Hausarbeit 1 Aufgabe 3

Gruppe: 402355, 392210, 413316, 457146

Lösungen

(i)	(ii)	(iii)	Form	Σ

Aufgabe 3

(i) Sei c eine k-Nachbarschaftsfärbung von G. Für den endlichen Teilgraphen H beschränken wir c lediglich auf die Knoten $V(H)$ von H und wir erhalten eine k-Nachbarschaftsfärbung von H, da $E(H) \subseteq E(G)$.

(ii) Wir definieren die Formel $\varphi_{H,k}$ wie folgt:

$$\varphi_{H,\leq k} \coloneqq \bigwedge_{\{u,v\}\in E(H)} \Big(\bigwedge_{x\in(N_H(u)\cap N_H(v))} \Big(\bigvee_{i=1}^{k}(C_{x,i} \wedge (\bigwedge_{\substack{y\in(N_H(u)\cap N_H(v))\\ y\neq x}} \neg C_{y,i})) \wedge \bigwedge_{\substack{1\leq j\leq k\\ i\neq j}} (\neg C_{x,j})\Big)\Big)$$

$$\varphi_{H,=k} \coloneqq \bigvee_{\{u,v\}\in E(H)} \Big(\bigwedge_{i=1}^{k}\Big(\bigvee_{x\in(N_H(u)\cap N_H(v))} (C_{x,i} \wedge (\bigwedge_{\substack{y\in(N_H(u)\cap N_H(v))\\ y\neq x}} \neg C_{y,i})) \wedge \bigwedge_{\substack{1\leq j\leq k\\ i\neq j}} (\neg C_{x,j})\Big)\Big)$$

$$\varphi_{H,k} \coloneqq \varphi_{H,\leq k} \wedge \varphi_{H,=k}$$

$C_{x,i}$ wird mit 1 belegt, wenn $x \in (N_H(u) \cap N_H(v))$ mit i gefärbt wird.

$\varphi_{H,\leq k}$ prüft für jede Kante $\{u,v\} \in E(H)$, ob dessen Nachbarschaft $\leq k$-nachbarschaftsfärbbar ist, mit mindestens k = 1. Die erste große Verundung iteriert über alle Kanten $\{u,v\} \in E(H)$. Die zweite große Verundung iteriert über die Nachbarschaft der betrachteten Kante und die große Veroderung iteriert über unser i. Dann prüfen wir, ob es ein $1 \leq i \leq k$ gibt, sodass ein Knoten x aus der Nachbarschaft mit i gefärbt ist, wenn gilt, dass kein weiterer Knoten y aus der Nachbarschaft mit i gefärbt ist, und x nur eine Farbe besitzt.

$\varphi_{H.=k}$ prüft, ob es mindestens eine Nachbarschaft gibt, die genau k-nachbarschaftsfärbbar ist. Dazu iterieren wir diesmal mit einer großen Veroderung über alle Kanten $\{u,v\} \in E(H)$. Danach iterieren wir von 1 bis k und iterieren über alle Knoten x aus der Nachbarschaft und prüfen für jedes k, ob es einen Knoten x aus der Nachbarschaft gibt, der mit dem betrachteten i gefärbt ist und kein weiterer Knoten y aus der Nachbarschaft mit i gefärbt ist, und x nur eine Farbe besitzt.

In $\varphi_{H,k}$ verunden wir $\varphi_{H,\leq k}$ und $\varphi_{H,=k}$. Somit prüft $\varphi_{H,k}$ für jede Kante, ob deren Nachbarschaft $\leq k$-nachbarschaftsfärbbar ist, und es mindestens eine Kante gibt, deren Nachbarschaft genau k-nachbarschaftsfärbbar ist. Somit wird $\varphi_{H,k}$ erfüllt, wenn H k-nachbarschaftsfärbbar ist.

Sei β eine Belegung, die $\varphi_{H,k}$ erfüllt. Dann definieren wir folgende k-Nachbarschaftsfärbung c:

Wir setzen $c(x) \coloneqq i$, wenn $\varphi_{H,k}$ erfüllt wird und wenn in $\varphi_{H,\leq k}$ im Schritt für x in der zweiten großen Verundung die große Veroderung für i mit 1 ausgewertet wird.

Sei c eine k- Nachbarschaftsfärbung auf H. Wir definieren eine erfüllende Belegung β für $\varphi_{H,k}$ wie folgt
$\beta(\bigvee_{i=1}^{k}(C_{x,i} \wedge (\bigwedge_{\substack{y \in (N_H(u) \cap N_H(v)) \\ y \neq x}} \neg C_{y,i})) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq k \\ i \neq j}}(\neg C_{x,j})) = 1$ aus $\varphi_{H,\leq k}$,
wenn $c(x) = i$, sonst 0, für alle $\{u,v\} \in E(H)$ und $x \in (N_H(u) \cap N_H(v))$

und

$\beta(\bigwedge_{i=1}^{k}(\bigvee_{x \in (N_H(u) \cap N_H(v))}(C_{x,i} \wedge (\bigwedge_{\substack{y \in (N_H(u) \cap N_H(v)) \\ y \neq x}} \neg C_{y,i})) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq k \\ i \neq j}}(\neg C_{x,j}))) = 1$ aus $\varphi_{H,=k}$,
wenn $|N_G(u) \cap N_G(v)| = |\{c(w) | w \in N_G(u) \cap N_G(v)\}| = k$, sonst 0,
für alle $\{u,v\} \in E(H)$ und $x \in (N_H(u) \cap N_H(v))$
Wenn das für mindestens eine Nachbarschaft gilt, so wird $\varphi_{H,=k}$ erfüllt.

Somit erfüllt eine k-Nachbarschaftsfärbung c auf H $\varphi_{H,k}$.

(iii) Zu zeigen:
Wenn jeder endliche Teilgraph G' von G eine k-Nachbarschaftsfärbung besitzt (B), dann ist G k-nachbarschaftsfärbbar (A).

(B) => (A):
Sei $\Phi := \{\varphi_{G',k} | G' \subseteq G, \text{wobei } G' \text{ endlich ist}\}$.
Außerdem sei $\Phi' \subseteq \Phi$ eine endliche Teilmenge von Φ.
Sei $U := \bigcup_{\varphi_{G',k} \in \Phi'} V(G)$

Da U endlich ist, können wir hiermit den endlichen Graphen
$L := G[U] = (U, \{\{v,w\} | u,v \in U \text{ und } v,w \in E(G)\})$ definieren.

Laut (B) besitzt L eine k-Nachbarschaftsfärbung c_L.
Diese können wir in eine Belegung β' übersetzten, die $\varphi_{L,k}$ erfüllt.
Da jedes G' mit $\varphi_{G'} \in \Phi'$ auch ein Teilgraph von L ist, folgt daraus, dass $\beta' \models \Phi'$.
Also ist Φ' erfüllbar. Laut dem KHS ist also Φ erfüllbar.