Hausarbeit 2 Aufgabe 3

Gruppe: 402355, 392210, 413316, 457146

Lösungen

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	Form	Σ
Aufgabe 3								

(i) Angenommen der Herausforderer gewinnt $\mathfrak{E}_m((\mathcal{H},u),(\mathcal{H},v))$, dann ist die Abbildung:

$$h : u \mapsto v, v_1 \mapsto v_1', ..., v_m \mapsto v_m'$$

mit v_i und v_i', $i \in \{1, ..., m\}$ als den Elementen, welche in Runde i jeweils von dem Herausforderer H und der Duplikatorin D gewaehlt wurden.
Die selbe Schreibweise verwenden wir auch fuer alle folgenden Abbildungen.
Es gilt laut Annahme, h ist kein partieller Isomorphismus von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$.

Es sind $\mathcal{H}_u$ und $\mathcal{H}_v$, τ-Expansionen von $\mathcal{H}$ die sich nur durch das zusaetzliche einstellige Relationssymbol R, von $\mathcal{H}$ unterscheiden. Es gilt jeweils $R^{\mathcal{H}_u} = \{u\}$ fuer $\mathcal{H}_u$ und $R^{\mathcal{H}_v} = \{v\}$ fuer $\mathcal{H}_v$.

Nun besitzt H die folgende Gewinnstrategie fuer $\mathfrak{E}_{m+1}(\mathcal{H}_u, \mathcal{H}_u)$.
H waehlt in der ersten Runde entweder u aus $\mathcal{H}_u$ oder v aus $\mathcal{H}_v$ und D antwortet indem sie das jeweils andere Element aus der anderen Struktur waehlt. Sie muss auf diese Weise antworten, da u und v in $\mathcal{H}_u$ und $\mathcal{H}_v$ jeweils die einzigen Elemente sind fuer die gilt $u \in R^{\mathcal{H}_u}$ und $v \in R^{\mathcal{H}_v}$.

Anschliessend wiederholt der Herausforderer die selben Zuege, welche er im m-Runden Spiel getaetigt hat fuer die uebrigen m Runden und nach Spielende erhalten wir die Abbildung:

$$h_2 : u \mapsto v, v_2 \mapsto v_2', ..., v_{m+1} \mapsto v_{m+1}'$$

Es gilt $h_2 = h$, da wir in den insgesamt m Runden: 2 bis $m+1$, die selben Zuege aus den Runden: 1 bis m des m-Runden Spiels wiederholt haben, und wir zusaetzlich in der ersten Runde u auf v abgebildet haben. Ausserdem gilt, die Universen von $\mathcal{H}_u$ und $\mathcal{H}_v$ sind gleich dem Universum von $\mathcal{H}$. Es folgt, h_2 ist kein partieller Isomorphismus von $\mathcal{H}_u$ nach $\mathcal{H}_v$.

Somit gewinnt der Herausforderer auch $\mathfrak{E}_{m+1}(\mathcal{H}_u, \mathcal{H}_v)$.

Angenommen der Herausforderer gewinnt $\mathfrak{E}_{m+1}(\mathcal{H}_u, \mathcal{H}_v)$.
Da $\mathcal{H}_u$ und $\mathcal{H}_v$ τ-Expansionen von $\mathcal{H}$ sind und sich einzig und allein voneinander unterscheiden, indem fuer $\mathcal{H}_u$: $R^{\mathcal{H}_u} = \{u\}$ und fuer $\mathcal{H}_v$: $R^{\mathcal{H}_v} = \{v\}$, sind $\mathcal{H}_u$ und $\mathcal{H}_v$ nur verschieden wenn $u \neq v$ gilt, und nur in diesem Fall kann der Herausforderer H eine Gewinnstrategie besitzen. H muss daher in mindestens einer Runde entweder u aus $\mathcal{H}_u$ oder v aus $\mathcal{H}_v$ waehlen, worauf die Duplikatorin D mit dem jeweils anderen Element antwortet.

Wir erhalten nach Beendigung des Spiels die Abbildung:

$$h_3 : v_1 \mapsto v_1', ..., v_{m+1} \mapsto v_{m+1}'$$

Wir koennen h_3 auch schreiben als:

$$h_3 : u \mapsto v, v_1'' \mapsto v_1''', ..., v_m'' \mapsto v_m'''$$

H spielt in mindestens einer der $m+1$ Runden u oder v, worauf D mit dem jeweiligen anderen Element antwortet.
Somit muss eine der Abbildungen aus $v_1 \mapsto v_1', ..., v_{m+1} \mapsto v_{m+1}'$ die Abbildung $u \mapsto v$ sein.
Weiterhin seien $v_1'' \mapsto v_1''', ..., v_m'' \mapsto v_m'''$ die selben Abbildungen aus $v_1 \mapsto v_1', ..., v_{m+1} \mapsto v_{m+1}'$ mit Ausnahme der Abbildung $u \mapsto v$.
Wir schreiben $u \mapsto v$ seperat in die Abbildungsvorschrift.

Die Abbildung h_3 ist laut Annahme kein partieller Isomorphismus von $\mathcal{H}_u$ nach $\mathcal{H}_v$ und somit auch kein partieller Isomorphismus von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$. Ausserdem gilt somit der Herausforderer gewinnt $\mathfrak{E}_m((\mathcal{H}, u), (\mathcal{H}, v))$.

Es gilt also, der Herausforderer gewinnt $\mathfrak{E}_m((\mathcal{H}, u), (\mathcal{H}, v))$ genau dann wenn er $\mathfrak{E}_{m+1}(\mathcal{H}_u, \mathcal{H}_v)$ gewinnt.

(ii) Zur Vereinfachung der Schreibweise in den folgenden Teilaufgaben (ii) und (iii) benennen wir Tupel $(i, j) \in G$ wie folgt: $(i, j) := g$, $(i_k, j_k) := g_k$, $i, j, k \in \mathbb{N}$

Wir definieren die Formel $\varphi_k(g)$ wie folgt:

$$\varphi_0(g) := \forall g_1 \forall g_2 \forall g_3 (\bigwedge_{i=0}^{3} E(g, g_i) \to \bigvee_{1 \le i < j \le 3} g_i = g_j)$$

$$\varphi_{k \ge 1}(g) := \bigvee_{0 \le i \le k-1} \varphi_i(g) \lor \exists g_{k-1} \varphi_{k-1}(g_{k-1}) \land E(g_{k-1}, g)$$

$$\varphi_k(g) := \varphi_0(g) \lor \varphi_{k \ge 1}(g)$$

Mit der Formel φ_0 definieren wir den Rekursionsanker der Formel φ_k. Nur das Tupel $(0, 0)$ hat einen Knotengrad von maximal 2, waehrend alle anderen Tupel einen Knotengrad von 3 oder hoeher besitzen. Ausserdem erfuellt das Tupel $(0, 0)$ die Anforderung fuer φ_0, da $0 + 0 = 0 \le 0$.

Weiterhin pruefen wir in $\varphi_{k \ge 1}$, ob das Tupel g entweder von einer der rekursiv definierten Formeln φ_0 bis φ_{k-1} erfuellt wird, oder ob es ein Tupel g_{k-1} gibt, sodass $\varphi_{k-1}(g_{k-1})$ und $E(g_{k-1}, g)$ erfuellt.

Jedes g, welches die Bedingung $i + j \le r$, $r \in \{0, .., k-1\}$ erfuellt, erfuellt auch die Bedingung $i + j \le k$.
Es existiert weiterhin fuer $k \ge 1$ auch immer ein Element g_{k-1}, sodass $E(g_{k-1}, g)$ gilt und g_{k-1} erfuellt die Anforderung: $i_{k-1} + j_{k-1} = k - 1 \le k - 1$.
Somit ist laut Vorschrift von E, φ_k auch fuer g mit $i + j = k \le k$ erfuellt.
In beiden Faellen erfuellt die Formel die Anforderung.

(iii) Wir definieren die Formel $\psi_k(g)$ wie folgt:

$$\psi_{0,0}(g) := \forall g_1 \forall g_2 \forall g_3 (\bigwedge_{i=0}^{3} E(g, g_i) \rightarrow \bigvee_{1 \leq i < j \leq 3} g_i = g_j)$$

$$\psi_{k \geq 1, k \geq 1}(g) := \exists g_0 \exists g_1 (\psi_{k-1,k-1}(g_0) \wedge E(g_0, g_1) \wedge E(g_1, g) \wedge \neg E(g_0, g) \wedge i = j)$$

$$\psi_{k,k}(g) := \psi_{0,0}(g) \vee \psi_{k \geq 1, k \geq 1}(g)$$

$$\psi_0(g) := \psi_{0,0}(g) \vee \exists g_0 (\psi_{0,0}(g_0) \wedge (i_0 = i \vee j_0 = j))$$

$$\psi_{k \geq 1}(g) := \bigwedge_{0 \leq r \leq k-1} \neg \psi_r(g) \wedge (\psi_{k,k}(g) \vee \exists g_0 (\psi_{k,k}(g_0) \wedge (i_0 = i \vee j_0 = j)))$$

$$\psi_k(g) := \psi_0(g) \vee \psi_{k \geq 1}(g)$$

Wie auch in der vorigen Formel definieren wir mit ψ_0 den Rekursionsanker der Formel ψ_k und schauen mithilfe der vorher definierten Formel $\psi_{k,k}$, welche fuer Tupel $(k,k), k \in \mathbb{N}$ zu wahr auswertet, ob entweder $g = (0,0)$ gilt, oder ob es ein Tupel g_0 gibt, sodass $g_0 = (0,0)$.
Im Vergleich von g mit g_0 erfahren wir ob g von der Form: $g = (0,j)$ oder $g = (i,0)$, $i,j \in \mathbb{N}$ ist.
Somit ist fuer die Formel ψ_0, die Anforderung: $\min(i,j) = 0$ erfuellt.

Fuer $k \geq 1$ pruefen wir mithilfe der Formel $\psi_{k \geq 1}(g)$ den selben Zusammenhang, jedoch schliessen wir vorher aus, dass fuer g eine der Formeln von ψ_0 bis ψ_{k-1} erfuellt ist.
Somit ist g von der Form: $g = (k,k)$ oder $g = (i,k)$, $i > k$ oder $g = (k,j)$, $j > k$.
Analog zu ψ_0 erfuellt die Formel somit die Anforderung.

(iv) Wir betrachten eine Fallunterscheidung wie folgt:

Fall 1: es gibt genau ein weiteres Element g_1

Fall 1.1: $g = g_1$

$$(\mathcal{G}, g) \equiv (\mathcal{G}, g_1), \text{da } g = g_1$$

Fall 1.2: $g \neq g_1$

Fall 2: es gibt genau zwei weitere Elemente g_1 und g_2

Fall 2.1: $g = g_1$ und $g \neq g2$

$$(\mathcal{G}, g) \equiv (\mathcal{G}, g_1), \text{da } g = g_1$$

Fall 2.2: $g \neq g1$ und $g \neq g2$

(v) Wir geben eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin für ein m-Runden Spiel mit $m \in \mathbb{N}$ an:

Für jedes Element a'_i das der Herausforderer H in Runde i, $i \in \{1, ..., m\}$ in $\mathcal{A}$ wählt, wählt die Duplikatorin D $\pi(a'_i)$ in $\mathcal{B}$.

Für jedes Element $\pi(a'_i)$ das H in Runde i, $i \in \{1, ..., m\}$ in $\mathcal{B}$ wählt, wählt D a'_i in $\mathcal{A}$.

Da π ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist, wird dieser in Runde i auf lediglich die i gewählten Knoten von H und D beschränkt, und, da D immer gleich zu dem von H gewählten Knoten aus der jeweilig anderen Struktur wählt, bleibt der Isomorphismus auch auf jeder Teilmenge erhalten.
Somit gewinnt D.

Weiterhin werden die Elemente a_1 bis a_k auf die Elemente $\pi(a_1)$ bis $\pi(a_k)$ abgebildet. Somit erhalten wir nach Ende von $\mathfrak{E}_m((\mathcal{A}, (a_1, ..., a_k)), (\mathcal{B}, (\pi(a_1), ..., \pi(a_k)))$:

$$h : a_1 \mapsto \pi(a_1), ..., a_k \mapsto \pi(a_k), a'_1 \mapsto \pi(a'_1), ..., a'_m \mapsto \pi(a'_m)$$

Die Abbildung h ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, da laut Definition, π ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist und fuer alle $a \in \text{def}(h)$ gilt $a \mapsto \pi(a)$.
Die Duplikatorin gewinnt also $\mathfrak{E}_m((\mathcal{A}, (a_1, ..., a_k)), (\mathcal{B}, (\pi(a_1), ..., \pi(a_k)))$ und nach dem Satz von Ehrenfeucht gilt somit:

$$(\mathcal{A}, (a_1, a_2, ..., a_k)) \equiv_m (\mathcal{B}, (\pi(a_1), \pi(a_2), ..., \pi(a_k)))$$

weiterhin gilt somit:

$$(\mathcal{A}, (a_1, a_2, ..., a_k)) \equiv (\mathcal{B}, (\pi(a_1), \pi(a_2), ..., \pi(a_k)))$$

, da wir zu Beginn der Aufgabe gezeigt haben, dass die Duplikatorin für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Gewinnstrategie besitzt.

(vi) Wir haben bereits in Teilaufgabe (v) gezeigt:

$$(\mathcal{A}, (a_1, a_2, ..., a_k)) \equiv (\mathcal{B}, (\pi(a_1), \pi(a_2), ..., \pi(a_k)))$$

Es gilt also für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ mit frei(φ)= $(x_1, ..., x_k)$
$\mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, ..., a_k]$, genau dann wenn $\mathcal{B} \vDash \varphi[\pi(a_1), ..., \pi(a_k)]$

$\varphi(\mathcal{A})$ ist die Menge aller Elemente $\bar{a}$ aus A^k, die φ erfüllen. Somit gilt für jedes Element $\bar{b}$ aus B^k, wenn $\bar{b} \in \varphi(\mathcal{B})$ und $\bar{a} \in A^k$ mit $\bar{b} = (\pi(a_1), ..., \pi(a_k))$, dann $\bar{a} \in \varphi(\mathcal{A})$. Somit gilt $\varphi(\mathcal{B}) = \pi(\varphi(\mathcal{A}))$.