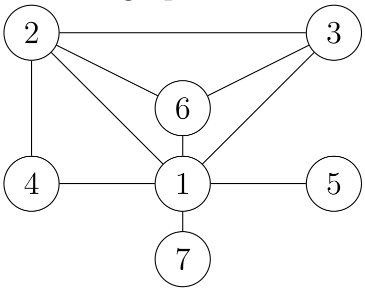
Hausarbeit 2 Aufgabe 1

Gruppe: 402355, 392210, 413316, 457146

Lösungen

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)	Form	Σ
Aufgabe 1												

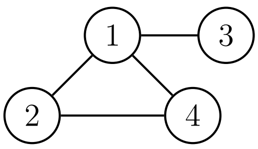
(i) Gaifmangraphen von $\mathcal{B}$:



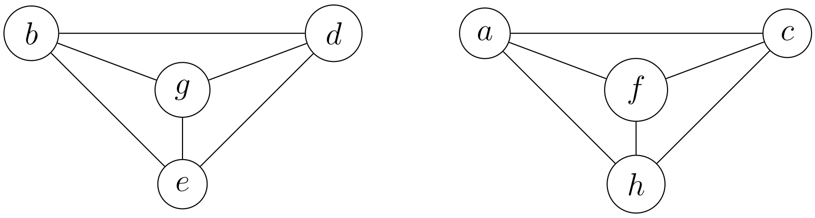
(ii) $\mathcal{C} := ([4],\ \mathcal{R}^{\mathcal{C}} := \{(a,b,c) \in [4]^3 \mid a.b = c\})$

$\mathcal{D} := ([4],\ \mathcal{R}^{\mathcal{D}} := \{(a,b,c) \in [4]^3 \mid a/b = c\})$

$\mathcal{R}^{\mathcal{C}} = \{(1,2,2)(2,1,2)(1,3,3)(3,1,3)(1,4,4)(4,1,4)(2,2,4)\}$
$\mathcal{R}^{\mathcal{D}} = \{(2,1,2)(3,1,3)(4,1,4)(4,2,4)\}$
$\mathcal{R}^{\mathcal{C}} \ncong R^{\mathcal{D}}$
$\mathcal{G}(\mathcal{C}) \cong \mathcal{G}(\mathcal{D})$



(iii) Die Struktur $I_{\psi_1}(G_1)$ sieht wie folgt aus:



(iv) $\psi_2 := \exists z \exists w((E(x,z) \land E(y,z)) \land (E(x,w) \land E(y,w)) \land (z \neq w \land \neg E(z,w)))$

(v) $\psi_3(u,v) := \exists z(R(u,v,z) \lor R(u,z,v) \lor R(z,u,v))$
Da die Formel sich auf τ-Signaturen bezieht, können wir nur das Dreistellige Relationssymbol R nutzen. Wir suchen durch jede mögliche Kombination aus R-Relationen die u und v beinhalten. Wenn es eine davon gibt, geben wir das Tupel (u,v) aus.

(vi) $\varphi_1(a,b) := E(a,b) \land E(b,a)$

(vii) Die Aussage ist Falsch.
Angenommen G $\equiv_m$ H mit m > 0 gilt, dann muss dies auch gelten wenn G $\not\equiv_0$ H. Sind G und H nicht 0-äquivalent und berechnen nun I_φ(G) und I_φ(H) für alle $\varphi \in$ FO[δ] mit qr(φ) = 0. Dann sind I_φ(G) und I_φ(H) nicht äquivalent zueinander. Laut der Definition von m-äquivalenz können sie somit auch nicht für alle m > 0 äquivalent zueinander sein.

(viii) Die Aussage Stimmt.
Seien $I_\varphi(G) \equiv_m I_\varphi(H)$ mit m > 0 und qr(φ) = 0. Dann gilt dadurch, dass φ nur mit einem zweistelligen Relationssymbol definiert ist, dass $I_\varphi(G) \equiv_m I_\varphi(H)$ auch auf m = 0 äquivalent sein müssen. Daher sind $I_\varphi(G)$ und $I_\varphi(H)$ elementär äquivalent.
Laut "Tut 10 Lösung 3iii"gilt, dass wenn $I_\varphi(G) \equiv I_\varphi(H)$ gilt, dann gilt auch $I_\varphi(G) \cong I_\varphi(H)$ auf allen $\varphi_a \in$ FO[δ].
Es gibt also eine Formel $\varphi_2 \in$ FO[δ] für die gilt, $I_{\varphi_2}(I_\varphi(G))$ = G, dann gilt auch $I_{\varphi_2}(I_\varphi(H))$ = H. Somit gilt die Aussage wenn $I_\varphi(G) \equiv_m I_\varphi(H)$, dann auch $G \equiv_m H$.

(ix) IA: Angenommen T ist ein Baum mit $|V(T)|$ = n = 2, dann ist $|E(T)|$ = 1. Dann ist T' ein Graph mit $|V(T')|$ = n = 2 und $|E(T')|$ = 1. Daraus folgt es gibt ein Hamiltonpfad von u nach v der Länge 2.

IV: Für ein festen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ hat ein aus der Baum T konstruierten Graphen T' ein Hamiltonpfad für alle $\{u, v\} \in V(T')$

IS: Laut $\chi(x, y)$ gilt: T ist ein Teilgraph von T'. Für alle $\{u, v\} \in E(T)$ existiert auch $\{u, v\} \in E(T')$. Für alle $\{u, z\}, \{z, v\} \in E(T)$ existiert auch $\{u, v\} \in E(T')$, was bedeuted, dass T' einen vollständigen Teilgraph (K_3) der Länge 3 hat. Für alle $\{u, z\}, \{z, w\}, \{w, v\} \in E(T)$ existiert auch $\{u, v\}, \{u, w\}, \{z, v\} \in E(T')$, was bedeuted, dass T' einen vollständigen Teilgraph (K_4) der Länge 4 hat.

Daraus folgt, dass T' enthält eine Menge aus vollstendigen K_3 und K_4 Teilgraphen, und jeder Knoten $x \in V(T')$ teil mindestens einen solchen vollständigen Teilgraph ist. (Für $n \geq 3$ sind alle $x \in V(T')$ immer Teil mindestens einen vollständigen K_4 Teilgraph).

Da jeder vollständigen Graph einen Hamiltonpfad hat, folgt, dass für alle $\{u, v\} \in E(T)$ einen Hamiltonpfad in T' existiert.

(x) Aus Aufgabe ix) können wir ableiten, dass es einen Hamiltonpfad in H' gibt von u nach v für jedem Zusammenhängenden Graphen H, da durch χ alle 3er und 4er Knotenpaare einen Kreis bilden. somit gibt es auch ein 3er Kreis mit (u,v,x) wobei x $\in$ V(H). Durch den Hamiltonpfad von u nach v und der Kante E(u,v) existiert somit auch ein Hamiltonkreis in H'