Hausaufgabe 1 Aufgabe 1

Gruppe: 457818, 410265, 456732, 392210

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	Form	Σ
2	5	12	10	0	29

Aufgabe 1

(i) Es gilt

$$
\begin{aligned}
& (x^2-4)\cdot(x^3-x)\cdot(7x^{13}-11x^{12}-7x+11) \\
= \; & (x^5-x^3-4x^3+4x)\cdot(7x^{13}-11x^{12}-7x+11) \\
= \; & (x^5-5x^3+4x)\cdot(7x^{13}-11x^{12}-7x+11) \\
= \; & 7x^{18}-11x^{17}-7x^6+11x^5-35x^{16}+55x^{15}+35x^4-55x^3+28x^{14}-44x^{13}-28x^2+44x \\
= \; & 7x^{18}-11x^{17}-35x^{16}+55x^{15}+28x^{14}-44x^{13}-7x^6+11x^5+35x^4-55x^3-28x^2+44x \\
= \; & p(x).
\end{aligned}
$$

2

(ii) „⇒“: Sei $p(x) \equiv 0 \pmod{390}$.

Nach dem Satz aus VL 06 // S. 131 existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $p(x) = k \cdot 390$ gilt. Mit der Definition aus VL 06 // S. 113 gilt $390 \mid p(x)$.

Es gilt

$$390 = 2 \cdot 195, \quad 390 = 3 \cdot 130, \quad 390 = 5 \cdot 78 \quad \text{und} \quad 390 = 13 \cdot 30,$$

womit nach der Definition aus VL 06 // S. 113 auch

$$2 \mid 390, \quad 3 \mid 390, \quad 5 \mid 390 \quad \text{und} \quad 13 \mid 390$$

gilt. Mit dem Satz aus VL 06 // S. 114 Nr. 3 folgt

$$2 \mid p(x), \quad 3 \mid p(x), \quad 5 \mid p(x) \quad \text{und} \quad 13 \mid p(x).$$

3

„⇐“: Es gelte $2 \mid p(x)$, $3 \mid p(x)$, $5 \mid p(x)$ und $13 \mid p(x)$.

Da nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik (VL 06 // S. 116) jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eindeutig als Produkt von Primzahlen dargestellt werden kann und die (ganzen) Zahlen 2, 3, 5, 13 paarweise relativ prim zueinander sind, gilt

Der Fundamentalsatz benötigt Primzahlen → Hinweis

(i) Aus $2 \mid p(x)$, $3 \mid p(x)$ und $\mathrm{ggT}(2,3) = 1$ folgt $6 \mid p(x)$.
(ii) Aus $5 \mid p(x)$, $6 \mid p(x)$ und $\mathrm{ggT}(5,6) = 1$ folgt $30 \mid p(x)$.
(iii) Aus $13 \mid p(x)$, $30 \mid p(x)$ und $\mathrm{ggT}(13,30) = 1$ folgt $390 \mid p(x)$.

Nach der Definition aus VL 06 // S. 130 gilt $p(x) \equiv 0 \pmod{390}$. (✓) 5

(iii) Wir zerlegen $p(x)$ noch stärker in einzelne Faktoren, also

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x^2-4)\cdot(x^3-x)\cdot(7x^{13}-11x^{12}-7x+11) \\
&= (x^2-4)\cdot x\cdot(x^2-1)\cdot(7x^{13}-11x^{12}-7x+11) \\
&= (x-2)\cdot(x+2)\cdot x\cdot(x^2-1)\cdot(7x^{13}-11x^{12}-7x+11) \\
&= (x-2)\cdot(x+2)\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(7x^{13}-11x^{12}-7x+11).
\end{aligned}
$$

Da sowohl x als auch $(x+1)$ als Faktoren enthalten sind, gibt es immer zwei hintereinanderfolgende Zahlen im Produkt von $p(x)$. Eine der beiden Zahlen muss durch 2 teilbar sein und somit gilt $2 \mid p(x)$. 4

Da $(x-1)$, x und $(x+1)$ Faktoren von $p(x)$ sind und diese 3 hintereinanderfolgende Zahlen darstellen, bedeutet das, dass es immer einen ganzzahlig durch 3 teilbaren Faktor geben muss und somit $3 \mid p(x)$ gilt. 4

Da $(x-2)$, $(x-1)$, x, $(x+1)$ und $(x+2)$ Faktoren von $p(x)$ sind und diese 5 hintereinanderfolgende Zahlen darstellen, folgt daraus, dass eine der fünf Zahlen durch 5 teilbar ist und somit $5 \mid p(x)$ gilt. 4

(iv) Wir zerlegen die Darstellung $p(x)$ aus Aufgabenteil (i) erneut in etwas anderer Form:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2-4)\cdot(x^3-x)\cdot(7x^{13}-11x^{12}-7x+11) \\ &= (x^2-4)\cdot(x^3-x)\cdot((7x-11)\cdot x^{12}-7x+11) \\ &= (x^2-4)\cdot(x^3-x)\cdot((7x-11)\cdot x^{12}-1\cdot(7x-11)) \\ &= (x^2-4)\cdot(x^3-x)\cdot(7x-11)\cdot(x^{12}-1). \end{aligned}$$

Unter genauerer Betrachtung fällt auf, dass mit $(x^{12}-1)$ der Grundbaustein für den kleinen Satz von Fermat in umgestellter Form für $p = 13$ vorliegt, für den Fall, dass $13 \nmid x$ gilt. Somit lässt sich folgende Fallunterscheidung durchführen:

Fall 1: Falls $13 \mid x$ gilt, folgt mit der Darstellung von $p(x)$ in Aufgabenteil (iii), dass $13 \mid p(x)$ gilt. (Wähle $c := (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)(7x^{13}-11x^{12}-7x+11) \in \mathbb{Z}$.)

Fall 2: Falls $13 \nmid x$ gilt, folgt mit 13 prim und $x \in \mathbb{Z}$, dass $x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ (Kleiner Satz von Fermat, VL 07 // S. 155). Es folgt $x^{12}-1 \equiv 0 \pmod{13}$. Mit dem Satz aus VL 06 // S. 131 existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $x^{12}-1 = k \cdot 13$ ist. Nach der Definition aus VL 06 // S. 113 gilt $13 \mid x^{12}-1$.

Wir wählen $c := (x^2-4)(x^3-x)(7x-11) \in \mathbb{Z}$. Mit unserer Betrachtung gilt $p(x) = (x^{12}-1)\cdot c$ und nach der Definition aus VL 06 // S. 113 auch $x^{12}-1 \mid p(x)$. Mit dem Satz aus VL 06 // S. 114 Nr. 3 folgt $13 \mid p(x)$.

Also ist $p(x)$ durch 13 teilbar.

10