FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

WiSe 2021/22
Stand: 25. März 2022

2. Hausarbeit (2. Durchgang) – Logik

Abgabe: 06.04.2022 im ISIS-Kurs [WiSe 2021/22] Logik

Informationen zur Hausarbeit:

Diese Hausarbeit ist eine ergebnisorientierte Teilleistung der Portfolioprüfung des Moduls Logik. Sie besteht aus mehreren Aufgaben zu ausgewählten Themen der Vorlesung. Die Hausaufgabe muss in Gruppen von 2 bis 4 Studierenden abgegeben werden. Die Einteilung in die Gruppen findet über den ISIS-Kurs statt und Sie müssen in der Gruppe abgeben, in welche Sie sich eingetragen haben. **Ihre Abgaben müssen bis zum 06. April 2022, 23:55 Uhr im ISIS-Kurs hochgeladen sein.**

Alle Abgaben müssen durch ein Textverarbeitungsprogramm (wie z.B. LaTeX) erstellt werden. Die Abgabe muss im A4 Format abgegeben werden, mit einem Seitenrand von mindestens 2,2 cm (22 mm) und einer Schriftgröße die 11pt, gemessen am Computer Modern Font, nicht unterschreitet. Wir stellen eine LaTeX-Vorlage bereit, welche diese Anforderungen erfüllt. Jede der Aufgaben in der Hausarbeit muss als separates PDF abgegeben werden. Der Umfang aller Abgaben darf insgesamt nicht 15 Seiten überschreiten. Die jeweiligen Aufgabenstellungen müssen nicht in die Abgabe übernommen werden. Auf den Abgaben müssen die **Matrikelnummern** der Gruppenmitglieder gut sichtbar, oben auf der ersten Seite stehen. **Bitte geben Sie Ihre Namen nicht an.**

Sie können insgesamt 80 Punkte in dieser Hausarbeit erreichen. Diese übersetzen sich linear in 20 Portfoliopunkte.

Sie dürfen Aussagen aus der Vorlesung, aus dem Skript, aus den Aufgabenstellungen der Tutoriumsblätter und der freiwilligen Hausaufgaben verwenden ohne diese zu beweisen. Bitte geben Sie in den letzten beiden Fällen immer an, auf welches Blatt, welche Aufgabe und welche Unteraufgabe Sie sich beziehen.

Alle Antworten sind zu begründen, es sei denn dies wird explizit ausgeschlossen.

Hausaufgabe 1 $1+4+2+2+3+1+6+5+10+2 = 36$ Punkte

In der folgenden Aufgabe sind alle Graphen ungerichtet, endlich, ohne Schleifen, ohne parallele Kanten und enthalten mindestens einen Knoten. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$, dass $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Wichtig: Die Unteraufgaben in dieser Aufgabe sind ohne Verwendung von EF-Spielen zu bearbeiten.

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol, sei $\tau = \{R\}$ eine Signatur mit dem dreistelligen Relationssymbol R und sei $\mathcal{A}$ eine τ-Struktur mit Universum A. Wir definieren den *Gaifmangraphen von* $\mathcal{A}$ als die σ-Struktur $\mathcal{G}(\mathcal{A}) := (A, E^{\mathcal{G}(\mathcal{A})})$, wobei

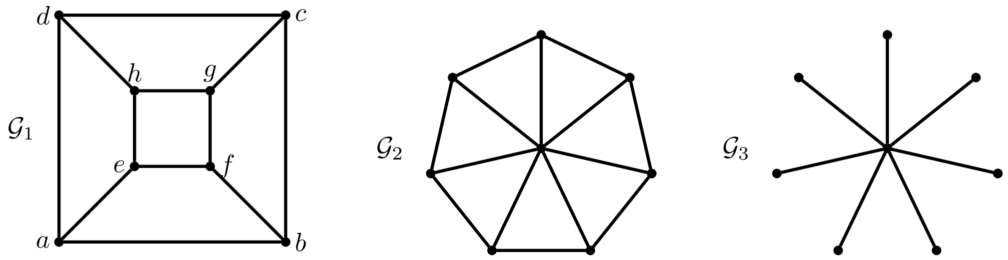
$$E^{\mathcal{G}(\mathcal{A})} := \{(u, v) \in A^2 \mid u \neq v \text{ und es gibt ein Tupel } \overline{a} \in R^{\mathcal{A}}\text{, welches } u \text{ und } v \text{ enthält.}\}).$$

(i) Geben Sie ohne Begründung den Gaifmangraphen (als Graph oder Struktur) für die τ-Struktur $\mathcal{B}$ an, wobei $\mathcal{B} := ([7], R^{\mathcal{B}} := \{(a, b, c) \in [7]^3 \mid a \cdot b = c\})$.

(ii) Geben Sie zwei τ-Strukturen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ mit jeweils höchstens vier Elementen an, sodass $\mathcal{C} \ncong \mathcal{D}$ und $\mathcal{G}(\mathcal{C}) \cong \mathcal{G}(\mathcal{D})$ gelten.

Sei ρ eine endliche, relationale Signatur, sei $\mathcal{A}$ eine ρ-Struktur mit dem Universum A und sei $\psi \in \mathrm{FO}[\rho]$ mit $|frei(\psi)| = 2$. Wir definieren den *Interpretationsgraph* $I_\psi(\mathcal{A})$ *von* $\mathcal{A}$ *unter* ψ als eine σ-Struktur mit

$$I_\psi(\mathcal{A}) := (A, E^{I_\psi(\mathcal{A})} := \{(u, v) \in A^2 \mid u \neq v \text{ und } (\mathcal{A} \models \psi[u, v],\ \mathcal{A} \models \psi[v, u] \text{ oder } \mathcal{A} \models \psi[u, v] \wedge \psi[v, u])\}).$$



(iii) Bestimmen Sie ohne Begründung $I_{\psi_1}(\mathcal{G}_1)$, wobei $\psi_1(x, y) := \exists z(E(x, z) \wedge E(y, z))$ eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel ist und $\mathcal{G}_1$ eine σ-Struktur ist, welche durch die obige Zeichnung gegeben wird.

(iv) Betrachten Sie die σ-Strukturen $\mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}_3$, welche durch die obigen Zeichnungen gegeben werden. Finden Sie ohne Begründung eine Formel $\psi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $qr(\psi_2) \leq 2$, sodass $\mathcal{G}_3 = I_{\psi_2}(\mathcal{G}_2)$.

(v) Konstruieren Sie eine Formel $\psi_3 \in \mathrm{FO}[\tau]$, sodass für alle τ-Strukturen $\mathcal{X}$ gilt, dass $I_{\psi_3}(\mathcal{X}) = \mathcal{G}(\mathcal{X})$. Erklären Sie Ihre Formel **kurz**, in maximal drei Sätzen.

(vi) Sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formel mit $\mathrm{qr}(\varphi) = 0$. Geben Sie ohne Begründung eine Formel $\varphi' \in \mathrm{FO}[\sigma]$ an, sodass für jede σ-Struktur $\mathcal{J}$ mit Universum J gilt, dass für alle $a, b \in J$ gilt $\mathcal{J} \models \varphi'[a, b]$ genau dann, wenn $(a, b), (b, a) \in E^{I_\varphi(\mathcal{J})}$.

(vii) Zeigen oder widerlegen Sie: Für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $qr(\varphi) = 0$, alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 0$ und alle σ-Strukturen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ gilt, wenn $\mathcal{G} \equiv_m \mathcal{H}$, dann $I_\varphi(\mathcal{G}) \equiv_m I_\varphi(\mathcal{H})$.

(viii) Zeigen oder widerlegen Sie: Für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $qr(\varphi) = 0$, alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 0$ und alle σ-Strukturen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ gilt, wenn $I_\varphi(\mathcal{G}) \equiv_m I_\varphi(\mathcal{H})$, dann $\mathcal{G} \equiv_m \mathcal{H}$.

In einem ungerichteten Graphen G ist ein *Hamiltonpfad* ein Pfad, welcher alle Knoten aus G enthält und ein *Hamiltonkreis* ist ein Kreis, welcher alle Knoten aus G enthält.

Sei $\chi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\chi(x, y) := E(x, y) \vee \exists z(E(x, z) \wedge E(z, y)) \vee \exists w \exists z(E(x, w) \wedge E(w, z) \wedge E(z, y))$.

Beschränkt auf die folgenden beiden Unteraufgaben, führen wir ein, dass wir für einen Graphen G, mit G' den Graphen bezeichnen welcher zu der Interpretation der σ-Struktur von G unter χ gehört.

(ix) Sei T ein Baum, mit $|V(T)| \geq 2$ und einer dazugehörigen σ-Struktur $\mathcal{T}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion: Für alle $\{u, v\} \in E(T)$ existiert ein Hamiltonpfad in T' mit den Endpunkten u und v.

(x) Sei H ein zusammenhängender Graph, mit $|V(H)| \geq 3$. Zeigen Sie: H' enthält einen Hamiltonkreis.

Hausaufgabe 2 6+6 = 12 Punkte

(i) Sei $\sigma = \{E, F\}$ eine Signatur, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist und F ein einstelliges Relationssymbol ist. Ermitteln Sie für die Formelmenge $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\} \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, ob diese ein endliches Modell hat und ob sie ein unendliches Modell besitzt, wobei

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall a(\exists b E(b, a) \wedge \neg E(a, a)),\\
\varphi_2 &:= \forall a \forall b \forall c(E(a, b) \wedge E(a, c) \to b = c),\\
\varphi_3 &:= \forall a \forall b(E(a, b) \to E(b, a)),\\
\varphi_4 &:= \forall a(\neg \exists b\ E(a, b) \leftrightarrow F(a)), \text{ und}\\
\varphi_5 &:= \exists a \exists b(E(a, b) \wedge \exists c \exists d(E(c, d) \wedge c \neq a \wedge c \neq b \wedge \forall e(\neg\Big(\bigvee_{x \in \{a,b,c,d\}} x = e\Big) \to F(e)))).
\end{aligned}$$

Sei $\tau = \{\odot\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Funktionssymbol. Wir definieren die τ-Struktur $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, \odot^{\mathcal{Q}})$, wobei $\odot^{\mathcal{Q}}$ die übliche Addition auf $\mathbb{Q}$ ist.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Es existiert eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}[\tau]$ mit $\varphi(\mathcal{Q}) = \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 3 6+4+6+8+6+2 = 32 Punkte

Anmerkung: Sie dürfen in Ihrer Lösung zu den unteren Teilaufgaben das Isomorphielemma nicht verwenden.

Seien $\sigma = \{E\}$ und $\tau = \sigma \cup \{R\}$ Signaturen, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist und R ein einstelliges Relationssymbol ist. Für einen Graphen G der als σ-Struktur $\mathcal{G}$ dargestellt wird, definieren wir für jedes $u \in V(G)$ die τ-Expansion $\mathcal{G}_u$ von $\mathcal{G}$ mit $R^{\mathcal{G}_u} := \{u\}$. Wir können uns $\mathcal{G}_u$ als einen Graphen vorstellen, in dem der Knoten u mit Rot gefärbt wurde.

(i) Sei H ein Graph welcher als σ-Struktur durch $\mathcal{H}$ dargestellt wird. Zeigen Sie für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $u, v \in V(H)$, dass der Herausforderer $\mathfrak{G}_m((\mathcal{H}, u), (\mathcal{H}, v))$ genau dann gewinnt, wenn der Herausforderer $\mathfrak{G}_{m+1}(\mathcal{H}_u, \mathcal{H}_v)$ gewinnt.

Wir definieren die σ-Struktur $\mathcal{G} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, E^{\mathcal{G}})$, wobei

$$E^{\mathcal{G}} = \{(((a, b), (c, d))) \mid a, b, c, d \in \mathbb{N} \text{ und } |a - c| + |b - d| = 1\}.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$. Als Begründung für *(ii)* und *(iii)* reicht es kurz zu erklären, warum die von Ihnen angegeben Formel die entsprechende Anforderung erfüllt.

(ii) Geben Sie eine Formel φ_k an, sodass

$$\varphi_k(\mathcal{G}) = \{(i, j) \mid i + j \leq k\}.$$

(iii) Geben Sie eine Formel ψ_k an, sodass

$$\psi_k(\mathcal{G}) = \{(i, j) \mid \min(i, j) = k\}.$$

(iv) Zeigen Sie: Für jedes $g \in G$ gibt es entweder genau ein oder genau zwei verschiedene Elemente $g_1, g_2 \in G$, sodass $(\mathcal{G}, g) \equiv (\mathcal{G}, g_i)$ für alle $1 \leq i \leq 2$ gilt. (Es ist explizit erlaubt, das $g = g_i$ für ein $1 \leq i \leq 2$ gilt.)

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen mit den Universen A, B und $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Sei $\pi : \mathcal{A} \to_{hom} \mathcal{B}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Für eine Relation $R \subseteq A^k$ und eine Abbildung $f : A \to B$ schreiben wir

$$f(R) := \{(f(r_1), \ldots, f(r_k)) \mid (r_1, \ldots, r_k) \in R\}.$$

(v) Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A^k$. Zeigen Sie mit Hilfe von Ehrenfeucht-Fraïsse Spielen: $(\mathcal{A}, (a_1, a_2, \ldots, a_k)) \equiv (\mathcal{B}, (\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_k)))$.

(vi) Zeigen Sie mit Verwendung von *(v)*: $\pi(\varphi(\mathcal{A})) = \varphi(\mathcal{B})$.