Hausarbeit im Modul „Berechenbarkeit und Komplexität“

Aufgabe 1

6,5/8

Giulia Benta — Jannik Novak — Tobias Phillip Rimkus

14. Januar 2022

Eigenschaften berechenbarer Funktionen

a) Sei $f(n)$ eine beliebige totale Funktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto f(n) \end{aligned}$$

Es existieren unendlich viele konstante Funktionen:

$$\begin{aligned} g_i : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto f(n_i) + 1, n_i \in \mathbb{N}, beliebig fest \end{aligned}$$

die größer als $f(n)$ an jeder beliebigen Stelle n_i sind.

$g_i(n)$ ist konstant
$\implies$ $g_i(n)$ ist berechenbar
$\implies$ Es existiert keine totale Funktion die größer als alle berechenbaren totalen Funktionen ist. ✓ 2/2

b) Wir betrachten die Busy Beaver Funktion. Für alle Werte $n \geq 4 = n_0$ nimmt die Busy Beaver Funktion so hohe Werte an, dass sie nicht mehr berechenbar ist. [1]

So funktioniert Berechenbarkeit eigentlich nicht.

Außerdem ist die BB Funktion streng monoton, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$BB(n+1) > BB(n)$$

[1] Quelle: https://formal.kastel.kit.edu/~beckert/teaching/TheoretischeInformatik-SS07/110707.pdf Seite 8

für jede berechenbare Fkt ex. n_0, ...

Somit ist die BB Funktion ab dem Wert n_0 größer als alle berechenbaren totalen Funktionen, da sie streng monoton steigt und ab n_0 nicht mehr berechenbar ist.
$\Longrightarrow$ Es existiert eine totale Funktion die fast größer als alle berechenbaren totalen Funktionen ist. (✓) 1,5/2

c) Sei $f(n)$ eine beliebige totale und berechenbare Funktion:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto f(n)$$

und $g(n)$ eine beliebige totale und unberechenbare Funktion:

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto g(n)$$

Wenn $f(n)$ und $g(n)$ fast gleich sind, dann existiert n_0, sodass $f(n) = g(n)$ für alle $n > n_0$.
$\Longrightarrow$ Für $n > n_0$ ist $g(n)$ auch berechenbar, weil $g(n) = f(n)$ für alle $n > n_0$ und f(n) ist berechenbar.

Fkt. ist berechenbar oder nicht insgesamt!

Für $0 \leq n \leq n_0$ nimmt die Funktion $g(n)$ endlich viele Werte an.
$g(n)$ heißt unberechenbar falls unendlich viele n existieren, sodass $g(n)$ nicht berechenbar.

So haben wir es nicht wirklich definiert.

$\Longrightarrow$ Widerpruch und somit existieren nicht f und g, sodass f und g fast gleich sind.

1,5/2

d) Wir betrachten das spezielle Halteproblem:

$$K = \{w \,|\, M_w \, haelt \, auf \; w\}$$

Es existieren unendlich viele Turingmaschinen M_w, die halten. ✓
$\Longrightarrow$ Die unberechenbare charakteristische Funktion des speziellen Halteproblems, welche zu 1 auswertet wenn ein Wort in K ist und zu 0 auswertet wenn ein Wort nicht in K ist, hat unendlich oft den Funktionswert 1.

streng genommen ist die nicht $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

-0,5

Dazu, sei die konstante Funktion $g(n)$:

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto 1$$

eine totale berechenbare Funktion die immer zu 1 auswertet. ✓
$\Longrightarrow$ die Funktionen sind unendlich oft gleich.
$\Longrightarrow$ Es existiert eine totale berechenbare und eine totale unberechenbare Funktion die oft gleich sind. ✓

1,5/2