FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2021/22
Stand: 14. März 2022

1. Hausarbeit (2. Durchgang) – Logik

Abgabe: 06.04.2022 im ISIS-Kurs [WiSe 2021/22] Logik

Informationen zur Hausarbeit:

Diese Hausarbeit ist eine ergebnisorientierte Teilleistung der Portfolioprüfung des Moduls Logik. Sie besteht aus mehreren Aufgaben zu ausgewählten Themen der Vorlesung. Die Hausaufgabe muss in Gruppen von 2 bis 4 Studierenden abgegeben werden. Die Einteilung in die Gruppen findet über den ISIS-Kurs statt und Sie müssen in der Gruppe abgeben, in welche Sie sich eingetragen haben. **Ihre Abgaben müssen bis zum 06. April 2022, 23:55 Uhr im ISIS-Kurs hochgeladen sein.**

Alle Abgaben müssen durch ein Textverarbeitungsprogramm (wie z.B. LaTeX) erstellt werden. Die Abgabe muss im A4 Format abgegeben werden, mit einem Seitenrand von mindestens 2,2 cm (22 mm) und einer Schriftgröße die 11pt, gemessen am Computer Modern Font, nicht unterschreitet. Wir stellen eine LaTeX-Vorlage bereit, welche diese Anforderungen erfüllt. Jede der Aufgaben in der Hausarbeit muss als separates PDF abgegeben werden. Der Umfang aller Abgaben darf insgesamt nicht 15 Seiten überschreiten. Die jeweiligen Aufgabenstellungen müssen nicht in die Abgabe übernommen werden. Auf den Abgaben müssen die **Matrikelnummern** der Gruppenmitglieder gut sichtbar, oben auf der ersten Seite stehen. **Bitte geben Sie Ihre Namen nicht an.**

Sie können insgesamt 40 Punkte in dieser Hausarbeit erreichen. Diese übersetzen sich linear in 10 Portfoliopunkte.

Sie dürfen Aussagen aus der Vorlesung, aus dem Skript, aus den Aufgabenstellungen der Tutoriumsblätter und der freiwilligen Hausaufgaben verwenden ohne diese zu beweisen. Bitte geben Sie in den letzten beiden Fällen immer an, auf welches Blatt, welche Aufgabe und welche Unteraufgabe Sie sich beziehen.

Alle Antworten sind zu begründen, es sei denn dies wird explizit ausgeschlossen.

Hausaufgabe 1 1+2+5+7 = 15 Punkte

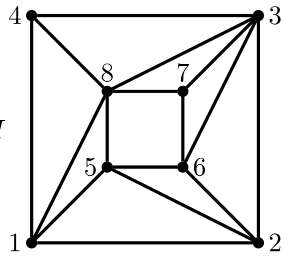
(i) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine beliebige Formelmenge. Zeigen Sie: Wenn eine Resolutionswiderlegung für $\Phi' \subseteq \Phi$ existiert, dann gibt es auch eine Resolutionswiderlegung für Φ.

Sei G ein endlicher, ungerichteter Graph mit $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die folgenden Formelmengen:

- $\Phi_{G,E} := \{E_{u,v} \mid \{u, v\} \in E(G)\} \cup \{\neg E_{u,v} \mid \{u, v\} \notin E(G)\}$,
- $\Phi_{G,2} := \{\bigvee_{i,i' \in \{a,b,c\}, i \neq i'} \neg E_{i,i'} \vee \bigvee_{j,j' \in \{u,v,w\}, j \neq j'} \neg E_{j,j'} \mid 1 \leq a \leq b \leq c \leq |V(G)|, 1 \leq u \leq v \leq w \leq |V(G)|$ und $|\{a, b, c, u, v, w\}| = 6\}$ und
- $\Phi_G = \Phi_{G,E} \cup \Phi_{G,2}$.

Sei H durch die folgende Abbildung definiert und Φ_H analog zu Φ_G definiert.

H



(ii) Geben Sie ohne Begründung eine Resolutionswiderlegung für Φ_H an.

(iii) Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls: Wenn es in G zwei disjunkte Kreise C und K der Länge drei gibt, dann ist Φ_G unerfüllbar ist.

(iv) Zeigen Sie: Wenn Φ_G unerfüllbar ist, dann existieren in G zwei disjunkte Kreise C und K der Länge drei.

Hausaufgabe 2 1+7=8 Punkte

Sei $\mathrm{AL}_1 \subseteq \mathrm{AL}$ die Menge der aussagenlogische Formeln, die eine ungerade Anzahl von $\neg$ und eine gerade Anzahl von $\wedge$ enthalten, und die des Weiteren keine Junktoren außer $\neg$ und $\wedge$ enthalten.

(i) Geben Sie ohne Begründung eine Formel $\varphi_\top \in \mathrm{AL}_1$ an, mit $\varphi_\top \equiv \top$.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe struktureller Induktion: AL_1 ist eine Normalform.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die Negationsnormalform eine Normalform ist. Denken Sie außerdem daran, dass $\top$ und $\bot$ Junktoren sind und somit in keiner Formel in AL_1 vorkommen.

Wichtig: Äquivalenzen zwischen Formeln müssen mittels Äquivalenzumformungen begründet werden. Die Umformungsschritten müssen dabei nachvollziehbar sein, allerdings ist es nicht notwending, die verwendeten Äquivalenzen zu nennen.

Zusätzlich zu den Äquivalenzen in Theorem 2.38 vom Skript dürfen Sie folgende Äquivalenzen verwenden. Sei $\varphi \in \mathrm{AL}$:

$$\varphi \vee \top \equiv \top \qquad \varphi \wedge \bot \equiv \bot \qquad \neg\top \equiv \bot \qquad \neg\bot \equiv \top$$

Hausaufgabe 3 1+8+8=17 Punkte

Erinnerung: Ungerichtete Graphen sind bei uns immer schleifenfrei und haben keine parallelen Kanten.

Sei G ein ungerichteter Graph und $k \in \mathbb{N}$ beliebig.. Die *Nachbarschaft* $N_G(v)$ eines Knoten $u \in V(G)$ ist definiert als $\{v \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}$. Der *Grad* $\deg_G(u)$ eines Knoten $u \in V(G)$ ist gleich $|N_G(u)|$. Wir definieren eine *k-Nachbarschaftsfärbung* $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ als eine Funktion, sodass für alle $\{u, v\} \in E(G)$ gilt, dass $|N_G(u) \cap N_G(v)| = |\{c(w) \mid w \in N_G(u) \cap N_G(v)\}|$. Wenn für G eine k-Nachbarschaftsfärbung existiert, dann nennen wir G *k-nachbarschaftsfärbbar*.

Sei G ein ungerichteter Graph, in dem jeder Knoten endlichen Grad besitzt und $V(G)$ abzählbar unendlich ist. Weiter sei H ein endlicher Teilgraph von D und sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest gewählt.

(i) Zeigen Sie: Wenn D k-nachbarschaftsfärbbar ist, dann ist auch H k-nachbarschaftsfärbbar.

(ii) Konstruieren Sie eine Formel $\varphi_{H,k}$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn H k-nachbarschaftsfärbbar ist. Zeigen Sie, wie man aus jeder Belegung, die Ihre Formel erfüllt, eine k-Nachbarschaftsfärbung c_H konstruieren kann und wie man aus einer k-Nachbarschaftsfärbung c_H eine Belegung konstruiert, welche Ihre Formel erfüllt.

(iii) Zeigen Sie: Wenn jeder endliche Teilgraph D' von D eine k-Nachbarschaftsfärbung besitzt, dann ist D k-nachbarschaftsfärbbar. (Sie können die Formel $\varphi_{H,k}$, mitsamt ihrer geforderten Eigenschaften, aus der vorherigen Unteraufgabe in dieser Unteraufgabe verwenden, unabhängig von der von Ihnen dort angegebenen Lösung.)