Hausaufgabe 1 Aufgabe 3

Gruppe: 457818, 410265, 456732, 392210

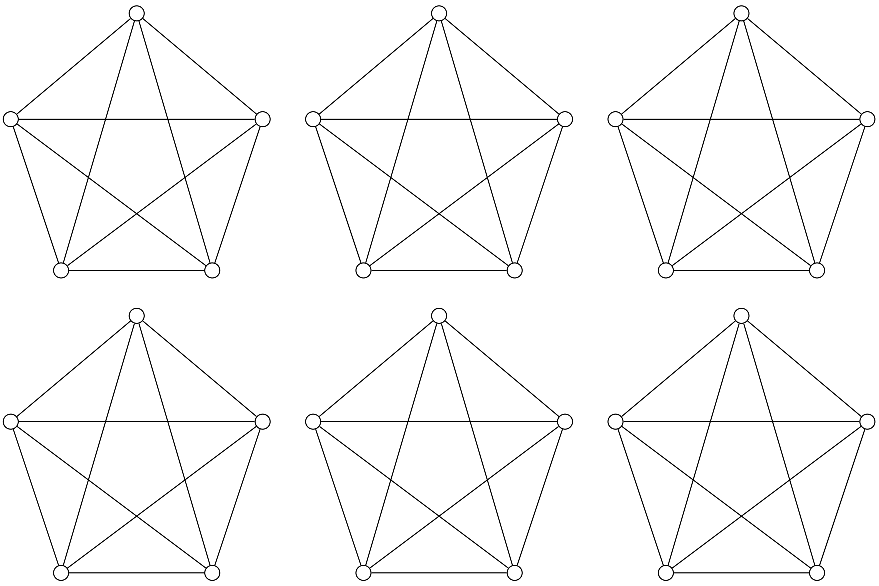
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	Form	Σ
8	7	8	11	-1	33

Aufgabe 3

(i) Wir wollen die Aussage widerlegen und geben ein Gegenbeispiel an.

Betrachten wir folgenden Graphen:

$G:$



3

Der Graph G besteht aus sechs Zusammenhangskomponenten (ZK) und jede ZK entspricht dem Graphen K_5. Für den kompletten Graph K_5 beträgt $\text{fvn}(K_5) = 3$ und $\text{mc}(K_5) = 5$. Da in unserem Graphen G jede ZK dem K_5 entspricht, bleibt der größte komplette Teilgraph von G eine der sechs ZKen (den K_5) und somit gilt $\text{mc}(G) = 5$.

2

Anders wiederum ist es bei $\text{fvn}(G)$. Damit aus G ein Wald wird, muss jede der ZKen aus G ein Baum sein. Damit aus einem K_5 ein Baum wird, müssen wir 3 Knoten aus dem K_5 entfernen, weshalb $\text{fvn}(K_5) = 3$ gilt. Da G sechs ZKen enthält, die alle K_5 entsprechen, muss man nun $\text{fvn}(G) = 6 \cdot \text{fvn}(K_5) = 6 \cdot 3 = 18$. Es gilt also $\text{fvn}(G) = 18 \geq 15 = 3 \cdot \text{mc}(G)$.

2

1

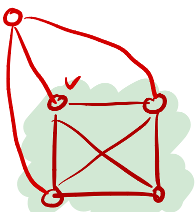
8/8

Somit ist die Aussage falsch.

(ii) Wir zeigen, dass die Formel gilt.

Sei G ein beliebiger Graph.

$G:$



„⇒“: Nehmen wir an, dass $mc(G) = n$ ist. Daraus folgt, dass es in dem Graphen G einen Subgraph gibt, der K_n entspricht. Da wir einen Subgraph erhalten haben, der einem vollständigen Graphen entspricht, so gilt für jeden Knoten v dieses Subgraphen, dass $deg_G(v) \neq deg_{K_n}(v) = n - 1$. —1

7/8

Da unser gefundenes K_n ein Teilgraph von G ist und es in diesem keinen Knoten mit kleinerem Grad als $n-1$ gibt, kann $degeneracy(G)$ per Definition nicht kleiner als $n-1$ sein. Es folgt daraus: $degeneracy(G) \geq n - 1$. Somit gilt $mc(G) = n = n - 1 + 1 \leq degeneracy(G) + 1$ und die Gleichung ist erfüllt.

$deg_G(v) = 4$

$deg_{K_n}(v) = 3$

„⇐“: Nehmen wir an, dass $degeneracy(G) = n$ gilt. Aus der Definition von $degeneracy()$

unnötig

man braucht keine 2 Richtungen

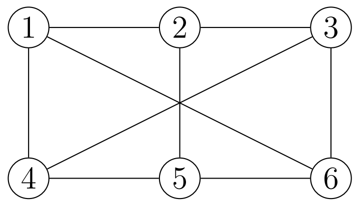
folgt dann, dass es keine zwei Knoten u, v geben darf, die inzident zueinander sind und den Grad $deg_G(v) = deg_G(u) = n + 1$ besitzen, da $degeneracy(G)$ sonst zu $n + 1$ auswerten würde.

Nach der Definition würden wir somit jeden vollständigen Subgraph verbieten, der größer als K_{n+1} sein würde. Der Graph K_{n+1} würde dafür sorgen, dass $mc(G) = n+1$ gilt, wodurch die Gleichung weiterhin erfüllt sein würde. Da es also nicht möglich ist, einen höheren $mc()$ Wert und damit einen größeren kompletten Subgraph zu bilden, ist die Gleichung erfüllt.

Somit ist bewiesen, dass die Gleichung stimmt.

(iii) Betrachten wir den folgenden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$:

$G:$



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$$

8/8

Für jeden Knoten $v \in V$ gilt $\deg_G(v) = 3$. In dem durch alle Knoten aus G induzierten Teilgraphen, gibt es somit keinen Knoten v_* mit $deg(v_*) \leq 3$. Demnach ist die *degeneracy* von G gleich 3 , also gilt $\text{degeneracy}(G) = 3$.

Nehmen wir uns drei beliebige Knoten $u, v, w \in V$ mit $\{u, v\} \in E$ und $\{u, w\} \in E$, so ist $\{v, w\} \notin E$. Es gibt also kein Teilgraph D von G der isomorph zu K_3 ist, weshalb es auch keine Clique der Größe 3 geben kann. Nach der graphischen Darstellung bilden die Knoten $1, 2 \in V$ aber eine Clique der Größe 2, also gilt $\text{mc}(G) = 2$.

Es folgt $\text{degeneracy}(G) = 3 \geq 2 = \text{mc}(G)$. Somit ist die Aussage falsch.

(iv) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $degeneracy(G) = n$.
Laut der Definition von $degeneracy()$ gibt es in jedem Teilgraph von G ein Knoten $v \in V$ mit dem Grad $deg(v) \leq n$. Außerdem muss es mindestens einen Teilgraphen $T = (V_T, E_T)$ von G geben, in dem für jeden Knoten $w \in V_T$ gilt: $deg(w) \not< deg(v) = n$. ! -1
Würde es in jedem Teilgraph mindestens eine n Knoten mit Grad kleiner als n geben, würde per Definition nicht $degeneracy(G) = n$ gelten. Es gilt damit auch $degeneracy(T) = degeneracy(G)$.

Zeigen wir zunächst, dass die Aussage für $degeneracy(G) = 1$ gilt.
3 Wenn dies gilt, dann gibt es für T zwei Fälle:
1.Fall: T ist kreisfrei. Dann müssen wir keinen Knoten löschen, damit T ein Wald wird. Das heißt $fvn(T) = 0$. Es gilt $degeneracy(T) = degeneracy(G) = 1 = 0 + 1 \leq fvn(T) + 1$
2.Fall: In T gibt es mindestens einen Kreis. Das bedeutet $fvn(T) \leq 1$, woraus sich schlussfolgern lässt: $degeneracy(T) = degeneracy(G) = 1 \leq fvn(T) + 1$.

Für $degeneracy(G) \geq 2$ muss T mindestens einen Kreis enthalten, da es in T keinen Knoten w mit Grad $deg(w) \leq 2$ gibt und T somit keine Blätter besitzt. Aus der Definition von $fvn(G)$ wissen wir, dass nach dem Löschen von k Knoten mit $fvn(G) = k$ der Teilgraph T kreisfrei sein muss.

ungünstiger Name, lieber w_1 / w' / v / ...

Nehmen wir an es gilt $fvn(T) < degeneracy(T) - 1 = degeneracy(G) - 1$.
Wir wissen, dass jeder Knoten $w \in V_T$ den Grad $deg(w) \geq degeneracy(G)$ besitzt und das für mindestens ein Knoten $w* \in T_V$ $deg(w*) = degeneracy(G)$ gelten muss.
Wenn wir einen beliebigen Knoten $l \in V_T$ löschen, dann verringert sich der Grad eines jeden Nachbarns um 1, da für jeden zu l adjazenten Knoten die Kante zu l entfernt wird.

−1 F

Laut Annahme können wir maximal $fvn(G) = degeneracy - 2$ viele Knoten löschen.
Wenn wir nun nur Knoten löschen, die adjazent zu $w*$ sind, dann hat dieser nach Löschung $deg(w*) = degeneracy(G) - (degeneracy(G) - 2) = 2$.
Nach Definition von T gilt aber für alle anderen Knoten w:
$deg(w) \geq deg(w*) = 2$ nach Löschung.
Demnach muss es in T nach der Löschung immernoch einen Kreis geben, da alle verbliebenen Knoten einen Grad größer als 2 haben. Dies ist ein Widerspruch aus der Definition von $fvn()$. Damit muss gelten:
$degerneracy(T) - 1 = degeneracy(G) - 1 \leq fvn(T) \Leftrightarrow degeneracy(G) \leq fvn(T) + 1$

G kann außerdem noch andere Teilgraphen verschieden von T besitzen. Die Definition von $degeneracy(G)$ verlangt nur die Existenz eines Teilgraphen von T und das es keinen Teilgraphen von G gibt, in dem alle Knoten einen höheren Grad als n haben. Das bedeutet, dass diese Teilgraphen Kreise enthalten können, die nicht in T enthalten sind oder auch keine weiteren Kreise. Aus der Definition von fvn folgt somit: $fvn(T) \leq fvn(G)$.
Damit gilt:
$degeneracy(G) \leq fvn(T) + 1 \leq fvn(G) + 1$

11/12