Hausarbeit 1 Aufgabe 1

Gruppe: 402355, 392210, 413316, 457146

Lösungen

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	Form	$\sum$

Aufgabe 1

(i) Wir zeigen die Gueltigkeit dieser Aussage mithilfe des Kompaktheitssatzes.
In den Folien der Vorlesung aus Woche 5 steht:

"Sei C eine unendlich unerfüllbare Klauselmenge, dann folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass bereits eine endliche Teilmenge $C_0 \subseteq C$ unerfüllbar ist. Also hat C_0 eine Resolutionswiderlegung. Diese ist aber auch eine Resolutionswiderlegung von C."

Sei Z eine unendliche Klauselmenge mit $\Phi \subseteq Z$ und eine endliche Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$. Wenn es eine Resolutionswiderlegung für Φ' gibt, so gibt es auch eine Resolutionswiderlegung für Φ, da $\Phi' \subseteq \Phi$.

(ii) Aus Teilaufgabe (i) wissen wir, wenn eine Resolutionswiderlegung fuer eine Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ existiert, so existiert auch eine Resolutionswiderlegung fuer die Formelmenge Φ.
Wir definieren also die folgenden Teilmengen:

$$\Phi'_{H,E} := \{E_{1,4}, E_{1,8}, E_{4,8}, E_{2,3}, E_{2,6}, E_{3,6}\}, \Phi'_{H,E} \subseteq \Phi_{H,E}$$

$$\Phi'_{H,2} := \{\neg E_{1,4} \vee \neg E_{1,8} \vee \neg E_{4,8} \vee \neg E_{2,3} \vee \neg E_{2,6} \vee \neg E_{3,6}\}, \Phi'_{H,2} \subseteq \Phi_{H,2}$$

$$\Phi'_H := \Phi'_{H,E} \cup \Phi'_{H,2}, \Phi'_H \subseteq \Phi_H$$

Wir geben im folgenden eine Resolutionswiderlegung fuer Φ'_H an:

$\{E_{3,6}\}$ $\{E_{2,6}\}$ $\{E_{2,3}\}$ $\{E_{4,8}\}$ $\{E_{1,8}\}$ $\{E_{1,4}\}$ $\{\neg E_{1,4}, \neg E_{1,8}, \neg E_{4,8}, \neg E_{2,3}, \neg E_{2,6}, \neg E_{3,6}\}$

$\{\neg E_{1,8}, \neg E_{4,8}, \neg E_{2,3}, \neg E_{2,6}, \neg E_{3,6}\}$

$\{\neg E_{4,8}, \neg E_{2,3}, \neg E_{2,6}, \neg E_{3,6}\}$

$\{\neg E_{2,3}, \neg E_{2,6}, \neg E_{3,6}\}$

$\{\neg E_{2,6}, \neg E_{3,6}\}$

$\{\neg E_{3,6}\}$

$\square$

Da $\Phi'_H \subseteq \Phi_H$ gibt es somit auch eine Resolutionswiderlegung fuer Φ_H.

(iii) Aus Teilaufgabe (i) wissen wir, wenn eine Resolutionswiderlegung fuer eine Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ existiert, so existiert auch eine Resolutionswiderlegung fuer die Formelmenge Φ.

Angenommen es gibt zwei disjunkte Kreise C und K der Laenge drei in Φ_G, dann wählen wir eine Teilmenge $\Phi'_G = \Phi'_{G,E} \cup \Phi'_{G,2}$, $\Phi'_G \subseteq \Phi_G$ und betrachten die zwei disjunkten Kreise:

$$C = \{E_{a,b}, E_{a,c}, E_{b,c}\}, K = \{E_{u,v}, E_{u,w}, E_{v,w}\}$$

$$|\{a, b, c, u, v, w\}| = 6, 1 \leq a \leq b \leq c \leq |V(G)|, 1 \leq u \leq v \leq w \leq |V(G)|$$

Wir definieren $\Phi'_{G,E}$ wie folgt:

$$\Phi'_{G,E} = \{E_{a,b}, E_{a,c}, E_{b,c}, E_{u,v}, E_{u,w}, E_{v,w}\}$$

Weiterhin definieren wir $\Phi'_{G,2}$ wie folgt:

$$\Phi'_{G,2} = \{\neg E_{a,b} \vee \neg E_{a,c} \vee \neg E_{b,c} \vee \neg E_{u,v} \vee \neg E_{u,w} \vee \neg E_{v,w}\}$$

Im folgenden geben wir eine Resolutionswiderlegung fuer Φ'_G an:

$$\{E_{a,b}\} \quad \{E_{a,c}\} \quad \{E_{b,c}\} \quad \{E_{u,v}\} \quad \{E_{u,w}\} \quad \{E_{v,w}\} \quad \{\neg E_{a,b}, \neg E_{a,c}, \neg E_{b,c}, \neg E_{u,v}, \neg E_{u,w}, \neg E_{v,w}\}$$

$$\{\neg E_{a,b}, \neg E_{a,c}, \neg E_{b,c}, \neg E_{u,v}, \neg E_{u,w}\}$$

$$\{\neg E_{a,b}, \neg E_{a,c}, \neg E_{b,c}, \neg E_{u,v}\}$$

$$\{\neg E_{a,b}, \neg E_{a,c}, \neg E_{b,c}\}$$

$$\{\neg E_{a,b}, \neg E_{a,c}\}$$

$$\{\neg E_{a,b}\}$$

$$\square$$

Da $\Phi'_G \subseteq \Phi_G$ gibt es somit auch eine Resolutionswiderlegung fuer Φ_G. Somit ist Φ_G unerfuellbar.

(iv) Angenommen Φ_G ist unerfuellbar.
Die Formelmenge Φ_G ist wie folgt definiert:

$$\Phi_G = \Phi_{G,E} \cup \Phi_{G,2}$$

Die Formelmenge $\Phi_{G,E}$ beinhaltet alle Kanten und Nichtkanten des Graphen G und wird somit fuer G erfuellt.

Sei die Formel φ, $\varphi \in \Phi_{G,2}$ wie folgt definiert:

$$\varphi = \neg E_{a,b} \vee \neg E_{a,c} \vee \neg E_{b,c} \vee \neg E_{u,v} \vee \neg E_{u,w} \vee \neg E_{v,w}$$

$$|\{a, b, c, u, v, w\}| = 6, 1 \leq a \leq b \leq c \leq |V(G)|, 1 \leq u \leq v \leq w \leq |V(G)|$$

Es werden alle Formeln $\psi \in \Phi_{G,2}$ durch φ allgemein dargestellt.

Wenn die Formelmenge $\Phi'_G := \Phi_{G,E} \cup \{\varphi\}$ unerfuellbar ist, so folgt aus dem Kompaktheitssatz auch Φ_G ist unerfuellbar, da $\Phi'_G \subseteq \Phi_G$.
Somit folgt laut unserer Annahme, in G existieren die Kanten:

$$E_{a,b}, E_{a,c}, E_{b,c}, E_{u,v}, E_{u,w}, E_{v,w}$$

,da nur in diesem Fall Φ'_G unerfuellbar ist.

Um dies zu zeigen definieren wir die Formelmenge $\Phi'_{G,E}$, $\Phi'_{G,E} \subseteq \Phi_{G,E}$ wie folgt:

$$\Phi'_{G,E} := \{E_{a,b}, E_{a,c}, E_{b,c}, E_{u,v}, E_{u,w}, E_{v,w}\}$$

Es existiert eine Resolutionswiderlegung fuer $\Phi''_G := \Phi'_{G,E} \cup \{\varphi\}$, $\Phi''_G \subseteq \Phi'_G$ und somit laut Teilaufgabe (i) auch fuer Φ'_G. Jedoch offensichtlich nur genau dann wenn $\Phi'_{G,E}$ die besagten Kanten enthaelt. Dies haben wir bereits in der Teilaufgabe (iii) veranschaulicht.

Somit existieren in G die disjunkten Kreise C und K der Laenge drei:

$$C = \{E_{a,b}, E_{a,c}, E_{b,c}\}, K = \{E_{u,v}, E_{u,w}, E_{v,w}\}$$