FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

SoSe 2022
Stand: 20. Juni 2022

1. Hausarbeit – Diskrete Strukturen

Abgabe: 13.07.2022 im ISIS-Kurs [SoSe 2022] Diskrete Strukturen

Informationen zur Hausaufgabe:

Die Hausaufgabe ist eine ergebnisorientierte Teilleistung der Portfolioprüfung des Moduls Diskrete Strukturen. Sie besteht aus mehreren Aufgaben zu ausgewählten Themen der Vorlesung. Die Hausaufgabe muss in Gruppen von 2 bis 4 Studierenden abgegeben werden. Die Einteilung in die Gruppen findet über den ISIS-Kurs statt und Sie müssen in der Gruppe abgeben, in welche Sie sich eingetragen haben. **Ihre Abgaben müssen bis zum 13. Juli 2022, 23:55 Uhr im ISIS-Kurs hochgeladen sein.**

Alle Abgaben müssen durch ein Textverarbeitungsprogramm (wie z.B. LaTeX) erstellt werden. Jede der Aufgaben in der Hausaufgabe muss als separates PDF abgegeben werden. Der Umfang aller Abgaben darf insgesamt 10 Seiten nicht überschreiten. Die jeweiligen Aufgabenstellungen müssen nicht in die Abgabe übernommen werden. Auf den Abgaben müssen die **Matrikelnummern** der Gruppenmitglieder gut sichtbar, oben auf der ersten Seite stehen. Bitte geben Sie Ihre Namen nicht an.

Sie können insgesamt 100 Punkte in dieser Hausaufgabe erreichen. Diese übersetzen sich linear in 25 Portfoliopunkte.

Sie dürfen Aussagen aus der Vorlesung, aus den Aufgabenstellungen der Tutoriumsblätter und der freiwilligen Hausaufgaben verwenden ohne diese zu beweisen. Bitte geben Sie in den letzten beiden Fällen immer an, auf welches Blatt, welche Aufgabe und welche Unteraufgabe Sie sich beziehen.

Plagiate werden nicht toleriert. Alle Antworten sind zu begründen.

Hausaufgabe 1

2+6+12+10=30 Punkte

Wir wollen für alle $x \in \mathbb{Z}$ zeigen, dass

$$p(x) := 7x^{18} - 11x^{17} - 35x^{16} + 55x^{15} + 28x^{14} - 44x^{13} - 7x^{6} + 11x^{5} + 35x^{4} - 55x^{3} - 28x^{2} + 44x \equiv 0 \pmod{390}.$$

Beweisen Sie dafür folgende Aussagen für alle $x \in \mathbb{Z}$:

(i) $p(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^3 - x) \cdot (7x^{13} - 11x^{12} - 7x + 11)$

(ii) $p(x) \equiv 0 \pmod{390}$ genau dann, wenn $p(x)$ sowohl durch $2, 3, 5$ als auch durch 13 teilbar ist.

(iii) $p(x)$ ist durch $2, 3$ und 5 teilbar.

(iv) $p(x)$ ist durch 13 teilbar.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass wenn $a \mid c, b \mid c$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, dann gilt $a \cdot b \mid c$.

Abbildung 1: Der Graph G auf der linken Seite und eine mögliche Vierteilung H auf der rechten Seite. Die Kante $\{a, b\}$ wurde zweimal geteilt, alle anderen Kanten wurden einmal geteilt.

Hausaufgabe 2 6+6+8+8+6=34 Punkte

Im Folgenden sind alle Graphen ungerichtet.

Wir sagen für zwei Graphen G und H, dass H eine Vierteilung von G ist, wenn H ein mögliches Ergebnis davon ist, jede Kante aus G mindestens einmal und höchstens viermal zu teilen. Eine Kante $\{u, v\}$ d-mal zu teilen heißt, die Kante aus G zu löschen, d neue Knoten $x^1_{u,v}, \ldots, x^d_{u,v}$ zu G hinzuzufügen und folgende Kanten einzufügen: $\{u, x^1_{u,v}\}$, $\{x^d_{u,v}, v\}$ und $\{x^i_{u,v}, x^{i+1}_{u,v}\}$ für alle $1 \leq i < d$.

Ein Beispiel ist in Abbildung 1 gegeben.

Im folgenden ist H immer eine Vierteilung von einem Graphen G.

(i) Widerlegen Sie, dass H immer bipartit sein muss.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass H immer 3-partit sein muss.

(iii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass wenn G ein Baum ist, dann muss auch H immer ein Baum sein.

(iv) Zeigen oder widerlegen Sie, dass wenn G einen Hamiltonkreis enthält, dann muss auch H immer einen Hamiltonkreis enthalten.

(v) Zeigen oder widerlegen Sie, dass H ein Dreieck (K_3) enthalten kann.

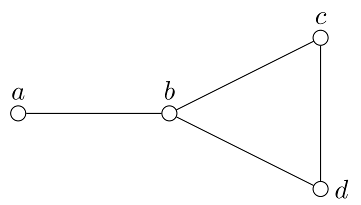

Abbildung 2: Ein Beispielgraph G. Es gilt $\mathrm{fvn}(G) = 1$, da G einen Kreis enthält, aber durch Lösung des Knoten d ein Wald (in diesem Fall ein Baum) entsteht. Weiter gilt $\mathrm{degeneracy}(G) = 2$, da der minimale Knotengrad im Teilgraph bestehend aus b, c und d (mit allen Kanten zwischen den drei Knoten) zwei ist. Die größte Clique in G besteht aus b, c und d und damit ist $\mathrm{mc}(G) = 3$.

Hausaufgabe 3

8+8+8+12=36 Punkte

Im Folgenden ist $G = (V, E)$ immer ein ungerichteter Graph. Betrachten Sie die folgenden drei Definitionen von Graphparametern.

- Ein *feedback vertex set* in einem Graph G ist eine Menge von Knoten, deren Löschung dazu führt, dass aus G ein Wald wird. Die *feedback vertex number* fvn von einem Graph G ist die Größe eines kleinsten feedback vertex sets.
- Die *degeneracy* von einem Graph G ist die kleinste Zahl k, sodass es in *jedem* Teilgraph von G mindestens einen Knoten mit Grad höchstens k gibt.
- Die *maximum clique size* mc von einem Graph G ist die größte Zahl k, sodass es in G eine Clique der Größe k (k paarweise miteinander verbundene Knoten) gibt.

Ein Beispiel ist in Abbildung 2 gegeben.

(i) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathrm{fvn}(G) \leq 3 \cdot \mathrm{mc}(G)$ für jeden Graphen G gilt.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathrm{mc}(G) \leq \mathrm{degeneracy}(G) + 1$ für jeden Graphen G gilt.

(iii) Widerlegen Sie, dass $\mathrm{degeneracy}(G) \leq \mathrm{mc}(G)$ für jeden Graphen G gilt.

(iv) Zeigen Sie, dass $\mathrm{degeneracy}(G) \leq \mathrm{fvn}(G) + 1$ für jeden Graphen G gilt.