Hausarbeit 2 Aufgabe 2

Gruppe: 402355, 392210, 413316, 457146

Lösungen

(i)	(ii)	Form	Σ

Aufgabe 2

(i) φ_1 fordert, dass es für jedes Element a ein Element b gibt, sodass $E(b,a)$ und $\neg E(a,a)$ gilt.
φ_2 fordert, dass jedes Element a, das in Relation $E(a,b)$ steht, nur mit genau einem weiteren Element b in Relation $E(a,b)$ steht.
φ_3 fordert, dass die Relation $E(a,b)$ symmetrisch ist.
φ_4 fordert, dass $F(a)$ gilt, genau dann wenn ein Element a mit keinem Element b in Relation $E(a,b)$ steht und dass ein Element a mit keinem Element b in Relation $E(a,b)$ steht, genau dann wenn $F(a)$ gilt.
φ_5 fordert, dass gilt $E(a,b)$ und $E(c,d)$ mit $c \neq a$ und $c \neq b$, sodass für alle weiteren Elemente e, die nicht in $\{a,b,c,d\}$ enthalten sind, $F(e)$ gilt.

endliches Modell: Wir interpretieren E als eine symmetrische Kantenrelation, bei der die Kante in beide Richtungen gerichtet ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit Universum $A := \{1,2,3,4\}$
mit $E^{\mathcal{A}} = \{(1,2),(3,4)\}$ und $F^{\mathcal{A}} = \{\}$

φ_1 wird erfüllt, da für jedes Element a in unserem Universum gilt, es steht mit einem anderen Element b in unserem Universum in einer nicht reflexiven Relation $E(a,b)$. Da wir E als eine Kantenrelation interpretieren, bei der die Kante in beide Richtungen zeigt, gilt auch $E(b,a)$. Somit steht jedes Element a mit einem anderen Element b in Relation $E(a,b)$.
φ_2 wird erfüllt, da jedes Element a in unserem Universum nur mit genau einem weiteren Element b in der symmetrischen Relation $E(a,b)$ steht.
φ_3 wird erfüllt, da wir E als symmetrische Kantenrelation interpretieren. Somit gilt für alle Elemente a, b in unserem Universum, die in Relation $E(a,b)$ stehen, auch $E(b,a)$.
φ_4 wird erfüllt, da $F^{\mathcal{A}}$ leer ist und somit wird $F(a)$ zu 0 ausgewertet für alle Elemente a in unserem Universum gilt und da jedes a in unserem Universum in einer Relation $E(a,b)$ mit einem weiteren Element b steht. Somit werden beide Seiten der Biimplikation zu 0 ausgewertet und φ_4 wird erfüllt.
φ_5 wird erfüllt, da wir vier untereinander unterschiedliche Elemente haben, die in Relation $E(1,2)$ und $E(3,4)$ stehen. Somit gibt es ein a und ein b, sodass $E(a,b)$ und es gibt ein c und ein d, sodass $E(c,d)$ mit $c \neq a$ und $c \neq b$. Da $F^{\mathcal{A}}$ leer ist, wird die rechte Seite der Implikation zu 0 ausgewertet und da wir kein fünftes Element e im Universum haben, das nicht in der Menge $\{1,2,3,4\}$ enthalten ist, wird die große Verorderung immer zu 1 ausgewertet und dann durch die Negation zu 0. Somit werden beide seiten der Implikation zu 0 ausgewertet und die Implikation dann zu 1 und φ_5 wird erfüllt.
Die endliche σ-Struktur $\mathcal{A}$ erfüllt Φ.

Die Formelmenge Φ wird von keiner σ-Struktur mit weniger oder mehr als 4 Elementen erfüllt.
φ_5 fordert, dass gilt $E(a,b)$ und $E(c,d)$ mit $c \neq a$ und $c \neq b$.
Demnach haben wir 4 Elemente $\{a,b,c,d\}$, die in Relation $E(a,b)$ und $E(c,d)$ stehen.

Aus den Interpretationen von φ_1, φ_2 und φ_3 folgt, dass jedes Element a, in genau einer symmetrischen, nicht reflexiven Relation $E(a,b)$ mit genau einem weiteren Element b steht. Demnach müssen unsere 4 Elemente a,b,c,d in φ_5 untereinander verschieden sein, da sie in den Relationen $E(a,b)$ und $E(c,d)$ stehen. Demnach benötigt unsere σ-Struktur mindestens 4 Elemente.
Da jedes Element a in einer symmetrischen, nicht reflexiven Relation $E(a,b)$ mit genau einem weiteren Element b steht, folgt daraus, dass die linke Seite der Biimplikation in φ_4 immer zu 0 ausgewertet wird. Daraus folgt, dass $F(a)$ für jedes Element a zu 0 ausgewertet werden muss, damit φ_4 erfüllt wird.
Für φ_5 bedeutet das, dass die rechte Seite der Implikation immer zu 0 ausgewertet wird. Damit φ_5 erfüllt wird, muss die linke Seite der Implikation ebenfalls zu 0 ausgewertet werden. Dazu darf die große Veroderung nicht zu 0 ausgewertet werden, da sie sonst durch die Negation zu 1 ausgewertet wird. Das bedeutet, dass es kein Element e geben darf, dass nicht in $\{a,b,c,d\}$ enthalten ist. Daraus folgt, dass wir nicht mehr als 4 Elemente im Universum haben dürfen.

Daraus folgt, Φ kann nur mit einer σ-Struktur mit genau 4 Elementen erfüllt werden. Demnach besitzt Φ kein unendliches Modell.

(ii) Angenommen es existiert eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ fuer die gilt: $\varphi(\mathcal{Q}) = \mathbb{N}$.
Die Formel φ waere wie folgt aufgebaut:

Terme τ:
•x,y $\in \mathbb{Q}$
•$\odot_{\mathcal{Q}}(a,b)$, $a,b \in \tau$

Formeln $\mathrm{FO}[\sigma]$:
•t = t',t,t' $\in \tau$
•$\neg\varphi$, $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$
•$\varphi * \psi$, $\varphi,\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
•$\exists x\varphi(x), \forall y\varphi(y)$, $x,y \in \mathbb{Q}$, $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$

Wir betrachten im folgenden eine Fallunterscheidung fuer die atomaren Formeln $t = t'$.

Fall 1: $t = x$, $t' = y$
$t = t'$ ist erfuellt wenn $x = y$ gilt und erfuellbar fuer $x,y \in \mathbb{Q}$

Fall 2: $t = x$, $t' = \odot_{\mathcal{Q}}(y,z)$
$t = t'$ ist erfuellt wenn $x = y + z$ gilt und erfuellbar fuer $x,y,z \in \mathbb{Q}$

Fall 3: $t = \odot_{\mathcal{Q}}(a,b)$, $t' = \odot_{\mathcal{Q}}(c,d)$
$t = t'$ ist erfuellt wenn $a + b = c + d$ gilt und erfuellbar fuer $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$

Jede Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ wird aufbauend auf den atomaren Formeln konstruiert und es gelten somit die selben Erfuellbarkeiten. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, da wir somit keine Formel konstruieren koennen welche fuer alle $x \in \mathbb{N}$ jedoch fuer kein $y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ erfuellbar ist.