Formale Sprachen und Automaten

MTV: Modelle und Theorie Verteilter Systeme *SoSe 2022*

Hausaufgabe

Name: Jannik Leander Hyun-Ho Novak

Matrikelnummer: 392210

(optional) Name: Pete Schimkat

(optional) Matrikelnummer: 403246

Je 4 erreichte Hausaufgabenpunkte entsprechen einem Portfoliopunkt.

Korrektur:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte	16	16	8	40
Erreicht				
Korrektur				
Portfoliopunkte:				

Erklärung über Arbeitsteilung

Hiermit versichern wir, dass wir alle Aufgaben zu je gleichen Teilen bearbeitet und die vorliegenden Lösungen zu je gleichen Teilen erstellt haben.

Novak, Jannik Leander Hyun-Ho	Ort, Datum
Schimkat, Pete	Ort, Datum

Aufgabe 1: Beweismethoden **16 Punkte**

1a) Wir bezeichnen im Folgenden das i-te Element der Menge M mit m_i, $i \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang
$m_0 \bmod 2 = 5 \cdot (2 \cdot 0 + 1) \bmod 2 = 5 \bmod 2 = 1$
Induktionsvorraussetzung
Fuer ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $m_n \bmod 2 = 1$.
Induktionsschritt
$m_{n+1} \bmod 2$
$= 5 \cdot (2(n+1) + 1) \bmod 2$
$= (10n + 15) \bmod 2$
$= ((10n \bmod 2) + (15 \bmod 2)) \bmod 2$
$= (0 + 1) \bmod 2$
$= 1 \bmod 2$
$= 1$
Somit gilt $\forall m \in M.m \bmod 2 = 1$.

7.5 Punkte

1b) $\neg((\exists x P_1(x) \to \neg P_2(x)) \to (\exists y \neg(P_2(y) \wedge P_1(y))))$
Def. Elimination der Implikation
$\equiv \neg(\neg(\exists x P_1(x) \to \neg P_2(x)) \vee (\exists y \neg(P_2(y) \wedge P_1(y))))$
Def. DeMorgansche Regel
$\equiv \neg\neg(\exists x P_1(x) \to \neg P_2(x)) \wedge \neg(\exists y \neg(P_2(y) \wedge P_1(y)))$
Def. Negierter Existenzquantor
$\equiv \neg\neg(\exists x P_1(x) \to \neg P_2(x)) \wedge (\forall y \neg\neg(P_2(y) \wedge P_1(y)))$
Def. Doppelte Negation
$\equiv (\exists x P_1(x) \to \neg P_2(x)) \wedge (\forall y P_2(y) \wedge P_1(y))$

2 Punkte

1c) Widerspruchsannahme:
$(\exists x P_1(x) \to \neg P_2(x)) \wedge (\forall y P_2(y) \wedge P_1(y))$
(Z1): $\perp$
(A1): $\exists x P_1(x) \to \neg P_2(x)$
(A2): $\forall y P_2(y) \wedge P_1(y)$
Sei x beliebig aber fest.
(A3): $P_1(x) \to \neg P_2(x)$
Waehle $y \triangleq x$ in A2.
(A4): $P_2(x) \wedge P_1(x)$
Aus A4 folgen A5 und A6.
(A5): $P_2(x)$
(A6): $P_1(x)$
Aus A6 und A3 folgt A7.
(A7): $\neg P_2(x)$
Aus A7 und A5 folgt Z1(Widerspruch).
Also gilt $(\exists x P_1(x) \to \neg P_2(x)) \to (\exists y \neg(P_2(y) \wedge P_1(y)))$.

5.5 Punkte

1d) Kontraposition:
$\neg(\exists y \neg(P_2(y) \wedge P_1(y)) \to \neg(\exists x P_1(x) \to \neg P_2(x))$

1 Punkte

Aufgabe 2: Relationen **16 Punkte**

2a) R_1 ist nicht rechtstotal, da $1 \in B$ aber $1 \notin R_1$.
R_1 ist nicht linkseindeutig, da aR_14 und bR_14 gelten mit $a \neq b$.
R_1 ist nicht rechtseindeutig, da bR_14 und bR_15 gelten mit $4 \neq 5$.
R_2 ist nicht linkstotal, da $4 \in B$ aber $4 \notin R_2$.
R_2 ist nicht linkseindeutig, da $1R_2a$ und $5R_2a$ gelten mit $1 \neq 5$.
R_2 ist nicht rechtseindeutig, da $3R_2b$ und $3R_2c$ gelten mit $b \neq c$.
R_3 ist nicht rechtseindeutig, da cR_3b und cR_3c gelten mit $b \neq c$.

3.5 Punkte

2b) R_4 ist keine totale Ordnung, da R_4 nicht linear ist.
fuer lineare Relationen gilt:
$\forall a, b \in A \,.\, a \neq b \to (aRb \vee bRa)$
es gilt $a, f \in D$ mit $a \neq f$, jedoch gelten weder aR_4f noch fR_4a.
R_4 ist reflexiv, da fuer R_4 gilt:
$\forall d \in D \,.\, dR_4d$
R_4 ist transitiv, da fuer R_4 gilt:
$\forall a, b, c \in D \,.\, (aR_4b \wedge bR_4c) \to aR_4c$
R_4 ist antisymmetrisch, da fuer R_4 gilt:
$\forall a, b \in D \,.\, (aR_4b \wedge bR_4a) \to a = b$
Somit gilt: R_4 ist eine partielle Ordnung.

4.5 Punkte

2c) **Aequivalenzrelation:** G ist keine Aequivalenzrelation, da die Relation nicht symmetrisch ist.
Es gilt: G ist symmetrisch, falls $\forall x, y \in \mathbb{Z} \,.\, xRy \to yRx$
Gegenbeispiel: Wähle x = 5 und y = 10.
Dann ist $(x, y) \in G$.
Fuer (y, x) gilt: $5 = 10 + n$ mit $n = -5$
Aber: $n \notin \mathbb{N}$, was einen Widerspruch zur Definition von G darstellt.
Somit gilt: G ist nicht symmetrisch.
partielle Ordnung: Damit G eine partielle Ordnung ist, muss Reflexivitaet, Antisymmetrie und Transitivitaet gezeigt werden.

- Reflexivitaet:
  Zu zeigen (Z1): $\forall x \in \mathbb{Z} \,.\, (x, x) \in G$
  (A1): Sei $x \in \mathbb{Z}$ in (Z1).
  Zu zeigen (Z2): $(x, x) \in G$
  $(x, x) \in G \overset{\text{Def. } G}{\Leftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}.\; x = x + n.$
  Gilt $\forall x \in \mathbb{Z}$ mit $n = 0$. Damit ist G reflexiv.
- Antisymmetrie:
  Zu zeigen (Z1): $\forall x, y \in \mathbb{Z} \,.\, (x, y) \in G \wedge (y, x) \in G \to x = y$
  Sei $x, y \in \mathbb{Z}$
  (Z2): $(x, y) \in G \wedge (y, x) \in G \to x = y$
  (A1): $(x, y) \in G \wedge (y, x) \in G$
  (A1.1): $(x, y) \in G$
  (A1.2): $(y, x) \in G$
  (Z3): $a = b$

$$(A1.1)\ (x,y) \in G \overset{\text{Def. } G}{\Rightarrow} \exists n_1 \in \mathbb{N}.\ x = y + n_1$$
$$(A1.2)\ (y,x) \in G \overset{\text{Def. } G}{\Rightarrow} \exists n_2 \in \mathbb{N}.\ y = x + n_2$$
$$\overset{\text{Def. } Gleichheit\ von\ y}{\Rightarrow} \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}. x = (x + n_2) + n_1$$
$$\overset{\text{Def. } Assoz.\ der\ Addition}{=} \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}. x = x + (n_1 + n_2)$$

Da es sich bei n_1 und n_2 um natürliche und somit nicht-negative Zahlen handelt, kann diese Gleichung nur für $n_1 = n_2 = 0$ gelten.
Einsetzen in (A1.1):
$\exists n_1 \in \mathbb{N}.\ x = y + n_1 \overset{\text{Def. } n_1 = 0}{\Rightarrow} x = y + 0 \overset{\text{Def. } Addition}{\Rightarrow} x = y$
Somit ist G antisymmetrisch.

- Transitivitaet
  Zu zeigen (Z1): $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}\ .\ (x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \rightarrow (x,z) \in G$
  Sei $x, y, z \in \mathbb{Z}$
  (Z2): $(x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \rightarrow (x,z) \in G$
  (A1): $(x,y) \in G \wedge (y,z) \in G$
  (A1.1): $(x,y) \in G$
  (A1.2): $(y,z) \in G$
  (Z3): $(x,z) \in G$

$$(A1.1)(x,y) \in G \overset{\text{Def. } G}{\Rightarrow} \exists n_1 \in \mathbb{N}.\ x = y + n_1$$
$$(A1.2)(y,z) \in GG\exists n_2 \in \mathbb{N}.\ y = z + n_2$$
$$\overset{\text{Def. } Gleichheit\ von\ y}{\Rightarrow} \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}.\ x = (z + n_2) + n_1$$
$$\overset{\text{Def. } Assoz.der Addition}{=} \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}.\ x = z + (n_1 + n_2)$$

  Da die Summe von zwei natürlichen Zahlen immer eine natürliche Zahl ist, gilt nach Def. von G: $(x,z) \in G$. Somit ist G transitiv.

Somit gilt: G ist eine partielle Ordnung.

8 Punkte

Aufgabe 3: Kardinalität **8 Punkte**

Behauptung: Wir geben eine Bijektion $f : M \to \mathbb{N}$ an.
$x \mapsto \dfrac{x}{41} - 3$
Wir geben eine weitere Funktion $g : \mathbb{N} \to M$ an.
$x \mapsto 41x + 123$
(Z1): Bijektion(f)
Wenn $f \circ g = \Delta_{\mathbb{N}}$ und $g \circ f = \Delta_M$, dann ist laut FS 0.7.8 f eine Bijektion.
(Z1.1): $\forall x \in \mathbb{N} \ . \ f \circ g(x) = \Delta_{\mathbb{N}}$
Sei $x \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest.
$f \circ g(x) \overset{\text{Def. } \circ}{=} f(g(x)) \overset{\text{Def. } g}{=} f(41x + 123) \overset{\text{Def. } f}{=} \dfrac{41x + 123}{41} - 3 = x + 3 - 3 = x \overset{\text{Def. } \Delta}{=} \Delta_{\mathbb{N}}$
(Z2.1): $\forall x \in M \ . \ g \circ f(x) = \Delta_M$
Sei $x \in M$ beliebig aber fest.
$g \circ f(x) \overset{\text{Def. } \circ}{=} g(f(x)) \overset{\text{Def. } f}{=} g(\dfrac{x}{41} - 3) \overset{\text{Def. } g}{=} 41(\dfrac{x}{41} - 3) + 123 = x - 123 + 123 = x \overset{\text{Def. } \Delta}{=} \Delta_M$
Da wir Z1.1 und Z2.1 gezeigt haben, gilt: f ist eine Bijektion. Somit gilt die Aussage.