Hausarbeit 1 Aufgabe 2

Gruppe: 402355, 392210, 413316, 457146

Lösungen

(i)	(ii)	Form	$\sum$

Aufgabe 2

(i) $\varphi_\top := \neg(\neg X \wedge X \wedge \neg X)$, mit $\varphi_\top \in \mathrm{AL}_1$ und $X \in \mathrm{AL}_1$ für alle $X \in \mathrm{AVAR}$

(ii) Wir zeigen per Induktion, dass für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$ eine äquivalente Formel $\varphi' \in \mathrm{AL}_1$ existiert.

IA:
Es gilt $X \in \mathrm{AL}_1$ für alle $X \in \mathrm{AVAR}$.

Für $\top$ benutzen wir die in Aufgabenteil (i) definierte Formel $\varphi_\top \in \mathrm{AL}_1$.
Für diese gilt:
$\varphi_\top := \neg(\neg X \wedge X \wedge \neg X)$
$\equiv X \vee \neg X \vee X$
$\equiv X \vee \neg X$
$\equiv \top$

Für $\bot$ definieren wir die Formel $\varphi_\bot \in \mathrm{AL}_1$ durch $\varphi_\bot := \neg X \wedge X \wedge X$.
Für diese gilt:
$\varphi_\bot := \neg X \wedge X \wedge X$
$\equiv \neg X \wedge X$
$\equiv \bot$

IV:
Seien $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{AL}$, und seien $\psi_1', \psi_2' \in \mathrm{AL}_1$ äquivalente Formeln für diese, sodass gilt:

$$\psi_1 \equiv \psi_1' \text{ und } \psi_2 \equiv \psi_2'$$

IS:
Für $\varphi := \psi_1 \vee \psi_2$, $\varphi \in \mathrm{AL}$
definieren wir $\varphi' := \neg(\neg\psi_1' \wedge \neg\psi_2') \wedge \varphi_\top$, $\varphi' \in \mathrm{AL}_1$

Daraus folgt:
$\varphi' := \neg(\neg\psi_1' \wedge \neg\psi_2') \wedge \varphi_\top \equiv \neg(\neg\psi_1' \wedge \neg\psi_2') \equiv \psi_1' \vee \psi_2'$
Durch (IV) folgt: $\varphi \equiv \varphi'$

Für $\varphi := \neg\psi_1$, $\varphi \in \mathrm{AL}$
definieren wir $\varphi' := \neg(\psi_1' \wedge \psi_1' \wedge \psi_1')$, $\varphi' \in \mathrm{AL}_1$

Daraus folgt:
$\varphi' := \neg(\psi_1' \wedge \psi_1' \wedge \psi_1') \equiv \neg(\psi_1' \wedge \psi_1') \equiv \neg\psi_1'$
Durch (IV) folgt: $\varphi \equiv \varphi'$

Nach Korollar 2.41 im Vorlesungsskript (oder auch auf Seite 3/14 der Folien 3.5 der Woche 2) ist jede aussagenlogische Formel äquivalent zu einer Formel, die lediglich Variablen, $\top$, $\bot$, $\neg$ und $\vee$ beinhaltet.
Wie bereits bewiesen, existiert so eine Formel in AL_1.

Also existiert zu jeder Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ eine äquivalente Formel $\varphi' \in \mathrm{AL}_1$. Somit ist AL_1 eine Normalform.