции полуцилиндра относительно оси цилиндра  $I_o$  будет половина момента инерции цилиндра (массы  $2m$ ), т.е.  $I_o = \frac{1}{2} \frac{1}{2} 2mR^2 = \frac{1}{2} mR^2$ . С другой стороны, по теореме Штейнера,  $I_o = I_c + mb^2$ . Отсюда получаем  $I_c = \frac{1}{2} m(R^2 - 2b^2)$ . Величину  $b$  можно найти по второй теореме Гюльдена: объем тела вращения равен произведению длины окружности, описываемой центром тяжести фигуры на ее площадь. Если вращать полукруг вокруг своего диаметра, получится шар. Поэтому, согласно теореме Гюльдена, должны иметь  $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2}\pi R^2 2\pi b$ . Отсюда  $b = \frac{4R}{3\pi}$  и, окончательно,

$$\omega^2 = \frac{g \cos \alpha}{R} \frac{24\pi}{9\pi^2 - 32}.$$



## 15.2

Выталкивающая сила больше, чем сила тяжести. Тем не менее песочные часы не сразу начнут всплывать после переворачивания трубки. Дело в том, что выталкивающая сила приложена к геометрическому центру симметричных часов, а сила тяжести – к центру масс. Вначале, когда часы плавают в трубке, центр масс находится ниже геометрического центра и это состояние устойчиво относительно наклона часов, так как при случайном наклоне возникает возвращающий момент.



После переворачивания трубки центр тяжести оказывается выше геометрического центра и это состояние не устойчиво относительно случайных наклонов часов. В своей попытке развернуться, часы упрутся в стенки трубки и давят на них. В результате возникает сила трения которая мешает всплытию часов. После израсходования примерно половины песка, центр тяжести песочных часов снова окажется ниже геометрического центра и часы начнут всплывать.

## 15.3

Удар рассекает стержень пополам. Пусть каждая половина имеет массу  $m$  и длину  $l$ . Из-за удара половинка стержня приобретает скорость  $V = \frac{1}{m} \int F dt$  и раскручивается относительно центра масс с угловой скоростью  $\omega = \frac{1}{I} \int F \frac{l}{2} dt = \frac{6}{ml} \int F dt$ . Следовательно, конец стержня, который опирается на бокал с вином, сразу после удара будет иметь скорость  $V - \frac{l}{2}\omega = -2V$  и полетит вверх. Поэтому вино не прольется.

Но это рассуждение пренебрегает упругими свойствами стержня. На самом деле после удара вдоль стержня распространяется волна поперечной деформации и другой конец стержня все равно успевает немного сдвинуться вниз. Поэтому для успешной демонстрации опыта надо предусмотреть демпфирование смещений порядка 1 мм [36].

## 15.4

Из уравнения движения

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{eg}{mc} \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{r}}{r^3}$$

следует, что квадрат скорости  $\dot{\vec{r}}^2$  и квадрат орбитального момента  $\vec{L}^2$  являются интегралами движения. Действительно,  $0 = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}^2)$ . А в задаче 8.5 показали, что вектор Пуанкаре

$$\vec{J} = \vec{L} - \frac{eg}{c} \frac{\vec{r}}{r}$$

сохраняется. Но  $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$ , поэтому  $\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \left(\frac{eg}{c}\right)^2$  и, следовательно,  $\vec{L}^2$  тоже сохраняется.

Зависимость  $r(t)$  можно найти так. Имеем

$$\frac{d^2 \vec{r}^2}{dt^2} = 2 \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) = 2 \dot{\vec{r}}^2 = 2V^2,$$

т.к.  $\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = 0$ . Пусть начало отсчета времени выбрано так, что при  $t = 0$  электрон находится на минимальном расстоянии  $r_0$  от центра поля и, следовательно,  $\vec{r}(0) \cdot \dot{\vec{r}}(0) = 0$ . Тогда интегрированием выше приведенного уравнения получаем  $\vec{r}^2 = V^2 t^2 + r_0^2$  и  $r(t) = \sqrt{V^2 t^2 + r_0^2}$ . Минимальное расстояние  $r_0$  можно найти из сохранения величин скорости и орбитального момента:  $L = mV\rho = mVr_0$ . Отсюда  $r_0 = \rho$ .

Далее рассмотрим скалярное произведение  $\vec{J} \cdot \vec{r} = Jr \cos \theta = -\frac{eg}{c}r$ . Это показывает, что  $\cos \theta = -\frac{eg}{cJ}$  и угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{J}$  не меняется с течением времени – электрон движется на поверхности конуса с углом раствора  $2\theta$ , с вершиной в начале координат и с осью вдоль вектора Пуанкаре  $\vec{J}$ . Поэтому удобно ввести сферические координаты с осью  $z$  вдоль вектора Пуанкаре. Тогда  $\vec{r} = r(\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k})$  и

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}(\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}) + r\dot{\varphi}(-\sin \theta \sin \varphi \vec{i} + \sin \theta \cos \varphi \vec{j}).$$

Поэтому

$$V^2 = \dot{\vec{r}}^2 = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \sin^2 \theta + \dot{r}^2 \cos^2 \theta = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta.$$

Отсюда, с учетом  $r(t) = \sqrt{V^2 t^2 + \rho^2}$ , получаем

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{V^2 - \dot{r}^2}}{r \sin \theta} = \frac{V\rho}{(V^2 t^2 + \rho^2) \sin \theta}.$$

Но

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{eg}{cL}\right)^2}}.$$

Следовательно,

$$\dot{\varphi} = \frac{V\rho\sqrt{1 + \left(\frac{eg}{cL}\right)^2}}{\rho^2 + V^2t^2}$$

и, интегрируя в предположении  $\varphi(0) = 0$ , получаем

$$\varphi(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{eg}{cL}\right)^2} \operatorname{arctg} \frac{Vt}{\rho}.$$

Заметим, что при  $t \rightarrow \pm\infty$  имеем  $\dot{r} \rightarrow \pm V$ ,  $r\dot{\varphi} \rightarrow 0$  и

$$\varphi \rightarrow \pm \frac{\lambda\pi}{2}, \quad \text{где } \lambda = \sqrt{1 + \left(\frac{eg}{cL}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{eg}{mcV\rho}\right)^2}.$$

Поэтому скорость электрона в отдаленном прошлом и в отдаленном будущем дается выражением

$$\dot{\vec{r}}(\pm\infty) = V \sin \theta \left[ \pm \cos \left( \frac{\lambda\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left( \frac{\lambda\pi}{2} \right) \vec{j} \right] \pm V \cos \theta \vec{k}.$$

Следовательно, для угла рассеяния  $\alpha$  получаем

$$\cos \alpha = \frac{\dot{\vec{r}}(\infty) \cdot \dot{\vec{r}}(-\infty)}{V^2} = -1 + \frac{2}{\lambda^2} \sin^2 \left( \frac{\lambda\pi}{2} \right).$$

## 15.5

Пусть сила трения, которая действует на шар, равна  $\vec{F}$ . Уравнение движения имеют вид

$$m\dot{\vec{V}} = \vec{F} \quad \text{и} \quad I\dot{\vec{\omega}} = \vec{R} \times \vec{F},$$

где  $I = \frac{2}{5}mR^2$  и  $\vec{R}$  есть вектор от центра шара к точке касания (т.е. радиус-вектор точки касания равен  $\vec{r} + \vec{R}$ ). Так как шар не проскальзывает, в точке касания скорость на поворотном столе  $\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R})$  и на поверхности шара  $\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{R}$  равны друг другу. Дифференцируя равенство  $\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R}) = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{R}$ , получаем

$$\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{V}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} = \frac{1}{m}\vec{F} + \frac{1}{I}(\vec{R} \times \vec{F}) \times \vec{R}.$$

Но  $(\vec{R} \times \vec{F}) \times \vec{R} = R^2 \vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{R}) \vec{R} = R^2 \vec{F}$ , т.к.  $\vec{F} \cdot \vec{R} = 0$  (вектор  $\vec{R}$  перпендикулярен к плоскости поворотного стола). Следовательно,

$$\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} = \left( \frac{1}{m} + \frac{R^2}{I} \right) \vec{F} = \frac{7}{2m} \vec{F}.$$

Определяя отсюда  $\dot{\vec{F}}$  и подставляя в уравнение  $m\dot{\vec{V}} = \vec{F}$ , получаем

$$\dot{\vec{V}} = \frac{2}{7} \vec{\Omega} \times \vec{V}.$$

Или в компонентах

$$\dot{V}_x = -\frac{2}{7} \Omega V_y, \quad \dot{V}_y = \frac{2}{7} \Omega V_x, \quad \dot{V}_z = 0.$$

Отсюда

$$\ddot{V}_x = -\frac{2}{7} \Omega \dot{V}_y = -\left( \frac{2}{7} \Omega \right)^2 V_x.$$

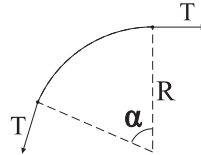
Направим ось  $x$  вдоль начальной скорости  $\vec{V}_0$ . Тогда решением этого уравнения будет  $V_x = V_0 \cos \frac{2}{7} \Omega t$ . Следовательно,  $V_y = -\frac{7}{2\Omega} \dot{V}_x = V_0 \sin \frac{2}{7} \Omega t$ . Интегрируя еще раз, с учетом  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , получаем

$$x(t) = x_0 + \frac{7V_0}{2\Omega} \sin \frac{2}{7} \Omega t, \quad y(t) = y_0 + \frac{7V_0}{2\Omega} - \frac{7V_0}{2\Omega} \cos \frac{2}{7} \Omega t.$$

Это показывает, что центр шара движется по окружности радиуса  $\frac{7V_0}{2\Omega}$  с центром в точке с радиус-вектором

$$x_0 \vec{i} + \left( y_0 + \frac{7V_0}{2\Omega} \right) \vec{j} = \vec{r}_0 + \frac{7}{2\Omega^2} \vec{\Omega} \times \vec{V}_0.$$

## 15.6



Рассмотрим участок проволоки с радиусом кривизны  $R$  и длиной  $R\alpha \ll R$ . Равнодействующая сил натяжения  $2T \sin \frac{\alpha}{2} \approx T\alpha$  уравнивается силой Ампера  $IR\alpha B$ . Поэтому получаем  $T = IRB$ . Но  $R = \frac{p}{eB}$ . Следовательно,  $T = \frac{Ip}{e}$  и

$$I = \frac{eT}{p}$$

(все величины в системе СИ).

## Благодарности

Автор благодарит В. Яньшолу за составление рисунков. Работа выполнена при частичной поддержке грантов НШ-905.2006.2 и РФФИ 06-02-16192-а.

## Список литературы

- [1] Ю. И. Бельченко, Е. А. Гилев, З. К. Силагадзе, В. Г. Соколов, Сборник задач по механике частиц и тел. НГУ, Новосибирск, 2000.
- [2] И. И. Ольховский, Ю. Г. Павленко, Л. С. Кузьменков, Задачи по теоретической механике для физиков. Изд-во МГУ, Москва, 1977.
- [3] И. В. Мещерский, Задачи по теоретической механике. Изд-во “Лань”, Санкт-Петербург, 1998.
- [4] И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев, В. Г. Харитонов, Задачи по физике. Москва “Наука”, 1981; НГУ, Новосибирск, 1999.
- [5] А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тьюкольски, Задачи по теории относительности и гравитации. Москва “Мир”, 1979.
- [6] Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо, Сборник задач по классической механике. РХД, Москва-Ижевск, 2001.
- [7] Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко. Сборник задач по аналитической механике. Москва “Наука”, 1996.
- [8] П. А. Пуртов, С. В. Анищик, В. А. Багрянский, Б. В. Большаков, В. Л. Вязовкин, Д. В. Стась, Задачи по термодинамике и статистической физике. НГУ, Новосибирск, 2005.
- [9] W. Rindler, Relativity: Special, General, and Cosmological. Oxford University Press, 2001.
- [10] D. Morin, Introductory Classical Mechanics, with Problems and Solutions. Harvard University. Available at <http://www.courses.fas.harvard.edu/~phys16/Textbook>
- [11] F. Diacu, The slingshot effect of celestial bodies, Pi in the Sky **2**, 16-18 (2000).

- [12] P. Pták, J. Tkadlec, The dog-and-rabbit chase revisited, *Acta Polytechnica* **36**, 5-10 (1996).
- [13] C. E. Mungan, A classic chase problem solved from a physics perspective, *Eur. J. Phys.* **26**, 985-990 (2005).
- [14] M. Rost, On the Dimension of a Composition Algebra, *Doc. Math. J. DMV* **1**, 209-214 (1996).
- [15] Z. K. Silagadze, Multi-dimensional vector product, *J. Phys. A* **35**, 4949-4953 (2002).
- [16] J. A. Rhodes and M. D. Semon, Relativistic velocity space, Wigner rotation and Thomas precession, *Am. J. Phys.* **72**, 943-960 (2004).
- [17] K. Brown, Reflections on Relativity: Thomas Precession,  
<http://www.mathpages.com/rr/s2-11/2-11.htm>
- [18] G. 't Hooft, Introduction to General Relativity. Rinton Press, Princeton, 2001.
- [19] J. F. L. Simmons, C. R. McInnes, Was Marx right? or How efficient are laser driven interstellar spacecraft? *Am. J. Phys.* **61**, 205-207 (2004).
- [20] Е. Абадоглу, М. Бруски, Ф. Калоджеро, Албука динамики магнитных монополей, Теоретическая и математическая физика **128**, 5-14 (2001).
- [21] A. P. Balachandran, Saha and the dyon, arXiv:hep-ph/9303312.
- [22] T. McMillen, A. Goriely, Whip waves. *PhysicaD* **184**, 192-225 (2003).
- [23] K. Y. Shen, B. L. Scott, The hourglass problem, *Am. J. Phys.* **53**, 787-788 (1985).
- [24] R. H. Price, Projectiles, pendula, and special relativity, *Am. J. Phys.* **73**, 433-438 (2005).
- [25] F. S. Crawford, Elementary examples of adiabatic invariance, *Am. J. Phys.* **58**, 337-344 (1990).
- [26] T. H. Boyer, Unfamiliar trajectories for a relativistic particle in a Kepler or Coulomb potential, *Am. J. Phys.* **72**, 992-997 (2004).
- [27] J. M. Aguirregabiria, A. Hernández, M. Rivas, Circular Orbits under Central Forces in Special Relativity, arXiv:physics/0407049.

- [28] R. P. Martínez-y-Romero, H. N. Núñez-Yépez, A. L. Salas-Brito, The Hamilton vector as an extra constant of motion in the Kepler problem, *Eur. J. Phys.* **14**, 71-73 (1993).
- [29] L. Basano, A. Bianchi, Rutherford's scattering formula via the Runge-Lenz vector, *Am. J. Phys.* **48**, 400-401 (1980).
- [30] G. Muñoz, Vector constants of the motion and orbits in the Coulomb/Kepler problem, *Am. J. Phys.* **71**, 1292-1293 (2003).
- [31] K. T. McDonald, Vertical Oscillations of a Hanging Cable. Available at <http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/>
- [32] A. J. McDonald, K. T. McDonald, Small Oscillations of a Suspended Hoop. Available at <http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/>
- [33] K. T. McDonald, A Mechanical Model that Exhibits a Gravitational Critical Radius, *Am. J. Phys.* **69**, 617-618 (2001).
- [34] P. T. Raghuram, K. Kesava Rao, Serendipity in the development of demonstration experiments, *Phys. Educ. U.K.* **31**, 313-320 (1996).
- [35] K. C. Mamola, J. Pollock, The breaking broomstick demonstration, *Phys. Teacher* **31**, 230-233 (1993).
- [36] G. Vandegrift, Transverse bending waves and the breaking broomstick demonstration, *Am. J. Phys.* **65**, 505-510 (1997).
- [37] K. T. McDonald, The Rolling Motion of a Half-Full Beer Can. Available at <http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/>
- [38] A. S. Goldhaber, Role of Spin in the Monopole Problem, *Phys. Rev.* **140**, B1407-B1414 (1965).
- [39] K. T. McDonald, Floating Wire Simulation of the Trajectory of a Charged Particle in a Magnetic Field. Available at <http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/>
- [40] J. A. Burns, Ball rolling on a turntable: Analog for charged particle dynamics, *Am. J. Phys.* **49**, 56-58 (1981).