ریاضیات گسسته و ترکیباتی

۲

رالف پ. گریمالدی

ترجمهٔ
دکتر محمدعلی رضوانی
دکتر بیژن شمس

انتشارات فاطمی

Discrete And Combinatorial Mathematics
Ralph P. Grimaldi
Addison - Wesley Publishing Company

ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی / جلد دوم

مؤلف: رالف. پ. گریمالدی
مترجمان: محمدعلی رضوانی، بیژن شمس
ویراستار: مهران اخباریفر
ناشر: انتشارات فاطمی
چاپ نهم، ۱۳۹۴
شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه
قیمت: ۱۶۰۰۰ تومان
شابک ۶-۲۴۳-۳۱۸-۹۶۴(جلد ۲)
ISBN 964-318-243-6(v.2)
شابک دوره ۸-۲۵۶-۳۱۸-۹۶۴
ISBN 964-318-256-8(set)

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید انتشارات فاطمی
- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: زهرا قورچیان
- حروفچینی و صفحه‌بندی: زهره امینی
- صفحه‌آرا: حمیدرضا شعبانی
- نمونه‌خوانی: ساقی جهانشاهی قاجار
- نظارت بر چاپ: علی محمدپور

چاپ و صحافی: خاشع

نشانی دفتر: میدان فاطمی، خیابان جویبار، خیابان میرهادی،
شمارهٔ ۱۴، کدپستی ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱، تلفن: ۸۸۹۴۵۵۴۵ (۲۰ خط)
نمابر: ۸۸۹۴۴۰۵۱ www.fatemi.ir • info@fatemi.ir
نشانی فروشگاه: تهران، خیابان انقلاب، خیابان دانشگاه، تقاطع شهدای ژاندارمری
تلفن: ۶۶۹۷۳۴۷۸ نمابر: ۶۶۹۷۳۷۱۰

گریمالدی، رالف — Grimaldi, Ralph P.
ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی/ تألیف رالف پ. گریمالدی؛ ترجمهٔ محمدعلی رضوانی، بیژن شمس. — تهران: فاطمی، ۱۳۷۶.
۴ج: مصور، جدول، عکس، نمودار.

ISBN 964-318-256-8
- ISBN 964-318-170-7(ج۱)
- ISBN 964-318-243-6(ج۲)
- ISBN 964-318-251-3(ج۳).
- ISBN 964-318-253-5(ج۴).

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Discrete and combinatorial mathemathics: an applied introduction: 3rd ed.

کتابنامه
پ۲. (چاپ نهم: ۱۳۹۴).
۱. ریاضیات. ۲. کامپیوتر — ریاضیات. ۳. آنالیز ترکیبی. الف. رضوانی، محمدعلی، ۱۳۲۴ـ ، مترجم. ب. شمس، بیژن، ۱۳۱۰ـ ، مترجم. ج. عنوان.
QA۳۹/۲/گ۴ر۹ ۱۳۷۶ — ۵۱۰
کتابخانهٔ ملی ایران — ۲۳۶۹-۷۶م

فهرست

به‌نام خدا

پیشگفتار مترجمان

یکی از ویژگیهای بارز ریاضیات، قدرت مدلسازی آن است. تاریخ تحول فکری بشر سرشار از مثالهایی در تأیید این مطلب است. جالب آن است که هرگاه مسأله‌ای متعلق به یکی از شاخه‌های معرفت بشری تن به قالبی ریاضی سپرده است نه فقط زودتر به پاسخ خود رسیده بلکه جوانب عمیقتر آن مسأله آشکارتر شده و پیشرفت آن شاخهٔ علمی نیز سرعت فزاینده‌ای گرفته است.

پیشرفتهای سریع و همه جانبهٔ علوم و تکنولوژی و تحولات عظیم اقتصادی و گسترش بی‌سابقهٔ ارتباطات و دیگر دانشهای بشری در قرن بیستم و به ویژه در نیمهٔ دوم آن، مسائل جدیدی را مطرح ساخته است. طبیعت متناهی (وگاه نامتناهی ولی گسستهٔ) بسیاری از این مسائل همراه با به‌کارگیری ابزار جایگزین‌ناپذیر کامپیوتر (و علم کامپیوتر) «ریاضیات مناسبی غیر از حساب دیفرانسیل و انتگرال سنتی» را طلب می‌کند. در این چارچوب است که بار دیگر ریاضیات خصلت مدلسازی خود را آشکار می‌سازد و این بار در قالب «ریاضیات گسسته» به بیان دقیقتر مسائل مطرح شده پرداخته و سپس، با ابداع الگوریتمهای مناسب و پیاده سازی کامپیوتری آنها، به حل این مسائل می‌پردازد.

آشنایی جدی با علوم کاربردی ـ فنی (وگاه نظری) امروزی بدون داشتن درکی صحیح از مباحث ریاضیات گسسته امری دشوار و در واقع محال است. به همین سبب امروزه کشورهای پیشرفتهٔ جهان درس ریاضیات گسسته (و دروس وابسته به آن) را در برنامهٔ درسی دبیرستانها گنجانده‌اند. همچنین، همهٔ دانشگاههای معتبر جهان این درس را در مواد درسی دورهٔ کارشناسی رشته‌های ریاضی، علوم کامپیوتر و بسیاری از رشته‌های دیگر خود منظورکرده‌اند. درکشور ما نیز اخیراً این اقدام بجا انجام‌گرفته است. ولی جای خالی مرجعی جامع و معتبر در این زمینه که بتواند پاسخگوی نیازهای روزافزون دانش آموزان دبیرستانها و به ویژه دانش‌آموزان دورهٔ پیشدانشگاهی، دبیران ریاضی و دانشجویان دورهٔ کارشناسی باشد، احساس می‌شد.[۱] نگارندگان این سطور بین کتابهای معتبر موجود در سطح جهان، کتاب حاضر را که یکی از بهترین متون در این زمینه است برگزیدند و به ترجمهٔ آن همت گماردند.

یکی از ویژگیهای کتاب حاضر این است که علاوه بر وجود تعداد زیادی تمرین در انتهای هر بند و در پایان هر فصل، تعداد بسیار زیادی مثال حل شده دربارهٔ هر مبحث، چه قبل و چه بعد از معرفی آن، گنجانده شده است و این درست همان چیزی است که دانش‌آموزان، دبیران ریاضی و دانشجویان را به طور مؤثری در درک مفاهیم ارائه شده و استفادهٔ بهینه و خلاقانه از آنها یاری می‌دهد.

همان‌گونه که از عنوان فارسی کتاب آشکار است، نام اصل آن «ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی» و مؤلف آن رالف پ.گریمالدی است. این کتاب در هفده فصل و در قالب چهار قسمت تنظیم شده است و مترجمان چهار قسمت مورد

---

۱. در سال ۱۳۷۵ در همین زمینه کتابی خلاصه‌تر با عنوان «ریاضیات گسستهٔ مقدماتی» تألیف وی.کی. بالا کریشنان، ترجمهٔ مترجمان حاضر، به‌وسیلهٔ مؤسسهٔ انتشارات فاطمی به چاپ رسید.

نظر مؤلف را باکمی تغییر در چهار مجلد تنظیم کرده‌اند. (به سبب ملاحظات مربوط به حجم این چهار مجلد، فصلهای ۶ و ۷ که مربوط به قسمت اول کتاب‌اند در مجلد دوم آمده‌اند). نکتهٔ دیگری که اشاره به آن ضروری به نظر می‌رسد این است که صورت بعضی از مثالها و تمرینها به گونه‌ای بوده است که با فرهنگ جامعهٔ ما همخوانی ندارد و بنابراین، بدون آنکه در محتوای علمی آنها کمترین تغییری دهیم، صورت آنها را دگرگون ساختیم. در مورد اسامی نیز به همین ترتیب عمل کرده‌ایم، یعنی تا آنجا که مقدور بوده است اسامی فارسی را به جای اسامی بیگانه گذاشته‌ایم.

در پایان متذکر می‌شویم که پیشگفتار مؤلف حاوی توضیحاتی تفصیلی دربارهٔ فصلهای کتاب، نحوهٔ سازماندهی مطالب آن، وابستگی فصلها به یکدیگر، تغییرات ایجاد شده به‌وسیلهٔ مؤلف در ویرایش سوم (انگلیسی) کتاب و غیره است و از این نظر نیازی به تکرار آنها احساس نمی‌کنیم.

سخن راکوتاه می‌کنیم و امیدواریم که ترجمهٔ این کتاب در نظر اهل علم و معرفت و به ویژه جوانان شیفتهٔ نیل به قله‌های دانش و فضیلت مقبول افتد.

محمدعلی رضوانی ـ بیژن شمس

پیشگفتار

پیشرفتهای تکنولوژیک بیست و پنج سال اخیر موجب تغییرات زیادی در برنامهٔ درسی دورهٔ کارشناسی دانشگاهها شده است. این تغییرات ورود دروس یک ترمی و چند ترمی زیادی را که در آنها بعضی از مطالب زیر معرفی می‌شوند، به همراه داشته است:

۱. روشهایی گسسته که بر طبیعتی متناهی که ذاتی بسیاری از مسائل و ساختارهاست تأکید دارد؛
۲. ترکیبیات ـ جبر یکایک شمردن، یا شمارش؛
۳. نظریهٔ گرافها همراه با کاربردها و پیوندهای متقابل آن با زمینه‌هایی نظیر ساختار داده‌ها و روشهای بهینه‌سازی؛ و
۴. ساختارهایی جبری و متناهی که در ارتباط با شاخه‌هایی نظیر نظریهٔ کدگذاری، روشهای شمارش، شبکه‌های دریچه‌ای، و طرحهای ترکیبیاتی پیش می‌آیند.

یک دلیل اولیهٔ پرداختن به مطالعهٔ مواد موجود در هر یک یا همهٔ این چهار موضوع کلی، فراوانی کاربردهایی است که هنگام مطالعهٔ علوم کامپیوتر ـ به‌ویژه در زمینه‌های ساختار داده‌ها، نظریهٔ زبانهای کامپیوتری، و تحلیل الگوریتمها با آنها روبه‌رو می‌شویم. علاوه بر آن، کاربردهایی نیز در مهندسی، فیزیک، علوم زیستی، و همچنین در آمار و علوم اجتماعی وجود دارد. درنتیجه، موضوع مورد بحث ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی مواد ارزشمندی را در اختیار دانشجویان بسیاری از تخصصها می‌گذارد و به دانشجویانی که در ریاضیات یا علوم کامپیوتر تخصص می‌گیرند منحصر نمی‌شود.

هدف عمدهٔ این ویرایش جدید نیز این است که مقدمات مطالعه در ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی را فراهم آورد. مطالب برای دانشجویان مبتدی طرح‌ریزی شده‌اند، از این‌رو، تعداد زیادی مثال با توضیحات تفصیلی آورده شده است. علاوه بر آن، اثباتها نیز، هر جا که داده شده‌اند، با تفصیل کافی همراه‌اند (زیرا مبتدیها را نیز درنظر داشته‌ایم).

این کتاب تلاش دارد تا اهداف زیر را به انجام برساند:

۱. آشنا کردن دانشجویانی که در سطح سال دوم یا سوم کارشناسی یا پایینتر هستند با موضوعات و فنون روشهای گسسته و استدلال ترکیبیاتی. مسائل مربوط به شمردن، یا شمارش، نیاز به تحلیلی دقیق از ساختار (مثلاً نقش داشتن یا نداشتن ترتیبها و تکرارها) و امکانات منطقی دارند. در برخی از موقعیتها حتی ممکن است مسألهٔ وجود مطرح شود. با پیگیری چنین تحلیل دقیقی غالباً در می‌یابیم که برای حل یک مسأله به فنون ساده‌ای برای شمردن نتایج ممکن حاصل از خردکردن مسألهٔ مفروض به مسائل کوچکتر نیاز داریم.
۲. وارد کردن طیف وسیعی از کاربردها. در این مورد، هر جا که به ساختارهایی از جبر مجرد نیاز داشته‌ایم، فقط نکات اساسی آن نظریه را که برای کاربرد مورد بحث لازم بوده‌اند بسط داده‌ایم. علاوه بر آن، حل بعضی از کاربردها مستلزم روشهایی تکراری‌اند که به الگوریتمهای مشخصی منجر می‌شوند. رهیافت الگوریتمی برای حل مسائل بحثی بنیادی در ریاضیات گسسته است و این رهیافت پیوندهای نزدیک موجود بین این شاخه و علوم کامپیوتر را تقویت می‌کند.
۳. پرورش بلوغ ریاضی دانشجویان از طریق مطالعه در زمینه‌ای بسیار متفاوت با مطالب سنتی حساب دیفرانسیل و انتگرال و معادلات دیفرانسیل. مثلاً، در اینجا این فرصت پیش می‌آید که با شمردن گردایه‌ای معین از اشیا به بیش از یک طریق،

نتایجی را به اثبات رسانیم. این عمل، اتحادی ترکیباتی را به‌دست می‌دهد؛ ضمناً فنی جدید برای ارائهٔ اثبات معرفی می‌کند. در این ویرایش، ماهیت اثبات را، همراه با آنچه استدلالی معتبر نامیده می‌شود، در فصل ۲ در ارتباط با قوانین منطق و قواعد استنتاج گسترش داده‌ایم. مطالب ارائه شده در این زمینه مفصلتر از مطالب ارائه شده در ویرایش دوم است. اثبات به‌وسیلهٔ استقرای ریاضی (همراه با تعاریف بازگشتی) را در فصل ۴ آورده‌ایم و سپس آنها را در همهٔ فصول بعدی به‌کار گرفته‌ایم.

درمورد قضایا و اثبات آنها در بسیاری از موارد تلاش کرده‌ایم تا با بررسی و مطالعهٔ مثالهایی مشخص، انگیزهٔ پیدایش آنها را استخراج کنیم. علاوه بر آن، هر جا که موقعیتی متناهی نتیجه‌ای به‌دست می‌دهد که در حالت نامتناهی درست نیست، این موقعیت را برای توجه جدا کرده‌ایم. اثباتهایی را که بسیار طولانی و یا طبیعتی نسبتاً خاص دارند حذف کرده‌ایم. ولی، برای این تعداد بسیار کم از اثباتها که از قلم انداخته شده‌اند، مراجعی را برای خوانندهٔ علاقه‌مند به دیدن اعتبار این نتایج، معرفی کرده‌ایم. (تأکیدی که روی هر اثبات گذاشته می‌شود به اهداف هر مدرس و اهداف دانشجویان مخاطب او بستگی خواهد داشت.)

۴. ارائهٔ دید کلی مناسبی از موضوعات برای دانشجویانی در علوم کامپیوتر که در حال گذراندن درسهایی پیشرفته‌تر در زمینه‌هایی نظیر ساختار داده‌ها، نظریهٔ زبانهای کامپیوتری، و تحلیل الگوریتمها هستند. مطالب ارائه شده دربارهٔ گروهها، حلقه‌ها، هیأتها، و جبرهای بولی مقدمه‌ای کاربردی در اختیار آن دسته از دانشجویان ریاضی قرار می‌دهد که مایل‌اند مطالعات خود را در جبر مجرد ادامه دهند.

مطالب مورد نیاز برای به‌کارگیری این کتاب اساساً عبارت‌اند از زمینه‌ای محکم در ریاضیات دبیرستانی و علاقه به مسائل متنوع و مبادرت به حل آنها. هیچ توانایی خاصی در برنامه‌نویسی خواسته نشده است. ولی، قطعه برنامه‌های فراوانی (که به زبان پاسکال ارائه شده‌اند) وجود دارند و اینها را به‌منظور تقویت مثالهای خاص طرح کرده‌ایم و توضیح داده‌ایم. در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال بعداً در همین پیشگفتار متذکر خواهیم شد که تا چه حد در فصلهای ۹ و ۱۰ به آن پرداخته‌ایم.

انگیزهٔ اصلی من در نوشتن ویرایشهای اول و دوم این کتاب ناشی از تشویقی بود که در طول سالهای متمادی از طرف دانشجویان و همکارانم و همچنین، دانشجویان و استادانی که ویرایش نخست این کتاب را در کالجها و دانشگاههای متفاوت مورد استفاده قرار داده‌اند، دریافت کردم. در آن دو ویرایش هم علایق خودم و دانشجویانم و هم توصیه‌های کمیتهٔ ویژهٔ برنامه‌ریزی برای دورهٔ کارشناسی ریاضی[1] و انجمن سازندگان ماشینهای محاسبه[2]، منعکس بود. این ویرایش سوم در همان راستاست و اینک منعکس کنندهٔ توصیه‌های مدرسان و به‌ویژه دانشجویانی است که از ویرایش دوم کتاب بهره گرفته‌اند و یا در حال حاضر از آن بهره می‌گیرند.

ویژگیها

در زیر توصیف کوتاهی از بعضی ویژگیهای اصلی ویرایش جدید می‌آوریم. این توصیف به منظور یاری رساندن به خواننده (دانشجو یا غیر دانشجو) در فراگیری مبانی ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی تدوین شده است.

تأکید بر الگوریتمها و کاربردها. الگوریتمها و کاربردهایی را در بسیاری از زمینه‌ها در سرتاسر متن ارائه کرده‌ایم. مثلاً،

۱. فصل ۱ حاوی موارد متعددی است که در آنها مباحث مقدماتی شمارش مورد نیازند ـ به‌ویژه یک مثال جدید به مسألهٔ اضافه شماری اشاره دارد.

۲. بند ۷ از فصل ۵ مقدمه‌ای بر پیچیدگی محاسباتی را دربردارد. بعداً این مطلب را در بند ۸ همین فصل، به منظور تحلیل زمان اجرای چند قطعه برنامهٔ مقدماتی، که یکی از آنها به تولید اعداد فیبوناچی می‌پردازد، به‌کار گرفته‌ایم.

۳. مواد فصل ۶ دربارهٔ زبانها و ماشینهای متناهی‌الحالت است. این فصل خواننده را با زمینه‌ای مهم در علوم کامپیوتر ـ

1. Committee on the Undergraduate Program in Mathematics

2. Association of Computing Machinery

نظریهٔ زبانهای کامپیوتری ـ آشنا می‌سازد.

۴. فصلهای ۷ و ۱۲ حاوی بحثهایی دربارهٔ کاربردها و الگوریتمهایی است که مرتب‌سازی توپولوژیک و فنون جستجو، مشهور به «نخست عمق را جستجو کن» و «نخست عرض را جستجو کن»، را مورد بحث قرار می‌دهند.

۵. در فصل ۱۰ موضوع روابط بازگشتی را می‌یابیم. مطالب این فصل حاوی کاربردهایی است دربارهٔ (الف) مرتب کردن حبابی، (ب) جستجوی دوتایی، (پ) اعداد فیبوناچی، (ت) دانهٔ برف کوخ، (ث) شبکه‌های مقاومت خطی، (ج) ساختار داده‌هایی به‌نام پشته، و (چ) درختهای دوتایی.

۶. فصل ۱۶ خواص بنیادی ساختاری جبری به‌نام گروه را معرفی می‌کند. مطالب این فصل نشان می‌دهد که چگونه این ساختار در مطالعهٔ جبری نظریهٔ کدگذاری و در مسائل شمارش که به روش شمارش پولیا نیازمندند، به‌کار گرفته می‌شود.

توضیحات مفصل. توضیحات، چه در مثالها و چه در اثبات قضایا، چنان طرح شده‌اند که دقیق و کامل باشند. نحوهٔ ارائهٔ مطلب اساساً برای بهتر کردن درک خواننده‌ای است که برای نخستین بار این نوع مطالب را می‌بیند.

تمرینات. نقش تمرینات در هر متن ریاضی نقش برجسته‌ای است. مدت زمان مصرف شده برای تمرینات به‌طور قابل ملاحظه‌ای روند درس را تحت تأثیر قرار می‌دهد. با توجه به علاقه و زمینهٔ ریاضی دانشجویان مخاطب، یک مدرس باید دریابد که مدتی از وقت کلاس که صرف بحث دربارهٔ تمرینات می‌شود، متفاوت است.

بیش از ۱۷۰۰ تمرین در ۱۷ فصل کتاب گنجانده شده است. آنهایی که در پایان هر بند آمده‌اند معمولاً ترتیب تنظیم مطالب آن بند را منعکس می‌کنند. این تمرینات به منظور (الف) مرور مفاهیم اساسی موجود در آن بند؛ (ب) ایجاد پیوند با ایده‌های ارائه شده در بندهای قبلی همان فصل؛ و (پ) معرفی مفاهیمی اضافی که در ارتباط با مواد موجود در همان بندند، طرح شده‌اند. بعضی از تمرینات، ابداع الگوریتمی یا نوشتن برنامه‌ای کامپیوتری را غالباً برای حل حالتی از مسأله‌ای کلی می‌طلبند. معمولاً این تمرینات فقط به مقدار کمی از تجربهٔ برنامه‌نویسی نیاز دارند.

هر فصل با مجموعه‌ای از تمرینات تکمیلی پایان می‌پذیرد. این تمرینات مروری دیگر از ایده‌های ارائه شده در آن فصل را فراهم می‌آورند و همچنین، مواد ارائه شده در فصلهای قبلی را به‌کار می‌گیرند.

تقریباً حل همهٔ قسمتهای تمریناتِ دارای شمارهٔ فرد در پایان کتاب آورده شده است.

خلاصهٔ فصلها. در هر فصل، آخرین بند، مروری مختصر و تاریخی دربارهٔ ایده‌های اصلی ارائه شده در آن فصل را دربردارد. هدف از تدوین این بند این است که دیدی کلی از محتوای فصل مورد بحث به خواننده داده شود و اطلاعاتی برای مطالعه و کاربردهای بیشتر در اختیار او قرار گیرد. به‌آسانی می‌توان با استفاده از فهرست مراجعی که آورده شده‌است چنین مطالعهٔ عمیقتری را به انجام رساند.

به‌ویژه، خلاصه‌های واقع در پایان فصلهای ۱، ۵ و ۹ حاوی جدولهایی دربارهٔ فرمولهای شمارشی است که در هر یک از این فصلها معرفی شده‌اند. گاهی این جدولها حاوی نتایجی از فصلهای قبلی به منظور انجام مقایسه با نتایج جدید و نشان دادن این امر است که چگونه نتایج جدید نتایج قبلی را وسعت می‌بخشند.

سازماندهی

زمینه‌های ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی در برنامهٔ درسی دورهٔ کارشناسی تا اندازه‌ای جدیدند، از این‌رو، سلیقه‌های متفاوتی دربارهٔ موضوعاتی که باید در این زمینه‌ها ارائه شوند وجود دارد. هر مدرس و هر دانشجو ممکن است علائق گوناگونی داشته باشد. درنتیجه، مطابق روال هر دورهٔ درسی کلی، مطالب ارائه شده نسبتاً وسیع‌اند. با این‌حال، موضوعات دیگری نیز هستند که برخی از خوانندگان ممکن است احساس کنند که باید آنها را در این دورهٔ درسی گنجاند. علاوه بر آن، همیشه در مورد ترتیب بعضی از موضوعات ارائه شده در این متن اختلاف نظرهایی وجود خواهد داشت.

در سراسر کتاب بر طبیعت و اهمیت رهیافت الگوریتمی در حل مسائل تأکید کرده‌ایم. با آشکار ساختن پیوندهای موجود بین شمارش و ساختار، دو موضوع اصلی دیگر که شیرازهٔ مطالب مورد بحث کتاب را تشکیل می‌دهند، بر ایده‌ها و رهیافتها در حل مسائل تأکید بیشتری ورزیده‌ایم.

مطالب کتاب را به چهار زمینهٔ اصلی تقسیم کرده‌ایم. هفت فصل نخست هستهٔ زیربنای کتاب را تشکیل می‌دهند و مبانی ریاضیات گسسته را ارائه می‌کنند. این مطالب برای درسی نیم ترمی یا یک ترمی در ریاضیات گسسته کفایت می‌کنند. کسانی که زمینه‌ای قبلی در منطق دارند می‌توانند فصل ۲ را مرور کنند. کسانی که به گسترش و نوشتن اثباتها علاقه‌مندند باید این مطالب را بسیار دقیق بررسی کنند. درسی در سطح بالاتر ـ درسی که بر ترکیبیات تأکید داشته باشد ـ باید در برگیرندهٔ فصلهای ۸، ۹، و ۱۰ (و اگر زمان اجازه دهد، بندهای ۱، ۲، ۳، ۹، ۱۰ و بند ۱۱ از فصل ۱۶) باشد. در فصل ۹ چند نتیجه از حساب دیفرانسیل و انتگرال را به‌کارگرفته‌ایم؛ یعنی، کلیاتی دربارهٔ مشتقگیری و تجزیه به کسرهای جزئی. ولی کسانی که می‌خواهند این فصل را کنار بگذارند، باز می‌توانند بندهای ۱، ۲، ۳، ۶، و ۷ از فصل ۱۰ را در مطالعهٔ خود بگنجانند. برای ارائهٔ درسی که بر نظریه و کاربردهای گرافهای متناهی تأکید داشته باشد می‌توان فصلهای ۱۱، ۱۲، و ۱۳ را مورد استفاده قرار داد. این فصلها سومین تقسیم‌بندی اصلی این کتاب را تشکیل می‌دهند. برای ارائهٔ درسی در جبر کاربردی، فصلهای ۱۴، ۱۵، ۱۶، و ۱۷ (چهارمین و آخرین تقسیم‌بندی) ساختارهای جبری ـ گروهها، حلقه‌ها، جبرهای بولی و هیأتها ـ را مورد بررسی قرار می‌دهند و حاوی کاربردهایی دربارهٔ توابع راه‌گزین، نظریهٔ جبری کدگذاری، و طرحهای ترکیبیاتی است. سرانجام، برای ارائهٔ درسی دربارهٔ نقش ساختارهای گسسته در علوم کامپیوتر می‌توان از مواد موجود در فصلهای ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۵، و بندهای ۱ – ۸ از فصل ۱۶ بهره برداری کرد. زیرا در اینجا، علاوه بر مقدمه‌ای بر نظریهٔ گرافها و درختها و نقش آنها در بهینه‌سازی، کاربردهایی را دربارهٔ توابع راه‌گزین و نظریهٔ جبری کدگذاری می‌یابیم.

با درنظرگرفتن وابستگیهای موجود بین فصلهای کتاب که در زیر می‌آید، می‌توان دوره‌های درسی دیگری را تنظیم کرد.

فصل	وابستگی به فصلهای قبلی
۱	بدون وابستگی
۲	بدون وابستگی (بنابر این مدرس می‌تواند درسی دربارهٔ ریاضیات گسسته را با مطالعهٔ منطق یا مقدمه‌ای بر شمارش آغاز کند.)
۳	۱، ۲
۴	۱، ۲، ۳
۵	۱، ۲، ۳
۶	۱، ۲، ۳، ۵ (وابستگی‌ای جزئی در بند ۱۰۶ به بندهای ۱۰۴،۴۰۲)
۷	۱، ۲، ۳، ۵، ۶ (وابستگی‌ای جزئی در بند ۲۰۷ به بندهای ۱۰۴، ۴۰۲)
۸	۱، ۳(وابستگی‌ای جزئی در مثال ۳۰۸ از بند ۱۰۸ به بند ۳۰۵)
۹	۱، ۳
۱۰	۱، ۳، ۴، ۵، ۹
۱۱	۱، ۲، ۳، ۴، ۵ (گرچه در فصلهای ۵، ۶، ۷، ۸، و ۱۰ به بعضی از ایده‌های نظریهٔ گرافها اشاره شده است، ولی مواد این فصل بدون وابستگی به موادی دربارهٔ نظریهٔ گرافها که در این نتایج آورده شده است گسترش یافته است.)
۱۲	۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۱۱
۱۳	۳، ۵، ۱۱، ۱۲
۱۴	۲، ۳، ۴، ۵، ۷ (تابع فی (ϕ) اویلر را در بند ۳۰۱۴ به‌کارگرفته‌ایم. این تابع در بند ۱۰۸ به‌دست آمده است ولی می‌توان نتیجه را اینجا در فصل ۱۴ بدون توجه به مطالب فصل ۸ به‌کارگرفت.)
۱۵	۲، ۳، ۵، ۷
۱۶	۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷
۱۷	۲، ۳، ۴، ۵، ۷، ۱۴

تغییرات ویرایش سوم

تغییرات انجام گرفته در ویرایش سوم ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی طیفی گسترده از معتدل تا مفصل را تشکیل می‌دهند. ولی، آهنگ و هدف متن یکسان باقی‌مانده است. این همان هدف مؤلف است که می‌خواهد در چارچوب این صفحات، مقدمه‌ای محکم، خواندنی، و قابل درک بر ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی برای دانشجوی مبتدی فراهم آورد. در اینجا به بعضی از تغییرات ویرایش سوم که آنها را براساس تفسیرها و انتقادات مدرسان و دانشجویانی اعمال کرده‌ایم که دو ویرایش نخست این کتاب را مورد استفاده قرار داده‌اند، اشاره می‌کنیم:

- این ویرایش حاوی مقدمه‌ای (در فصل ۱) بر کاربرد نمادگذاری حاصل‌جمع (یا سیگما) و (در فصل ۴) نمادگذاری حاصلضرب (یا پی) است. در ویرایشهای قبلی فرض را بر این گذاشته بودیم که خواننده با این نمادگذاریها آشنایی دارد.
- در فصل ۲ نوشتن اثباتها را گسترش داده‌ایم. به‌ویژه، بند جدید ۲۰۵ حاوی مطالبی دربارهٔ قواعد تخصیص و تعمیم و نقش آنها در نوشتن اثباتهاست. سپس این مطالب را در بند نخست فصل ۳، آنجایی که آنها را در اثبات قضایایی دربارهٔ مجموعه‌ها و زیر مجموعه‌ها به‌کار برده‌ایم، نیز آورده‌ایم.
- در ویرایش دوم تعاریف بازگشتی را در بند ۴۰۱، هنگام معرفی مفهوم استقرای ریاضی، مورد بحث قرار داده بودیم. در این ویرایش جدید، بند ۴۰۲ را به گسترش مفهوم تعریف بازگشتی اختصاص داده‌ایم. این امر این امکان را برای ما فراهم آورد تا اعداد فیبوناچی و اعداد وابسته به آنها یعنی اعداد لوکاس را زودتر (از فصل ۱۰) معرفی کنیم.
- در بند ۴۰۱ (برای نخستین بار) اعداد همساز را آورده‌ایم و مطالب مربوط به اعداد کاتالان واقع در بند ۱۰۰۵ را بسط داده‌ایم.
- سه پیوست افزوده‌ایم تا به شرح زیر به خواننده یاری رسانند: دو پیوست نخست حاوی مروری دربارهٔ توابع نمایی و لگاریتمی و مقدمه‌ای بر ماتریسهاست. خواننده درخواهد یافت که این مواد برای درک مطالبی از کتاب که به این مفاهیم مربوط‌اند، مناسب است. آخرین پیوست حاوی مطالبی دربارهٔ مجموعه‌های شمارش‌پذیر و شمارش‌ناپذیر برای کسانی است که می‌خواهند کمی بیشتر دربارهٔ مجموعه‌ها و توابع بدانند و در واقع این پیوست ایده‌های ارائه شده در فصلهای ۳ و ۵ را گسترش می‌دهد.
- از زمان انتشار ویرایش دوم برای مؤلف فرصتهای زیادی پیش آمد تا با دانشجویانی که ریاضیات را در این کتاب مطالعه کرده بودند گفتگو کند. این گفتگوها، همراه با نظرات دانشکده‌هایی که ویرایش دوم را مورد استفاده قرار داده بودند، به افزایش ۸۷ مثال جدید انجامید. هدف از این مثالها یاری رساندن به دانشجویی است که قبلاً در بعضی از موقعیتها به مثالی دیگر نیاز پیدا می‌کرده است.
- بیش از ۱۷۰۰ تمرین در این ویرایش جدید وجود دارد. این نمایانگر افزایش بیش از ۳۰۰ تمرین نسبت به ویرایش دوم است.
- بسیاری از خلاصه‌ها و مرورهای تاریخی واقع در پایان فصلها را بسط داده‌ایم و به فهرست مراجع هر فصل مراجع جدید را افزوده‌ایم. علاوه بر آن، در این ویرایش جدید هر خلاصه و مرور تاریخی حاوی تصویری از حداقل یک ریاضیدان است که نامش را در همان مرور تاریخی ذکر کرده‌ایم.

ر. پ. گ

تِراوت، ایندیانا

۶

زبانها: ماشینهای متناهی‌الحالت

در عصر حاضر یعنی عصر کامپیوتر و ارتباطات، هر روز خود را با موقعیتهای ورودی ـ خروجی مواجه می‌یابیم. مثلاً، هنگام خریدن نوشابه‌ای خنک از ماشین فروش خودکار، تعدادی سکه وارد می‌کنیم و سپس دکمه‌ای را فشار می‌دهیم تا خروجی مورد انتظار، یعنی نوشابهٔ خنک را دریافت کنیم. نخستین سکه‌ای که وارد می‌کنیم ماشین را به حرکت درمی‌آورد. گرچه معمولاً به آنچه درون ماشین روی می‌دهد توجه نداریم (مگر آنکه نقصی در کار ماشین پیش آید و پولی را از دست بدهیم)، باید دریابیم که ماشین به طریقی حساب سکه‌هایی را که وارد می‌کنیم نگاه می‌دارد تا کل مبلغ تعیین شده وارد ماشین شود. تنها در این زمان است که نوشابهٔ خنک از ماشین خارج می‌شود و پیش از آن خروجی را نمی‌گیریم. در نتیجه، برای آنکه صاحب ماشین سود موردنظر را از فروش هر نوشابه به‌دست آورد، ماشین باید پس از وارد شدن هر سکه، مجموع پول دریافتی را به خاطر بسپرد.

کامپیوتر مثال دیگری از وسایل ورودی ـ خروجی است. در این مورد ورودی معمولاً نوعی از اطلاعات و خروجی نتیجهٔ حاصل از پردازش این اطلاعات است. چگونگی پردازش ورودی به طرزکار درونی کامپیوتر بستگی دارد، کامپیوتر باید بتواند ضمن کارکردن روی اطلاعاتی که در حال پردازش آنهاست، اطلاعات گذشته را نیز به‌خاطر آورد.

در این فصل با استفاده از مفاهیمی که قبلاً دربارهٔ مجموعه‌ها و توابع بسط دادیم، الگوی مجردی به نام ماشین متناهی‌الحالت، یا مدار ترتیبی را بررسی می‌کنیم این‌گونه مدارها یکی از دو نوع مدارهای کنترلی اساسی هستند که درکامپیوترهای رقمی یافت می‌شوند. [نوع دیگر مدار ترکیبی یا شبکهٔ دریچه‌ای است که آن را در فصل ۱۵ (جلد چهارم) بررسی می‌کنیم.] این مدارها در دستگاههای دیگر، نظیر ماشین فروش خودکار، دستگاههای کنترل آسانسور، و دستگاههای چراغهای راهنمایی نیز یافت می‌شوند.

ماشین متناهی‌الحالت، همان‌طورکه از نام آن پیداست، تعدادی متناهی حالت درونی دارد به‌طوری که وقتی در حالت معینی قرار می‌گیرد اطلاعات معینی را به‌خاطر می‌آورد. ولی قبل از آنکه به مطالعهٔ این مفهوم بپردازیم، به مطالبی از نظریهٔ مجموعه‌ها نیاز داریم تا بتوانیم دربارهٔ آنچه که ورودی معتبر برای چنین ماشینی را تشکیل می‌دهد، صحبت کنیم.

۱.۶ زبان: نظریهٔ مجموعه‌ایِ رشته‌ها

دنباله‌های تشکیل شده از نمادها، یا نویسه‌ها در پردازش اطلاعات به‌وسیلهٔ کامپیوتر نقشی اساسی دارند. چون برنامه‌های کامپیوتری به‌صورت دنباله‌هایی متناهی از نویسه‌ها قابل نمایش‌اند، برای کارکردن با این‌گونه دنباله‌های متناهی یا رشته‌ها، به روشی جبری نیازمندیم.

در سرتاسر این بند Σ را برای نشان دادن مجموعه‌ای متناهی و ناتهی از نمادها به کار می‌گیریم و کلِ این

نمادها را الفبا می‌نامیم. مثلاً ممکن است داشته باشیم $\Sigma = \{۰, ۱\}$ یا $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$.

در الفبای دلخواهی مانند Σ، عنصرهایی را که می‌توان با کنارهم‌نهی عنصرهای دیگری از Σ ساخت فهرست نمی‌کنیم. (اگر $a, b \in \Sigma$، در این صورت رشتهٔ ab کنارهم‌نهی نمادهای a و b است). نتیجهٔ این قرارداد این است که الفباهایی نظیر $\Sigma = \{۰, ۱, ۲, ۱۱, ۱۲\}$ و $\Sigma = \{a, b, c, ba, aa\}$ را در نظر نمی‌گیریم. (گذشته از این، بعداً در تعریف ۵.۶ وقتی دربارهٔ طول رشته‌ها صحبت می‌کنیم این قرارداد سودمند خواهد بود.)

با استفاده از الفبای Σ به عنوان نقطهٔ شروع کار، می‌توانیم با به کارگیری ایده‌ای که در زیر می‌آید رشته‌های مرکب از نمادهای Σ را به‌طور اسلوبمند تشکیل دهیم.

تعریف ۱.۶ اگر Σ یک الفبا باشد و $n \in \mathbb{Z}^+$، توانهای Σ را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) $\Sigma^۱ = \Sigma$، و

۲) $\Sigma^{n+۱} = \{xy \mid x \in \Sigma, y \in \Sigma^n\}$، که در آن xy کنارهم‌نهی x و y را نشان می‌دهد.

مثال ۱.۶ فرض کنیم Σ الفبایی دلخواه باشد.

اگر $n = ۲$، در این صورت $\Sigma^۲ = \{xy \mid x, y \in \Sigma\}$. مثلاً با فرض $\Sigma = \{۰, ۱\}$ می‌بینیم که $\Sigma^۲ = \{۰۰, ۰۱, ۱۰, ۱۱\}$.

وقتی $n = ۳$، عنصرهای $\Sigma^۳$ به‌صورت uv هستند، که در آن $u \in \Sigma$ و $v \in \Sigma^۲$. ولی چون شکل عنصرهای $\Sigma^۲$ را می‌شناسیم، می‌توانیم رشته‌های متعلق به $\Sigma^۳$ را به‌صورت دنباله‌هایی مانند uxy نیز در نظر بگیریم، که در آن $u, x, y \in \Sigma$. مثلاً، فرض کنیم $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$. در این صورت، $\Sigma^۳$ حاوی $۵^۳ = ۱۲۵$ رشتهٔ سه نمادی است که aaa، acb، ace، cdd، و eda از جملهٔ آنها هستند.

به‌طور کلی، می‌بینیم که به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$، $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$، زیرا با ترتیبهایی (n تایی) سر و کار داریم که در آنها مجازیم هر یک از $|\Sigma|$ شیءِ موردبحث را تکرار کنیم.

حال که Σ^n را به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ بررسی کرده‌ایم، با توان دیگری از Σ آشنا می‌شویم.

تعریف ۲.۶ برای هر الفبای Σ تعریف می‌کنیم $\Sigma^۰ = \{\lambda\}$، که در آن λ رشتهٔ تهی (یعنی، رشته‌ای که حاوی هیچ نمادی متعلق به Σ نیست) را نشان می‌دهد.

نماد λ هرگز عنصری متعلق به الفبای Σ نیست و نباید آن را با نویسهٔ خالی (فاصله) که در بسیاری از الفباها وجود دارد اشتباه کرد.

با وجود این، گرچه $\lambda \not\in \Sigma$، ولی داریم $\varnothing \subseteq \Sigma$؛ بنابراین، باید در این مورد محتاط باشیم. ملاحظه می‌کنیم که

۱) $\{\lambda\} \not\subseteq \Sigma$، زیرا $\lambda \not\in \Sigma$، و

۲) $\{\lambda\} \neq \varnothing$، زیرا $|\varnothing| = ۰ \neq ۱ = |\{\lambda\}|$.

برای آنکه بتوانیم دربارهٔ همهٔ مجموعه‌های $\Sigma^۰$، $\Sigma^۱$، $\Sigma^۲$، ... صحبت کنیم نمادهای زیر را برای اجتماع چنین مجموعه‌هایی معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳.۶ اگر Σ الفبای دلخواهی باشد، آنگاه

الف) $\Sigma^+ = \cup_{n=1}^{\infty} \Sigma^n = \cup_{n \in \mathbb{Z}^+} \Sigma^n$، و

ب) $\Sigma^* = \cup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$.

می‌بینیم که تنها مورد اختلاف بین مجموعه‌های Σ^+ و Σ^* حضور عنصر λ است، زیرا تنها در صورتی داریم $\lambda \in \Sigma^n$ که $n = 0$. همچنین، $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \Sigma^0$.

عنصرهای Σ^+ یا Σ^* را علاوه بر رشته، گاهی واژه یا جمله نیز می‌نامیم. به‌ازای $\Sigma = \{0, 1, 2\}$، واژه‌های ۰، ۱، ۱۰، ۱۰۲، و ۱۱۱۲ را هم در Σ^+ می‌یابیم هم در Σ^*.

سرانجام، توجه می‌کنیم که گرچه مجموعه‌های Σ^+ و Σ^* نامتناهی‌اند، عنصرهای متعلق به این دو مجموعه، رشته‌هایی متناهی از نمادها هستند.

مثال ۴.۶ به‌ازای $\Sigma = \{0, 1\}$، مجموعهٔ Σ^* از همهٔ رشته‌های متناهی مرکب از ۰ و ۱، همراه با رشتهٔ تهی، تشکیل شده است. به‌ازای nهای نسبتاً کوچک، می‌توانیم عملاً همهٔ رشته‌های متعلق به Σ^n را فهرست کنیم.

اگر $\Sigma = \{\beta, 0, 1, 2, \cdots, 9, +, -, \times, /, (,)\}$، که در آن β نویسهٔ خالی را نشان می‌دهد، توصیف Σ^* دشوارتر است و به‌ازای $n > 2$ تعداد فوق‌العاده زیادی رشته در Σ^n وجود دارد. در این Σ^* عبارتهای حسابی آشنایی نظیر $((۱۰ - ۳) \times ۲)/(۵ + ۷)$ و همچنین، عبارتهای بی‌معنایی نظیر $)/۳+ \times /۷))(+$ وجود دارد.

اکنون با موقعیت آشنایی مواجهیم. همان‌طور که در مورد گزاره‌ها (فصل ۲)، مجموعه‌ها (فصل ۳)، و تابعها (فصل ۵) ملاحظه کردیم، بار دیگر باید بتوانیم تصمیم بگیریم که چه وقت دو شیءِ مورد مطالعه را (در حال حاضر، رشته‌ها اشیای مورد مطالعه هستند) یکسان تلقی می‌کنیم. این مسأله را در زیر بررسی می‌کنیم.

تعریف ۴.۶ اگر $w_1, w_2 \in \Sigma^+$، در این صورت می‌توانیم بنویسیم $w_1 = x_1 x_2 \cdots x_m$ و $w_2 = y_1 y_2 \cdots y_n$، که در آن $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n \in \Sigma, m, n \in \Sigma^+$. می‌گوییم رشته‌های w_1 و w_2 برابرند و می‌نویسیم $w_1 = w_2$، هرگاه $m = n$ و $x_i = y_i$ به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant m$.

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که دو رشتهٔ Σ^+ تنها وقتی با هم برابرند که هر دو حاوی تعدادی یکسان از نمادهای Σ بوده و نمادهای متناظر در این دو رشته یکی باشند.

برای تعریف ویژگی دیگری از رشته‌ها به تعداد نمادهای هر رشته نیاز داریم.

تعریف ۵.۶ اگر $w \in \Sigma^+$، در این صورت $w = x_1 x_2 \cdots x_n$، که در آن $x_i \in \Sigma$ به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$. طول w را، که با $\|w\|$ نشان می‌دهیم، برابر با n تعریف می‌کنیم. در مورد λ، داریم $\|\lambda\| = 0$.

به‌عنوان نتیجه‌ای از تعریف ۶.۵، درمی‌یابیم که به‌ازای هر الفبای دلخواه Σ، اگر $w \in \Sigma^*$ و $||w|| \geqslant ۱$، آنگاه $w \in \Sigma^+$، و برعکس. همچنین، به‌ازای هر $y \in \Sigma^*$، $||y|| = ۱$ اگر و فقط اگر $y \in \Sigma$. اگر Σ حاوی نماد β (نویسهٔ خالی) باشد باز هم داریم $||\beta|| = ۱$.

اگر الفبای مشخصی، مثلاً $\Sigma = \{۰, ۱, ۲\}$، را به‌کار گیریم و عنصرهای $x = ۰۱$، $y = ۲۱۲$، و $z = ۰۱۲۱۲$ (متعلق به Σ^*) را بررسی کنیم، می‌بینیم که

$$||z|| = ||۰۱۲۱۲|| = ۵ = ۲ + ۳ = ||۰۱|| + ||۲۱۲|| = ||x|| + ||y||$$

برای ادامهٔ مطالعهٔ ویژگیهای رشته‌ها و الفباها باید ایدهٔ کنارهم‌نهی را کمی بیشتر گسترش دهیم.

تعریف ۶.۶ فرض کنیم $x, y \in \Sigma^+$ عبارت باشند از $x = x_۱x_۲\cdots x_m$ و $y = y_۱y_۲\cdots y_n$ به‌طوری که هر x_i، به‌ازای $۱ \leqslant i \leqslant m$، و هر y_j، به‌ازای $۱ \leqslant j \leqslant n$، در Σ باشد. الحاق x و y، که با xy نشان داده می‌شود، عبارت است از رشتهٔ $x_۱x_۲\cdots x_m y_۱y_۲\cdots y_n$.

الحاق x و λ رشتهٔ

$$x\lambda = x_۱x_۲\cdots x_m\lambda = x_۱x_۲\cdots x_m = x$$

و الحاق λ و x رشتهٔ

$$\lambda x = \lambda x_۱x_۲\cdots x_m = x_۱x_۲\cdots x_m = x$$

است. سرانجام، الحاق λ و λ عبارت است از $\lambda\lambda = \lambda$.

به این ترتیب، عمل دوتایی بسته‌ای را روی Σ^* (و Σ^+) تعریف کرده‌ایم. این عمل شرکت‌پذیر است ولی تعویض‌پذیر نیست (مگر آنکه $|\Sigma| = ۱$)، و چون به‌ازای هر $x \in \Sigma^*$، $x\lambda = \lambda x = x$، عنصر $\lambda \in \Sigma^*$ عنصر همانی عمل الحاق است. ایده‌های مستتر در دو تعریف اخیر (یعنی طول رشته‌ها و عمل الحاق آنها) به‌صورت زیر با هم پیوند دارند:

به‌ازای هر $x, y \in \Sigma^*$، $||xy|| = ||x|| + ||y||$

که حالت خاص زیر از آن حاصل می‌شود:

$$||x|| = ||x|| + ۰ = ||x|| + ||\lambda|| = ||x\lambda||(= ||\lambda x||)$$

سرانجام، به‌ازای هر $z \in \Sigma$، داریم $||z|| = ||z\lambda|| = ||\lambda z|| = ۱$، در حالی که $||zz|| = ۲$.

عمل دوتایی بستهٔ الحاق ما را به تعریف بازگشتی دیگری رهنمون می‌شود. قبلاً با توانهای الفبای Σ آشنا شدیم. اکنون توانهای رشته‌ها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۷.۶ به‌ازای هر $x \in \Sigma^*$، توانهای x را با

$$x^۰ = \lambda, x^۱ = x, x^۲ = xx, x^۳ = xx^۲, \cdots, x^{n+۱} = xx^n, \cdots$$

که در آن $n \in \mathbf{N}$، تعریف می‌کنیم.

این تعریف نمایش دیگری از چگونگی معرفی موجودی ریاضی به روش بازگشتی است: موجودی ریاضی، که در حال حاضر در جستجوی آن هستیم، از موجودات ریاضی (قابل قیاسی) که قبلاً به‌دست آورده‌ایم به‌دست می‌آید. گذشته از این، این تعریف راهی برای بررسی الحاق n گانهٔ رشته‌ای با خودش (یا توان $(n+1)$ ام رشته) را در اختیار ما می‌گذارد و حاوی حالت خاصی است که رشته فقط از یک نماد تشکیل شده باشد.

مثال ۳.۶ اگر $\Sigma = \{0, 1\}$ و $x = 01$، در این صورت $x^0 = \lambda$، $x^1 = 01$، $x^2 = 0101$، و $x^3 = 010101$. به‌ازای هر $n > 0$، x^n رشته‌ای از n تا 0 و n تا 1 است، که در آن نخستین نماد 0 است و نمادها یک در میان تغییر می‌کنند. می‌بینیم که $||x^2|| = 4 = 2||x||$، $||x^3|| = 6 = 3||x||$، و به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $||x^n|| = n||x||$.

اکنون تقریباً آماده‌ایم تا به موضوع اصلی این بند، یعنی مفهوم زبان، بپردازیم.

ولی قبل از انجام این کار، باید سه ایدهٔ دیگر را بررسی کنیم. این ایده‌ها متضمن قطعه‌های خاصی از رشته‌ها هستند.

تعریف ۸.۶ اگر $x, y \in \Sigma^*$ و $w = xy$، در این صورت رشتهٔ x را پیشوند w و اگر $y \neq \lambda$، x را پیشوند سرهٔ w می‌نامیم. به همین ترتیب، رشتهٔ y را پسوند w می‌نامیم. y را پسوند سره می‌نامیم هرگاه $x \neq \lambda$.

مثال ۴.۶ فرض کنیم $\Sigma = \{a, b, c\}$، و رشتهٔ $w = abbcc$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت هر یک از رشته‌های λ، a، ab، abb، $abbc$، و $abbcc$ پیشوند w هستند، و جز خود $abbcc$، هر یک از آنها پیشوند سرهٔ w است. از طرف دیگر، هر یک از رشته‌های λ، c، cc، bcc، $bbcc$ و $abbcc$ پسوند w هستند، و پنج رشتهٔ نخست پسوندهای سرهٔ w هستند.

به‌طور کلی، در هر الفبای دلخواه Σ، اگر $n \in \mathbf{Z}^+$ و به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $x_i \in \Sigma$، در این صورت هر یک از رشته‌های λ، x_1، x_1x_2، $x_1x_2x_3$، $\cdots$، و $x_1x_2x_3\cdots x_n$ پیشوند رشتهٔ $x = x_1x_2x_3\cdots x_n$ هستند. رشته‌های λ، x_n، $x_{n-1}x_n$، $x_{n-2}x_{n-1}x_n$، $\cdots$، و $x_1x_2x_3\cdots x_n$ پسوندهای این رشته هستند. از این‌رو، x دارای $n+1$ پیشوند است که n تای آنها سره هستند، برای پسوندها نیز وضعیت مشابهی داریم.

مثال ۵.۶ اگر $||x|| = 5$، $||y|| = 4$ و $w = xy$، در این صورت x یکی از پیشوندهای پیشوند سره و y یکی از پسوندهای پسوند سرهٔ w است. w روی هم نَه پیشوند سره و نُه پسوند سره دارد زیرا برای هر رشتهٔ متعلق به Σ^+، λ هم پیشوند سره است و هم پسوند سره. xy هم پیشوند است هم پسوند، ولی در هیچ یک از دو حالت سره نیست.

مثال ۶.۶ فرض کنیم به‌ازای الفبای مفروض Σ، $w, a, b, c, d \in \Sigma^*$. اگر $w = ab = cd$، در این صورت

یک) یا a پیشوند c است یا c پیشوند a؛ و

دو) یا b پسوند d است یا d پسوند b.

تعریف ۹.۶ اگر $x, y, z \in \Sigma^*$ و $w = xyz$، در این صورت y را زیررشتهٔ w می‌نامیم. وقتی دست‌کم یکی از دو رشتهٔ x و z مخالف λ باشد (که در نتیجه، y مخالف w خواهد بود)، y را زیررشتهٔ سره می‌نامیم.

مثال ۷.۶ فرض کنیم به‌ازای $\Sigma = \{0, 1\}$، $w = 00101110 \in \Sigma^*$. در w زیررشته‌های زیر را می‌یابیم:

۱) 1011: این زیررشته فقط به یک طریق به‌دست می‌آید، به این ترتیب که با فرض $x = 00$، $y = 1011$ و $z = 10$، بنویسیم $w = xyz$.

۲) 10: این زیررشته به دو طریق به‌دست می‌آید:

الف) $w = xyz$، که در آن $x = 00$، $y = 10$، و $z = 1110$.

ب) $w = xyz$، که در آن $x = 001011$، $y = 10$، و $z = \lambda$.

در حالت (ب) زیررشتهٔ y پسوند (سرهٔ) w نیز هست.

حال که با تعریفهای لازم آشنا شدیم، زمان آن فرا رسیده است که به مفهوم زبان بیندیشیم.

وقتی الفبای معمولی را، همراه با نویسهٔ خالی در نظر می‌گیریم، بسیاری از رشته‌ها مانند $qxio$، $the\,wxxy\,red\,atzl$، و $aeytl$، با وجود آنکه عنصرهایی متعلق به Σ^* هستند، واژه یا قسمتهایی از جمله‌های زبان انگلیسی را نمایش نمی‌دهند. در نتیجه، برای آنکه فقط با واژه‌ها و اصطلاحات معنی‌دار زبان انگلیسی سر و کار داشته باشیم، توجه خود را به زیرمجموعه‌ای از Σ^* معطوف می‌کنیم. این مطلب ما را به تعمیم زیر هدایت می‌کند.

تعریف ۱۰.۶ اگر الفبای Σ مفروض باشد، هر زیرمجموعهٔ Σ^* را یک زبان روی Σ می‌نامیم. این تعریف زیرمجموعهٔ $\varnothing$ را نیز در برمی‌گیرد و آن را زبان تهی می‌نامیم.

مثال ۸.۶ با فرض $\Sigma = \{0, 1\}$، مجموعه‌های $A = \{0, 01, 001\}$ و $B = \{0, 01, 001, 0001, \dots\}$ دو مثال از زبانهای روی Σ هستند.

مثال ۹.۶ فرض کنیم Σ الفبایی مرکب از ۲۶ حرف، ۱۰ رقم، و نمادهای ویژه‌ای باشد که در پیاده‌سازی مفروضی از پاسکال به کار می‌روند. در این صورت، گردایهٔ برنامه‌های اجرایی برای این پیاده‌سازی یک زبان تشکیل می‌دهند. در همین شرایط، می‌توانیم هر برنامهٔ اجرایی را یک زبان تلقی کنیم و همچنین، هر مجموعهٔ متناهی خاصی از این برنامه‌ها نیز یک زبان است.

چون زبانها مجموعه هستند، می‌توانیم اجتماع، اشتراک، و تفاضل متقارن دو زبان را تشکیل دهیم. ولی، برای کارمان در اینجا، توسیع عمل دوتایی بستهٔ تعریف شده (در تعریف ۶ ۰ ۶) برای رشته‌ها سودمندتر است.

تعریف ۱۱.۶ به‌ازای الفبای Σ و دو زبان $A, B \subseteq \Sigma^*$، الحاق A و B، که با AB نشان داده می‌شود، عبارت است از $\{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

می‌توانیم الحاق را با حاصل‌ضرب چلیپایی مقایسه کنیم. می‌بینیم، همان‌طور که در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$، در این مورد نیز در حالت کلی داریم $AB \neq BA$. اگر A و B متناهی باشند مسلماً داریم $|A \times B| = |B \times A|$، ولی به‌ازای زبانهای متناهی A و B نابرابری $|AB| \neq |BA|$ امکانپذیر است.

مثال ۱۰.۶ فرض کنیم $\Sigma = \{x, y, z\}$، و فرض کنیم A و B عبارت باشند از زبانهای متناهی $A = \{x, xy, z\}$ و $B = \{\lambda, y\}$. در این صورت $AB = \{x, xy, z, xyy, zy\}$ و $BA = \{x, xy, z, yx, yxy, yz\}$؛ از این‌رو،

۱) $|AB| = ۵ \neq ۶ = |BA|$، و

۲) $|AB| = ۵ \neq ۶ = ۳ \cdot ۲ = |A||B|$.

این تفاوتها از آنجا ناشی می‌شود که دو طریق برای نمایش xy وجود دارد: (۱) xy به‌ازای $x \in A$، $y \in B$ و (۲) $xy\lambda$، که در آن $xy \in A$ و $\lambda \subset B$. [در اینجا نمی‌توانیم یکتایی نمایش را تضمین کنیم. گرچه در اینجا یکتایی نمایش برقرار نیست، ولی این مفهوم کلید موفقیت بسیاری از ایده‌های ریاضی است. این امر را در قضیهٔ بنیادی حساب (قضیهٔ ۴ ۰ ۱۱) ملاحظه کردیم و مجدداً آن را در فصل ۱۵ (جلد چهارم) خواهیم دید.]

مثال اخیر این مطلب را القا می‌کند که به‌ازای زبانهای متناهی A و B داریم $|AB| \leqslant |A||B|$. می‌توان نشان داد که در حالت کلی این نابرابری برقرار است.

در قضیهٔ زیر چند ویژگی مربوط به الحاق زبانها بررسی شده است.

قضیهٔ ۱.۶ فرض کنیم به‌ازای الفبای Σ، $A, B, C \subseteq \Sigma^*$. آنگاه

الف) $A\{\lambda\} = \{\lambda\}A = A$	ب) $(AB)C = A(BC)$
پ) $A(B \cup C) = AB \cup AC$	ت) $(B \cup C)A = BA \cup CA$
ث) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$	ج) $(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$

برهان: قسمتهای (ت) و (ج) را ثابت کرده و برهان قسمتهای دیگر را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

(ت) چون می‌خواهیم برابری دو مجموعه را ثابت کنیم، ایدهٔ برابری دو مجموعه را که نخستین بار در تعریف ۳ ۰ ۲ بیان کردیم، به کار می‌گیریم. اگر کار را با x متعلق به Σ^* شروع کنیم می‌بینیم که از $x \in (B \cup C)A$ نتیجه می‌شود که به‌ازای $z \in A, y \in B \cup C$، $x = yz$. در نتیجه، $(x = yz$ به‌ازای $z \in A, y \in B)$ یا $(x = yz$ به‌ازای $z \in A, y \in C)$. بنابراین، $x \in BA$ یا $x \in CA$. از این‌رو، $(B \cup C)A \subseteq BA \cup CA$. برعکس، ملاحظه می‌کنیم که از $x \in BA \cup CA$ نتیجه می‌شود که $x \in BA$ یا $x \in CA$. در نتیجه، $(x = ba_1$، که در آن $b \in B$ و $a_1 \in A)$ یا $(x = ca_2$، که در آن $c \in C$ و $a_2 \in A)$. فرض کنیم $x = ba_1$ به‌ازای $b \in B$ و $a_1 \in A$. چون $B \subseteq B \cup C$، داریم $x = ba_1$، که در آن $b \in B \cup C$ و $a_1 \in A$. در این صورت $x \in (B \cup C)A$؛ از این‌رو، $BA \cup CA \subseteq (B \cup C)A$. (استدلال مشابهی برای حالت $x = ca_2$ داریم.) از دو رابطهٔ شمول اثبات شده نتیجه می‌گیریم که $(B \cup C)A = BA \cup CA$.

(ج) به‌ازای $x \in \Sigma^*$، می‌بینیم که از $x \in (B \cap C)A$ نتیجه می‌شود $x = yz$، که در آن $y \in B \cap C$ و $z \in A$. در نتیجه، $(x = yz$ به‌ازای $y \in B$ و $z \in A)$ و $(x = yz$ به‌ازای $y \in C$ و $z \in A)$. بنابراین، $x \in BA$ و $x \in CA$، و یا $x \in BA \cap CA$. از این‌رو، $(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$.

فرض کنیم به‌ازای $\Sigma = \{x, y, z\}$، $B = \{x, xx, y\}$، $C = \{x, xy\}$، و $A = \{y, yy\}$. در این صورت $xyy \in BA \cap CA$، ولی $xyy \notin (B \cap C)A$. در نتیجه، $(B \cap C)A \subset BA \cap CA$.

متناظر با مفاهیم Σ^n، Σ^*، و Σ^+، تعریفهای زیر را برای زبان دلخواهی مانند $A \subseteq \Sigma^*$ داریم.

تعریف ۱۲.۶ به‌ازای هر زبان $A \subseteq \Sigma^*$ می‌توانیم زبانهای دیگری را به‌صورت زیر بسازیم:

الف) $A^0 = \{\lambda\}$، $A^1 = A$ و به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$، $A^{n+1} = \{ab \mid a \in A, b \in A^n\}$.

ب) $A^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} A^n$، که بستار مثبت A نام دارد.

پ) $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$. زبان A^* به افتخار استفن. کول. کلین[1] (۱۹۰۹ –)، منطقدان امریکایی، بستار کلین A نامیده می‌شود.

مثال ۱۱.۶ اگر $\Sigma = \{x, y, z\}$ و $A = \{x\}$، در این صورت (۱) $A^0 = \{\lambda\}$؛ (۲) $A^n = \{x^n\}$ به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$؛ (۳) $A^+ = \{x^n \mid n \geqslant 1\}$؛ (۴) $A^* = \{x^n \mid n \geqslant 0\}$.

مثال ۱۲.۶ فرض کنیم $\Sigma = \{x, y\}$

الف) اگر $A = \{xx, xy, yx, yy\} = \Sigma^2$، در این صورت زبان A^* متشکل از همهٔ رشته‌هایی در Σ^* است که طول آنها زوج است.

ب) اگر A همان باشد که در قسمت (الف) تعریف شد و $B = \{x, y\}$، زبان BA^* شامل همه رشته‌هایی از Σ^* است که طول آنها فرد است؛ ضمناً می‌بینیم که در این حالت داریم $BA^* = A^*B$ و $\Sigma^* = A^* \cup BA^*$.

پ) زبان $\{x\}\{x, y\}^*$ (الحاق زبانهای $\{x\}$ و $\{x, y\}^*$) شامل هر رشته‌ای از Σ^* است که x پیشوند آن باشد. زبانی را که شامل همهٔ رشته‌هایی از Σ^* است که yy پسوند آنهاست، می‌توان با $\{x, y\}^*\{yy\}$ تعریف کرد. هر رشتهٔ متعلق به زبان $\{x, y\}^*\{xxy\}\{x, y\}^*$ شامل زیررشتهٔ xxy است.

ت) هر رشتهٔ متعلق به زبان $\{x\}^*\{y\}^*$ متشکل است از تعدادی متناهی (شاید صفر) x که به دنبال آنها تعدادی متناهی (شاید صفر) y قرار دارد. اگرچه $\{x\}^*\{y\}^* \subseteq \{x, y\}^*$، رشتهٔ $w = xyx$ در $\{x, y\}^*$ هست ولی در $\{x\}^*\{y\}^*$ نیست. بنابراین، $\{x\}^*\{y\}^* \subset \{x, y\}^*$.

مثال ۱۳.۶ در جبر اعداد حقیقی، اگر $a, b \in \mathbf{R}$ و $a, b > 0$، در این صورت از $a^2 = b^2$ نتیجه می‌گیریم $a = b$. ولی در مورد زبانها، اگر $\Sigma = \{x, y\}$، $A = \{\lambda, x, x^3, x^4, \cdots\} = \{x^n \mid n \geqslant 0\} - \{x^2\}$، و $B = \{x^n \mid n \geqslant 0\}$، در این صورت $A^2 = B^2 (= B)$، ولی $A \neq B$. (یادداشت: $\lambda \in \Sigma$ هرگز برقرار نیست، ولی ممکن است داشته باشیم $\lambda \in A \subseteq \Sigma^*$.)

این بند را با یک لم و قضیهٔ دیگری دربارهٔ ویژگیهای زبانها ادامه می‌دهیم. این لم فرصت دیگری را برای به‌کارگیری اصل استقرای ریاضی فراهم می‌آورد.

---

1. Stephen Cole Kleene

لم ۱.۶ فرض کنیم Σ یک الفبا و $A, B \subseteq \Sigma^*$ دو زبان باشند. اگر $A \subseteq B$، آنگاه به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $A^n \subseteq B^n$.

برهان: گزارهٔ باز

$$S(n) : A \subseteq B \Rightarrow A^n \subseteq B^n$$

را در نظر می‌گیریم. چون $A^1 = A \subseteq B = B^1$، می‌بینیم که گزارهٔ $S(1)$، یعنی $A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B$ راست است. با فرض راستی $S(k)$ داریم $A \subseteq B \Rightarrow A^k \subseteq B^k$. از فرض گزارهٔ $S(k+1)$ می‌دانیم که $A \subseteq B$ و از این‌رو، با توجه به S_k، ملاحظه می‌کنیم که $A^k \subseteq B^k$ (بنابر قیاس استثنایی). اکنون فرض کنیم x رشته‌ای متعلق به A^{k+1} باشد. بنابر تعریف ۱۲۰۶ می‌دانیم که $x = x_1 x_k$، که در آن $x_1 \in A$ و $x_k \in A^k$. چون $A \subseteq B$ و (بنابر فرض استقرا) $A^k \subseteq B^k$، پس $x_1 \in B$ و $x_k \in B^k$. در نتیجه، $x = x_1 x_k \in BB^k = B^{k+1}$. بنابراین، $S(k+1)$ راست است و بنابر اصل استقرای متناهی نتیجه می‌گیریم که اگر $A \subseteq B$، آنگاه به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $A^n \subseteq B^n$.

قضیهٔ ۲.۶ به‌ازای الفبای Σ و زبانهای $A, B \subseteq \Sigma^*$،

الف) $A \subseteq AB^*$
ب) $A \subseteq B^*A$
پ) $A \subseteq B \Rightarrow A^+ \subseteq B^+$
ت) $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$
ث) $AA^* = A^*A = A^+$
ج) $A^*A^* = A^* = (A^*)^* = (A^*)^+ = (A^+)^*$
چ) $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^* = (A^*B^*)^*$

برهان: فقط برهان قسمتهای (پ) و (چ) را ارائه می‌کنیم.

(پ) فرض کنیم $A \subseteq B$ و $x \in A^+$. آنگاه، به‌ازای عددی مانند $n \in \mathbf{Z}^+$، $x \in A^+ \Rightarrow x \in A^n$. در این صورت از لم ۱۰۶ نتیجه می‌گیریم که $x \in B^n \subseteq B^+$، و به این ترتیب نشان داده‌ایم که $A^+ \subseteq B^+$.

(چ) $[(A \cup b)^* = (A^* \cup B^*)^*]$. بنابر قسمت (ت) می‌دانیم که

$$A \subseteq A^*, B \subseteq B^* \Rightarrow (A \cup B) \subseteq (A^* \cup B^*) \Rightarrow (A \cup B)^* \subseteq (A^* \cup B^*)^*$$

برعکس، با توجه به قسمتهای (ت) و (ج) ملاحظه می‌کنیم که

$$A, B \subseteq A \cup B \Rightarrow A^*, B^* \subseteq (A \cup B)^* \Rightarrow (A^* \cup B^*) \subseteq (A \cup B)^*$$
$$\Rightarrow (A^* \cup B^*)^* \subseteq (A \cup B)^*$$

از دو رابطهٔ شمول که در بالا ثابت کردیم نتیجه می‌گیریم $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^*$.

$[(A^* \cup B^*)^* = (A^*B^*)^*]$. نخست با توجه به قسمتهای (الف)، (ب)، و (ت) می‌بینیم که

$$A^*, B^* \subseteq A^*B^* \Rightarrow (A^* \cup B^*) \subseteq A^*B^* \Rightarrow (A^* \cup B^*)^* \subseteq (A^*B^*)^*]$$

برعکس، اگر $xy \in A^*B^*$ که در آن $x \in A^*$ و $y \in B^*$، در این صورت $x, y \in A^* \cup B^*$، از این‌رو، $xy \in (A^* \cup B^*)^*$ و در نتیجه، $A^*B^* \subseteq (A^* \cup B^*)^*$. باز هم با استفاده از قسمتهای (ت) و (ج)، داریم $(A^*B^*)^* \subseteq (A^* \cup B^*)^*$ و به این ترتیب نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

در آستانهٔ به پایان رساندن این بند، بار دیگر ایدهٔ مجموعهٔ به‌طور بازگشتی تعریف شده را (که در بند ۲۰۴ ارائه کردیم) در چهار مثال بعدی به کار می‌گیریم.

مثال ۱۴.۶ برای الفبای $\Sigma = \{۰, ۱\}$، زبان $A \subseteq \Sigma^*$ را، به‌طوری که هر واژهٔ متعلق به A حاوی یک و تنها یک نماد ۰ باشد، در نظر می‌گیریم. در این صورت A مجموعه‌ای نامتناهی است و مثلاً واژه‌های ۰، ۰۱، ۱۰، ۰۱۱۱۱، ۱۱۱۱۰۱۱۱، و ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰ واژه‌هایی متعلق به A هستند. همچنین، تعدادی نامتناهی واژهٔ متعلق به Σ^* وجود دارند که در A نیستند، نظیر ۱، ۱۱، ۰۰، ۰۰۰، ۰۱۰، و ۰۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰. می‌توانیم زبان A را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف کنیم:

۱) مرحلهٔ پایه می‌گوید که $۰ \in A$، و

۲) فرایند بازگشتی چنین است: به‌ازای هر واژهٔ $x \in A$، واژه‌های $۱x$ و $x۱$ در A هستند.

بحث زیر با استفاده از این تعریف نشان می‌دهد که واژهٔ ۱۰۱۱ در A است.

از قسمت (۱) در تعریف می‌دانیم که $۰ \in A$. با سه بار به‌کارگیری قسمت (۲) از تعریف بالا می‌بینیم که

یک) $۰۱ \in A$، زیرا $۰ \in A$؛

دو) $۰۱۱ \in A$، زیرا $۰۱ \in A$؛ و

سه) چون $۰۱۱ \in A$، پس $۱۰۱۱ \in A$.

مثال ۱۵.۶ به‌ازای $\Sigma = \{(,)\}$، یعنی الفبای متشکل از پرانتزهای چپ و راست، زبان $A \subseteq \Sigma^*$ را مرکب از آن رشته‌های ناتهی از پرانتزها می‌گیریم که از نظر دستوری برای عبارتهای جبری درست هستند. بنابراین، می‌بینیم که مثلاً سه رشتهٔ (())؛ ((()()))؛ و ()()() متعلق به این زبان هستند، ولی رشته‌هایی نظیر ()())؛ (()))(()؛ یا ((()))()(در A نیستند. ملاحظه می‌کنیم برای آنکه رشتهٔ $x(\neq \lambda)$ در A باشد، باید

یک) x حاوی تعداد یکسانی پرانتز چپ و پرانتز راست باشد، و

دو) هنگامی‌که پرانتزهای x را متوالیاً از چپ به راست می‌خوانیم، تعداد پرانتزهای چپ (همیشه) بزرگتر از یا برابر با تعداد پرانتزهای راست باشد.

می‌توانیم زبان A را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف کنیم:

۱) () متعلق به A است؛ و

۲) به‌ازای هر $x, y \in A$، داریم (الف) $xy \in A$ و (ب) $(x) \in A$.

[همان‌طورکه قبل از مثال ۱۹۰۴ متذکر شدیم، در اینجا محدودیتی ضمنی نیز داریم و آن این است که هیچ رشته‌ای از پرانتزها در A نیست مگر آنکه بتوان آن را از طریق مراحل (۱) و (۲) به‌دست آورد.]

با استفاده از این تعریف بازگشتی، مراحل زیر نشان می‌دهند که چگونه ثابت کنیم رشتهٔ (()()) از Σ^* متعلق به زبان A است.

مراحل	دلایل
۱) ( ) در A است.	قسمت (۱) از تعریف بازگشتی
۲) ( )( ) در A است.	مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲ ـ الف) از تعریف
۳) (( )( )) در A است.	مرحلهٔ (۲) و قسمت (۲ ـ ب) از تعریف

مثال ۱۶.۶ به‌ازای $\Sigma = \{0, 1\}$، تعریف زیر تعریف بازگشتی برای زبان $A \subseteq \Sigma^*$ است، که در آن $x \in A$ هرگاه تعداد ۰های x با تعداد ۱های x برابر باشد.

۱) $\lambda \in A$؛ و

۲) اگر $x \in A$، در این صورت هر یک از رشته‌های زیر نیز در A است:

یک) $01x$ دو) $1x0$...

(و هیچ رشتهٔ دیگری مرکب از ۰ و ۱ در A نیست.)

مثال ۱۷.۶ اگر الفبای Σ مفروض باشد، رشتهٔ $x = x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}x_n$ متعلق به Σ^* را، که در آن، به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ و $n \in \mathbf{Z}^+$، $x_i \in \Sigma$، در نظر می‌گیریم. وارونی x، که آن را با x^R نشان می‌دهند، رشته‌ای است که با خواندن نمادهای x از راست به چپ حاصل می‌شود، یعنی $x^R = x_nx_{n-1}\cdots x_3x_2x_1$. مثلاً اگر $\Sigma = \{0, 1\}$ و $x = 01101$، در این صورت $x^R = 10110$ و به‌ازای $w = 101101$ می‌بینیم که $w^R = 101101 = w$.

به‌طور کلی، می‌توانیم وارونی هر رشته (از Σ^*) را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف کنیم:

۱) $\lambda^R = \lambda$؛ و

۲) به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، اگر $x \in \Sigma^{n+1}$، در این صورت می‌توانیم بنویسیم $x = zy$، که در آن $z \in \Sigma$ و $y \in \Sigma^n$؛ اینک تعریف می‌کنیم $x^R = (zy)^R = (y^R)z$.

اکنون با استفاده از این تعریف بازگشتی می‌توانیم ثابت کنیم اگر Σ الفبای دلخواهی باشد و $x_1, x_2 \in \Sigma^*$، آنگاه $(x_1x_2)^R = x_2^Rx_1^R$.

برهان: برهان را با استقرای ریاضی روی مقدار $\|x_1\|$ انجام می‌دهیم. اگر $\|x_1\| = 0$، در این صورت $x_1 = \lambda$ و چون، با توجه به قسمت (۱) در تعریف بازگشتی، $\lambda = \lambda^R$،

$$(x_1x_2)^R = (\lambda x_2)^R = x_2^R = x_2^R\lambda = x_2^R\lambda^R = x_2^Rx_1^R$$

بنابراین، نتیجه در این حالت نخست راست است و مرحلهٔ پایه برقرار می‌شود. برای برقراری مرحلهٔ استقرایی، فرض کنیم نتیجه برای هر $y, x_2 \in \Sigma^*$، که در آن به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{N}$ $\|y\| = k$، راست باشد. حال ببینیم وقتی $x_1, x_2 \in \Sigma^*$، که در آن $x_1 = zy_1$، $\|z\| = 1$ و $\|y_1\| = k$، چه وضعیتی پیش می‌آید. ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}(x_1x_2)^R &= (zy_1x_2)^R = (y_1x_2)^Rz && \text{(بنابر قسمت (۲) از تعریف بازگشتی)}\\ &= x_2^Ry_1^Rz && \text{(بنابر فرض استقرا)}\\ &= x_2^R(zy_1)^R && \text{(باز بنابر قسمت (۲) از تعریف بازگشتی)}\\ &= x_2^Rx_1^R\end{aligned}$$

بنابراین، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه به‌ازای هر $x_1, x_2 \in \Sigma^*$ راست است.

تمرینات ۱.۶

۱. فرض کنیم $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$. (الف) $|\Sigma^۲|$ و $|\Sigma^۳|$ را بیابید. (ب) چند تا از رشته‌های متعلق به Σ^* طولی حداکثر برابر با پنج دارند؟

۲. به‌ازای $\Sigma = \{w, x, y, z\}$ تعداد آن رشته‌هایی به طول پنج و متعلق به Σ^* را تعیین کنید که (الف) با w شروع می‌شوند؛ (ب) دقیقاً دو w دارند؛ (پ) w ندارند؛ (ت) تعدادی زوج w دارند.

۳. اگر $x \in \Sigma^*$ و $||x^۳|| = ۳۶$، $||x||$ را بیابید.

۴. فرض کنیم $\Sigma = \{\beta, x, y, z\}$، که در آن β نویسهٔ فاصله را نشان می‌دهد. در نتیجه، $x\beta \neq x$، $\beta\beta \neq \beta$، و $x\beta y \neq xy$، ولی $x\lambda y = xy$. هر یک از مقادیر زیر را محاسبه کنید:

الف) $||\lambda||$ ب) $||\lambda\lambda||$ پ) $||\beta||$ ت) $||\beta\beta||$

ث) $||\beta^۳||$ ج) $||x\beta\beta y||$ چ) $||\beta\lambda||$ ح) $||\lambda^{۱۰}||$

۵. فرض کنیم $\Sigma = \{v, w, x, y, z\}$ و $A = \bigcup_{n=۱}^{۶} \Sigma^n$. چند تا از رشته‌های متعلق به A شامل yw به عنوان پیشوند سره هستند؟

۶. فرض کنیم Σ یک الفبا باشد. فرض کنیم به‌ازای $۱ \leqslant i \leqslant ۱۰۰$، $x_i \in \Sigma$ (که در آن $۱ \leqslant i < j \leqslant ۱۰۰$، $x_i \neq x_j$). چند زیررشتهٔ ناتهی برای رشتهٔ $s = x_۱ x_۲ \cdots x_{۱۰۰}$ وجود دارد؟

۷. به‌ازای الفبای $\Sigma = \{۰, ۱\}$، فرض کنیم $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ زبانهای زیر باشند:

$$A = \{۰, ۱, ۰۰, ۰۰۰, ۱۱۱, ۰۰۰۰, ۱۱۱۱\},$$
$$B = \{w \in \Sigma^* \mid ۲ \leqslant ||w||\},$$
$$C = \{w \in \Sigma^* \mid ۲ \geqslant ||w||\}.$$

این زیر مجموعه‌ها (زبانها)ی Σ^* را تعیین کنید:

الف) $A \cap B$ ب) $A - B$ پ) $A \triangle B$ ت) $A \cap C$ ث) $B \cap C$

ج) $B \cup C$ چ) $(\overline{A \cap C})$ ح) $\overline{A} \cap \overline{C}$ خ) $\overline{A} \cap C$

۸. فرض کنیم $A = \{۱۰, ۱۱\}$ و $B = \{۰۰, ۱\}$ دو زبان برای الفبای $\Sigma = \{۰, ۱\}$ باشند. هر یک از این زبانها را تعیین کنید: (الف) AB؛ (ب) BA؛ (پ) $A^۳$؛ (ت) $B^۲$.

۹. اگر A، B، C، و D زبانهایی روی Σ باشند، ثابت کنید
(الف) $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \Rightarrow AC \subseteq BD$؛ و (ب) $A\emptyset = \emptyset A = \emptyset$

۱۰. به‌ازای $\Sigma = \{x, y, z\}$، فرض کنیم $A, B \subseteq \Sigma^*$ با $A = \{xy\}$ و $B = \{\lambda, x\}$ تعریف شده باشند. مطلوب است تعیین (الف) AB؛ (ب) BA؛ (پ) $B^۳$؛ (ت) B^+؛ (ث) A^*.

۱۱. به‌ازای الفبای مفروض Σ، آیا زبانی مانند $A \subseteq \Sigma^*$ وجود دارد به‌طوری که $A^* = A$؟

۱۲. به‌ازای $\Sigma = \{۰, ۱\}$، تعیین کنید رشتهٔ ۱۰۰۰۰ در کدام یک از زبانهای زیر (که از Σ^* گرفته شده‌اند) قرار دارد:

الف) $\{۰, ۱\}^*$ ب) $\{۰۰۰, ۱۰۱\}\{۱۰, ۱۱\}$ پ) $\{۰۰\}\{۰\}^*\{۱۰\}$

ت) $\{۰\}^*\{۱\}^*\{۰\}$ ث) $\{۰۰۰\}^*\{۱\}^*\{۰\}$ ج) $\{۰۰\}^*\{۱۰\}^*$ چ) $\{۰\}^*\{۱\}^*\{۰\}^*$

۱۳. اگر $\Sigma = \{0, 1\}$، رشته‌های متعلق به A^* را به‌ازای هریک از زبانهای $A \subseteq \Sigma^*$ که در زیر می‌آید توصیف کنید:
الف) $\{01\}$ ب) $\{000\}$ پ) $\{0, 010\}$ ت) $\{1, 10\}$

۱۴. اگر $\Sigma = \{0, 1\}$، همهٔ زبانهای $A, B \subseteq \Sigma^*$ را که $AB = \{01, 000, 0101, 0111, 01000, 010111\}$ تعیین کنید.

۱۵. به‌ازای زبان ناتهی $A \subseteq \Sigma^*$، ثابت کنید اگر $A^2 = A$، آنگاه $\lambda \in A$.

۱۶. در الفبای مفروض Σ، $a \in \Sigma$ را ثابت می‌گیریم. توابع $p_a, s_a, r : \Sigma^* \to \Sigma^*$ و تابع $d : \Sigma^+ \to \Sigma^*$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

یک) تابع پیشوند (با پیشوند a): $p_a(x) = ax$، $x \in \Sigma^*$.

دو) تابع پسوند (با پسوند a): $s_a(x) = xa$، $x \in \Sigma^*$.

سه) تابع وارونی: $r(\lambda) = \lambda$؛ به‌ازای $x \in \Sigma^*$، اگر $x = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ که در آن به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $x_i \in \Sigma$، در این صورت $r(x) = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1 = x^R$ (همان‌طور که در مثال ۶ ۰ ۱۷ تعریف شد).

چهار) تابع حذف سر: به‌ازای $x \in \Sigma^+$، اگر $x = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$، در این صورت $d(x) = x_2 x_3 \cdots x_n$.

الف) از این چهار تابع کدامها یک به یک‌اند؟

ب) تعیین کنید از این چهار تابع کدامها پوشا هستند. اگر تابعی پوشا نباشد، برد آن را تعیین کنید.

پ) آیا تابع وارون‌پذیری بین این چهار تابع وجود دارد؟ اگر هست، تابع وارون آن را تعیین کنید.

ت) فرض کنیم $\Sigma = \{a, e, i, o, u\}$. چند واژهٔ Σ^4 مانند x در $r(x) = x$ صدق می‌کنند؟ چند واژهٔ Σ^5 در این رابطه صدق می‌کنند؟ چند واژهٔ Σ^n، $n \in \mathbf{N}$، در این رابطه صدق می‌کنند؟

ث) به‌ازای $x \in \Sigma^*$، مطلوب است تعیین $(d \circ p_a)(x)$ و $(r \circ d \circ r \circ s_a)(x)$.

ج) اگر $\Sigma = \{a, e, i, o, u\}$ و $B = \{ae, ai, ao, oo, eio, eiouu\} \subseteq \Sigma^*$، مطلوب است تعیین $r^{-1}(B)$، $p_a^{-1}(B)$، $s_a^{-1}(B)$، و $|d^{-1}(B)|$.

۱۷. اگر $A (\neq \varnothing)$ یک زبان باشد و $A^2 = A$، ثابت کنید $A = A^*$.

۱۸. قسمتهای اثبات نشدهٔ قضیه‌های ۶ ۰ ۱ و ۶ ۰ ۲ را ثابت کنید.

۱۹. ثابت کنید به‌ازای هر دو زبان متناهی مانند $A, B \subseteq \Sigma^*$، $|AB| \leqslant |A||B|$.

۲۰. اگر A و B زبانهایی روی Σ باشند و $A \subseteq B^*$، ثابت کنید $A^* \subseteq B^*$.

۲۱. به‌ازای الفبای مفروض Σ، فرض کنیم I یک مجموعهٔ اندیسگذار باشد و به‌ازای هر $i \in I$، $B_i \subseteq \Sigma^*$، ثابت کنید (الف) $A(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} AB_i$؛ و (ب) $(\bigcup_{i \in I} B_i)A = \bigcup_{i \in I} B_i A$. [این نتایج، تعمیم قسمتهای (پ) و (ت) از قضیهٔ ۶ ۰ ۱ هستند.]

۲۲. به‌ازای $\Sigma = \{x, y\}$، زبانهای متناهی از Σ^* را (همانند مثال ۶ ۰ ۱۲) همراه با اعمال مجموعه‌ای به‌کار گیرید و مجموعهٔ مرکب از رشته‌هایی متعلق به Σ^* را توصیف کنید که: (الف) هر رشته حاوی دقیقاً یک x باشد؛ (ب) هر رشته حاوی دقیقاً دو x باشد؛ (پ) هر رشته با x شروع شود؛ (ت) هر رشته با yxy پایان پذیرد؛ (ث) هر رشته با x شروع شود یا با yxy پایان پذیرد یا هر دو؛ (ج) هر رشته با x شروع شود یا با yxy پایان پذیرد ولی نه هر دو.

۲۳. فرض کنیم Σ الفبای $\{0, 1\}$ باشد و $A \subseteq \Sigma^*$ زبانی باشد که به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف شده است:
۱) هر دو نماد ۰ و ۱ در A هستند ـ این پایهٔ تعریف بازگشتی است؛ و
۲) به‌ازای هر واژهٔ x در A، واژهٔ $0x1$ نیز در A است ـ این فرایند بازگشت را تشکیل می‌دهد.

الف) چهار واژهٔ متفاوت، دو تا به طول ۳ و دو تا به طول ۵، در A بیابید.

ب) با استفاده از این تعریف بازگشتی نشان دهید ۰۰۰۱۱۱۱ در A است.

پ) توضیح دهید چرا ۰۰۰۰۱۱۱۱ در A نیست.

۲۴. به‌ازای الفبای $\Sigma = \{۰, ۱\}$، فرض کنیم $A \subseteq \Sigma^*$ زبان متشکل از همهٔ واژه‌هایی باشد که حاوی زیررشتهٔ ۱۰ نیستند. در این صورت واژه‌هایی نظیر λ، ۰، ۰۰، ۰۰۰، ۰۰۰۰، ۰۱، ۰۰۱، ۰۰۱۱، ۰۱۱۱، ۱، ۱۱ و ۱۱۱ در A هستند، ولی هیچ‌یک از واژه‌های ۱۰، ۱۰۱، ۱۰۰، ۰۱۰، ۰۰۱۰ یا ۱۱۱۱۰ متعلق به این زبان نیستند.

الف) تعریفی بازگشتی برای زبان A ارائه کنید.

ب) با استفاده از تعریف قسمت (الف)، تعیین کنید آیا ۰۰۱۱۱ در A هست یا نه.

۲۵. با استفاده از تعریف بازگشتی داده شده در مثال ۱۵۰۶، تحقیق کنید که هر یک از رشته‌های زیر متعلق به زبان A در آن مثال هست یا نه.

الف) $()(())$ ب) $()()(())$ پ) $(()())()$

۲۶. با فرض $\Sigma = \{۰, ۱\}$ تعریفی بازگشتی برای هر یک از زبانهای $A \subseteq \Sigma^*$ که در زیر می‌آید ارائه کنید:

الف) $x \in A$ اگر (و فقط اگر) تعداد ۰های x زوج باشد.

ب) $x \in A$ اگر (و فقط اگر) دقیقاً یک ۰ در x باشد.

پ) $x \in A$ اگر (و فقط اگر) همهٔ ۱های x مقدم بر همهٔ ۰های آن باشند.

۲۷. به‌ازای الفبای دلخواه Σ، رشتهٔ x متعلق به Σ^* را یک جناس مقلوب می‌نامیم هرگاه $x = x^R$، یعنی هرگاه x با وارونی خود برابر باشد. اگر $A \subseteq \Sigma^*$ عبارت باشد از $A = \{x \in \Sigma^* | x = x^R\}$، چگونه می‌توانیم زبان A را به‌طور بازگشتی تعریف کنیم؟

۲.۶ ماشینهای متناهی‌الحالت: نخستین برخورد

اکنون دوباره به ماشین فروش خودکاری که در آغاز این فصل دربارهٔ آن صحبت کردیم توجه می‌کنیم و آن را تحت شرایط زیر تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

در اداره‌ای ماشین فروش خودکاری، هست که دو نوع نوشابهٔ خنک در قوطی فلزی می‌فروشد: یکی را با C و دیگری را با RB نشان می‌دهیم. قیمت یک قوطی از هر یک از این دو نوشابه ۲۰ سنت است. این ماشین فروش سکه‌های پنج‌سنتی، ده‌سنتی، و بیست‌وپنج‌سنتی را می‌پذیرد و در صورت لزوم، بقیهٔ پول را پس می‌دهد. روزی ریحانه تصمیم می‌گیرد که یک قوطی RB بنوشد. او به طرف ماشین فروش خودکار می‌رود، دو سکهٔ پنج‌سنتی و یک سکهٔ ده‌سنتی، با همین ترتیب، وارد ماشین می‌کند و دکمهٔ سفید را، که با W نشان می‌دهیم، فشار می‌دهد. قوطی RBای که خواسته بود بیرون می‌آید. (برای دریافت یک قوطی نوشابهٔ C باید دکمهٔ سیاه را، که با B نشان می‌دهیم، فشار داد.)

می‌توانیم کاری را که ریحانه برای خرید خود انجام داده است به‌صورت جدول ۱۰۶ نمایش دهیم. در این جدول، $t_۰$ زمان آغاز کار است، یعنی وقتی که نخستین سکهٔ پنج‌سنتی وارد دستگاه می‌شود و $t_۱$، $t_۲$، $t_۳$، $t_۴$ لحظات بعدی، مقید به $t_۱ < t_۲ < t_۳ < t_۴$، هستند.

در حالت $s_۰$ ماشین در حالت آمادگی است؛ یعنی منتظر است تا یک مشتری شروع به وارد کردن سکه‌هایی به مبلغ کلّ ۲۰ سنت یا بیشتر کند و سپس دکمه‌ای را برای دریافت نوشابه‌ای خنک بفشارد. اگر در لحظهٔ معینی مبلغ کلِ سکه‌های وارد شده از ۲۰ سنت بیشتر شود، ماشین بقیهٔ پول را (قبل از آنکه مشتری دکمهٔ موردنظر را برای

جدول ۱.۶

	$t_۰$	$t_۱$	$t_۲$	$t_۳$	$t_۴$
حالت	(۱) $s_۰$	(۴) $s_۱$ (۵سنتی)	(۷) $s_۲$ (۱۰سنتی)	(۱۰) $s_۳$ (۲۰سنتی)	(۱۳) $s_۰$
ورودی	(۲) (۵سنتی)	(۵) (۵سنتی)	(۸) (۱۰سنتی)	(۱۱) W	
خروجی	(۳) هیچ	(۶) هیچ	(۹) هیچ	(۱۲) RB	

در این جدول اعداد (۱)، (۲)، ...، (۱۲)، و (۱۳) ترتیب پیشامدها را در جریان خرید یک قوطی RB توسط ریحانه نشان می‌دهند. برای هر ورودی در لحظهٔ t_i، $۰ \leqslant i \leqslant ۳$، یک خروجی متناظر در همان لحظه و سپس یک تغییر حالت وجود دارد. حالت جدید در لحظهٔ $t_{i+۱}$ هم به ورودی و هم به حالت (فعلی) در لحظهٔ t_i بستگی دارد.

دریافت نوشابه بفشارد) فراهم می‌آورد.

در لحظهٔ $t_۰$ ریحانه نخستین ورودی، یعنی یک سکهٔ ۵ سنتی، را به ماشین می‌دهد. او در این لحظه چیزی دریافت نمی‌کند، ولی در لحظهٔ بعدی $t_۱$، ماشین در حالت $s_۱$ است و در این حالت مبلغ ۵سنت ریحانه را به خاطر می‌آورد و منتظر ورودی دوم ریحانه است (یعنی مبلغ ۵ سنت در لحظهٔ $t_۱$). باز هم ماشین (در لحظهٔ $t_۱$) هیچ خروجی‌ای به‌دست نمی‌دهد، ولی در لحظهٔ بعدی $t_۲$، ماشین در حالت $s_۲$ است و در این حالت ۵ سنت (که در لحظهٔ $t_۱$ وارد شد) بعلاوهٔ ۵ سنت (که در حالت $s_۱$ به خاطر آورد)، یعنی مبلغ کل ۱۰ سنت را به خاطر می‌آورد. وقتی ریحانه سکهٔ ۱۰ سنتی خود را (در لحظهٔ $t_۲$) به‌عنوان ورودی بعدی به ماشین می‌دهد، هنوز هم نمی‌تواند هیچ نوشابه‌ای دریافت کند زیرا ماشین «نمی‌داند» ریحانه چه نوع نوشابه‌ای را ترجیح می‌دهد، ولی «می‌داند» که اکنون ($t_۳$) ریحانه مبلغ لازم ۱۰ سنت (که در لحظهٔ $t_۲$ وارد شد) بعلاوهٔ ۱۰ سنت (که در حالت $s_۲$ به خاطر آورد)، یعنی ۲۰ سنت را وارد ماشین کرده است. سرانجام، ریحانه دکمهٔ سفید را می‌فشارد و در لحظهٔ $t_۳$ ماشین خروجی موردنظر (یعنی قوطی RB) را بیرون می‌دهد و در لحظهٔ $t_۴$، به حالت آغازی $s_۰$ باز می‌گردد، یعنی آماده است تا سپیده، دوست ریحانه، یک سکهٔ ۲۵ سنتی وارد کند، ۵ سنت بقیه را دریافت کند، دکمهٔ سیاه را فشار دهد و قوطی نوشابهٔ موردنظرش، یعنی C، را بگیرد. خریدی که سپیده انجام می‌دهد در جدول ۲.۶ تجزیه و تحلیل شده است.

جدول ۲.۶

	$t_۰$	$t_۱$	$t_۲$
حالت	(۱) $s_۰$	(۴) $s_۳$ (۲۰سنتی)	(۷) $s_۰$
ورودی	(۲) (۲۵سنتی)	(۵) B	
خروجی	(۳) ۵ سنتی بقیهٔ پول	(۶) C	

می‌توانیم آنچه را در مورد این ماشین فروش خودکار روی داده است تجرید کنیم و از آن در تحلیل جنبه‌های معینی از کامپیوترهای رقمی و سیستمهای مخابرات تلفنی یاری بگیریم.

ویژگیهای عمدهٔ چنین ماشینی عبارت‌اند از

۱) در هر لحظهٔ مفروض ماشین می‌تواند فقط در یک حالت از تعدادی متناهی حالت باشد. این حالتها را حالتهای درونی ماشین می‌نامیم و در هر لحظه کلِّ حافظهٔ ماشین عبارت است از حالت درونی‌ای که

ماشین در آن لحظه در آن قرار دارد.

۲) ماشین فقط تعدادی متناهی از نمادها را به‌عنوان ورودی می‌پذیرد و مجموعهٔ این نمادها را الفبای ورودی $\mathcal{I}$ می‌نامیم. در مثال مربوط به ماشین فروش خودکار، الفبای ورودی مجموعهٔ

{B و W , سکهٔ بیست و پنج سنتی , سکهٔ ده سنتی, سکهٔ پنج سنتی}

است و هر یک از حالتهای درونی ماشین هر عضو این مجموعه را تشخیص می‌دهد.

۳) هر ترکیبی از ورودیها و حالتهای درونی یک خروجی و یک حالت بعدی را تعیین می‌کنند. مجموعهٔ متناهی مرکب از همهٔ خروجیهای ممکن الفبای خروجی $\mathcal{O}$ را برای ماشین تشکیل می‌دهد.

۴) فرض می‌کنیم پردازشهای متوالی ماشین با پالسهای جدا از هم و متمایز ساعت همگام می‌شوند و ماشین به شیوه‌ای تعیّنی عمل می‌کند، یعنی خروجی کاملاً توسط کلِّ ورودی فراهم شده و حالت آغازی ماشین معین می‌شود. این ملاحظات ما را به سمت تعریف زیر هدایت می‌کنند.

تعریف ۱۳.۶ هر ماشین متناهی‌الحالت یک پنج‌تایی، مانند $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ است که در آن، (S)، مجموعهٔ حالتهای درونی برای M؛ $\mathcal{I}$ الفبای ورودی برای M؛ $\mathcal{O}$ الفبای خروجی برای M؛ $\nu : S \times \mathcal{I} \to S$ تابع حالت بَعدی؛ $\omega : S \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ تابع خروجی است.

با استفاده از نمادگذاری این تعریف، اگر ماشین در لحظهٔ t_i در حالت s باشد و در این لحظه x را وارد کنیم، در این صورت در لحظهٔ t_i خروجی $\omega(s,x)$. این خروجی ازگذار ماشین در لحظهٔ t_{i+1} به حالت درونی بعدی، که با $\nu(s,x)$ مشخص شده است، حاصل می‌شود.

فرض می‌کنیم وقتی یک ماشین متناهی‌الحالت نخستین ورودی را دریافت می‌کند در لحظهٔ $t_0 = 0$ هستیم و ماشین در حالت آغازی مشخصی قرار دارد که آن را با s_0 نشان می‌دهیم. بحث خود را عمدتاً روی خروجی و حالتهای گذاری که متوالیاً روی می‌دهند متمرکز می‌کنیم و به دنبالهٔ پالسهای ساعت در لحظات t_0، t_1، t_2، $\cdots$ اشاره‌ای نمی‌کنیم.

چون مجموعه‌های S، $\mathcal{I}$، و $\mathcal{O}$ متناهی‌اند، می‌توانیم برای هر ماشین متناهی‌الحالت مفروض، توابع ν و ω را با جدولی نمایش‌دهیم که در آن $\nu(s,x)$ و $\omega(s,x)$ به‌ازای هر $s \in S$ و هر $x \in \mathcal{I}$ فهرست شده‌باشند. چنین جدولی را جدول حالت یا جدول‌گذار برای ماشین مفروض‌می‌نامیم. نحوهٔ دیگر نمایش ماشین استفاده از نمودار حالت است.

در مثالهای بعدی نحوهٔ تشکیل جدول حالت و نمودار حالت را نشان می‌دهیم.

مثال ۱۸.۶ ماشین متناهی‌الحالت $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ را،که درآن $S = \{s_0, s_1, s_2\}$، $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{0, 1\}$، و ν و ω با جدول حالت نمایانده شده در جدول ۳۰۶ داده شده‌اند، در نظر می‌گیریم. در ستون اول جدول حالتهای فعلی) ماشین فهرست شده‌اند. درایه‌های سطر دوم عنصرهای الفبای وروی $\mathcal{I}$ هستند، که یک بار زیر ν و یک بار زیر ω فهرست شده‌اند. شش عدد واقع در دو ستون آخر (و سه سطر آخر) عنصرهای الفبای خروجی $\mathcal{O}$ هستند.

مثلاً برای محاسبهٔ $\nu(s_1, 1)$، s_1 را در ستون حالتهای فعلی می‌یابیم و از s_1 به‌طور افقی حرکت می‌کنیم تا زیر درایهٔ ۱ در بخش ν از جدول قرارگیریم. می‌بینیم که $\nu(s_1, 1) = s_1$. به همین ترتیب می‌بینیم که $\omega(s_1, 1) = 0$.

جدول ۳.۶

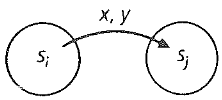
	ν ۰	ν ۱	ω ۰	ω ۱
s_0	s_0	s_1	۰	۰
s_1	s_2	s_1	۰	۰
s_2	s_0	s_1	۰	۱

با این فرض که s_0 حالت آغازی را نشان دهد، اگر ورودی فراهم شده برای M رشتهٔ ۱۰۱۰ باشد، در این صورت، همان‌طورکه در جدول ۴.۶ دیده می‌شود، خروجی رشتهٔ ۰۰۱۰ است. در اینجا ماشین در حالت s_1 رها می‌شود، به طوری که اگر رشتهٔ ورودی دیگری داشته باشیم، باید نخستین نماد آن رشته را، که در اینجا ۰ است، در حالت s_2 به ماشین بدهیم مگر آنکه ماشین را باز آغازش کنیم، به‌طوری که دوباره کار را از حالت s_0 آغاز کند.

جدول ۴.۶

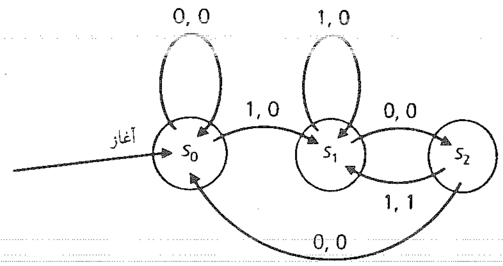
حالت	s_0	$\nu(s_0,1)=s_1$	$\nu(s_1,0)=s_2$	$\nu(s_2,1)=s_1$	$\nu(s_1,0)=s_2$
ورودی	۱	۰	۱	۰	۰
خروجی	$\omega(s_0,1)=0$	$\omega(s_1,0)=0$	$\omega(s_2,1)=1$	$\omega(s_1,0)=0$	

چون عمدتاً به خروجی علاقه‌مندیم، و به دنبالهٔ حالتهای گذار ماشین توجه نداریم، می‌توانیم ماشین مورد بحث را با نمودار حالت نمایش دهیم. در اینجا می‌توانیم رشتهٔ خروجی را بدون آنکه عملاً حالتهای گذار ماشین را فهرست کنیم، به‌دست آوریم. در چنین نموداری هر حالت درونی s را با دایره‌ای که s درون آن است نمایش می‌دهیم. برای حالتهای s_i و s_j، اگر به‌ازای $x \in \mathcal{I}$، $\nu(s_i,x)=s_j$ و به‌ازای $y \in \mathcal{O}$، $\omega(s_i,x)=y$، در نمودار حالت این مطلب را با رسم یک یال (یا کمان) سودار از دایرهٔ s_i به دایرهٔ s_j و نامگذاری این کمان با ورودی x و خروجی y، نمایش می‌دهیم. (شکل ۱.۶ را ببینید.)



شکل ۱.۶

با این قراردادها، نمودار حالت ماشین M وابسته به جدول ۳.۶ در شکل ۲.۶ نشان داده شده است. گرچه جدول فشرده‌تر است، ولی نمودار ما را قادر می‌سازد تا رشتهٔ ورودی را در هر یک از حالتهایی که خود تعیین می‌کند تعقیب کنیم و نمادهای خروجی متناظر را پیش از هر گذار به‌دست آوریم. مثلاً، اگر رشتهٔ ورودی ۱۰۱۰۱۱۰۰ باشد، در این صورت با شروع در حالت s_0، نخستین ورودی ۰ خروجی ۰ را به‌دست می‌دهد و ما را به حالت s_0 باز می‌گرداند. ورودی بعدی ۰ همان نتیجه را به‌دست می‌دهد، ولی برای ورودی سوم، یعنی ۱، خروجی ۰ است و



شکل ۲.۶

در حالت s_1 قرار می‌گیریم. اگر به همین طریق ادامه دهیم، به رشتهٔ خروجی ۰۰۰۰۰۱۰۱ می‌رسیم و در حالت s_1 کار به پایان می‌رسد. (توجه داریم که رشتهٔ ورودی ۰۰۱۱۰۱۰۱ عنصری از $\mathcal{I}^*$، یعنی بست کلین $\mathcal{I}$ است و رشتهٔ خروجی به $\mathcal{O}^*$، یعنی بست کلین $\mathcal{O}$، تعلق دارد.)

اگر در s شروع کنیم، خروجی متناظر با رشتهٔ ورودی ۱۱۰۰۱۰۱۱۰۱ چیست؟

مثال ۱۹.۶ برای ماشین فروش خودکاری که قبلاً در همین بند توصیف شد، جدول حالت نمایانده شده در جدول ۵.۶ را همراه با

۱) $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$، که در حالت s_k، به‌ازای هر $0 \leqslant k \leqslant 4$، ماشین به خاطر می‌آورد که $5k$ سنت در اختیار دارد.

جدول ۵.۶

	ν					ω				
	۵سنت	۱۰سنت	۲۵سنت	B	W	۵سنت	۱۰سنت	۲۵سنت	B	W
s_0	s_1	s_2	s_4	s_0	s_0	n	n	۵سنت	n	n
s_1	s_2	s_3	s_4	s_1	s_1	n	n	۱۰سنت	n	n
s_2	s_3	s_4	s_4	s_2	s_2	n	n	۱۵سنت	n	n
s_3	s_4	s_4	s_4	s_3	s_3	n	۵سنت	۲۰سنت	n	n
s_4	s_4	s_4	s_4	s_0	s_0	۵سنت	۱۰سنت	۲۵سنت	C	RB

۲) $\mathcal{I} = \{$۵سنتی, ۱۰سنتی, ۲۵سنتی, B, W$\}$، که در آن B دکمهٔ سیاه را نشان می‌دهد و برای به‌دست آوردن نوشابهٔ C آن را فشار می‌دهیم و W دکمهٔ سفید را برای نوشابهٔ RB نشان می‌دهد.

۳) $\mathcal{O} = \{$n(هیچ), RB, C, ۵سنت, ۱۰سنت, ۱۵سنت, ۲۰سنت, ۲۵سنت$\}$ داریم.

همان‌طور که در بحث پیش از مثال ۱۹.۶ ملاحظه کردیم، برای ماشین متناهی‌الحالت کلی $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$، می‌توانیم ورودی را به‌عنوان عنصری از $\mathcal{I}^*$ و خروجی را به‌عنوان عنصری از $\mathcal{O}^*$ تلقی کنیم. در نتیجه، به نفع ماست که دامنهٔ تعریف ν و ω را از $S \times \mathcal{I}$ به $S \times \mathcal{I}^*$ توسیع دهیم. برای ω حوزهٔ مقادیر را به $\mathcal{O}^*$ توسیع می‌دهیم،

و در صورت لزوم به خاطر می‌آوریم که هم $\mathcal{I}^*$ و هم $\mathcal{O}^*$ شامل رشتهٔ تهی، λ، هستند. با این توسیعها، اگر به‌ازای $k \in \mathbf{Z}^+$، $x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathcal{I}^*$ در این صورت اگر در هر حالت $s_1 \in S$ کار را شروع کنیم خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
\nu(s_1, x_1) &= s_2{}^{1}\\
\nu(s_1, x_1x_2) &= \nu(\nu(s_1, x_1), x_2) = \nu(s_2, x_2) = s_3\\
\nu(s_1, x_1x_2x_3) &= \nu\,(\underbrace{\nu(\underbrace{\nu(s_1, x_1)}_{s_2}, x_2)}_{\nu(s_2,x_2)=s_3}, x_3) = \nu(s_3, x_3) = s_4\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\nu(s_1, x_1x_2\cdots x_k) &= \nu(s_k, x_k) = s_{k+1},
\end{aligned}$$

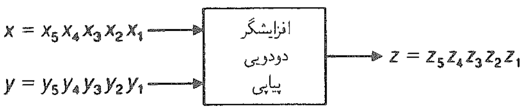
و

$$\begin{aligned}
\omega(s_1, x_1) &= y_1\\
\omega(s_1, x_1x_2) &= \omega(s_1, x_1)\omega(\nu(s_1, x_1), x_2) = \omega(s_1, x_1)\omega(s_2, x_2) = y_1y_2\\
\omega(s_1, x_1x_2x_3) &= \omega(s_1, x_1)\omega(s_2, x_2)\omega(s_3, x_3) = y_1y_2y_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega(s_1, x_1x_2\cdots x_k) &= \omega(s_1, x_1)\omega(s_2, x_2)\cdots\omega(s_k, x_k) = y_1y_2\cdots y_k \in \mathcal{O}^*
\end{aligned}$$

همچنین به‌ازای هر $s_1 \in S$، $\nu(s_1, \lambda) = s_1$.

این بند را با مثالی مربوط به علم کامپیوتر به پایان می‌رسانیم.

مثال ۲۰.۶ فرض کنیم $x = x_5x_4x_3x_2x_1 = ۰۰۱۱۱$ و $y = y_5y_4y_3y_2y_1 = ۰۱۱۰۱$ دو عدد دودویی باشند، که در آن x_1 و y_1 بیتهای دارای کمترین ارزش هستند. ۰های پیشرو در x و y برای این منظور شده‌اند که رشته‌های x و y را هم‌طول کنند و فضای کافی برای تکمیل مجموع فراهم آورند. افزایشگر دودویی پیاپی ماشینی متناهی الحالت است که می‌توانیم آن را برای به‌دست آوردن $x + y$ به کار گیریم. نمودار شکل ۳.۶ این مطلب را توضیح می‌دهد و در آن z_1 بیت دارای کمترین ارزش در $z = z_5z_4z_3z_2z_1$ است.



شکل ۳.۶

در جمع $z = x + y$، داریم

$$\begin{array}{rcccccc}
x & = & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
+y & = & +0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
\hline
z & = & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

سومین جمع   نخستین جمع

---

۱. حالت s_2 با s_1 و x_1 تعیین می‌شود. این‌طور نیست که s_2 فقط به‌عنوان دومین فقره در لیست حالتهای ماشین حضور داشته باشد.

جدول ۶.۶

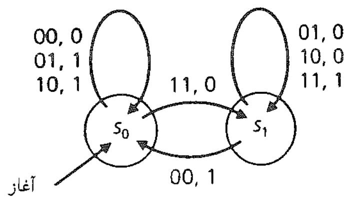
	ν				ω			
	۰۰	۰۱	۱۰	۱۱	۰۰	۰۱	۱۰	۱۱
s_0	s_0	s_0	s_0	s_1	۰	۱	۱	۰
s_1	s_0	s_1	s_1	s_1	۱	۰	۰	۱

توجه می‌کنیم که در نخستین جمع، $x_1 = y_1 = 1$ و $z_1 = 0$، در حالی که در سومین جمع، $x_3 = y_3 = 1$ و $z_3 = 1$ و این هم به سبب دو بر یک حاصل از جمع x_2 و y_2 (و دو بر یک حاصل از $x_1 + y_1$) است. در نتیجه، هر خروجی به حاصل جمع دو ورودی و توانایی یادآوری دو بر یک (۰ یا ۱) بستگی دارد، و البته وقتی دو بر یک است یادآوری آن اهمیت پیدا می‌کند.

افزایشگر دودویی پیاپی توسط ماشینی متناهی‌الحالت $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ به‌صورت زیر مدلسازی می‌شود. $S = \{s_0, s_1\}$، که در آن s_i دو بر یک i را نشان می‌دهد؛ $\mathcal{I} = \{00, 01, 10, 11\}$ و از این‌رو، دو ورودی وجود دارد که بسته به اینکه جمع ۰ + ۰، ۱ + ۰، ۰ + ۱ یا ۱ + ۱ را بخواهیم به ترتیب عبارت‌اند از ۰۰، ۰۱، ۱۰، یا ۱۱؛ و $\mathcal{O} = \{0, 1\}$. توابع ν و ω در جدول حالت (جدول ۶.۶) و نمودار حالت (شکل ۴.۶) داده شده‌اند.

در جدول ۶.۶ می‌بینیم که مثلاً $\nu(s_1, 01) = s_1$ و $\omega(s_1, 01) = 0$، زیرا s_1 دو بر یک ۱ را که از جمع بیتهای قبلی حاصل شده است نشان می‌دهد. ورودی ۰۱ نشان می‌دهد که ۰ و ۱ را جمع می‌کنیم (و دو بر یک ۱ داریم). بنابراین، حاصل جمع ۱۰ است و، به سبب وجود ۰ در ۱۰، $\omega(s_1, 01) = 0$. باز دو بر یک در $\nu(s_1, 1) = s_1$ به خاطر سپرده می‌شود.

با توجه به نمودار حالت (شکل ۴.۶) می‌بینیم که حالت آغازی باید s_0 باشد، زیرا قبل از جمع بیتهای دارای کمترین ارزش هیچ دو بر یکی نداریم.



شکل ۴.۶

دو نمودار حالت شکلهای ۲.۶ و ۴.۶ مثالهایی از گرافهای سودار نشاندار هستند. در سرتاسر کتاب مطالب زیادی دربارهٔ نظریهٔ گراف خواهیم دید، زیرا این نظریه نه تنها در علم کامپیوتر و مهندسی برق، بلکه در نظریهٔ کدگذاری (کدهای پیشوندی) و بهینه‌سازی (شبکه‌های حمل و نقل) نیز کاربردهایی دارد.

تمرینات ۲.۶

۱. با استفاده از ماشین متناهی‌الحالت مثال ۱۸.۶، برای هر یک از رشته‌های ورودی $x \in \mathcal{I}^*$ که در زیر می‌آید خروجی را بیابید و آخرین حالت درونی در فرایند گذار را تعیین کنید. (فرض بر این است که همواره

کار ماشین از حالت s_0 آغاز شود.)

الف) $x = 1010101$ ب) $x = 1001001$ پ) $x = 101001000$

۲. برای ماشین متناهی‌الحالت مثال ۶.۱۸، رشتهٔ ورودی x، که در حالت s_0 آغاز می‌شود، رشتهٔ خروجی ۰۰۱۰۱ را تولید می‌کند. x را تعیین کنید.

۳. فرض کنیم $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ ماشینی متناهی‌الحالت باشد، که در آن $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$، $\mathcal{I} = \{a, b, c\}$، $\mathcal{O} = \{0, 1\}$ و توابع ν و ω با جدول ۶.۷ تعیین شده‌اند.

جدول ۶.۷

	ν			ω		
	a	b	c	a	b	c
s_0	s_0	s_3	s_2	0	1	1
s_1	s_1	s_1	s_3	0	0	1
s_2	s_1	s_1	s_3	1	1	0
s_3	s_2	s_3	s_0	1	0	1

الف) اگر در s_0 آغاز کنیم، خروجی متناظر با رشتهٔ ورودی $abbccc$ چیست؟

ب) نمودار حالت این ماشین متناهی‌الحالت را رسم کنید.

۴. جدول حالت ماشین فروش خودکار در مثال ۶.۱۹ را در صورتی که قیمت هر قوطی نوشابهٔ C یا RB به ۲۵ سنت افزایش یابد ارائه کنید.

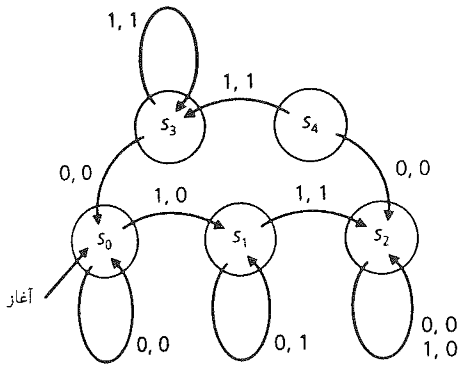
۵. برای ماشین متناهی‌الحالت $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$، داریم $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{0, 1\}$؛ و این ماشین با نمودار حالت شکل ۶.۵ مشخص می‌شود.

الف) رشتهٔ خروجی متناظر با رشتهٔ ورودی ۱۱۰۱۱۱ را که در s_0 آغاز می‌شود تعیین کنید. آخرین حالت گذار کدام است؟

ب) با همان رشتهٔ ورودی و در صورتی که حالت آغازی s_1 باشد، به قسمت (الف) پاسخ دهید. اگر s_2 یا s_3 حالت آغازی باشد پاسخ چیست؟

پ) جدول حالت این ماشین را بیابید.

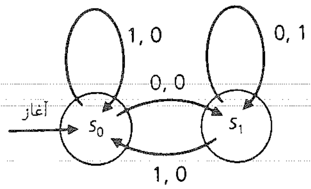
ت) در کدام حالت باید کار را آغاز کنیم تا رشتهٔ ورودی ۱۰۰۱۰ خروجی ۱۰۰۰۰ را تولید کند؟



شکل ۶.۵

ث) رشتهٔ ورودی $x \in \mathcal{I}^*$ با طول مینیمال را چنان تعیین کنید که $\nu(s_4, x) = s_1$. آیا x یکتاست؟

۶. برای ماشین M داریم $\mathcal{O} = \{0, 1\} = \mathcal{I}$ و این ماشین با نمودار حالت شکل ۶.۶ مشخص می‌شود.



شکل ۶.۶

الف) آنچه را این ماشین متناهی‌الحالت انجام می‌دهد توصیف کنید.

ب) حالت s_1 چه چیزی را باید به‌خاطر آورد؟

پ) دو زبان $A, B \subseteq \mathcal{I}^*$ را چنان بیابید که به‌ازای هر $x \in AB$، $\omega(s_0, x)$ دارای پسوند ۱ باشد.

۷. الف) اگر S، $\mathcal{I}$، و $\mathcal{O}$ مجموعه‌هایی متناهی باشند به‌طوری که $|S| = 3$، $|\mathcal{I}| = 5$، و $|\mathcal{O}| = 2$، مطلوب است تعیین

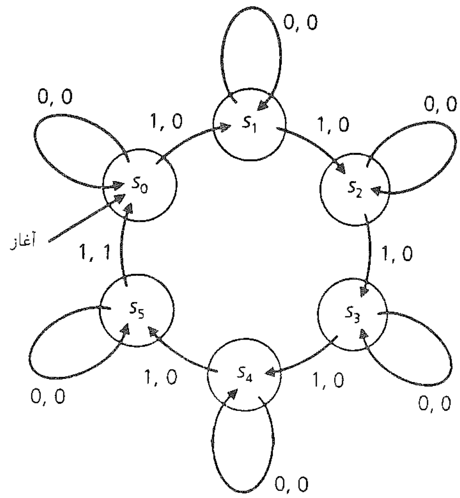
یک) $|S \times \mathcal{I}|$؛

دو) تعداد توابع $\nu : S \times \mathcal{I} \to S$؛

سه) تعداد توابع $\omega : S \times \mathcal{I} \to \mathcal{O}$.

ب) S، $\mathcal{I}$، و $\mathcal{O}$ با شرایط قسمت (الف) چند ماشین متناهی‌الحالت را مشخص می‌کنند؟

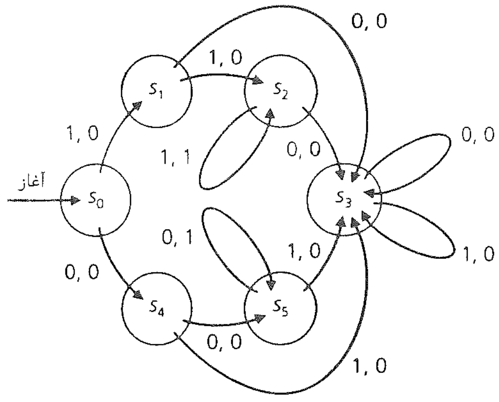
۸. فرض کنیم $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ ماشینی متناهی‌الحالت باشد که در آن $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{0, 1\}$، و S، ν، و ω با نمودار حالت شکل ۷.۶ مشخص شده‌اند.



شکل ۷.۶

الف) خروجی متناظر با رشتهٔ ورودی $x = ۰۱۱۰۱۱۱۰۱۱$ را بیابید.
ب) جدول گذار این ماشین متناهی‌الحالت را ارائه کنید.
پ) اگر کار را در حالت $s_۰$ آغاز کنیم، و اگر خروجی متناظر با رشتهٔ ورودی x رشتهٔ ۰۰۰۰۰۰۱ باشد، همهٔ xهای ممکن را تعیین کنید.
ت) آنچه را این ماشین متناهی‌الحالت انجام می‌دهد توصیف کنید.

۹. الف) جدول حالت ماشین متناهی‌الحالت شکل ۸.۶ را، که در آن $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰, ۱\}$، بیابید.



شکل ۸.۶

ب) فرض کنیم $x \in \mathcal{I}^*$، $||x|| = ۴$. اگر ۱ پسوندی برای $\omega(s_۰, x)$ باشد، چه صورتهای ممکنی برای رشتهٔ x وجود دارد؟
پ) فرض کنیم زبان $A \subseteq \{۰, ۱\}^*$ چنان باشد که، به‌ازای هر $x \in A$، ۱ پسوندی برای $\omega(s_۰, x)$باشد. A را تعیین کنید.
ت) $A \subseteq \{۰, ۱\}^*$ را چنان بیابید که، به‌ازای هر $x \in A$، ۱۱۱ پسوندی برای $\omega(s_۰, x)$ باشد.

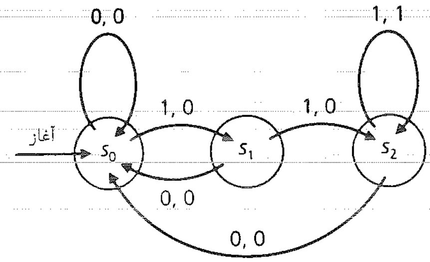
۳.۶ ماشینهای متناهی‌الحالت: دومین برخورد

اکنون که مثالهایی از ماشینهای متناهی‌الحالت را دیده‌ایم به مطالعهٔ چند ماشین دیگر که در طراحی سخت‌افزار کامپیوتر به کار می‌آیند می‌پردازیم. یکی از انواع مهم ماشینها ماشین دنباله‌شناس است.

مثال ۲۱.۶ فرض کنیم $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰, ۱\}$. می‌خواهیم ماشینی بسازیم که هر وقوع دنبالهٔ ۱۱۱ را در هر رشتهٔ ورودی $x \in \mathcal{I}^*$ تشخیص دهد. مثلاً اگر $x = ۱۱۱۰۱۰۱۱۱۱$، در این صورت خروجی متناظر باید ۰۰۱۰۰۰۰۰۱۱ باشد که در آن، وجود ۱ در موضع iام رشتهٔ خروجی نشان می‌دهد که سه ۱ در موضعهای i، $i - ۱$، و $i - ۲$ از x وجود دارد. در این مثال همپوشانی دنباله‌های ۱۱۱ مجاز است، از این‌رو، بعضی از نمادهای رشتهٔ ورودی را می‌توان نمادهایی متعلق به بیش از یک سه‌تایی از ۱ها تلقی کرد.

اگر $s_۰$ نشانگر حالت آغازی باشد، توجه می‌کنیم که باید حالتی برای به‌خاطر سپردن ۱ (آغاز احتمالی ۱۱۱) و حالتی برای به خاطر سپردن ۱۱ داشته باشیم. علاوه‌بر این، هر بار که نماد ورودی ۰ باشد، به $s_۰$ باز می‌گردیم و جستجوی سه ۱ متوالی را دوباره آغاز می‌کنیم.

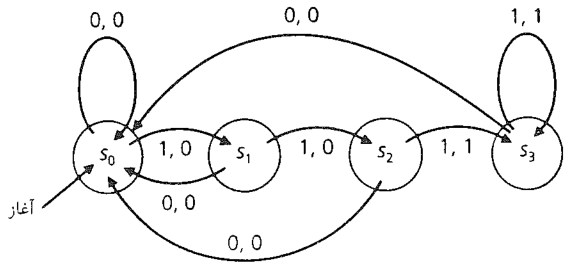
در شکل ۹.۶، s_1 یک ۱ و s_2 رشتهٔ ۱۱ را به خاطر می‌سپرد. اگر به s_2 برسیم، در این صورت "۱" سوم وقوع سه تایی ۱۱۱ را در رشتهٔ ورودی نشان می‌دهد، و خروجی ۱ این وقوع را شناسایی می‌کند. ولی این "۱" سوم به این معنی نیز هست که دو ۱ متوالی داریم که ممکن است دو نماد اول سه‌تایی دیگری که در رشتهٔ ورودی ظاهر خواهد شد باشند (مثلاً در ۱۱۱۰۱۰۱۱"۱"۱ این وضعیت روی می‌دهد). از این‌رو، پس از شناسایی وقوع ۱۱۱ به‌وسیلهٔ یک خروجی ۱، به حالت s_2 باز می‌گردیم تا دو ورودی "۱" به‌خاطر سپرده شود.



شکل ۹.۶

اگر در پی شناسایی همهٔ رشته‌هایی باشیم که به ۱۱۱ ختم می‌شوند، در این صورت به ازای هر $x \in \mathcal{I}^*$، این ماشین چنین دنباله‌ای را با خروجی نهایی ۱ شناسایی می‌کند. بنابراین، این ماشین یک شناسندهٔ زبان $A = \{۰,۱\}^*\{۱۱۱\}$ است.

ماشین متناهی‌الحالت دیگری که همان سه‌تایی ۱۱۱ را شناسایی می‌کند در شکل ۶ . ۱۰ نشان داده شده است. ماشینهای متناهی‌الحالتی که با دو نمودار حالت شکلهای ۶ . ۹ و ۶ . ۱۰ نمایش داده شده‌اند وظیفهٔ یکسانی را انجام می‌دهند و می‌گوییم هم‌ارزند. نمودار حالت شکل ۶ . ۱۰ یک حالت بیشتر از نمودار حالت شکل ۶ . ۹ دارد، ولی در این مرحله چندان به یافتن ماشینی متناهی‌الحالت با تعدادی مینیمال از حالت توجه نداریم. در فصل ۷ فنی را خواهیم یافت که به کمک آن با مفروض بودن ماشین متناهی‌الحالت M بتوان ماشینی هم‌ارز با آن یافت که کمترین تعداد حالتهای درونی لازم را داشته باشد.

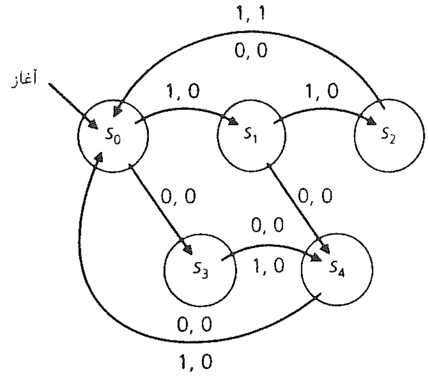


شکل ۱۰.۶

مثال بعدی کمی مشخصتر است.

مثال ۲۲.۶ اکنون می‌خواهیم علاوه‌بر شناسایی وقوع ۱۱۱، تنها آن دنباله‌های ۱۱۱ را شناسایی کنیم که در موضعی که مضرب سه است پایان می‌پذیرند. در نتیجه، با فرض $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰,۱\}$، اگر $x \in \mathcal{I}^*$ و

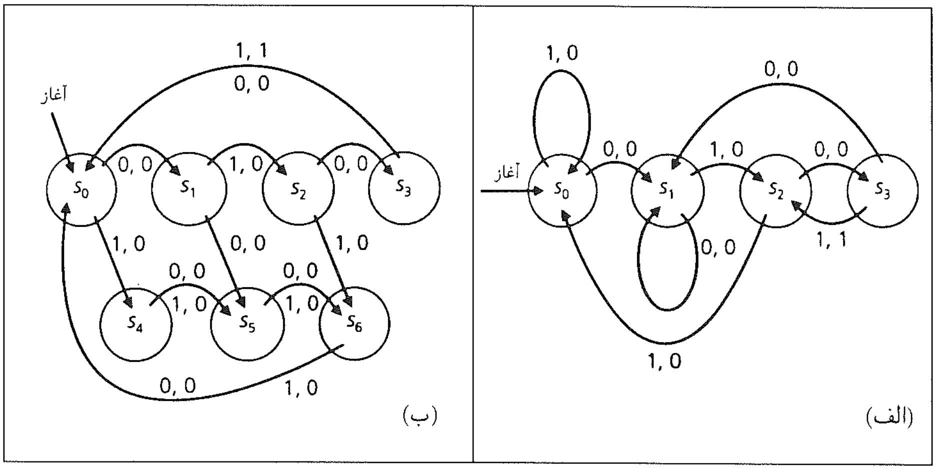
$x = 1110111$، در این صورت می‌خواهیم $\omega(s_0, x)$ برابر با ۰۰۱۰۰۰۰۰ باشد، نه برابر با ۰۰۱۰۰۰۱. علاوه‌بر آن، به‌ازای $x \in I^*$ و $x = 11111001$، خروجی $\omega(s_0, x)$ باید برابر با ۰۰۱۰۰۰۰۰۰ باشد، نه برابر با ۰۰۱۱۰۰۰۰۱، زیرا در اینجا، به‌سبب اینکه ملاحظات مربوط به طول رشته‌ها را مدِّ نظر داریم، همپوشانی دنباله‌های ۱۱۱ مجاز نیست.



شکل ۱۱.۶

باز هم در حالت s_0 آغاز می‌کنیم (شکل ۶ ۰ ۱۱)، ولی این بار s_1 باید نخستین ۱ را تنها وقتی به‌خاطر بسپرد که این ۱ در x در یکی از موضعهای ۱، ۴، ۷، ... واقع باشد. اگر در حالت s_0 ورودی ۰ باشد، نمی‌توانیم مانند مثال ۶ ۰ ۲۱ به‌سادگی به s_0 بازگردیم. همچنین، باید به‌خاطر بسپریم که این ۰، نخستین نماد از سه نماد است که موردنظر نیستند. بنابراین، هنگام پردازش هر سه‌تایی به‌صورت $0yz$، که در آن ۰ در x در موضع $3k + 1$، $k \geqslant 0$، قرار دارد، از s_0 به s_3 و سپس به s_4 می‌رویم. در حالت s_1 نیز اگر ورودی ۰ باشد وضعیت مشابهی روی می‌دهد. سرانجام، در حالت s_2 اگر دنبالهٔ ۱۱۱ روی دهد، با خروجی ۱ شناسایی می‌شود. سپس ماشین به s_0 باز می‌گردد تا نماد بعدی رشتهٔ ورودی را دریافت کند.

مثال ۲۳.۶ شکل ۶ ۰ ۱۲ نمودارهای حالت است ماشینهای متناهی‌الحالتی را نشان می‌دهد که وقوع دنبالهٔ



شکل ۱۲.۶

۰۱۰۱ را در رشتهٔ ورودی $x \in \mathcal{I}^*$، که در آن $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{0, 1\}$، شناسایی می‌کنند. ماشین شکل ۶۰۱۲ (الف) هر وقوع ۰۱۰۱ را در رشتهٔ ورودی، بدون توجه به اینکه این دنباله کجا واقع باشد، با خروجی ۱ شناسایی می‌کند. ماشین شکل ۶۰۱۲ (ب) تنها آن پیشوندهایی از x را که طولشان مضربی از ۴ باشد و به ۰۱۰۱ ختم شوند با خروجی ۱ شناسایی می‌کند. (بنابراین، در اینجا همپوشانی مجاز نیست.) در نتیجه، به‌ازای $x = 0101010010 1$، برای (الف) داریم $\omega(s_0, x) = 0001010000 1$، در حالی که برای (ب)، $\omega(s_0, x) = 00010000000$.

حال که چند ماشین متناهی‌الحالت دنباله‌شناس را بررسی کرده‌ایم، جالب خواهد بود که مجموعه‌ای از دنباله‌هایی را ببینیم که با هیچ ماشین متناهی‌الحالتی نمی‌توان آنها را شناسایی کرد. مثالی که در زیر می‌آوریم در عین حال فرصتی دیگر را برای کاربرد اصل لانهٔ کبوتر به‌دست می‌دهد.

مثال ۲۴.۶ فرض کنیم $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{0, 1\}$. آیا می‌توانیم ماشینی متناهی‌الحالت بسازیم که دقیقاً رشته‌های متعلق به زبان $A = \{01, 0011, 000111, \ldots\} = \{0^i1^i | i \in \mathbf{Z}^+\}$ را شناسایی کند؟ اگر بتوانیم چنین ماشینی بسازیم، در این صورت اگر s_0 نشانگر حالت آغازی باشد، انتظار داریم که $\omega(s_0, 01)$، $\omega(s_0, 0011)$، و به‌طورکلی به‌ازای هر $i \in \mathbf{Z}^+$، $\omega(s_0, 0^i1^i) = 0^i1^i$. [یادداشت: مثلاً می‌خواهیم داشته باشیم $\omega(s_0, 0011) = 0011$، که نخستین ۱ در خروجی برای شناسایی زیر رشتهٔ ۰۱، و دومین ۱ برای شناسایی رشتهٔ ۰۰۱۱ است.]

فرض کنیم، ماشینی متناهی‌الحالت مانند $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ وجود داشته باشد که بتواند دقیقاً رشته‌های متعلق به A را شناسایی کند. فرض کنیم $s_0 \in S$ حالت آغازی باشد و $|S| = n \geqslant 1$. رشتهٔ $0^{n+1}1^{n+1}$ متعلق به زبان A را در نظر می‌گیریم. اگر ماشین ما درست عمل کند، در این صورت می‌خواهیم که $\omega(s_0, 0^{n+1}1^{n+1}) = 0^{n+1}1^{n+1}$. بنابراین، در جدول ۶۰۸ می‌بینیم که چگونه این ماشین متناهی‌الحالت، با شروع کار در حالت s_0 و ادامهٔ آن در n حالت $s_1 = \nu(s_0, 0)$، $s_2 = \nu(s_1, 0)$، $\ldots$، و $s_n = \nu(s_{n-1}, 0)$، $n + 1$ تا ۰ را پردازش می‌کند. چون $|S| = n$، با به‌کارگیری اصل لانهٔ کبوتر در مورد $n + 1$ حالت s_0، s_1، s_2، $\ldots$، s_{n-1}، و s_n، درمی‌یابیم که دو حالت s_i و s_j وجود دارند به‌طوری که $i < j$ ولی $s_i = s_j$.

جدول ۸.۶

حالت	s_0	s_1	s_2	$\cdots$	s_{n-1}	s_n	s_{n+1}	$\cdots$	s_{2n}	s_{2n+1}
ورودی	۰	۰	۰	$\cdots$	۰	۰	۱	$\cdots$	۱	۱
خروجی	۰	۰	۰	$\cdots$	۰	۰	۱	$\cdots$	۱	۱

در جدول ۶۰۹ می‌بینیم که چگونه حذف $j - i$ ستون برای حالتهای s_{i+1}، $\ldots$، s_j، این جدول را به جدول ۶۰۱۰ تبدیل می‌کند. این جدول نشان می‌دهد که ماشین متناهی‌الحالت M رشتهٔ $x = 0^{(n+1)-(j-i)}1^{n+1}$ را، که در آن $n + 1 - (j - i) < n + 1$، شناسایی می‌کند. متأسفانه $x \notin A$ و از این‌رو، M رشته‌ای را شناسایی می‌کند که بنابر فرض نباید آن را شناسایی کند. این مطلب نشان می‌دهد که نمی‌توانیم ماشینی متناهی‌الحالت بسازیم که دقیقاً رشته‌های متعلق به زبان $A = \{0^i1^i | i \in \mathbf{Z}^+\}$ را شناسایی کند.

جدول ۹.۶

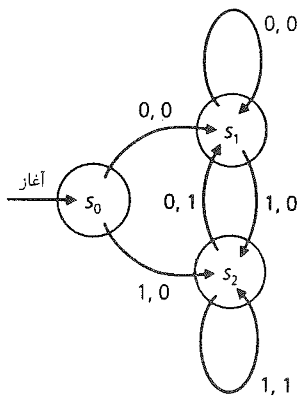
حالت	$s_۰$	$s_۱$	$s_۲$	$\cdots$	s_i	$s_{i+۱}$	$\cdots$	s_j	$s_{j+۱}$	$\cdots$	s_n	$s_{n+۱}$	$\cdots$	$s_{۲n}$	$s_{۲n+۱}$
ورودی	۰	۰	۰	$\cdots$	۰	۰	$\cdots$	۰	۰	$\cdots$	۰	۱	$\cdots$	۱	۱
خروجی	۰	۰	۰	$\cdots$	۰	۰	$\cdots$	۰	۰	$\cdots$	۰	۱	$\cdots$	۱	۱

جدول ۱۰.۶

حالت	$s_۰$	$s_۱$	$s_۲$	$\cdots$	s_i	$s_{j+۱}$	$\cdots$	s_n	$s_{n+۱}$	$\cdots$	$s_{۲n}$	$s_{۲n+۱}$
ورودی	۰	۰	۰	$\cdots$	۰	۰	$\cdots$	۰	۱	$\cdots$	۱	۱
خروجی	۰	۰	۰	$\cdots$	۰	۰	$\cdots$	۰	۱	$\cdots$	۱	۱

رده‌ای از ماشینهای متناهی‌الحالت که در طراحی ابزارهای رقمی حائز اهمیت است ردهٔ ماشینهای تأخیر k واحدی، $k \in \mathbf{Z}^+$، است. به‌ازای $k = ۱$، می‌خواهیم ماشینی مانند M بسازیم چنانکه اگر $x = x_۱ x_۲ \cdots x_{m-۱} x_m$، آنگاه با این فرض که حالت آغازی $s_۰$ باشد، $\omega(s_۰, x) = ۰ x_۱ x_۲ \cdots x_{m-۱}$، از این‌رو، خروجی همان ورودی است که یک واحد زمان (پالس ساعت) به تأخیر افتاده است. [استفاده از ۰ به‌عنوان نخستین نماد در $\omega(s_۰, x)$ صرفاً قراردادی است.]

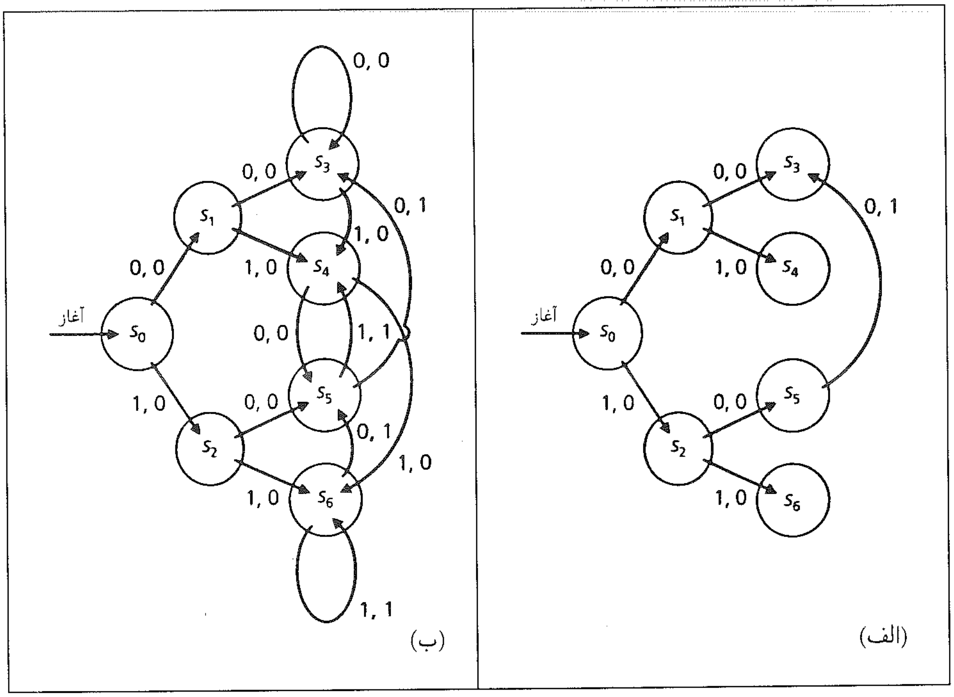
مثال ۲۵.۶ فرض کنیم $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰, ۱\}$. با فرض $s_۰$ به‌عنوان حالت آغازی، به ازای $x = ۰$ یا $x = ۱$، $\omega(s_۰, x) = ۰$، چون نخستین خروجی ۰ است؛ حالتهای $s_۱$ و $s_۲$ (در شکل ۱۳.۶)، به ترتیب، ورودی قبلی ۰ و ۱ را به‌خاطر می‌آورند. در این شکل، مثلاً کمان واصل از $s_۱$ به $s_۲$ را با "۱,۰" نامگذاری کرده‌ایم زیرا اگر ورودی ۱ باشد باید به $s_۲$ برویم که در آنجا ورودیهای ۱ در لحظهٔ t_i به‌خاطر آورده می‌شوند و بنابراین می‌توانند خروجیهای ۱ در لحظهٔ $t_{i+۱}$ بشوند. نماد ۰ در نامگذاری "۱,۰" همان خروجی است زیرا آغاز در $s_۱$ نشان می‌دهد که ورودی قبلی ۰



شکل ۱۳.۶

بوده است، و این ۰ خروجی فعلی شده است. نامگذاریهای کمانهای دیگر را با استدلال مشابهی به‌دست می‌آوریم.

مثال ۲۶.۶ پس از مشاهدهٔ ساختار تأخیر یک واحدی، ایده‌ای را که در آنجا داشتیم به ماشین تأخیر دو واحدی، که در شکل ۱۴.۶ نشان داده شده است، تعمیم می‌دهیم. اگر $x \in \mathcal{I}^*$، فرض می‌کنیم $x = x_1x_2\cdots x_m$ و $m > 2$؛ اگر s_0 حالت آغازی باشد، در این صورت $\omega(s_0, x) = 00x_1\cdots x_{m-2}$. در حالتهای s_0، s_1، و s_2 خروجی ۰ به‌ازای همهٔ ورودیهای ممکن، ۰ است. حالتهای s_3، s_4، s_5، و s_6 به ترتیب، باید دو ورودی قبلی ۰۰، ۰۱، ۱۰، و ۱۱ را به‌خاطر آورند. برای به‌دست آوردن کمانهای دیگر نمودار، یکی از این کمانها را در نظر می‌گیریم و سپس استدلال مشابهی را برای کمانهای دیگر به‌کار می‌گیریم. برای کمان واصل از s_5 به s_3 در شکل ۱۴.۶ (الف)، فرض کنیم ورودی ۰ باشد. چون ورودی قبلی که از s_2 به s_5 آمده است ۰ است، باید به حالتی برویم که دو ورودی قبلی ۰۰ را به‌خاطر آورد. این حالت، حالت s_3 است. اگر از s_5 به s_2 و سپس به s_0 بازگردیم، می‌بینیم که ورودی (از s_0 به s_2) ۱ است. سپس این ورودی برای کمان واصل از s_5 به s_3 خروجی(ای با دو واحد تأخیر) می‌شود. ماشین کامل در قسمت (ب) از شکل ۱۴.۶ نشان داده شده است.



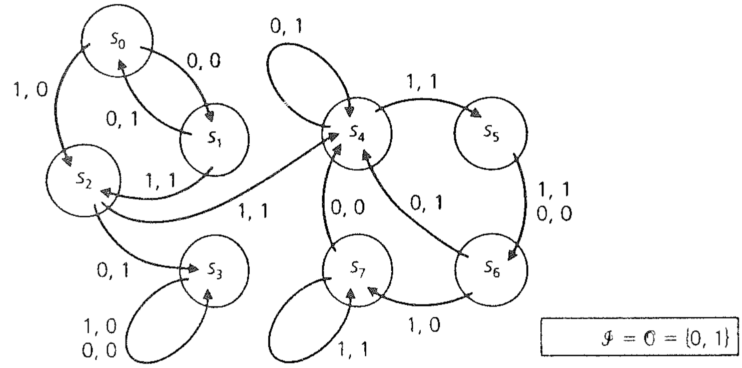
شکل ۱۴.۶

اینک می‌پردازیم به بررسی چند ویژگی دیگر که هنگام مطالعهٔ ماشینهای متناهی‌الحالت پیش می‌آیند. شکل ۱۵.۶ را به‌عنوان مثال برای واژه‌هایی که تعریف می‌کنیم به‌کار می‌گیریم.

تعریف ۱۴.۶ فرض کنیم $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ ماشینی متناهی‌الحالت باشد.

الف) اگر $s_i, s_j \in S$، می‌گوییم s_j از s_i قابل وصال است هرگاه $s_i = s_j$، یا یک رشتهٔ ورودی مانند $x \in \mathcal{I}^+$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\nu(s_i, x) = s_j$. (در شکل ۱۵.۶، حالت $s_۲$ قابل وصال از $s_۰$، $s_۱$، $s_۲$، و $s_۳$ است، ولی از $s_۴$، $s_۵$، $s_۶$، یا $s_۷$ قابل وصال نیست. از $s_۳$ هیچ حالتی، جز خود $s_۳$، قابل وصال نیست.)

ب) می‌گوییم حالت $s \in S$ گذراست هرگاه $\nu(s, x) = s$ به‌ازای $x \in \mathcal{I}^*$، مستلزم $x = \lambda$ باشد؛ یعنی، هیچ رشته‌ای مانند $x \in \mathcal{I}^+$ با $\nu(s, x) = s$ وجود نداشته باشد. ($s_۲$ تنها حالت گذرا برای ماشین شکل ۱۵.۶ است.)



شکل ۱۵.۶

پ) می‌گوییم حالت $s \in S$ چاهک، یا حالت چاهکی، است هرگاه به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}^*$، $\nu(s, x) = s$. ($s_۳$ تنها چاهک در شکل ۱۵.۶ است.)

ت) فرض کنیم $S_۱ \subseteq S$ و $\mathcal{I}_۱ \subseteq \mathcal{I}$. اگر برد، $S_۱ \times \mathcal{I}_۱ \to S_۱$:$\nu_۱ = \nu|_{S_۱ \times \mathcal{I}_۱}$ ($\nu|_{S_۱ \times \mathcal{I}_۱}$ یعنی تحدید ν به $S_۱ \times \mathcal{I}_۱ \subseteq S \times \mathcal{I}$) در $S_۱$ باشد، در این صورت با فرض $\omega_۱ = \omega|_{S_۱ \times \mathcal{I}_۱}$، $M_۱ = (S_۱, \mathcal{I}_۱, \mathcal{O}, \nu_۱, \omega_۱)$ را یک زیرماشین M می‌نامیم. (با فرض $S_۱ = \{s_۴, s_۵, s_۶, s_۷\}$ و $\mathcal{I}_۱ = \{۰, ۱\}$، زیرماشینی مانند $M_۱$ از ماشین شکل ۱۵.۶ را به‌دست می‌آوریم.)

ث) ماشینی را قویاً همبند می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر دو حالت $s_i, s_j \in S$، s_j از s_i قابل وصال باشد. (ماشین شکل ۱۵.۶ قویاً، همبند نیست، ولی زیر ماشین $M_۱$ در قسمت (ت) این ویژگی را دارد.)

این بند را با نتیجه‌ای که در آن از نمودار درختی استفاده می‌شود به پایان می‌رسانیم.

تعریف ۱۵.۶ فرض کنیم s_i و s_j دو حالت متمایز در S برای ماشین متناهی‌الحالت M باشند. رشتهٔ ورودی $x \in \mathcal{I}^+$ دنبالهٔ انتقال (یا دنبالهٔ گذار) از s_i به s_j می‌نامیم هرگاه

الف) $\nu(s_i, x) = s_j$، و

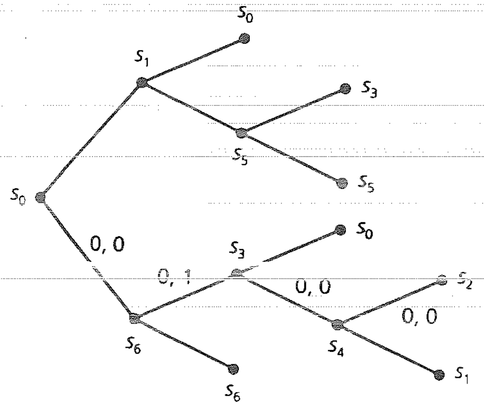
ب) اگر $y \in \mathcal{I}^+$ و $\nu(s_i, y) = s_j$، آنگاه $\|x\| \leqslant \|y\|$.

برای دو حالت s_i و s_j ممکن است بیش از یک دنبالهٔ انتقال وجود داشته باشد.

مثال ۲۷.۶ برای ماشین متناهی‌الحالت M که با جدول حالت نمایانده شده در ۱۱۰۶ داده شده است و در آن $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰, ۱\}$، یک دنبالهٔ انتقال از حالت $s_۰$ به حالت $s_۲$ بیابید.

جدول ۱۱۰۶

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
$s_۰$	$s_۶$	$s_۱$	۰	۱
$s_۱$	$s_۵$	$s_۰$	۰	۱
$s_۲$	$s_۱$	$s_۲$	۰	۱
$s_۳$	$s_۴$	$s_۰$	۰	۱
$s_۴$	$s_۲$	$s_۱$	۰	۱
$s_۵$	$s_۳$	$s_۵$	۱	۱
$s_۶$	$s_۳$	$s_۶$	۱	۱



شکل ۱۶۰۶

برای ساختن نمودار درختی شکل ۱۶۰۶، در حالت $s_۰$ آغاز می‌کنیم و حالتهایی را می‌یابیم که بتوان با استفاده از رشته‌هایی به طول واحد از $s_۰$ به آنها رسید. $s_۱$ و $s_۶$ را می‌یابیم. سپس همین کار را با $s_۱$ و $s_۶$ می‌کنیم و در نتیجه، حالتهایی را می‌یابیم که با رشته‌های ورودی به طول دو از $s_۰$ قابل وصال باشند. اگر به همین ترتیب درخت را از چپ به راست بسط دهیم، به رأسی می‌رسیم که با حالت مطلوب، یعنی $s_۲$، نامگذاری شده است. هرگاه به رأسی برسیم که نام آن قبلاً برای نامگذاری رأسی به کار رفته باشد، بسط درخت را از آن طرف متوقف می‌کنیم زیرا با ادامهٔ کار به هیچ حالت جدیدی نخواهیم رسید. پس از آنکه به حالت موردنظر رسیدیم، از همان مسیر به $s_۰$ باز می‌گردیم و با استفاده از جدول حالت، همان‌طورکه در شکل ۱۶۰۶ نشان داده شده است، شاخه‌ها را نامگذاری می‌کنیم. بنابراین، به‌ازای $x = ۰۰۰۰$، $\nu(s_۰, x) = s_۲$ و $\omega(s_۰, x) = ۰۱۰۰$. (در اینجا x یکتاست.)

تمرینات ۳.۶

۱. فرض کنیم $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰, ۱\}$. (الف) نمودار حالت ماشینی متناهی‌الحالت را بسازید که هر وقوع ۰۰۰۰ را در رشتهٔ $x \in \mathcal{I}^*$ شناسایی کند. (همپوشانی دنباله‌ها مجاز است.) (ب) نمودار حالت ماشینی متناهی‌الحالت را بسازید که هر رشتهٔ $x \in \mathcal{I}^*$ را که به ۰۰۰۰ ختم شود و طولی برابر با $۴k$، $k \in \mathbf{Z}^+$، داشته باشد شناسایی کند. (همپوشانی دنباله‌ها مجاز نیست.)

۲. پاسخ تمرین ۱ را به‌ازای هر یک از دنباله‌های ۰۱۱۰ و ۱۰۱۰ بیابید.

۳. نمودار حالت ماشینی متناهی‌الحالت با $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰, ۱\}$ را بسازید که همهٔ رشته‌های متعلق به زبان

$\{0,1\}^*\{00\} \cup \{0,1\}^*\{11\}$ را شناسایی کند.

۴. به‌ازای $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{0,1\}$، می‌گوییم رشتهٔ $x \in \mathcal{I}^*$ دوتایگی زوج دارد، هرگاه حاوی تعدادی زوج از ۱ها باشد. نمودار حالت ماشینی متناهی‌الحالت را بسازید که همهٔ رشته‌های ناتهی با دوتایگی زوج را شناسایی کند.

۵. جدول ۱۲۰۶ توابع ν و ω را برای ماشین متناهی‌الحالت M، که در آن $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{0,1\}$، تعریف می‌کند.

جدول ۱۲.۶

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_0	s_1	۰	۰
s_1	s_0	s_1	۱	۱

الف) نمودار حالت M را رسم کنید.

ب) خروجی متناظر با رشته‌های ورودی زیر را تعیین کنید، در صورتی که در هر مورد s_0 حالت آغازی باشد.
یک) $x = 111$؛ دو) $x = 1010$؛ سه) $x = 00011$.

پ) آنچه را ماشین M انجام می‌دهد توصیف کنید.

ت) این ماشین چه ارتباطی با ماشین نشان داده شده در شکل ۱۳۰۶ دارد؟

۶. نشان دهید امکان ندارد بتوان ماشینی متناهی‌الحالت چنان ساخت که دقیقاً دنباله‌های متعلق به زبان $A = \{0^i 1^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, i > j\}$ را شناسایی کند. (الفبای زبان A عبارت است از $\Sigma = \{0,1\}$.)

۷. برای هر یک از ماشینهای جدول ۱۳۰۶، حالتهای گذرا، حالتهای چاهکی، زیر ماشینها (وقتی $\mathcal{I}_1 = \{0,1\}$)، و زیر ماشینهای قویاً همبند را (وقتی $\mathcal{I}_1 = \{0,1\}$) تعیین کنید.

۸. در ماشین متناهی‌الحالت (پ) از تمرین ۷، یک دنبالهٔ انتقال از حالت s_2 به حالت s_5 بیابید. آیا این دنباله یکتاست؟

۴.۶ خلاصه و مروری تاریخی

در این فصل با نظریهٔ زبانها و با ساختاری گسسته به نام ماشین متناهی‌الحالت آشنا شدیم. با استفاده از معلومات قبلی دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها و توابع متناهی، توانستیم با ترکیب بعضی از مفاهیم مجرد، ابزارهایی رقمی چون دنباله‌شناسها و تأخیردهنده‌ها را الگوسازی کنیم. مطالبی مشابه با اینها را می‌توان در فصل ۱ از کتاب اِل. دورنهوف[1] و اِف. هون[2] [۳] و در فصل ۲ از کتاب دی. اف. استانات[3] و دی. اف. مک آلیستر[4] [۱۴] یافت.

ماشین متناهی‌الحالت را مبتنی بر الگویی که جی. اِچ. میلی[5] در ۱۹۵۵ در [۱۱] مطرح کرد و از این جهت آن را «ماشین میلی» می‌نامند ارائه کردیم. این مدل مبتنی بر مفاهیمی قدیمیتر است که در اثر دی. ا. هافمن[6] [۸] و

1. L. Dornhoff 2. F. Hohn 3. D.F.Stanat 4. D.F.McAllister 5. G.H.Mealy 6. D.A.Huffman

جدول ۱۳.۶

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_1	s_2	۰	۱
s_1	s_0	s_2	۱	۱
s_2	s_2	s_3	۱	۱
s_3	s_6	s_4	۰	۰
s_4	s_5	s_5	۱	۰
s_5	s_3	s_4	۱	۰
s_6	s_6	s_6	۰	۰

(الف)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_0	s_1	۱	۰
s_1	s_0	s_1	۰	۱
s_2	s_1	s_3	۰	۰
s_3	s_0	s_4	۰	۰
s_4	s_4	s_4	۱	۱

(ب)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_4	s_1	۰	۰
s_1	s_4	s_2	۰	۱
s_2	s_3	s_5	۰	۰
s_3	s_2	s_5	۱	۰
s_4	s_4	s_2	۱	۱
s_5	s_2	s_3	۰	۱

(پ)

ای. اف. مور[1] [۱۲] دیده می‌شود. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ کارهای پیشاهنگ در مورد جنبه‌های گوناگون و کاربردهای ماشینهای متناهی‌الحالت، به مجموعهٔ مقالاتی که ای. اف. مور در [۱۳] گرد آورده است مراجعه کنید. اطلاعات دیگری دربارهٔ ساخت واقعی این‌گونه ماشینها و دربارهٔ ملاحظات سخت‌افزاری مربوط به آنها، همراه با مطالب مفصلی دربارهٔ بسیاری از ایده‌های مربوط به آنها را می‌توان در فصلهای ۹ تا ۱۵ کتاب ز.کوهاوی[2] [۹] یافت.

برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ زبانها و رابطهٔ آنها با ماشینهای متناهی‌الحالت، باید به مقالهٔ ویلیام جی. بارنیر[3] [۱]، فصلهای ۷ تا ۱۰ کتاب جی. ال. گرشتینگ[4] [۴]، و فصلهای ۷ و ۸ کتاب ا. جیل[5] [۵] مراجعه کرد. مطالب جامعی دربارهٔ این موضوعات (و موضوعات وابسته) درکتابهای درسی جی. جی. بروکسهیر[6] [۲]، جی. ای. هوپکرافت[7] و جی.دی. اولمان[8] [۷]، اچ. آر. لوئیس[9] و سی.اچ. پاپادیمیتریو[10] [۱۰]، و دی.وود[11] [۱۵] ارائه شده است.

ممکن است از شنیدن این مطلب شگفت‌زده شویم که ایده‌های اساسی نظریهٔ ماشینها بیشتر برای حل مسائلی نسبتاً نظری در مبانی ریاضیات، به‌صورتی که در سال ۱۹۰۰ توسط داوید هیلبرت (۱۸۶۲ – ۱۹۴۳)، ریاضیدان آلمانی، مطرح شد، ابداع شد و گسترش یافت. در ۱۹۳۵ آلن ماتیسون تورینگ (۱۹۱۲ – ۱۹۵۴)، ریاضیدان و منطقدان انگلیسی، به مسألهٔ تصمیمگیری هیلبرت علاقه‌مند شد. این مسأله چنین است: آیا روشی کلی می‌تواند وجود داشته باشد که آن رادر مورد هرگزارهٔ دلخواه به کار ببریم تا تعیین کنیم که آن گزاره راست است یا نه؟ رهیافت تورینگ برای حل این مسأله او را به ابداع آنچه امروزه ماشین تورینگ نامیده می‌شود و کلیترین الگو برای ماشینهای محاسبه است، رهنمون شد. تورینگ با استفاده از این الگو توانست نتایج نظری بسیار عمیقی را دربارهٔ اینکه کامپیوترها چگونه باید عمل کنند به‌دست آورد و این پیش از ساخته شدن چنین ماشینهایی در عمل بود. در طول جنگ جهانی دوم تورینگ در خدمت وزارت خارجه قرارگرفت و کارهای وسیعی دربارهٔ کشف رمز پیامهای رمزی نازیها انجام داد. تلاشهای او به خنثا شدن ماشین رمزنگاری مکانیکی انیگما[12] منجر شد و این

1. E.F.Moore 2. Z.Kohavi 3. William J. Barnier 4. J.L.Gersting 5. A.Gill
6. J.G.Brookshear 7. J.E.Hopcroft 8. J.D.Ullman 9. H.R.Lewis 10. C.H.Papadimitriou
11. D.Wood 12. Enigma

دستاورد سهم مهمی در شکست رایش سوم داشت. پس از جنگ (و تا زمان فوت)، توجه و علاقهٔ تورینگ به ماشینهایی که توانایی اندیشیدن داشته باشند، باعث شد که او نقشی اساسی درگسترش کامپیوترهای واقعی (و نه فقط نظری) ایفا کند. برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ زندگی این دانشمند بدیع مطالعهٔ زندگینامهٔ او را که ا. هاجز[1] [۶] نوشته است توصیه می‌کنیم.

داوید هیلبرت (۱۸۶۲ – ۱۹۴۳)

آلن ماتیسون تورینگ (۱۹۱۲ – ۱۹۵۴)

1. A.Hodges

1. Barnier, William J. "Finite-State Machines as Recognizers" (UMAP Module 671). *The UMAP Journal* 7, no. 3, (1986): pp. 209-232.
2. Brookshear, J. Glenn. *Theory of Computation: Formal Languages, Automata, and Complexity.* Reading, Mass.: Benjamin/Cummings, 1989.
3. Dornhoff, Larry L., and Hohn, Franz E. *Applied Modern Algebra.* New York: Macmillan, 1978.
4. Gersting, Judith L. *Mathematical Structures for Computer Science.* San Francisco: W. H. Freeman, 1982.
5. Gill, Arthur. *Applied Algebra for the Computer Sciences,* Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1976.
6. Hodges, Andrew, *Alan Turing: The Enigma.* New York: Simon and Shuster, 1983.
7. Hopcroft, John E., and Ullman, Jeffrey D. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1979.
8. Huffman, D. A. "The Synthesis of Sequential Switching Circuits." *Journal of the Franklin Institute* 257 (March 1954): pp. 161-190, (April 1954): pp. 275-303. Reprinted in Moore [13].
9. Kohavi, Zvi. *Switching and Finite Automata Theory,* 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1978.
10. Lewis, Harry R., and Papadimitriou, Christos H. *Elements of the Theory of Computation.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1981.
11. Mealy, G.H. "A Method for Synthesizing Sequential Circuits." *Bell System Technical Journal* 34 (September 1955): pp. 1045-1079.
12. Moore, E. F. "Gedanken-experiments on Sequential Machines." *Automata Studies, Annals of Mathematical Studies,* no. 34: pp. 129-153. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1956.
13. Moore, E. F., ed. *Sequential Machines: Selected Papers.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964.
14. Stanat, Donald F., and McAllister, David F. *Discrete Mathematics in Computer Science.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.
15. Wood, Derick. *Theory of Computation.* New York: Wiley, 1987.

تمرینات تکمیلی

۱. فرض‌کنیم $\Sigma_1 = \{w, x, y\}$ و $\Sigma_2 = \{x, y, z\}$ دوالفباباشند. اگر $A_1 = \{x^i y^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, j > i \geqslant 1\}$، $A_2 = \{w^i y^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, i > j \geqslant 1\}$، $A_3 = \{w^i x^j y^i z^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, j > i \geqslant 1\}$ و $A_4 = \{z^j (wz)^i w^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, i \geqslant 1, j \geqslant 2\}$ ، تعیین کنید آیا گزاره‌های زیر راست‌اند یا دروغ:

الف) A_1 زبانی روی Σ_1 است.

ب) A_1 زبانی روی Σ_2 است.

پ) A_2 زبانی روی Σ_1 است.

ت) A_2 زبانی روی Σ_2 است.

ث) A_{3} زبانی روی $\Sigma_{1} \cup \Sigma_{2}$ است.

ج) A_{1} زبانی روی $\Sigma_{1} \cap \Sigma_{2}$ است.

چ) A_{4} زبانی روی $\Sigma_{1} \triangle \Sigma_{2}$ است.

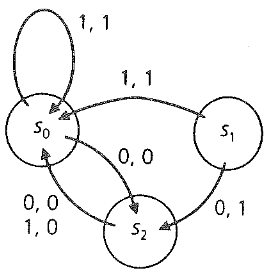
ح) $A_{1} \cup A_{2}$ زبانی روی Σ_{1} است.

۲. به‌ازای زبانهای $A, B \subseteq \Sigma^*$، آیا $A^* \subseteq B^*$ مستلزم $A \subseteq B$ است؟

۳. مثالی از زبانی مانند A روی الفبایی مانند Σ بیاورید که در آن $(A^*)^2 \neq (A^2)^*$.

۴. به‌ازای الفبای مفروض Σ و مجموعهٔ اندیسگذار مفروض I، فرض کنیم به ازای هر $i \in I$، $B_i \subseteq \Sigma^*$. اگر $A \subseteq \Sigma^*$، ثابت کنید (الف) $A(\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} AB_i$؛ و (ب) $(\bigcap_{i\in I} B_i)A \subseteq \bigcap_{i\in I} B_iA$ [در اینجا مثلاً $A(\bigcap_{i\in I} B_i)$ نمایشگر الحاق زبانهای A و $\bigcap_{i\in I} B_i$ است.]

۵. فرض کنیم M ماشین متناهی‌الحالت شکل ۶ ۱۷۰ باشد. به‌ازای حالتهای s_i و s_j، i، $0 \leqslant i, j \leqslant 2$، فرض کنیم O_{ij} مجموعهٔ همهٔ رشته‌های خروجی ناتهی‌ای باشد که M، وقتی از حالت s_i به حالت s_j می‌رود، می‌تواند تولید کند. اگر مثلاً $i = 2$ و $j = 0$، در این صورت $O_{20} = \{0\}\{1, 00\}^*\{0\}$.
O_{02}، O_{22}، O_{11}، O_{00}، و O_{10} را بیابید.

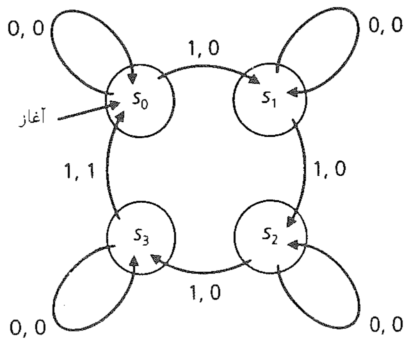


شکل ۱۷.۶

۶. فرض کنیم M ماشین متناهی‌الحالت شکل ۶ ۱۸۰ باشد.

الف) جدول حالت این ماشین را بیابید.

ب) آنچه را این ماشین انجام می‌دهد توصیف کنید.



شکل ۱۸.۶

پ) چند رشتهٔ ورودی متمایز مانند x وجود دارد به‌طوری که $\|x\| = ۸$ و $\nu(s_۰, x) = s_۰$؟ چند x با قید $\|x\| = ۱۲$ وجود دارد؟

۷. فرض کنیم $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ ماشینی متناهی‌الحالت باشد به‌طوری که $|S| = n$ و فرض کنیم $۰ \in \mathcal{I}$.

الف) نشان دهید به‌ازای رشتهٔ ورودی $۰۰۰۰۰ \cdots$، خروجی نهایتاً متناوب است.

ب) قبل از آنکه خروجی متناوب آغاز شود تعداد ماکسیمم ۰هایی که می‌توانیم وارد کنیم چقدر است؟

پ) ماکسیمم طول تناوبی که ممکن است روی دهد چند است؟

۸. نمودار حالت ماشین متناهی‌الحالت $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ را، که در آن $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰, ۱\}$، رسم کنید در صورتی‌که به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}^+$، M نخستین ۱ را وقتی خارج‌کند که زیر رشتهٔ ۱۱۱۱ را شناسایی‌کند و سپس دومین ۱ را وقتی خارج کند که زیر رشتهٔ ۰۰۰۰ را شناسایی‌کند، و پس از آن، خروجی به‌طور مستمر ۰ باشد.

۹. فرض کنیم $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰, ۱\}$. نمودار حالت ماشین متناهی‌الحالتی را بسازید که نمادهای موجود در موضعهای چهارم، هشتم، دوازدهم، $\cdots$ از رشتهٔ ورودی $x \in \mathcal{I}^+$ را وارون کند (یعنی ۱ را به‌جای ۰ و ۰ را به‌جای ۱ بگذارد). مثلاً اگر $s_۰$ حالت آغازی باشد، در این صورت $\omega(s_۰, ۰۰۰۰) = ۰۰۰۱$، $\omega(s_۰, ۰۰۰۱۱۱) = ۰۰۰۰۱۱$ و $\omega(s_۰, ۰۰۰۰۰۰۱۱۱) = ۰۰۰۱۰۰۱۰۱$.

۱۰. به‌ازای $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰, ۱\}$، فرض کنیم M ماشین متناهی‌الحالتی باشد که در جدول ۶-۱۴ داده شده است. اگر حالت آغازی برای M حالت $s_۱$ نباشد، یک رشتهٔ ورودی مانند x (و دارای کوچکترین طول) چنان بیابید که به‌ازای هر $i = ۲, ۳, ۴$، $\nu(s_i, x) = s_۱$. (بنابراین، x ماشین M را بدون توجه به حالت آغازی به حالت $s_۱$ می‌برد.)

جدول ۶-۱۴

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
$s_۱$	$s_۴$	$s_۳$	۰	۰
$s_۲$	$s_۲$	$s_۴$	۰	۱
$s_۳$	$s_۱$	$s_۲$	۱	۰
$s_۴$	$s_۱$	$s_۴$	۱	۱

جدول ۶-۱۵

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
$s_۰$	$s_۱$	$s_۲$	۱	۰
$s_۱$	$s_۲$	$s_۱$	۰	۱
$s_۲$	$s_۲$	$s_۳$	۰	۱
$s_۳$	$s_۱$	$s_۰$	۱	۰

۱۱. نشان دهید نمی‌توانیم ماشینی متناهی‌الحالت چنان بسازیم که دقیقاً دنباله‌های متعلق به زبان $A = \{۰^i ۱^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, i < j\}$ را شناسایی کند. (الفبای A عبارت است از $\Sigma = \{۰, ۱\}$.)

۱۲. اگر $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰, ۱\}$، فرض کنیم M ماشین متناهی‌الحالتی باشد که در جدول ۶-۱۵ داده شده است. در اینجا $s_۰$ حالت آغازی است. فرض کنیم $A \subseteq \mathcal{I}^+$ به‌طوری که $x \in A$ اگر و فقط اگر آخرین نماد در $\omega(s_۰, x)$، ۱ باشد. [ممکن است بیش از یک ۱ در رشتهٔ خروجی $\omega(s_۰, x)$ وجود داشته باشد.] ماشینی متناهی‌الحالت چنان بسازید که، به ازای هر $y \in \mathcal{I}^+ - A$، ۱ آخرین نماد رشتهٔ خروجی باشد.

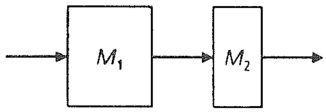
۱۳. فرض کنیم برای دو ماشین متناهی‌الحالت $M_۱$ و $M_۲$ که به ترتیب، در جدول ۶-۱۶ و جدول ۶-۱۷ داده شده‌اند، $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{۰, ۱\}$. حالت آغازی برای $M_۱$ حالت $s_۰$ است، در حالی‌که حالت آغازی برای $M_۲$ حالت $s_۳$ است. این دو ماشین را مطابق شکل ۶-۱۹ به هم وصل می‌کنیم. در اینجا هر نماد خروجی از $M_۱$ نمادی ورودی برای $M_۲$ می‌شود. مثلاً اگر ۰ را وارد $M_۱$ کنیم، در این صورت $\omega_۱(s_۰, ۰) = ۱$ و $\nu_۱(s_۰, ۰) = s_۰$. در نتیجه، ۱ (یعنی $\omega_۱(s_۰, ۰)$) را وارد $M_۲$ می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم $\omega_۲(s_۳, ۱) = ۱$ و $\nu_۲(s_۳, ۱) = s_۴$.

جدول ۱۶.۶

	ν_1		ω_1	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_0	s_1	۱	۰
s_1	s_1	s_2	۰	۰
s_2	s_2	s_0	۰	۱

جدول ۱۷.۶

	ν_2		ω_2	
	۰	۱	۰	۱
s_3	s_3	s_4	۱	۱
s_4	s_4	s_3	۱	۰



شکل ۱۹.۶

ماشینی مانند $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ که اتصال M_1 و M_2 را نمایش می‌دهد به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{0, 1\}$$

$S = S_1 \times S_2$، که در آن S_i مجموعهٔ حالتهای درونی M_i، $i = 1, 2$، است.
$\nu : S \times \mathcal{I} \to S$، که درآن به‌ازای $s \in S_1$، $t \in S_2$، و $x \in \mathcal{I}$، $\nu((s,t),x) = (\nu_1(s,x)\text{و}\nu_2(t, \omega_1(s,x)))$.
$\omega : S \times \mathcal{I} \to \mathcal{O}$، که در آن به‌ازای $s \in S_1$، $t \in S_2$، و $x \in \mathcal{I}$، $\omega((s,t),x) = \omega_2(t, \omega_1(s,x))$.

الف) جدول حالت ماشین M را بیابید.

ب) رشتهٔ خروجی متناظر با رشتهٔ ورودی ۱۱۰۱ را تعیین کنید. پس از آنکه این رشته پردازش شود، هر یک از دو ماشین M_1 و M_2 درکدام حالت قرار می‌گیرند؟

۱۴. گرچه وقتی با ماشین متناهی‌الحالت مانند $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ سر و کار داریم نمودار حالت ساده‌تر از جدول حالت به نظر می‌رسد، به‌تدریج که رشته‌های ورودی طولانیتر می‌شوند و اندازه‌های S، $\mathcal{I}$، و $\mathcal{O}$ افزایش می‌یابد، جدول حالت برای شبیه‌سازی ماشین روی کامپیوتر مناسبتر است. شکل بلوکی جدول، استفاده از ماتریس یا آرایهٔ دو بعدی را برای ذخیره‌سازی ν و ω القا می‌کند. با استفاده از این مطلب برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی ابداع کنید) که ماشین جدول ۱۸.۶ را شبیه‌سازی کند.

جدول ۱۸.۶

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_2	s_1	۰	۰
s_2	s_3	s_1	۰	۰
s_3	s_3	s_1	۱	۱

۷

رابطه‌ها: دومین برخورد

در فصل ۵ مفهوم رابطه را معرفی کردیم و سپس در مورد نوع خاصی از رابطه به‌نام تابع، بیشتر تأمل کردیم. در این فصل دوباره به مطالعهٔ روابط می‌پردازیم و بیشتر بر مطالعهٔ روابط روی مجموعه‌ای مانند A ـ یعنی زیرمجموعه‌هایی از $A \times A$ ـ تأکید می‌کنیم. در چارچوب نظریهٔ زبانها و ماشینهای متناهی‌الحالت که در فصل ۶ بررسی کردیم، مثالهای بسیاری از روابط روی مجموعه‌ای مانند A می‌یابیم که در آن A مجموعه‌ای از رشته‌های برگرفته شده از الفبایی مفروض یا مجموعه‌ای از حالتهای درونی ماشینی متناهی‌الحالت است. در این فصل ویژگیهای گوناگونی از روابط را، همراه با راههای نمایش روابط متناهی برای محاسبات کامپیوتری، بررسی می‌کنیم. باز هم گرافهای سودار را به‌عنوان روش دیگری برای نمایش این نوع روابط به‌کار می‌گیریم. سرانجام، بین روابط ممکن بسیاری که روی مجموعه‌ای مانند A وجود دارند دو نوع رابطه اهمیت خاصی دارند: روابط هم‌ارزی و ترتیبهای جزئی. روابط هم‌ارزی در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات به‌کار می‌آیند. در اینجا ما رابطه‌ای هم‌ارزی را روی مجموعهٔ حالتهای درونی ماشین متناهی‌الحالت M به‌کار می‌گیریم تا ماشینی مانند M_1 با کمترین تعداد حالتهای درونی بیابیم که بتواند همهٔ وظایفی را انجام دهد که M قادر به انجام آنهاست. فرایند لازم برای عملی ساختن این هدف را فرایند کمینه‌سازی می‌نامند.

۷.۱ بررسی مجدد روابط: ویژگیهای روابط

کار خود را با یادآوری چند ایدهٔ بنیادی که قبلاً نیز ملاحظه کرده‌ایم آغاز می‌کنیم.

تعریف ۷.۱ اگر A و B دو مجموعه باشند، هر زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ رابطه‌ای از A در B است. هر زیرمجموعهٔ $A \times A$ را رابطه‌ای روی A می‌نامیم.

مثال ۷.۱

الف) رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ چنین تعریف می‌کنیم که $a\mathcal{R}b$ یا $(a, b) \in \mathcal{R}$، در صورتی که $a \leqslant b$. این زیرمجموعهٔ $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ همان رابطهٔ معمولی «کوچکتر از یا برابر با» روی مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ است و می‌توانیم آن را روی $\mathbf{Q}$ یا $\mathbf{R}$ نیز تعریف کنیم، ولی روی $\mathbf{C}$ نمی‌توان چنین رابطه‌ای را تعریف کرد.

ب) فرض کنیم $n \in \mathbf{Z}^+$. به‌ازای $x, y \in \mathbf{Z}$، رابطهٔ همنهشتی به پیمانهٔ n، $\mathcal{R}$، را چنین تعریف می‌کنیم که $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که $x - y$ مضربی از n باشد. اگر $n = ۷$، می‌بینیم که مثلاً $۹\mathcal{R}۲$، $-۳\mathcal{R}۱۱$، $(۱۴, ۰) \in \mathcal{R}$، ولی $۳ \not\mathcal{R} ۷$ (یعنی، سه در رابطه با ۷ نیست).

پ) به‌ازای عالم $\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$، مجموعهٔ (ثابت) $C \subseteq \mathcal{U}$، $C = \{۱, ۲, ۳, ۶\}$ را درنظر می‌گیریم.

رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ چنین تعریف می‌کنیم که $A\mathcal{R}B$، در صورتی که $A \cap C = B \cap C$. در این صورت، مجموعه‌های $\{۱, ۲, ۴, ۵\}$ و $\{۱, ۲, ۵, ۷\}$ با یکدیگر در رابطه‌اند، زیرا $\{۱, ۴, ۵ ,۲\} \cap C = \{۱, ۲\} = \{۱, ۲, ۵, ۷\} \cap C$. به همین ترتیب، می‌بینیم که $X = \{۴, ۵\}$ و $Y = \{۷\}$ با یکدیگر در رابطه‌اند، زیرا $X \cap C = \varnothing = Y \cap C$؛ ولی مجموعه‌های $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $T = \{۱, ۲, ۳, ۶, ۷\}$ با هم در رابطه نیستند، یعنی $S \not\mathcal{R} T$، زیرا $S \cap C = \{۱, ۲, ۳\} \neq \{۱, ۲, ۳, ۶\} = T \cap C$.

مثال ۲.۷ فرض کنیم Σ یک الفبا و $A \subseteq \Sigma^*$ یک زبان باشد. به‌ازای $x, y \in A$، تعریف می‌کنیم $x\mathcal{R}y$ در صورتی‌که x پیشوند y باشد. با گذاشتن «پسوند» یا «زیررشته» به‌جای «پیشوند» می‌توان روابط دیگری را روی A تعریف کرد.

مثال ۳.۷ ماشین متناهی‌الحالت $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ را در نظر می‌گیریم.

الف) به‌ازای $s_۱, s_۲ \in S$، تعریف می‌کنیم $s_۱\mathcal{R}s_۲$، در صورتی‌که به‌ازای عنصری مانند $x \in \mathcal{I}$، $\nu(s_۱, x) = s_۲$. رابطهٔ $\mathcal{R}$ سطح اول قابلیت وصال را برقرار می‌سازد.

ب) برای S رابطهٔ سطح دوم قابلیت وصال را نیز می‌توان ارائه کرد. در این حالت می‌نویسیم $s_۱\mathcal{R}s_۲$ در صورتی‌که به‌ازای عنصری مانند $x_۱x_۲ \in \mathcal{I}^۲$، $\nu(s_۱, x_۱x_۲) = s_۲$. در صورت نیاز می‌توانیم این را به سطوح بالاتر تعمیم دهیم. برای رابطهٔ قابلیت وصال کلی، به‌ازای عنصری مانند $y \in \mathcal{I}^*$، داریم $\nu(s_۱, y) = s_۲$.

پ) به‌ازای $s_۱, s_۲ \in S$ رابطهٔ ۱ـ هم‌ارزی، که با $s_۱\mathrm{E}_۱s_۲$ نشان داده می‌شود و خوانده می‌شود «$s_۱$ ۱ـ هم‌ارز با $s_۲$ است»، وقتی تعریف می‌شود که به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}$، $\omega(s_۱, x) = \omega(s_۲, x)$. درنتیجه، $s_۱\mathrm{E}_۱s_۲$ نشان می‌دهد که اگر ماشین M کار را در هر یک از دو حالت $s_۱$ یا $s_۲$ آغاز کند خروجی به‌ازای هر عنصر $\mathcal{I}$ یکسان است. این ایده را می‌توانیم به حالتهای kـ هم‌ارز تعمیم دهیم. در چنین وضعی می‌نویسیم $s_۱\mathrm{E}_ks_۲$ هرگاه به‌ازای هر $y \in \mathcal{I}^k$، $\omega(s_۱, y) = \omega(s_۲, y)$. در اینجا اگر در هر یک از دو حالت $s_۱$ یا $s_۲$ آغاز کنیم، به‌ازای هر رشتهٔ ورودی متعلق به $\mathcal{I}^k$، رشتهٔ خروجی یکسانی به‌دست می‌آوریم.

اگر دو حالت به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$، kـ هم‌ارز باشند، این دو حالت را هم‌ارز می‌نامیم. بعداً در همین فصل این ایده را بیشتر بررسی می‌کنیم.

اینک می‌پردازیم به تحقیق دربارهٔ بعضی از ویژگیهایی که یک رابطه می‌تواند در آنها صدق کند.

تعریف ۲.۷ رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A را بازتابی می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x \in A$، $(x, x) \in \mathcal{R}$.

بازتابی بودن رابطهٔ $\mathcal{R}$ به‌طور ساده به این معناست که هر عنصر x متعلق به A با خود در رابطه است. همهٔ روابط در مثالهای ۱.۷ و ۲.۷ بازتابی‌اند. رابطهٔ قابلیت وصال کلی در مثال ۳.۷ (ب) و همهٔ روابط مذکور در قسمت (پ) از همان مثال نیز بازتابی‌اند. [چه چیزی مانع بازتابی بودن روابط سطوح اول و دوم قابلیت وصال در قسمتهای (الف) و (ب) از مثال ۳.۷ می‌شود؟]

مثال ۴.۷ برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، رابطهٔ $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ بازتابی است اگر و فقط اگر

$$\mathcal{R} \supseteq \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴)\}$$

در نتیجه، $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳)\}$ رابطه‌ای بازتابی روی A نیست، در حالی‌که رابطهٔ $\mathcal{R}_۲$ که با $\mathcal{R}_۲ = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leqslant y\}$ تعریف می‌شود، روی A بازتابی است.

مثال ۵.۷ اگر مجموعهٔ متناهی A با $|A| = n$ مفروض باشد، داریم $|A \times A| = n^۲$؛ ازاین‌رو، $۲^{n^۲}$ رابطه روی A وجود دارد. چند تا از این روابط بازتابی‌اند؟

اگر $A = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\}$، رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی A بازتابی است اگر و فقط اگر $\{(a_i, a_i) \mid ۱ \leqslant i \leqslant n\} \subseteq \mathcal{R}$. توجه می‌کنیم که $n^۲ - n$ جفت مرتب دیگر در $A \times A$ وجود دارد، [جفتهای مرتبی که به‌صورت (a_i, a_j)، با $۱ \leqslant i$، $j \leqslant n$ و $i \neq j$، هستند]. وقتی رابطهٔ بازتابی $\mathcal{R}$ را روی A می‌سازیم، می‌توانیم هر یک از این جفتهای مرتب را در رابطه قرار دهیم یا قرار ندهیم؛ ازاین‌رو، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب $۲^{(n^۲-n)}$ رابطهٔ بازتابی روی A وجود دارد.

تعریف ۳.۷ رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A را متقارن می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x, y \in A$، از $(x, y) \in \mathcal{R}$ نتیجه شود $(y, x) \in \mathcal{R}$.

مثال ۶.۷ با فرض $A = \{۱, ۲, ۳\}$، داریم

الف) $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۲), (۲, ۱), (۱, ۳), (۳, ۱)\}$ رابطه‌ای متقارن است ولی روی A بازتابی نیست؛

ب) $\mathcal{R}_۲ = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۲, ۳)\}$ رابطه‌ای بازتابی روی A است ولی متقارن نیست؛

پ) $\mathcal{R}_۳ = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳)\}$ و $\mathcal{R}_۴ = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۲, ۳), (۳, ۲)\}$ دو رابطه روی A هستند که هم بازتابی‌اند و هم متقارن؛

ت) $\mathcal{R}_۵ = \{(۱, ۱), (۲, ۳), (۳, ۳)\}$ به‌عنوان رابطه‌ای روی A نه بازتابی است و نه متقارن.

برای یافتن تعداد روابط متقارن موجود روی $A = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\}$، $A \times A$ را به‌صورت $A_۱ \cup A_۲$ می‌نویسیم، که در آن $A_۱ = \{(a_i, a_i) \mid ۱ \leqslant i \leqslant n\}$ و $A_۲ = \{(a_i, a_j) \mid ۱ \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j\}$، به‌طوری که هر جفت مرتب متعلق به $A \times A$ دقیقاً به یکی از دو مجموعهٔ $A_۱$ و $A_۲$ متعلق باشد. در مورد $A_۲$ می‌بینیم که $(۱/۲)(n^۲ - n)$ عددی صحیح است. مجموعهٔ $A_۲$ حاوی $|A_۲| = |A \times A| - |A_۱| = n^۲ - n = n(n - ۱)$ زیرمجموعهٔ S_{ij} به‌صورت $\{(a_i, a_j), (a_j, a_i)\}$ است، که در آن $۱ \leqslant i < j \leqslant n$. هنگام ساختن رابطهٔ متقارن $\mathcal{R}$ روی A، مختاریم که هر جفت مرتب متعلق به $A_۱$ را در رابطه قرار دهیم یا قرار ندهیم. برای هر یک از $(۱/۲)(n^۲ - n)$ زیرمجموعهٔ S_{ij} $(۱ \leqslant i < j \leqslant n)$ از مجموعهٔ $A_۲$ نیز همین اختیار را داریم. پس بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۲^n \cdot ۲^{(۱/۲)(n^۲-n)} = ۲^{(۱/۲)(n^۲+n)}$ رابطهٔ متقارن روی A وجود دارد.

هنگام شمردن روابطی روی A که هم متقارن باشند و هم بازتابی، می‌بینیم که برای هر جفت مرتب متعلق به $A_۱$ تنها یک انتخاب داریم: هر جفت مرتب متعلق به $A_۱$ باید در رابطه قرار داشته باشد. پس $۲^{(۱/۲)(n^۲-n)}$ رابطه روی A وجود دارد که هم متقارن‌اند و هم بازتابی.

تعریف ۴.۷ مجموعهٔ A مفروض است. رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی A را ترایا (متعدی) می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x, y, z \in A$، از $(x, y), (y, z) \in A$ نتیجه شود $(x, z) \in \mathcal{R}$. (پس اگر x «در رابطه با» y باشد و y «در رابطه با» z باشد، می‌خواهیم که x «در رابطه با» z باشد. به‌این ترتیب، y نقش «واسطه» را بازی می‌کند.)

مثال ۷.۷ همهٔ روابط مثالهای ۷.۱۰۷، ۷.۲۰۷، و ۷.۳۰۷(پ) ترایا هستند.

مثال ۸.۷ رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ چنین تعریف می‌کنیم که $a\mathcal{R}b$، در صورتی‌که a عدد b را عاد کند، یعنی، به‌ازای عددی مانند $c \in \mathbf{Z}^+$ داشته باشیم $b = ca$. اگر $x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}z$، آیا خواهیم داشت $x\mathcal{R}z$؟ می‌دانیم که از $x\mathcal{R}y$ نتیجه می‌شود که به‌ازای عددی مانند $s \in \mathbf{Z}^+$، $y = sx$ و از $y\mathcal{R}z$ نتیجه می‌شود که به‌ازای عددی مانند $t \in \mathbf{Z}^+$، $z = ty$. درنتیجه، $z = ty = t(sx) = (ts)x$ و می‌دانیم که $ts \in \mathbf{Z}^+$؛ پس $x\mathcal{R}z$ بنابراین، $\mathcal{R}$ ترایاست. علاوه برآن، $\mathcal{R}$ بازتابی است، ولی متقارن نیست؛ زیرا، مثلاً، $۲\mathcal{R}۶$ ولی $۶ \not\mathcal{R} ۲$.

مثال ۹.۷ رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ چنین تعریف می‌کنیم: $a\mathcal{R}b$ در صورتی‌که $ab \geqslant ۰$. به‌ازای هر عدد صحیح x داریم $xx = x^۲ \geqslant ۰$؛ ازاین‌رو، $x\mathcal{R}x$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است. همچنین، اگر $x, y \in \mathbf{Z}$ و $x\mathcal{R}y$، در این صورت

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow xy \geqslant ۰ \Rightarrow yx \geqslant ۰ \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

پس رابطهٔ $\mathcal{R}$ متقارن نیز هست. ولی، می‌بینیم که $(۳, ۰), (۰, -۷) \in \mathcal{R}$، زیرا $(۳)(۰) \geqslant ۰$ و $(۰)(-۷) \geqslant ۰$، در حالی که $(۳, -۷) \notin \mathcal{R}$ زیرا $(۳)(-۷) < ۰$. درنتیجه، این رابطه ترایا نیست.

مثال ۱۰.۷ اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، رابطهٔ $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۱), (۲, ۳), (۳, ۴), (۲, ۴)\}$ رابطه‌ای ترایا روی A است، در حالی که $\mathcal{R}_۲ = \{(۱, ۳), (۳, ۲)\}$ ترایا نیست زیرا $(۱, ۳), (۳, ۲) \in \mathcal{R}_۲$ ولی $(۱, ۲) \notin \mathcal{R}_۲$.

اکنون احتمالاً خواننده آماده است تا تعداد روابط ترایای موجود روی مجموعه‌ای متناهی را به‌دست آورد. ولی این امر امکان‌پذیر نیست. زیرا برخلاف مواردی که با ویژگیهای بازتابی و متقارن بودن سروکار داشتیم، فرمول کلی شناخته شده‌ای برای شمارش تعداد کل روابط ترایای موجود روی مجموعه‌ای متناهی وجود ندارد. با وجود این، بعداً در همین فصل ایده‌های لازم را برای شمارش تعداد روابط موجود $\mathcal{R}$ روی مجموعه‌ای متناهی، به‌طوری که $\mathcal{R}$ (همزمان) بازتابی، متقارن، و ترایا باشد، به‌دست خواهیم آورد.

اکنون آخرین ویژگی را برای روابط بررسی می‌کنیم.

تعریف ۵.۷ رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A مفروض است. $\mathcal{R}$ را پادمتقارن می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $a, b \in A$ از $a\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}a$ بتوان نتیجه گرفت که $a = b$. (یعنی تنها هنگامی هم a «در رابطه با» b است و هم b «در رابطه» با a، که a و b عنصر واحدی از A باشند.)

مثال ۱۱.۷ به‌ازای عالم مفروض $\mathcal{U}$، رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ چنین تعریف می‌کنیم: $(A, B) \in \mathcal{R}$، در صورتی‌که $A, B \subseteq \mathcal{U}$ و $A \subseteq B$. پس همان رابطهٔ شمول مذکور در فصل ۳ است و اگر $A\mathcal{R}B$ و $B\mathcal{R}A$، در این صورت داریم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ و درنتیجه، $A = B$. پس این رابطه پادمتقارن است؛ رابطهٔ $\mathcal{R}$ بازتابی و ترایا نیز هست، ولی متقارن نیست.

پیش از آنکه ذهنمان به خطا رود و فکر کنیم «متقارن نبودن» مترادف با «پادمتقارن بودن» است، مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۲.۷ به‌ازای $A = \{۱, ۲, ۳\}$، رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی A که با $\mathcal{R} = \{(۱, ۲), (۲, ۱), (۲, ۳)\}$ تعریف شده است متقارن نیست، زیرا $(۳, ۲) \notin \mathcal{R}$، و پادمتقارن هم نیست، زیرا $(۱, ۲), (۲, ۱) \in \mathcal{R}$ ولی $۲ \neq ۱$. رابطهٔ $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۱), (۲, ۲)\}$ هم متقارن است و هم پادمتقارن.

چندتا از روابط موجود روی A پادمتقارن هستند؟ اگر بنویسیم

$$A \times A = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳)\} \cup \{(۱, ۲), (۲, ۱), (۱, ۳), (۳, ۱), (۲, ۳), (۳, ۲)\}$$

ضمن تلاش برای ساختن رابطه‌ای پادمتقارن مانند $\mathcal{R}$ روی A به دو نکتهٔ زیر توجه می‌کنیم.

۱) بدون در نظر گرفتن اینکه $\mathcal{R}$ پادمتقارن است یا نیست، هر عنصر $(x, x) \in A \times A$ را می‌توانیم در $\mathcal{R}$ قرار دهیم یا قرار ندهیم.

۲) برای عنصری به‌صورت (x, y)، $x \neq y$، باید هر دوی (x, y) و (y, x) را در نظر بگیریم و ملاحظه می‌کنیم برای آنکه $\mathcal{R}$ پادمتقارن باقی بماند سه راه پیشِ رو داریم: (الف) (x, y) را در $\mathcal{R}$ بگذاریم؛ (ب) (y, x) را در $\mathcal{R}$ بگذاریم؛ یا (پ) نه (x, y) را در $\mathcal{R}$ بگذاریم نه (y, x) را. [اگر هردوی (x, y) و (y, x) را در $\mathcal{R}$ بگذاریم چه وضعی پیش می‌آید؟]

پس بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، تعداد روابط پادمتقارن موجود روی A برابر با $(۲^۳)(۳^{(۳^۲-۳)/۲}) = (۲^۳)(۳^۳)$ است. اگر $|A| = n > ۰$، آنگاه $(۲^n)(۳^{(n^۲-n)/۲})$ رابطهٔ پادمتقارن روی A وجود دارد.

در مثال بعدی دوباره به مفهوم غلبهٔ توابع، که نخستین بار در بند ۷۰۵ تعریف شد، توجه می‌کنیم.

مثال ۱۳.۷ فرض کنیم $\mathcal{F}$ مجموعهٔ همهٔ توابع با قلمرو $\mathbf{Z}^+$ و حوزهٔ مقادیر $\mathbf{R}$ را نشان دهد؛ یعنی $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}\}$. برای $f, g \in \mathcal{F}$، رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{F}$ چنین تعریف می‌کنیم: $f\mathcal{R}g$، در صورتی که f مغلوب g باشد (یا $f \in O(g)$). آنگاه $\mathcal{R}$ بازتابی و ترایاست.

اگر $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ با $f(n) = n$ و $g(n) = n + ۵$ تعریف شده باشند، در این صورت $f\mathcal{R}g$ و $g\mathcal{R}f$، ولی $f \neq g$؛ پس $\mathcal{R}$ پادمتقارن نیست. علاوه برآن، اگر $h : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ با ضابطهٔ $h(n) = n^۲$ تعریف شده باشد، در این‌صورت $(f, h), (g, h) \in \mathcal{R}$، ولی نه (h, f) در $\mathcal{R}$ است و نه (h, g). درنتیجه، رابطهٔ $\mathcal{R}$ متقارن نیز نیست.

تاکنون با چهار ویژگی مهمی که هنگام مطالعهٔ روابط مطرح می‌شوند آشنا شده‌ایم. پیش از به پایان رساندن این بند، دو مفهوم دیگر را تعریف می‌کنیم که در هر یک از آنها سه تا از این چهار ویژگی نقش دارند.

تعریف ۶.۷ رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A را ترتیب جزئی یا رابطهٔ ترتیبی جزئی می‌نامیم، هرگاه $\mathcal{R}$ بازتابی، پادمتقارن، و ترایا باشد.

مثال ۱۴.۷ رابطه‌ای که در مثال ۱۰۷ (الف) تعریف کردیم ترتیبی جزئی است، ولی رابطهٔ قسمت (ب) از همان مثال ترتیبی جزئی نیست، زیرا پادمتقارن نیست. همهٔ روابط مثال ۲۰۷ و رابطهٔ شمول در مثال ۱۱۰۷ ترتیبهای جزئی هستند.

مثال بعدی فرصتی را فراهم می‌آورد تا این مفهوم جدید، یعنی ترتیب جزئی، را با مطالبی که در فصلهای ۱ و ۴ مطالعه کردیم پیوند دهیم.

مثال ۱۵.۷ با مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}$، یعنی مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۲، آغاز می‌کنیم و رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی که x عدد y را عاد کند. مانند مثال ۸۰۷ می‌بینیم که $\mathcal{R}$ بازتابی و تراياست. علاوه برآن، اگر $x, y \in A$ و اگر هر دوی $x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}x$ را داشته باشیم، در این صورت

از $x\mathcal{R}y$ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای عنصری مانند $a \in \mathbf{Z}^+$، $y = ax$، و

از $y\mathcal{R}x$ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای عنصری مانند $b \in \mathbf{Z}^+$، $x = by$.

درنتیجه، می‌بینیم که $y = ax = a(by) = (ab)y$، و چون $y \neq ۰$، داریم $ab = ۱$. از $a, b \in \mathbf{Z}^+$ و $ab = ۱$ نتیجه می‌گیریم که $a = b = ۱$. پس $y = x$ و بنابراین، $\mathcal{R}$ پادمتقارن است. بنابراین، $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی برای مجموعهٔ A است.

حال فرض کنیم می‌خواهیم بدانیم که چند جفت مرتب در این رابطهٔ $\mathcal{R}$ وجود دارد. کافی است جفتهای مرتبی از $A \times A$ را فهرست کنیم که $\mathcal{R}$ را تشکیل می‌دهند:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} =\{&(۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۱, ۴), (۱, ۶), (۱, ۱۲), (۲, ۲), (۲, ۴), (۲, ۶),\\ &(۲, ۱۲), (۳, ۳), (۳, ۶), (۳, ۱۲), (۴, ۴), (۴, ۱۲), (۶, ۶), (۶, ۱۲), (۱۲, ۱۲)\}\end{aligned}$$

به‌این ترتیب، می‌بینیم که ۱۸ جفت مرتب در این رابطه وجود دارد. ولی اگر ترتیب جزئی مشابهی را روی مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۸۰۰ در نظر بگیریم، قطعاً از این روش سادهٔ فهرست کردن همهٔ جفتهای مرتب مورد نظر سرخورده می‌شویم. پس رابطهٔ $\mathcal{R}$ را کمی دقیقتر بررسی می‌کنیم. بنابر قضیهٔ بنیادی حساب، می‌توانیم بنویسیم $۱۲ = ۲^۲ \cdot ۳$ و سپس می‌بینیم که اگر $(c, d) \in \mathcal{R}$، آنگاه

$$c = ۲^m \cdot ۳^n \quad \text{و} \quad d = ۲^p \cdot ۳^q$$

که در آن $m, n, p, q \in \mathbf{N}$ و $۰ \leqslant m \leqslant p \leqslant ۲$ و $۰ \leqslant n \leqslant q \leqslant ۱$.

با توجه به $2 \leqslant p \leqslant m \leqslant 0$، می‌بینیم که هر انتخاب m و p صرفاً گزینشی دو عنصری از مجموعه‌ای سه عنصری، یعنی مجموعهٔ $\{0, 1, 2\}$، بوده که در آن تکرار مجاز است. (در هر یک از این گزینشها عدد صحیح نامنفی کوچکتر، در صورت وجود، به m نسبت داده می‌شود.) در فصل ۱ آموختیم که چنین گزینشی را می‌توان به $6 = \binom{4}{2} = \binom{3+2-1}{2}$ طریق انجام داد. به همین ترتیب، n و q را می‌توان به $3 = \binom{3}{2} = \binom{2+2-1}{2}$ طریق برگزید. پس بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $18 = (3)(6)$ جفت مرتب در $\mathcal{R}$ وجود دارد، یعنی همان تعدادی که قبلاً از طریق فهرست کردن جفتهای مرتب مورد نظر یافتیم.

اکنون موقعیت مشابهی را با در نظر گرفتن مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صحیح مثبت $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ بررسی می‌کنیم. در اینجا $36 = (3)(3)(4)$ مقسوم‌علیه داریم و هر جفت مرتب برای این ترتیب جزئی (ناشی از بخش‌پذیری) به‌صورت $(2^r \cdot 3^s \cdot 5^t, 2^u \cdot 3^v \cdot 5^w)$ است، که در آن $r, s, t, u, v, w \in \mathbf{N}$ و $0 \leqslant r \leqslant u \leqslant 3$، $0 \leqslant s \leqslant v \leqslant 2$ و $0 \leqslant t \leqslant w \leqslant 2$. پس تعداد جفتهای مرتب متعلق به این رابطه برابر است با

$$\binom{4+2-1}{2}\binom{3+2-1}{2}\binom{3+2-1}{2} = \binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} = (10)(6)(6) = 360$$

و یقیناً مایل نیستیم که با فهرست کردن همهٔ جفتهای مرتب متعلق به این رابطه، نتیجهٔ بالا را به‌دست آوریم.

به‌طور کلی، به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ با شرط $n > 1$، با استفاده از قضیهٔ بنیادی حساب می‌توانیم بنویسیم

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \cdots p_k^{e_k}$$

که در آن $k \in \mathbf{Z}^+$، $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_k$ اعدادی اول هستند و به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant k$، $e_i \in \mathbf{Z}^+$. در این صورت n دارای $\prod_{i=1}^{k}(e_i + 1)$ مقسوم‌علیه صحیح مثبت است. هنگامی که همان ترتیب جزئی را برای این مجموعه (مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت n) در نظر می‌گیریم، می‌بینیم که تعداد جفتهای مرتب متعلق به این رابطه برابر است با

$$\prod_{i=1}^{k}\binom{(e_i+1)+2-1}{2} = \prod_{i=1}^{k}\binom{e_i+2}{2}$$

تعریف ۷.۷ رابطهٔ هم‌ارزی $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A رابطه‌ای است که بازتابی، متقارن، و ترایا باشد.

مثال ۱۶.۷

الف) رابطهٔ مثال ۱۰.۷(ب) در همهٔ روابط مثال ۳.۷(پ) رابطه‌های هم‌ارزی هستند.

ب) اگر $A = \{1, 2, 3\}$، آنگاه

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3)\}$$
$$\mathcal{R}_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\} = A \times A$$

پ) به‌ازای هر مجموعهٔ A، $A\times A$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است و اگر $A=\{a_۱,a_۲,\cdots,a_n\}$، در این صورت رابطهٔ برابری $\mathcal{R}=\{(a_i,a_i)\mid ۱\leqslant i\leqslant n\}$ کوچکترین رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ت) فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$، $B=\{x,y,z\}$ و $f:A\to B$ تابع پوشای

$$f=\{(۱,x),(۲,z),(۳,x),(۴,y),(۵,z),(۶,y),(۷,x)\}$$

باشد.

رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $a\mathcal{R}b$، در صورتی‌که $f(a)=f(b)$. در این صورت می‌بینیم که، مثلاً $۱\mathcal{R}۱$، $۱\mathcal{R}۳$، $۲\mathcal{R}۵$، $۳\mathcal{R}۱$ و $۴\mathcal{R}۶$.

به‌ازای هر $a\in A$، داریم $f(a)=f(a)$ زیرا f تابع است؛ پس $a\mathcal{R}a$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است. اکنون فرض کنیم $a,b\in A$ و $a\mathcal{R}b$. در این صورت $a\mathcal{R}b\Rightarrow f(a)=f(b)\Rightarrow f(b)=f(a)\Rightarrow b\mathcal{R}a$ پس $\mathcal{R}$ متقارن است. سرانجام، اگر $a,b,c\in A$ و داشته باشیم $a\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}c$، در این صورت $f(a)=f(b)$ و $f(b)=f(c)$. درنتیجه، $f(a)=f(c)$ و می‌بینیم که $(a\mathcal{R}b\wedge b\mathcal{R}c)\Rightarrow a\mathcal{R}c$. پس $\mathcal{R}$ ترایاست. چون $\mathcal{R}$ بازتابی، متقارن، و تراياست، بنابراین رابطه‌ای هم‌ارزی است.

در اینجا

$$\begin{aligned}\mathcal{R}=&\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۷),(۲,۲),(۲,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۷),(۴,۴),\\&(۴,۶),(۵,۲),(۵,۵),(۶,۴),(۶,۶),(۷,۱),(۷,۳),(۷,۷)\}\end{aligned}$$

ث) اگر $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی مجموعه‌ی A باشد، آنگاه A هم رابطهٔ هم‌ارزی و هم ترتیب جزئی روی A است اگر و فقط اگر $\mathcal{R}$ رابطهٔ برابری روی A باشد.

تمرینات ۱.۷

۱. اگر $A=\{۱,۲,۳\}$، مثالی از رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ روی A بیاورید که

الف) بازتابی و متقارن باشد، ولی ترایا نباشد.

ب) بازتابی و ترایا باشد، ولی متقارن نباشد.

پ) متقارن و ترایا باشد، ولی بازتابی نباشد.

۲. برای رابطهٔ (ب) در مثال ۱۰۷، پنج مقدار برای x چنان بیابید که $(x,۵)\in\mathcal{R}$.

۳. برای رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مثال ۱۳۰۷، فرض کنیم $f:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$ با $f(n)=n$ تعریف شده باشد.

الف) سه عنصر $f_۱,f_۲,f_۳\in\mathcal{F}$ چنان بیابید که به‌ازای هر $۱\leqslant i\leqslant ۳$، $f_i\mathcal{R}f$ و $f\mathcal{R}f_i$.

ب) سه عنصر $g_۱,g_۲,g_۳\in\mathcal{F}$ چنان بیابید که به‌ازای هر $۱\leqslant i\leqslant ۳$، $g_i\mathcal{R}f$ ولی $f\not\mathcal{R}g_i$.

۴. الف) تعریف ویژگیهای بازتابی بودن، متقارن بودن، ترایا بودن و پادمتقارن بودن را برای رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ (روی مجموعهٔ A) با استفاده از سورها بیان کنید.

ب) نتایج قسمت (الف) را به‌کارگیرید و مشخص کنید چه وقت رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ (روی مجموعهٔ A) (یک) بازتابی نیست؛ (دو) متقارن نیست؛ (سه) ترایا نیست؛ و (چهار) پادمتقارن نیست.

۵. به‌ازای هر یک از رابطه‌های زیر، تعیین کنید رابطه بازتابی، متقارن، پادمتقارن، یا ترایا هست یا نیست.

الف) $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$، که در آن $a\mathcal{R}b$ هرگاه $a \mid b$ (که، همان‌طورکه در بند ۳۰۴ تعریف شد، خوانده می‌شود «a عدد b را عاد می‌کند»).

ب) $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbb{Z}$ است به‌طوری‌که $a\mathcal{R}b$ هرگاه $a \mid b$.

پ) به‌ازای عالم مفروض $\mathcal{U}$ و زیرمجموعهٔ ثابت C از $\mathcal{U}$، $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ چنین تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر $A, B \subseteq \mathcal{U}$ داریم $A\mathcal{R}B$ هرگاه $A \cap C = B \cap C$.

ت) روی مجموعهٔ A مرکب از همهٔ خطوط $\mathbb{R}^2$، رابطهٔ $\mathcal{R}$ را برای دو خط l_1، l_2 چنین تعریف می‌کنیم: $l_1 \mathcal{R} l_2$، در صورتی‌که l_1 عمود بر l_2 باشد.

ث) $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbb{Z}$ است به‌طوری‌که $x\mathcal{R}y$ هرگاه $x+y$ زوج (فرد) باشد.

ج) $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbb{Z}$ است به‌طوری‌که $x\mathcal{R}y$ هرگاه $x-y$ زوج (فرد) باشد.

چ) $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbb{Z}^+$ است به‌طوری‌که $a\mathcal{R}b$ هرگاه $\gcd(a, b) = 1$، یعنی هرگاه a و b نسبت به هم اول باشند.

ح) فرض کنیم T مجموعهٔ همهٔ مثلثهای $\mathbb{R}^2$ باشد. $\mathcal{R}$ را روی T چنین تعریف می‌کنیم: $t_1 \mathcal{R} t_2$، در صورتی که t_1 و t_2 زاویه‌ای هم اندازه داشته باشند.

خ) $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ است به‌طوری که $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ هرگاه $a \leqslant c$.
[یادداشت: $\mathcal{R} \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.]

د) $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbb{Z}^+$ است به‌طوری که $x\mathcal{R}y$ هرگاه $x^3 + y^2$ زوج باشد.

۶. کدام‌یک از رابطه‌های تمرین ۵ ترتیب جزئی است؟ کدام‌یک رابطهٔ هم‌ارزی است؟

۷. الف) فرض کنیم $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ دو رابطه روی مجموعهٔ A باشند. ادعای زیر را ثابت یا رد کنید:

$$(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \text{ بازتابی است}) \Rightarrow (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \text{ بازتابی هستند})$$

ب) به قسمت (الف)، در صورتی‌که همه‌جا به‌جای «بازتابی» قرار دهیم (یک) متقارن؛ (دو) پادمتقارن؛ و (سه) ترایا، پاسخ دهید.

۸. به تمرین ۷، در صورتی‌که همه‌جا $\cup$ را به‌جای $\cap$ قرار دهیم، پاسخ دهید.

۹. به‌ازای هر یک ازگزاره‌های زیر دربارهٔ رابطه‌ها روی مجموعهٔ A، که در آن $|A| = n$، تعیین کنید آیا این گزاره راست است یا دروغ. اگر دروغ باشد، مثال نقضی ارائه کنید.

الف) اگر $\mathcal{R}$ رابطه‌ای بازتابی روی A باشد، آنگاه $|\mathcal{R}| \geqslant n$.

ب) اگر $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی A باشد و $|\mathcal{R}| \geqslant n$، آنگاه $\mathcal{R}$ بازتابی است.

پ) فرض کنیم $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ دو رابطه روی A باشند و $\mathcal{R}_2 \supseteq \mathcal{R}_1$؛ در این صورت اگر $\mathcal{R}_1$ بازتابی (متقارن، پادمتقارن، ترایا) باشد، آنگاه $\mathcal{R}_2$ بازتابی (متقارن، پادمتقارن، ترایا) است.

ت) فرض کنیم $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ دو رابطه روی A باشند و $\mathcal{R}_2 \supseteq \mathcal{R}_1$؛ در این صورت اگر $\mathcal{R}_1$ بازتابی (متقارن، پادمتقارن، ترایا) باشد، آنگاه $\mathcal{R}_2$ بازتابی (متقارن، پادمتقارن، ترایا) است.

ث) اگر $\mathcal{R}$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی A باشد، آنگاه $n \leqslant |\mathcal{R}| \leqslant n^2$.

۱۰. اگر $A = \{w, x, y, z\}$، مطلوب است تعیین تعداد روابطی روی A که (الف) بازتابی؛ (ب) متقارن؛ (پ) بازتابی و متقارن؛ (ت) بازتابی و شامل (x, y)؛ (ث) متقارن و شامل (x, y)؛ (ج) پادمتقارن؛ (چ) پادمتقارن و شامل (x, y)؛ (ح) متقارن و پادمتقارن؛ و (خ) بازتابی، متقارن و پادمتقارن هستند.

۱۱. فرض کنیم $n \in \mathbf{Z}^+$، $n > ۱$، و فرض کنیم A مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت n باشد. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که x عدد y را عاد کند. مطلوب است تعیین تعداد جفتهای مرتب متعلق به $\mathcal{R}$ در صورتی‌که n برابر باشد با (الف) ۱۰؛ (ب) ۲۰؛ (پ) ۴۰؛ (ت) ۲۰۰؛ (ث) ۲۱۰؛ و (ج) ۱۳۸۶۰.

۱۲. فرض کنیم $p_۱$، $p_۲$، و $p_۳$ سه عدد اول متمایز باشند و فرض کنیم $n, k \in \mathbf{Z}^+$ به‌طوری‌که $n = p_۱^۵ p_۲^۳ p_۳^k$. فرض کنیم A مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت n باشد و رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که x عدد y را عاد کند. اگر ۵۸۸۰ جفت مرتب در $\mathcal{R}$ وجود داشته باشد، k و $|A|$ را تعیین کنید.

۱۳. در استدلال زیر چه اشتباهی هست؟

فرض کنیم A یک مجموعه و $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی A باشد. اگر $\mathcal{R}$ متقارن و ترایا باشد، آنگاه $\mathcal{R}$ بازتابی است.

برهان: فرض کنیم $(x, y) \in \mathcal{R}$. بنابر ویژگی تقارن، $(y, x) \in \mathcal{R}$. در این صورت، بنابر ویژگی ترایایی از $(x, y), (y, x) \in \mathcal{R}$ نتیجه می‌گیریم که $(x, x) \in \mathcal{R}$. درنتیجه، $\mathcal{R}$ بازتابی است.

۱۴. فرض کنیم A مجموعه‌ای باشد به‌طوری‌که $|A| = n$ و فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطه‌ای پادمتقارن روی A باشد. مقدار ماکسیمم $|\mathcal{R}|$ چند است؟ چندتا از روابط پاد متقارن روی A می‌توانند دارای این اندازه باشند؟

۱۵. فرض کنیم A مجموعه‌ای باشد به‌طوری‌که $|A| = n$ و فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی A باشد به‌طوری که $|\mathcal{R}| = r$. چرا $r - n$ همواره زوج است؟

۱۶. رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی A را غیر بازتابی می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $a \in A$، $(a, a) \notin \mathcal{R}$.

الف) مثالی از رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ روی $\mathbf{Z}$ بیاورید به‌طوری که $\mathcal{R}$ غیر بازتابی و ترایا باشد، ولی متقارن نباشد.

ب) فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطه‌ای ناتهی روی مجموعهٔ A باشد. ثابت کنید اگر $\mathcal{R}$ هر دوتایی از ویژگیهای غیر بازتابی بودن، متقارن بودن، و ترایا بودن را داشته باشد نمی‌تواند ویژگی سوم را داشته باشد.

پ) اگر $|A| = n \geqslant ۱$، چند رابطهٔ غیر بازتابی متمایز روی A وجود دارد؟ چند تا از رابطه‌های متمایز روی A نه بازتابی‌اند نه غیر بازتابی؟

۲.۷ شناسایی کامپیوتری: ماتریسهای صفر ـ یک و گرافهای سودار

چون توجه ما به رابطه‌ها بر رابطه‌های روی مجموعه‌های متناهی متمرکز شده است، به‌دنبال راههایی مناسب برای نمایش این‌گونه رابطه‌ها هستیم تا بتوانیم ویژگیهای بند ۱.۷ را به‌آسانی تحقیق کنیم. به‌همین سبب اکنون به جمع‌آوری ابزارهای لازم می‌پردازیم: ترکیب روابط، ماتریسهای صفر-یک و گرافهای سودار.

رابطه‌ها را در شرایط زیر می‌توان به روشی قابل قیاس با ترکیب توابع، با یکدیگر ترکیب کرد.

تعریف ۸.۷ اگر A، B، و C سه مجموعه باشند و $\mathcal{R}_۱ \subseteq A \times B$ و $\mathcal{R}_۲ \subseteq B \times C$، در این صورت رابطهٔ مرکب $\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲$ رابطه‌ای از A در C است که با $\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲ = \{(x, z) \mid x \in A، z \in C،$ و عنصری مانند $y \in B$ وجود دارد به‌طوری‌که $(x, y) \in \mathcal{R}_۱$ و $(y, z) \in \mathcal{R}_۲\}$ تعریف می‌شود.

احتیاط کنید! ترتیب نوشتن ترکیب دو رابطه عکس ترتیب نوشتن ترکیب دو تابع است. به‌زودی خواهیم دید که چرا این کار را می‌کنیم.

مثال ۱۷.۷ فرض کنیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$، $B = \{w, x, y, z\}$، و $C = \{5, 6, 7\}$. رابطهٔ $\mathcal{R}_1 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (3, z)\}$ را، که رابطه‌ای است از A در B، و رابطهٔ $\mathcal{R}_2 = \{(w, 5), (x, 6)\}$ را، که رابطه‌ای است از B در C، در نظر می‌گیریم. در این صورت $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \{(1, 6), (2, 6)\}$ رابطه‌ای از A در C است. اگر $\mathcal{R}_3 = \{(w, 5), (w, 6)\}$ رابطهٔ دیگری از B در C باشد، آنگاه $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3 = \varnothing$.

مثال ۱۸.۷ فرض کنیم A مجموعهٔ کارکنان مرکز محاسبات دانشگاهی باشد، B مجموعهٔ زبانهای برنامه‌نویسی سطح بالا را نشان دهد و C مجموعه‌ای از طرحهایی تحقیقاتی، $\{p_1, p_2, \cdots, p_8\}$، باشد که مدیران باید آنها را به کارکنان مرکز واگذار کنند. رابطهٔ $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$ را در نظر می‌گیریم، که در آن جفت مرتبی مانند (پاسکال، مهرداد) نشان می‌دهد که کارمندی به‌نام مهرداد در برنامه‌نویسی به زبان پاسکال مهارت دارد، (و ممکن است مهارت برنامه‌نویسی به زبانهای دیگری را نیز داشته باشد). رابطهٔ $\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$ مرکب از جفتهای مرتبی مانند (p_2، پاسکال) است، که نشان می‌دهد مهارت در برنامه‌نویسی به زبان پاسکال برای کسی که در طرح p_2 کار می‌کند لازم است. در رابطهٔ مرکب $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ جفت مرتب (p_2، مهرداد) وجود دارد. اگر p_2 مؤلفهٔ دوم هیچ جفت مرتب دیگری در $\mathcal{R}_2$ نباشد، در این صورت متوجه می‌شویم که واگذارکردن طرح p_2 به مهرداد تنها به‌دلیل مهارت او در برنامه‌نویسی به زبان پاسکال بوده است. (در اینجا $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ را برای برقرار ساختن فرایند تطابق بین کارکنان و طرحها براساس مهارت آنان در زبانهای برنامه‌نویسی خاصی به‌کارگرفته‌ایم.)

نتیجهٔ زیر را، که قابل قیاس با شرکت‌پذیری برای ترکیب توابع است، برای رابطه‌ها داریم.

قضیهٔ ۱.۷ فرض کنیم A، B، C، و D چهار مجموعه باشند و $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$، $\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$ و $\mathcal{R}_3 \subseteq C \times D$. در این صورت $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3) = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3$.

برهان: چون هر دوی $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3)$ و $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3$ رابطه‌هایی از A در D هستند، زمینه‌ای هست که باورکنیم با هم برابرند. اگر $(a, d) \in \mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3)$، در این صورت عنصری چون $b \in B$ هست به‌طوری که $(a, b) \in \mathcal{R}_1$ و $(b, d) \in (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3)$. همچنین، از $(b, d) \in (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3)$ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای عنصری مانند $c \in C$، $(b, c) \in \mathcal{R}_2$ و $(c, d) \in \mathcal{R}_3$. پس، از $(a, b) \in \mathcal{R}_1$ و $(b, c) \in \mathcal{R}_2$ نتیجه می‌گیریم که $(a, c) \in \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$. سرانجام، از $(a, c) \in \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ و $(c, d) \in \mathcal{R}_3$ نتیجه می‌گیریم که $(a, d) \in (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3$، و بنابراین، $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3) \subseteq (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3$. رابطهٔ شمول عکس را نیز با استدلال مشابهی به‌دست می‌آوریم.

با توجه به قضیهٔ بالا، اگر به‌جای هر یک از رابطه‌های مذکور در قضیهٔ ۱۰۷ بنویسیم $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3$، هیچ ابهامی پیش نمی‌آید. علاوه برآن، اکنون می‌توانیم توانهای رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ روی یک مجموعه را تعریف کنیم.

تعریف ۹.۷ مجموعهٔ A و رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی A مفروض‌اند. توانهای $\mathcal{R}$ را به‌طور بازگشتی چنین تعریف می‌کنیم: (الف) $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$؛ و (ب) به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n$.

توجه داشته باشید که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $\mathcal{R}^n$ رابطه‌ای روی A است.

مثال ۱۹.۷ اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $\mathcal{R} = \{(۱,۲), (۱,۳), (۲,۴), (۳,۲)\}$، در این صورت $\mathcal{R}^۲ = \{(۱,۴), (۱,۲), (۳,۴)\}$، $\mathcal{R}^۳ = \{(۱,۴)\}$، و به‌ازای هر $n \geqslant ۴$، $\mathcal{R}^n = \varnothing$.

هر چه مجموعهٔ A و رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی A بزرگتر شوند، انجام محاسباتی نظیر آنچه در مثال ۱۹۰۷ انجام دادیم طولانیتر و خسته‌کننده‌تر می‌شود. ابزاری که برای اجتناب از این محاسبات طولانی لازم داریم کامپیوتر است، البته در صورتی‌که بتوانیم راهی برای دادن اطلاعاتی به ماشین دربارهٔ مجموعهٔ A و رابطهٔ $\mathcal{R}$ مفروض روی A بیابیم.

تعریف ۱۰.۷ ماتریس صفر-یک $m \times n$ که با $E = (e_{ij})_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود آرایه‌ای مستطیلی از اعداد است که در m سطر و n ستون آرایش یافته‌اند و به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant m$ و $۱ \leqslant j \leqslant n$، e_{ij} درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام E است و هر چنین درایه‌ای ۰ یا ۱ است. [چنین ماتریسی را (۰, ۱)-ماتریس نیز می‌نامیم.]

مثال ۲۰.۷ ماتریس

$$E = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

یک (۰, ۱)-ماتریس ۳×۴ است، که در آن، مثلاً $e_{۱۱} = ۱$، $e_{۲۳} = ۰$، و $e_{۳۱} = ۱$.

هنگام کارکردن با این‌گونه ماتریسها، عملهای استاندارد جمع و ضرب ماتریسها را با این قید که $۱ + ۱ = ۱$ به‌کار می‌گیریم. (بنابراین، جمع را جمع بولی می‌نامیم.)

مثال ۲۱.۷ مجموعه‌های A، B، و C و رابطه‌های $\mathcal{R}_۱$ و $\mathcal{R}_۲$ را به صورتی‌که در مثال ۱۷۰۷ تعریف کردیم در نظر می‌گیریم. ترتیب عنصرهای A، B، و C را همان ترتیب نوشتن عنصرهای این مجموعه‌ها در مثال ۱۷۰۷ در نظر می‌گیریم و ماتریس رابطه را برای $\mathcal{R}_۱$ و $\mathcal{R}_۲$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M(\mathcal{R}_۱) = \begin{array}{c} \\ (۱) \\ (۲) \\ (۳) \\ (۴) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (w) & (x) & (y) & (z) \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}, \quad M(\mathcal{R}_۲) = \begin{array}{c} \\ (w) \\ (x) \\ (y) \\ (z) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (۵) & (۶) & (۷) \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

هنگام ساختن $M(\mathcal{R}_۱)$ با رابطه‌ای از A در B سروکار داریم؛ پس عنصرهای A را برای نشانه‌گذاری سطرهای $M(\mathcal{R}_۱)$ و عنصرهای B را برای مشخص کردن ستونهای آن به‌کار می‌گیریم. بنابراین، برای نشان دادن اینکه، مثلاً

$(۲, x) \in \mathcal{R}_۱$، در سطری که با (۲) و ستونی که با (x) نشانه‌گذاری شده است یک ۱ می‌گذاریم. هر ۰ در این ماتریس نشان می‌دهد جفت مرتبی متعلق به $A \times B$ وجود دارد که در $\mathcal{R}_۱$ نیست. مثلاً چون $(۳, w) \notin \mathcal{R}_۱$، درایهٔ سطر (۳) و ستون (w) از ماتریس $M(\mathcal{R}_۱)$، ۰ است. برای به‌دست آوردن $M(\mathcal{R}_۲)$ فرایند مشابهی را به‌کار می‌بریم.

• اگر این ماتریسها را در هم ضرب کنیم[۱]، می‌بینیم که

$$M(\mathcal{R}_۱) \cdot M(\mathcal{R}_۲) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = M(\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲)$$

و به‌طور کلی داریم: اگر $\mathcal{R}_۱$ رابطه‌ای از A در B و $\mathcal{R}_۲$ رابطه‌ای از B در C باشد، آنگاه $M(\mathcal{R}_۱) \cdot M(\mathcal{R}_۲) = m(\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲)$. یعنی حاصل‌ضرب ماتریسهای رابطه برای $\mathcal{R}_۱$ و $\mathcal{R}_۲$، با همین ترتیب، برابر است با ماتریس رابطه برای رابطهٔ مرکب $\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲$. (به‌همین سبب است که ترکیب رابطه‌ها را با ترتیبی که در تعریف ۷۰۸ مشخص شده می‌نویسیم.)

در تمرینهای ۹ و ۱۰ در پایان این بند از خواننده خواسته‌ایم تا نتیجهٔ کلی مذکور در مثال ۲۱۰۷ را، همراه با چند نتیجهٔ بیان شده در مثال بعدی، اثبات کند.

در مثال زیر ویژگیهای دیگری از ماتریسهای رابطه بیان می‌شود.

مثال ۲۲.۷ فرض کنیم مانند مثال ۱۹۰۷، $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $\mathcal{R} = \{(۱, ۲), (۱, ۳), (۲, ۴), (۳, ۲)\}$. ترتیب عنصرهای A را ثابت می‌گیریم و ماتریس رابطه را برای $\mathcal{R}$ چنین تعریف می‌کنیم: $M(\mathcal{R})$، (۱ ,۰)ـ ماتریس ۴ × ۴ای است که درایه‌های آن، m_{ij} به‌ازای $۱ \leqslant i, i \leqslant ۴$، با

$$m_{ij} = \begin{cases} ۱ \ , & (i,j) \in \mathcal{R} \text{ اگر} \\ ۰ \ , & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف می‌شوند. بنابراین، می‌بینیم که

$$M(\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

این ماتریس چه استفاده‌ای دارد؟ اگر با استفاده از قرارداد ۱ = ۱ + ۱ ماتریس $(M(\mathcal{R}))^۲$ را محاسبه کنیم، می‌بینیم که

---

۱. خواننده‌ای که با ضرب ماتریسها آشنایی ندارد یا می‌خواهد این موضوع را مختصراً مرور کند می‌تواند به پیوست ۲ (جلد چهارم) مراجعه کند.

$$(M(\mathcal{R}))^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که اتفاقاً برابر با ماتریس رابطه برای $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}^2$ است. (برای اطمینان، ماتریس $\mathcal{R}^2$ را محاسبه کنید.) علاوه برآن،

$$(M(\mathcal{R}))^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که ماتریس رابطه برای $\mathcal{R}^4 = \varnothing$ است.

آنچه در اینجا روی داد در حالت کلی نیز برقرار است. اکنون چند نتیجه را دربارهٔ ماتریسهای رابطه و کاربرد آنها در مطالعهٔ رابطه‌ها بیان می‌کنیم.

> فرض کنیم A مجموعه‌ای باشد به‌طوری که $|A| = n$ و $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی A باشد. اگر $M(\mathcal{R})$ ماتریس رابطه برای $\mathcal{R}$ باشد، آنگاه
>
> الف) $M(\mathcal{R}) = 0$ (۰ ماتریسی است که همهٔ درایه‌هایش ۰ است) اگر و فقط اگر $\mathcal{R} = \varnothing$.
>
> ب) $M(\mathcal{R}) = 1$ (۱ ماتریسی است که همهٔ درایه‌هایش ۱ است) اگر و فقط اگر $\mathcal{R} = A \times A$.
>
> پ) به‌ازای هر $m \in \mathbf{Z}^+$، $M(\mathcal{R}^m) = [M(\mathcal{R})]^m$

اینک با استفاده از (۰, ۱)ـ ماتریسها برای نمایش رابطه‌ها به مسألهٔ شناسایی ویژگیهای بازتابی بودن، متقارن بودن، پادمتقارن بودن و ترایا بودن رابطه‌ها توجه می‌کنیم. برای انجام این کار به مفاهیمی که در سه تعریف زیر معرفی می‌شوند نیاز داریم.

تعریف ۱۱.۷ فرض کنیم $E = (e_{ij})_{m \times n}$ و $F = (f_{ij})_{m \times n}$ دو (۰, ۱)ـ ماتریس $m \times n$ باشند. می‌گوییم E مقدم بر F است، یا E کوچکتر از F است، و می‌نویسیم $E \leqslant F$، هرگاه به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant m$ و $1 \leqslant j \leqslant n$، $e_{ij} \leqslant f_{ij}$.

مثال ۲۳.۷ به‌ازای $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$، داریم $E \leqslant F$. درواقع، هشت (۰, ۱)ـ ماتریس مانند G وجود دارد به‌طوری که $E \leqslant G$.

تعریف ۱۲.۷ به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، $I_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$، $(0,1)$ـ ماتریسی است که در آن

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ اگر} \\ 0, & i \neq j \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف ۱۳.۷ فرض کنیم $A = (a_{ij})_{m\times n}$ یک $(0,1)$ـ ماتریس باشد. ترانهاد A، که به‌صورت A^{tr} نوشته می‌شود، ماتریس $(a^*_{ji})_{n\times m}$ است که در آن به‌ازای هر $1 \leqslant j \leqslant n$ و هر $1 \leqslant i \leqslant m$، $a^*_{ji} = a_{ij}$.

مثال ۲۴.۷ به‌ازای $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ می‌بینیم که $A^{\mathrm{tr}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

این مثال نشان می‌دهد که سطر (ستون) iام A برابر است با ستون (سطر) iام A^{tr}. این نکته روشی را در اختیار ما می‌گذارد که می‌توانیم با استفاده از آن ماتریس A^{tr} را از ماتریس A به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۲.۷ مجموعهٔ A به‌طوری که $|A| = n$ و رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی A مفروض‌اند. فرض کنیم M ماتریس رابطه برای $\mathcal{R}$ باشد. در این صورت

الف) $\mathcal{R}$ بازتابی است اگر و فقط اگر $I_n \leqslant M$.

ب) $\mathcal{R}$ متقارن است اگر و فقط اگر $M = M^{\mathrm{tr}}$.

پ) $\mathcal{R}$ ترایاست اگر و فقط اگر $M \cdot M = M^2 \leqslant M$.

ت) $\mathcal{R}$ پادمتقارن است اگر و فقط اگر $M \cap M^{\mathrm{tr}} \leqslant I_n$. (هر درایهٔ ماتریس $M \cap M^{\mathrm{tr}}$ از اِعمال قواعد $0 = 1 \cap 0 = 0 \cap 1 = 0 \cap 0$ و $1 = 1 \cap 1$ـ یعنی ضرب معمولی برای ۰ها و/یا ۱هاـ روی درایه‌های متناظر ماتریسهای M و M^{tr} به‌دست می‌آید.

برهان: این نتایج از تعاریف ویژگیهای روابط و تعریف $(0,1)$ـ ماتریسها حاصل می‌شوند. این را برای قسمت (پ) نشان می‌دهیم و برای این کار، مانند مثالهای ۲۱.۷ و ۲۲.۷، از عنصرهای A برای مشخص کردن سطرها و ستونهای M استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $M^2 \leqslant M$. اگر $(x,y), (y,z) \in \mathcal{R}$، در این صورت درایهٔ واقع در سطر (x)، ستون (y) و همچنین در سطر (y)، ستون (z) از M، ۱ است. درنتیجه، درایهٔ واقع در سطر (z)، ستون (z) از M^2 نیز ۱ است. چون $M^2 \leqslant M$، درایهٔ واقع در سطر (x)، ستون (z) از M نیز باید ۱ باشد. بنابراین، $(x,z) \in \mathcal{R}$ و درنتیجه، $\mathcal{R}$ ترایاست.

برعکس، اگر $\mathcal{R}$ ترایا باشد، و اگر M ماتریس رابطه برای $\mathcal{R}$ باشد، فرض کنیم s_{xz} درایهٔ واقع در سطر (x) و ستون (z) از M^2 را نشان دهد و داشته باشیم $s_{xz} = 1$. برای آنکه s_{xz} در M^2 برابر با ۱ باشد، باید حداقل یک $y \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری که در M داشته باشیم $m_{xz} = m_{yz} = 1$. این فقط وقتی روی می‌دهد که $x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}z$. چون $\mathcal{R}$ ترایاست، پس $x\mathcal{R}z$. بنابراین، $m_{xz} = 1$ و $M^2 \leqslant M$.

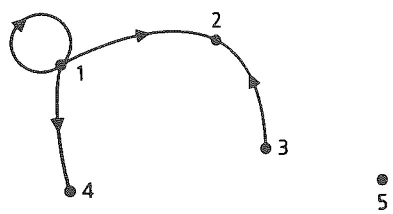
برهان قسمتهای دیگر را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

ماتریس رابطه ابزار سودمندی برای شناسایی کامپیوتری بعضی از ویژگیهای روابط است. با توجه به روشی که در اینجا برای ذخیره‌سازی اطلاعات بیان شد، این ماتریس مثالی از یک ساختار داده‌هاست. چگونگی استفاده از ماتریسهای رابطه در مطالعهٔ نظریهٔ گراف[1] و چگونگی استفاده از نظریهٔ گراف در شناسایی بعضی از ویژگیهای روابط نیز مورد توجه ماست.

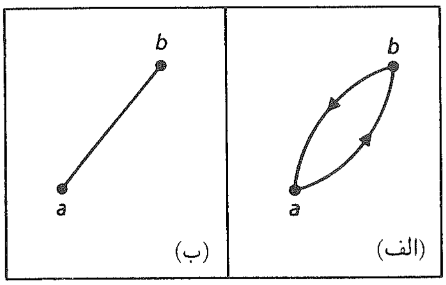
در اینجا چند مفهوم بنیادی نظریهٔ گراف را معرفی می‌کنیم. این مفاهیم اغلب در مثالها معرفی می‌شوند و برای آنها تعریف صوری ارائه نمی‌کنیم. ولی، در فصل ۱۱ (جلد سوم) مطلب را دقیقتر و جامعتر و بدون مفروض دانستن آنچه در اینجا می‌آید ارائه خواهیم کرد.

تعریف ۱۴.۷ فرض‌کنیم V مجموعه‌ای ناتهی و متناهی باشد. گراف سودار G روی V مرکب است از عنصرهای V که رأس‌ها یا گره‌های G نامیده می‌شوند، و زیرمجموعه‌ای از $V \times V$ مانند E، که یال‌ها یا کمان‌ها (سودار) نامیده می‌شوند. اگر $a, b \in V$ و $(a, b) \in E$ [2]، در این صورت یالی از a به b وجود دارد. رأس a را مبدأ یا رأس آغازی این یال و b را پایانه یا رأس پایانی می‌نامیم و می‌گوییم b مجاور از a و a مجاور به b است. علاوه برآن، اگر $a \neq b$، آنگاه $(a, b) \neq (b, a)$. یالی به‌صورت (a, a) را طوقه (در a) می‌نامیم.

مثال ۲۵.۷ به‌ازای $V = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، نمودار شکل ۱.۷ گرافی سودار روی V است که مجموعهٔ یالهای آن $\{(۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۴), (۳, ۲)\}$ است. رأس ۵ بخشی از این گراف است، اگرچه مبدأ یا پایانهٔ هیچ یالی نیست. چنین رأسی را رأس تنها می‌نامیم. همان‌طورکه در اینجا می‌بینیم، لزومی ندارد که یالها پاره‌خطهایی راست باشند و طول یال نیز هیچ نقشی ندارد.



شکل ۱.۷



شکل ۲.۷

وقتی نمودار جریان را برای مطالعهٔ برنامه‌ای کامپیوتری یا الگوریتمی کامپیوتری رسم می‌کنیم، با نوع خاصی از گراف سودار سروکار داریم که در آن ممکن است شکل رأسها در تحلیل الگوریتم نقش مهمی داشته باشد. نقشه‌های جاده‌ها گرافهایی سودارند که در آنها شهرها و روستاها را با رأسها و جاده‌های بین هر دو مکان را با یالها

۱. چون اصطلاحات نظریهٔ گراف هنوز استاندارد نشده‌اند، ممکن است تفاوتهایی میان تعریفهای این کتاب با تعریفهای کتابهای دیگر در این زمینه بیابید.

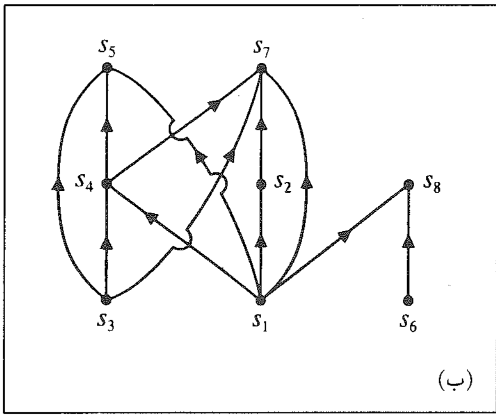
۲. در این فصل وجود فقط یک یال از a به b را مجاز می‌شمریم. اگر چند یال وجود داشته باشد گراف را گراف چندگانه می‌نامیم. در فصل ۱۱ (جلد سوم) دربارهٔ گرافهای چندگانه بیشتر مطالعه می‌کنیم.

نمایش می‌دهند. در نقشه‌های جاده‌ها، غالباً هر یال در هر دو جهت سودار است. درنتیجه، اگر G گرافی سودار باشد و $a,b \in V$، $a \neq b$، و اگر $(a,b),(b,a) \in E$، در این صورت یال بیسوی $\{a,b\} = \{b,a\}$ در شکل ۲.۷ (ب) را برای نمایش دویال سودار نشان داده شده در شکل ۲.۷ (الف) به‌کار می‌بریم. در این حالت، a و b را رأسهای مجاور می‌نامیم. (در مورد طوقه‌ها نیز می‌توانیم سو را نادیده بگیریم.)

گرافهای سودار در بسیاری از موقعیتهایی که در علم کامپیوتر پیش می‌آیند نقش مهمی بازی می‌کنند. مثال زیر یکی از این موقعیتها را ارائه می‌کند.

مثال ۲۶.۷ هنگام اجرای برنامه‌ای کامپیوتری در صورتی‌که حکمهای مشخصی همزمان اجرا شوند، پردازش برنامه سریعتر می‌شود. ولی برای انجام این کار باید از وابستگی بعضی از حکمها به حکمهای قبلی در برنامه آگاه باشیم، زیرا نمی‌توانیم حکمی را اجرا کنیم که به‌نتایج حکمهای دیگری که هنوز اجرا نشده‌اند وابسته است.

در شکل ۳.۷ (الف) هشت حکم انتساب داریم که شروع برنامه‌ای کامپیوتری را تشکیل می‌دهند. این حکمها را با هشت رأس متناظر s_1، s_2، s_3، $\cdots$، و s_8 در قسمت (ب) از شکل ۳.۷ نمایش می‌دهیم، که در آن یال سوداری مانند (s_1, s_5) نشان می‌دهد که حکم s_5 را نمی‌توان پیش از اجرای حکم s_1 اجرا کرد. گراف سودار حاصل را گراف تقدم برای خطوط مفروض برنامهٔ کامپیوتری می‌نامیم. توجه داشته باشید که این گراف نشان می‌دهد، مثلاً، حکم s_7 را نمی‌توان پیش از اجرای حکمهای s_1، s_2، s_3، و s_4 اجرا کرد. همچنین، می‌بینیم برای آنکه امکان اجرای هر یک از حکمهای s_2، s_4، s_5، s_7 یا s_8 باشد باید حکم s_1 اجرا شده باشد. به‌طورکلی، اگر رأس (حکم) s مجاور از m رأس دیگر باشد (و مجاور از هیچ رأس دیگری نباشد)، در این صورت پیش از آنکه بتوان حکم s را اجرا کرد باید حکمهای متناظر با این m رأس اجرا شده باشند. به‌همین ترتیب، اگر رأس (حکم) s مجاور به n رأس دیگر باشد، در این صورت پیش از آنکه بتوان هر یک از حکمهای متناظر با این n رأس را اجرا کرد باید حکم s اجرا شده باشد. سرانجام، با توجه به گراف تقدم می‌بینیم که حکمهای s_1، s_3، و s_6 را می‌توان با هم پردازش کرد. پس از اجرای این حکمها می‌توان حکمهای s_2، s_4، و s_8، و سپس حکمهای s_5 و s_7 را همزمان اجرا کرد. (یا می‌توانیم حکمهای s_2 و s_4 را همزمان و سپس حکمهای s_5، s_7، و s_8 را همزمان پردازش کرد.)



(ب)

```
(s1)   b := 3;
(s2)   c := b+2;
(s3)   a := 1;
(s4)   d := a*b+5;
(s5)   e := d-1;
(s6)   f := 7;
(s7)   e := c+d;
(s8)   g := b*f;
```

(الف)

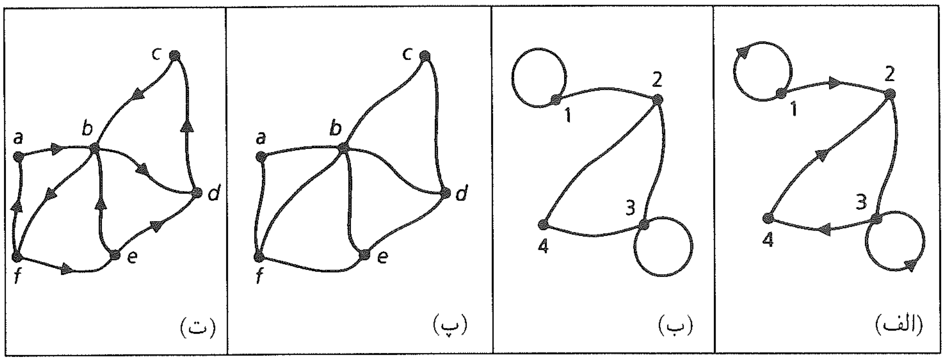
شکل ۳.۷

اکنون می‌خواهیم ببینیم که رابطه‌ها و گرافهای سودار چه پیوندهای متقابلی با هم دارند. اگر مجموعهٔ A و رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی A مفروض باشند، می‌توانیم گراف سوداری مانند G با مجموعه رأسهای A و مجموعه یالهای $E \subseteq A \times A$ بسازیم، که در آن $(a,b) \in E$ هرگاه $a\mathcal{R}b$. این مطلب را در مثال بعد نشان می‌دهیم.

مثال ۲۷.۷ به‌ازای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، فرض کنیم

$$\mathcal{R} = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۲), (۳, ۳), (۳, ۴), (۴, ۲)\}$$

رابطه‌ای روی A باشد. گراف سودار مربوط به $\mathcal{R}$ را در شکل ۴۰۷ (الف) نشان داده‌ایم. اگر سوها را نادیده بگیریم، گراف بیسوی وابسته را که در قسمت (ب) از شکل ۴۰۷ نشان داده شده است به‌دست می‌آوریم. می‌بینیم که این گراف همبند است، یعنی به‌ازای هر دو رأس x و y، با شرط $x \neq y$ مسیری وجود دارد که از x آغاز و به y منتهی شود. چنین مسیری از دنباله‌ای متناهی از یالهای بیسو تشکیل می‌شود؛ مثلاً یالهای $\{۱, ۲\}$ و $\{۲, ۴\}$ مسیری از ۱ به ۴ و یالهای $\{۳, ۴\}$، $\{۴, ۲\}$ و $\{۲, ۱\}$ مسیری از ۳ به ۱ تشکیل می‌دهند. دنبالهٔ یالهای $\{۳, ۴\}$، $\{۴, ۲\}$ و $\{۲, ۳\}$ مسیری از ۳ به ۳ است. چنین مسیر بسته‌ای را دور می‌نامیم. این مثالی از یک دور بیسو به طول سه است، زیرا شامل سه یال است.



شکل ۴.۷

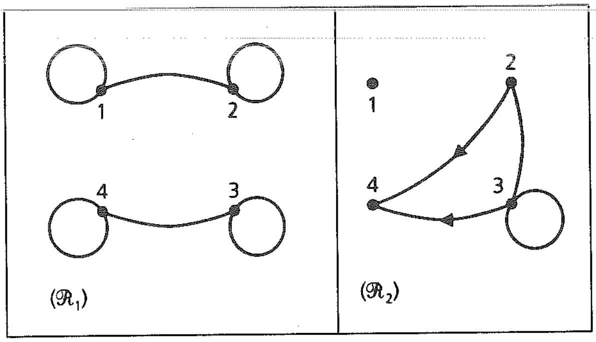
وقتی با مسیرها سروکار داریم (چه درگرافهای سودار و چه درگرافهای بیسو)، هیچ رأسی نمی‌تواند تکرار شود. بنابراین، دنبالهٔ یالهای $\{a, b\}$، $\{b, e\}$، $\{e, f\}$، $\{f, b\}$ و $\{b, d\}$ در شکل ۴۰۷ (پ) را مسیر (ی از a به d) تلقی نمی‌کنیم زیرا در این دنباله بیش از یک بار از رأس b عبور می‌کنیم. در مورد دورها، آغاز و پایان مسیر یک رأس است و مسیر حداقل سه یال دارد. دنبالهٔ یالهای (b, f)، (f, e)، (e, d)، (d, c) و (c, b) در شکل ۴۰۷ (ت) دور سوداری به طول پنج است. در این شکل شش یال (b, f)، (f, e)، (e, b)، (b, d)، (d, c) و (c, b) دور سوداری تشکیل نمی‌دهند، چون رأس b در این دنباله تکرار شده است. اگر سوها را نادیده بگیریم، در قسمت (پ) از شکل نیز شش یال متناظر بیش از یک بار از رأس b می‌گذرند. درنتیجه، این یالها درگراف بیسوی شکل ۴۰۷ (پ) دوری تشکیل نمی‌دهند.

چون می‌خواهیم طول هر دور حداقل سه باشد، طوقه‌ها را دور تلقی نمی‌کنیم. همچنین، ملاحظه می‌کنیم که وجود طوقه درگراف وابسته به همبندی گراف نیست.

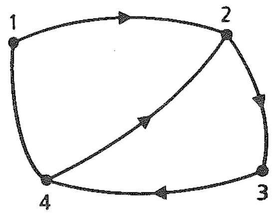
مفهوم بعدی را به سبب ارتباط آن با آنچه قبلاً در بند ۳۰۶ بررسی کردیم، به‌طور صوری تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۵.۷ گراف سودار G روی V را قویاً همبند می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x, y \in V$، با شرط $x \neq y$، مسیری (در G) از x به y متشکل از یالهای سودار وجود داشته باشد، یعنی یا یال سودار (x, y) در G باشد یا به‌ازای عددی مانند $n \in \mathbf{Z}^+$ و رأسهای متمایز $v_۱, v_۲, \cdots, v_n \in V$، یالهای سودار $(x, v_۱)$، $(v_۱, v_۲)$، $\cdots$، (v_n, y) در G باشند.

وقتی در فصل ۶ دربارهٔ ماشینهای قویاً همبند صحبت کردیم این مفهوم را مدّ نظر داشتیم. گراف شکل ۴۰۷ (الف) همبند است ولی قویاً همبند نیست؛ مثلاً هیچ مسیر سوداری از ۳ به ۱ وجود ندارد. در شکل ۵۰۷ گراف سودار با مجموعه رأسهای $V = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ قویاً همبند و بیطوقه است. گراف سودار شکل ۴۰۷ (ت) نیز چنین است.



شکل ۶.۷



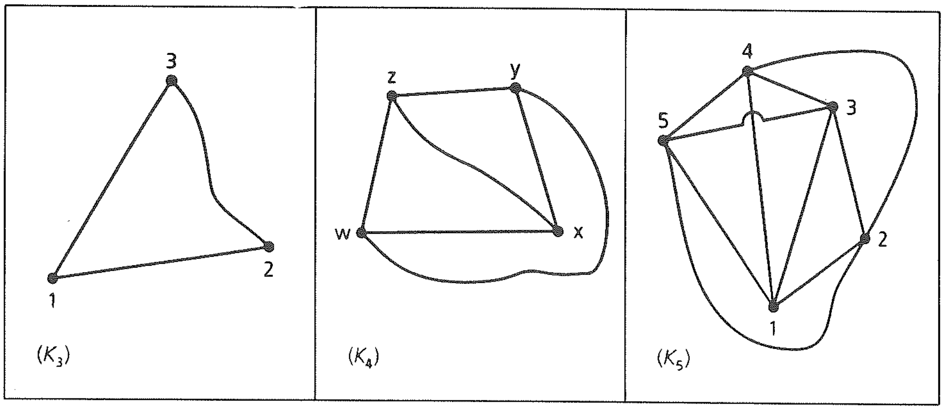
شکل ۵.۷

مثال ۲۸.۷ به‌ازای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، رابطه‌های

$$\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۳, ۴), (۴, ۳), (۴, ۴)\}$$

و $\mathcal{R}_۲ = \{(۲, ۴), (۲, ۳), (۳, ۲), (۳, ۳), (۳, ۴)\}$ را در نظر می‌گیریم. همان‌طور که شکل ۶۰۷ نشان می‌دهد، گرافهای این دو رابطه ناهمبندند. ولی هر یک از این دو اجتماع دو بخش همبند است که مؤلفه‌های آن گراف نامیده می‌شوند. گراف $\mathcal{R}_۱$ از دو مؤلفهٔ قویاً همبند تشکیل شده است. درگراف $\mathcal{R}_۲$ یکی از مؤلفه‌ها رأسی تنهاست و مؤلفهٔ دیگر همبند است ولی قویاً همبند نیست.

مثال ۲۹.۷ گرافهای شکل ۷۰۷ مثالهایی ازگرافهای بیسوی بیطوقه‌اند و به‌ازای هر دو رأس متمایز یک یال دارند. این گرافها گرافهای کامل nرأسی هستند و با K_n نمایش داده می‌شوند. در شکل ۷۰۷ مثالهایی ازگرافهای کامل به‌ترتیب، سه، چهار، و پنج رأسی را داریم. گراف کامل $K_۲$ از دو رأس x و y و یک یال که این دو رأس را به یکدیگر وصل می‌کند تشکیل می‌شود، در حالی‌که $K_۱$ یک رأس دارد ولی یال ندارد زیرا گراف کامل نباید طوقه داشته باشد.



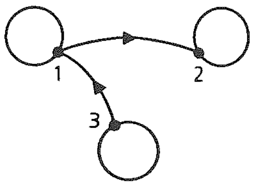
شکل ۷.۷

در K_5 دو یال $\{۳,۵\}$ و $\{۱,۴\}$، یکدیگر را قطع می‌کنند. با وجود این، نقطهٔ تقاطعی که رأس جدیدی به‌وجود آورد ندارند. اگر بخواهیم شکل گراف را طوری تغییر دهیم که این دو یال یکدیگر را قطع نکنند، باز هم با همین مشکل در مورد یالهایی دیگر مواجه می‌شویم. این مشکل را در فصل ۱۱ (جلد سوم) هنگام بررسی مسطح بودن گرافها بررسی خواهیم کرد.

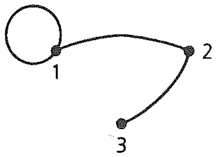
اگر G گرافی روی مجموعه رأسهای V باشد، در این صورت این گراف رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ را روی V تعریف می‌کند به‌طوری که $x\mathcal{R}y$ هرگاه (x,y) یالی در G باشد. درنتیجه، $(۰,۱)$ـ ماتریسی برای G وجود دارد، و چون این ماتریس رابطه از مجاور بودن جفتهایی از رأسها حاصل شده است، آن را ماتریس مجاورت برای G، و همچنین ماتریس رابطه برای $\mathcal{R}$ می‌نامیم.

اکنون ویژگیهای روابط و ساختار گرافهای سودار را به یکدیگر گره می‌زنیم.

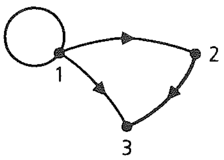
مثال ۳۰.۷ اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $\mathcal{R} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۳,۳),(۳,۱)\}$، در این صورت $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ پادمتقارن و بازتابی روی A است، ولی نه متقارن است و نه ترایا. گراف سودار وابسته به $\mathcal{R}$ پنج یال دارد. سه تا از این یالها طوقه‌هایی هستند که از ویژگی بازتابی بودن $\mathcal{R}$ حاصل شده‌اند. (شکل ۸.۷ را ببینید.) به‌طورکلی، اگر $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی مجموعهٔ متناهی A باشد، آنگاه $\mathcal{R}$ بازتابی است اگر و فقط اگر گراف سودار وابسته به آن در هر رأس (یعنی در هر عنصر A) یک طوقه داشته باشد.



شکل ۸.۷



شکل ۹.۷



شکل ۱۰.۷

مثال ۳۱.۷ رابطهٔ $\mathcal{R} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$ روی $A = \{۱,۲,۳\}$ متقارن است، ولی بازتابی، پادمتقارن یا ترایا نیست. گراف سودار وابسته به $\mathcal{R}$ در شکل ۹۰۷ نشان داده شده است. به‌طورکلی، رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ متناهی A متقارن است اگر و فقط اگر گراف سودار وابسته به آن فقط طوقه و یالهای بیسو داشته باشد.

مثال ۳۲.۷ به‌ازای $A = \{۱,۲,۳\}$، رابطهٔ $\mathcal{R} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۱,۳)\}$ را در نظر می‌گیریم. گراف سودار وابسته به $\mathcal{R}$ در شکل ۱۰۰۷ نشان داده شده است. در اینجا $\mathcal{R}$ ترایا و پادمتقارن است ولی بازتابی یا متقارن نیست. گراف سودار نشان می‌دهد که رابطه‌ای روی مجموعهٔ A ترایاست اگر و فقط اگر گراف سودار وابسته به آن در شرط زیر صدق کند: به‌ازای هر $x,y \in A$، اگر در گراف وابسته، یک مسیر (سودار) از x به y وجود داشته باشد، آنگاه یال (x,y) نیز در این گراف موجود باشد. [در اینجا $(۱,۲)$، $(۲,۳)$ مسیر (سودار) از ۱ به ۳ است، و یال $(۱,۳)$ را نیز به‌سبب ترایا بودن داریم.] توجه داشته باشید که گراف سودار شکل ۳۰۷ مربوط به مثال ۲۶۰۷ نیز این ویژگی را دارد.

رابطهٔ $\mathcal{R}$ پادمتقارن است، زیرا در $\mathcal{R}$ هیچ دو جفت مرتبی مانند (x,y) و (y,x) به‌طوری که $x \neq y$، وجود ندارد. برای تشخیص پادمتقارن بودن با استفاده از گراف سودار شکل ۱۰۰۷، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر دو رأس x و y با شرط $x \neq y$، این گراف شامل حداکثر یکی از دو یال (x,y) یا (y,x) است. بنابراین، یال بیسویی جز طوقه‌ها وجود ندارد.

آخرین مثال این بند دربارهٔ روابط هم‌ارزی است.

مثال ۳۳.۷ به‌ازای $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$، هر یک از روابط زیر رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است:

$$\mathcal{R}_۱ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۴),(۵,۵)\}$$

$$\mathcal{R}_۲ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)$$
$$(۴,۴),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۵)\}$$

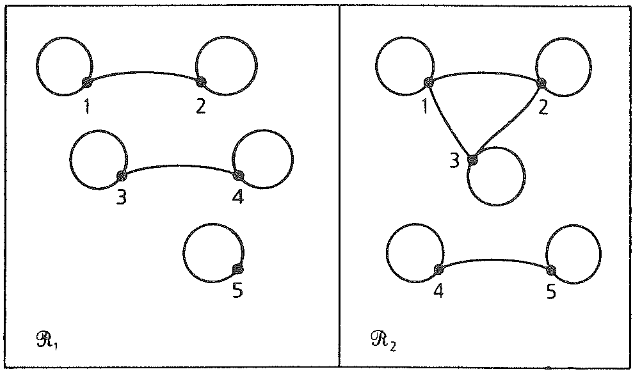
گرافهای وابسته به این رابطه‌ها در شکل ۱۱۰۷ نشان داده شده‌اند. در هرگراف اگر طوقه‌ها را نادیده بگیریم، می‌بینیم که گراف به مؤلفه‌هایی نظیر $K_۱$، $K_۲$، و $K_۳$ تجزیه می‌شود. به‌طورکلی، رابطه‌ای روی مجموعهٔ متناهی A رابطهٔ هم‌ارزی است اگر و فقط اگر گراف وابسته به آن گراف کاملی باشد که در هر رأس طوقه‌ای به آن افزوده شده باشد، یا از اجتماع دوبه‌دو جدا از هم گرافهای کاملی تشکیل شده باشد که در هر رأس طوقه‌ای به آنها افزوده شده باشد.

تمرینات ۲.۷

۱. به‌ازای $A = \{۱,۲,۳,۴\}$، فرض کنیم $\mathcal{R}$ و $\mathcal{S}$ روابطی روی A باشند که با $\mathcal{R} = \{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۴,۴)\}$ و $\mathcal{S} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۳),(۲,۴)\}$ تعریف شده‌اند. $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$، $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$، $\mathcal{R}^۲$، $\mathcal{R}^۳$، $\mathcal{S}^۲$، و $\mathcal{S}^۳$ را بیابید.

۲. اگر $\mathcal{R}$ رابطه‌ای بازتابی روی مجموعهٔ A باشد، ثابت کنید $\mathcal{R}^۲$ نیز روی A بازتابی است.

۳. در قضیهٔ ۱۰۷ برهانی برای شمول در جهت عکس ارائه کنید.



شکل ۱۱.۷

۴. به‌ازای مجموعه‌های A، B، و C روابط $\mathcal{R}_۱ \subseteq A \times B$، $\mathcal{R}_۲ \subseteq B \times C$ و $\mathcal{R}_۳ \subseteq B \times C$ را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید (الف) $\mathcal{R}_۱ \circ (\mathcal{R}_۲ \cup \mathcal{R}_۳) = (\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲) \cup (\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۳)$ ؛ و (ب) $\mathcal{R}_۱ \circ (\mathcal{R}_۲ \cap \mathcal{R}_۳) \subseteq (\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲) \cap (\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۳)$. (مثالی بیاورید که نشان دهد شمول قسمت (ب) می‌تواند سره باشد.)

۵. برای رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A، تعریف می‌کنیم $\mathcal{R}^۰ = \{(a,a) \mid a \in A\}$. اگر $|A| = n$، ثابت کنید دو عدد مانند $s,t \in \mathbf{N}$ با شرط $۰ \leqslant s < t \leqslant ۲^{n^۲}$ وجود دارند به‌طوری‌که $\mathcal{R}^s = \mathcal{R}^t$.

۶. به‌ازای $A = \{۱,۲,۳,۴\}$، فرض‌کنیم $\mathcal{R} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۴)\}$ رابطه‌ای روی A باشد. دو رابطه مانند $\mathcal{S}$ و $\mathcal{T}$ روی A چنان بیابید که $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$ ولی $\mathcal{R}\circ\mathcal{S} = \mathcal{R}\circ\mathcal{T} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۴)\}$.

۷. چند $(۱,۰)$ـ ماتریس ۶×۶ مانند A وجود دارد به‌طوری که $A = A^{\mathrm{tr}}$؟

۸. اگر $E = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ، چند $(۱,۰)$ـ ماتریس مانند F وجود دارد به‌طوری‌که $E \leqslant F$؟

۹. مجموعه‌های $A = \{a_۱, a_۲ \cdots, a_m\}$، $B = \{b_۱, b_۲, \cdots, b_n\}$ و $C = \{c_۱, c_۲, \cdots, c_p\}$ را با همین ترتیب برای عنصرهای هر مجموعه در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\mathcal{R}_۱$ رابطه‌ای از A در B و $\mathcal{R}_۲$ رابطه‌ای از B در C باشد. به‌ازای $i = ۱,۲$، ماتریس رابطه برای $\mathcal{R}_i$، $M(\mathcal{R}_i)$ است. سطرها و ستونهای این ماتریسها را به‌طور مناسب با عنصرهای مجموعه‌های A، B، و C بنابر ترتیب مذکور نشان‌گذاری می‌کنیم. ماتریس رابطه برای $\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲$ ماتریس $m \times p$ی $M(\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲)$ است، که در آن عنصرهای A (با همان ترتیب مذکور) سطرها و عنصرهای C (باز هم با همان ترتیب مذکور) ستونها را نشان‌گذاری کرده‌اند.
نشان دهید به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant m$ و هر $۱ \leqslant j \leqslant p$، درایه‌های سطر iام و ستون jام در $M(\mathcal{R}_۱) \cdot M(\mathcal{R}_۲)$ و $M(\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲)$ برابر هستند. [بنابراین $M(\mathcal{R}_۱) \cdot M(\mathcal{R}_۲) = M(\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲)$.]

۱۰. فرض کنیم A مجموعه‌ای باشد به‌طوری که $|A| = n$ و ترتیب نوشتن عنصرهای آن را ثابت می‌گیریم. به‌ازای $\mathcal{R} \subseteq A \times A$، فرض کنیم $M(\mathcal{R})$ ماتریس رابطهٔ متناظر باشد.
الف) ثابت کنید $M(\mathcal{R}) = ۰$ (۰ ماتریس $n \times n$ای است که همهٔ درایه‌هایش ۰ است) اگر و فقط اگر $\mathcal{R} = \varnothing$.

ب) ثابت کنید $M(\mathcal{R}) = 1$ (1 ماتریس $m \times n$ای است که همهٔ درایه‌هایش ۱ است) اگر و فقط اگر $\mathcal{R} = A \times A$.

پ) با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۹، همراه با اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید به‌ازای هر $m \in \mathbf{Z}^+$، $M(\mathcal{R}^m) = [M(\mathcal{R})]^m$.

۱۱. قسمتهای (الف)، (ب)، و (ت) از قضیهٔ ۲۰۷ را ثابت کنید.

۱۲. با استفاده از قضیهٔ ۲۰۷ برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی ابداع کنید) که روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ای متناهی را شناسایی کند.

۱۳. الف) گراف سودار $G_1 = (V_1, E_1)$ را که در آن $V_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ و

$$E_1 = \{(a,b), (a,d), (b,c), (b,e), (d,b), (d,e), (e,c), (e,f), (f,d)\}$$

رسم کنید.

ب) گراف بیسوی $G_2 = (V_2, E_2)$ را که در آن $V_2 = \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$ و

$$E_2 = \{\{s,t\}, \{s,u\}, \{s,x\}, \{t,u\}, \{t,w\}, \{u,w\},$$
$$\{u,x\}, \{\nu,w\}, \{\nu,x\}, \{\nu,y\}, \{w,z\}, \{x,y\}\}$$

رسم کنید.

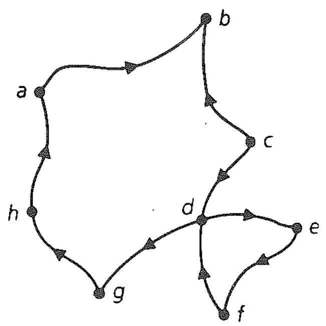
۱۴. برای گراف سودار $G = (V, E)$ در شکل ۱۲۰۷، راست یا دروغ بودن هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) رأس c مبداءِ دو یال در G است.

ب) رأس g مجاور به رأس h است.

پ) در G مسیر سوداری از d به b وجود دارد.

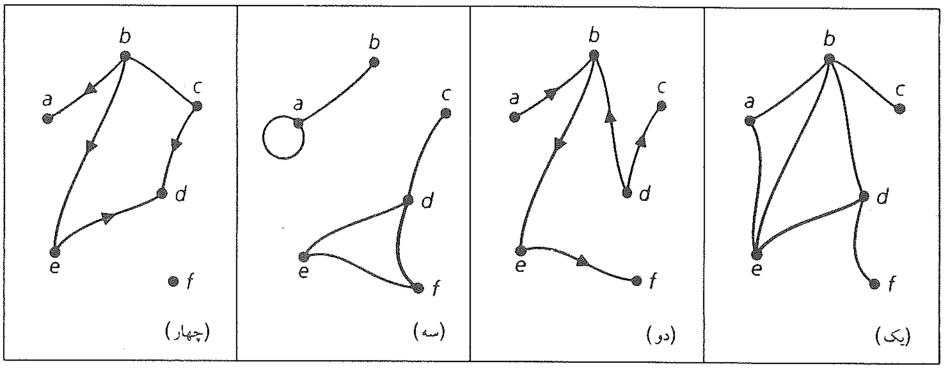
ت) در G دو دور سودار وجود دارد.



شکل ۱۲.۷

۱۵. به‌ازای $A = \{a, b, c, d, e, f\}$، هر یک از گرافها یا گرافهای سودار شکل ۱۳۰۷ رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ روی A را نمایش می‌دهد. در هر حالت، رابطهٔ $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ و ماتریس رابطهٔ وابسته به آن، $M(\mathcal{R})$، را تعیین کنید.

۱۶. به‌ازای $A = \{\nu, w, x, y, z\}$، هر یک از ماتریسهای زیر (۰، ۱)ـ ماتریس رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ روی A است. در اینجا سطرها (از بالا به پایین) و ستونها (از چپ به راست) با همان ترتیب v، w، x، y، z نشان‌گذاری



شکل ۱۳.۷

شده‌اند. در هر حالت، رابطهٔ $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ را تعیین کنید و گراف سودار وابسته به $\mathcal{R}$ را رسم کنید.

الف) $M(\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ب) $M(\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

۱۷. فرض کنیم $G = (V, E)$ گراف سوداری با ماتریس مجاورت M باشد. چگونه می‌توان با توجه به ماتریس M رأسی تنها را در G تشخیص داد؟

۱۸. الف) فرض کنیم $G = (V, E)$ گراف سوداری باشد که در آن $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و $E = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 7\}$.

یک) این گراف چند یال دارد؟

دو) در G چهار مسیر سودار از ۱ به ۷ عبارت‌اند از:

۱) $(1, 7)$؛ ۲) $(1, 3)$؛ $(3, 5)$؛ $(5, 6)$، $(6, 7)$؛

۳) $(1, 2)$، $(2, 3)$، $(3, 7)$؛ ۴) $(1, 4)$، $(4, 7)$.

کلاً در G چند مسیر سودار از ۱ به ۷ وجود دارد؟

ب) اکنون فرض کنیم $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geqslant 2$، و گراف سودار $G = (V, E)$ را که در آن $V = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ و $E = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ در نظر می‌گیریم.

یک) $|E|$ را تعیین کنید.

دو) در G چند مسیر سودار از ۱ به n وجود دارد؟

سه) اگر $a, b \in \mathbf{Z}^+$ و $1 \leqslant a < b \leqslant n$، در G چند مسیر سودار از a به b وجود دارد؟ (می‌توانید تمرین ۲۰ را در بند ۱۰۳ ببینید.)

۱۹. به‌ازای $A = \{۱,۲,۳,۴\}$، فرض کنیم $\mathcal{R} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۳,۳),(۳,۴)\}$ رابطه‌ای روی A باشد. گراف سودار G روی A را که وابسته به $\mathcal{R}$ است رسم کنید. همین کار را برای $\mathcal{R}^۲$، $\mathcal{R}^۳$، و $\mathcal{R}^۴$ نیز انجام دهید.

۲۰. به‌ازای $|A| = ۵$، چند رابطه مانند $\mathcal{R}$ روی A وجود دارد؟ چندتا از این روابط متقارن‌اند؟

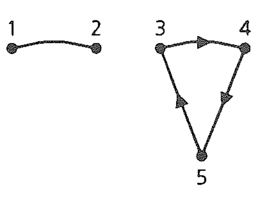
۲۱. فرض کنیم $|A| = ۵$. (الف) چند گراف سودار می‌توان روی A ساخت؟ (ب) چند تا از گرافهای قسمت (الف) در واقع بیسو هستند؟

۲۲. هر یک از گرافهای کامل $K_۶$، $K_۷$، و K_n، $n \in \mathbf{Z}^+$ چند یال (بیسو) دارد؟

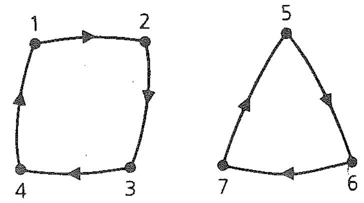
۲۳. الف) با حفظ ترتیب عنصرها به‌صورت ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، (۰, ۱)ـ ماتریسهای رابطه را برای روابط هم‌ارزی مثال ۳۳.۷ تعیین کنید.

ب) آیا نتایج قسمت (الف) را می‌توان تعمیم داد؟

۲۴. الف) فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ باشد به‌طوری‌که مؤلفه‌های گراف سودار وابسته به $\mathcal{R}$ دورهای سوداری باشند که در شکل ۱۴.۷ نشان داده شده‌اند. کوچکترین عدد صحیح $n > ۱$ را بیابید به‌طوری که $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}$. کوچکترین مقدار $n > ۱$ که به‌ازای آن گراف $\mathcal{R}^n$ شامل طوقه است چیست؟ آیا ممکن است که گراف $\mathcal{R}^n$ فقط از طوقه‌ها تشکیل شده باشد؟



شکل ۱۵.۷



شکل ۱۴.۷

ب) اگر گراف سودار وابسته به رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,\cdots,۹,۱۰\}$ گراف شکل ۱۵.۷ باشد، به همان پرسشهای قسمت (الف) در مورد $\mathcal{R}$ پاسخ دهید.

پ) آیا نتایج قسمتهای (الف) و (ب) چیزی را به‌طورکلی نشان می‌دهند؟

۲۵. گراف تقدمی برای قطعه برنامهٔ کامپیوتری زیر رسم کنید:

$(s_۱)$ a := ۱;
$(s_۲)$ b := ۲;
$(s_۳)$ a := a + ۳;
$(s_۴)$ c := b;
$(s_۵)$ a := ۲ * a − ۱;
$(s_۶)$ b := a * c;
$(s_۷)$ c := ۷;
$(s_۸)$ d := c + ۲;

۳.۷ ترتیبهای جزئی: نمودارهای هاسه

اگر از کودکان بخواهید اعدادی را که می‌شناسند بیان کنند، همواره پاسخ «۱، ۲، ۳، ...» را خواهید شنید. کودکان

بی‌آنکه متوجه باشند، اعداد را به ترتیب صعودی بیان می‌کنند. در این بند نگاه دقیقتری به مفهوم ترتیب می‌افکنیم، که البته می‌توانستیم آن را دانسته فرض کنیم. کار را با مشاهدهٔ نکاتی دربارهٔ مجموعه‌های $\mathbf{N}$، $\mathbf{Z}$، $\mathbf{Q}$، $\mathbf{R}$، و $\mathbf{C}$ آغاز می‌کنیم.

مجموعهٔ $\mathbf{N}$ نسبت به عملهای دوتایی جمع و ضرب (معمولی) بسته است، ولی اگر در جستجوی جوابی برای معادلهٔ $x + 5 = 2$ باشیم، می‌بینیم که هیچ‌یک از عنصرهای $\mathbf{N}$ جواب این معادله نیست. بنابراین، $\mathbf{N}$ را به $\mathbf{Z}$ توسیع می‌دهیم، که در آن می‌توانیم، علاوه بر جمع و ضرب، عمل تفریق را نیز انجام دهیم. ولی باز هم هنگام حل معادلهٔ $2x + 3 = 4$ با دشواری مواجه می‌شویم. اگر $\mathbf{Z}$ را به $\mathbf{Q}$ توسیع دهیم، می‌توانیم تقسیم بر غیر صفر را نیز علاوه بر اعمال دیگر انجام دهیم. باز خیلی زود متوجه می‌شویم که $\mathbf{Q}$ نیز ناکافی است؛ معادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ ما را ملزم به معرفی اعداد حقیقی گنگ $\pm\sqrt{2}$ می‌کند. حتی پس از توسیع $\mathbf{Q}$ به $\mathbf{R}$، باز برای حل $x^2 + 1 = 0$ دردسر تازه‌ای خواهیم داشت. سرانجام به $\mathbf{C}$، یعنی دستگاه اعداد مختلط، می‌رسیم که در آن هر معادلهٔ چندجمله‌ای به‌صورت $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ را با فرض $c_i \in \mathbf{C}$ به‌ازای $0 \leqslant i \leqslant n$، $n > 0$ و $c_n \neq 0$، می‌توان حل کرد. (این نتیجه را قضیهٔ بنیادی جبر می‌نامند. اثبات آن نیازمند مطالبی دربارهٔ توابعی از یک متغیر مختلط است و در اینجا این قضیه را ثابت نمی‌کنیم.) به‌تدریج که از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{C}$ می‌رویم، توانایی بیشتری در حل معادلات چندجمله‌ای به‌دست می‌آوریم؛ اما هنگام رفتن از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{C}$ چیزی را از دست داده‌ایم. در $\mathbf{R}$، به‌ازای هر دو عدد r_1 و r_2 با شرط $r_1 \neq r_2$، می‌دانیم که یا $r_1 < r_2$ یا $r_2 < r_1$. اما در $\mathbf{C}$ داریم $(2 + i) \neq (1 + 2i)$، ولی چه معنایی می‌توانیم برای گزاره‌ای نظیر «$(2 + i) < (1 + 2i)$» قائل شویم؟ در این دستگاه اعداد توانایی «مرتب» کردن عنصرها را از دست داده‌ایم.

اکنون که می‌خواهیم مفهوم ترتیب را دقیقتر بررسی کنیم، مانند بند ۱۰۷ پیش می‌رویم و فرض می‌کنیم A مجموعه‌ای باشد که رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ روی آن تعریف شده است. جفت $(A, \mathcal{R})$ را مجموعهٔ جزئاً مرتب می‌نامیم، هرگاه $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی یا یک رابطهٔ ترتیبی جزئی، روی A باشد (همان‌گونه که در تعریف ۶۰۷ ارائه شد). وقتی می‌گوییم A مجموعه‌ای جزئاً مرتب است مقصود این است که ترتیبی جزئی مانند $\mathcal{R}$ روی A وجود دارد که A را مجموعه‌ای جزئاً مرتب می‌کند. در مثالهای ۱۰۷ (الف)، ۲۰۷، ۱۱۰۷، و ۱۵۰۷ مثالهایی از مجموعه‌های جزئاً مرتب داده شده است.

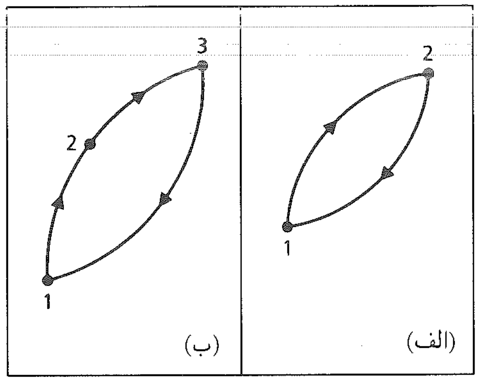
مثال ۳٤.۷ فرض کنیم A مجموعهٔ درسهایی باشد که در دانشکده‌ای ارائه می‌شوند. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که x و y یک درس باشند یا x پیشنیاز y باشد. آنگاه $\mathcal{R}$، A را مجموعه‌ای جزئاً مرتب می‌کند.

مثال ۳۵.۷ $\mathcal{R}$ را روی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که $x \mid y$، یعنی در صورتی که عدد x عدد y را عاد کند. آنگاه $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4)\}$ ترتیبی جزئی است و $(A, \mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب است. (این مشابه آن چیزی است که در مثال ۱۵۰۷ آموختیم.)

مثال ۳۶.۷ هنگام ساختن یک خانه بعضی از کارها، مانند حفر پی، باید پیش از مراحل دیگر ساختمان انجام شوند. اگر A مجموعهٔ کارهایی باشد که باید برای ساختن خانه انجام داد، می‌توانیم رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که x و y یک کار باشند یا کار x باید پیش از آغاز کار y تمام شده باشد. به این طریق ترتیبی

را بر عنصرهای A اعمال می‌کنیم که A را مجموعه‌ای جزئاً مرتب می‌کند و گاهی آن را یک شبکهٔ PERT[1] (فن ارزیابی و مرور برنامه) می‌نامند. (این نوع شبکه‌ها در دههٔ ۱۹۵۰ میلادی برای غلبه بر پیچیدگیهای سازماندهی فعالیتهای انفرادی بسیاری که برای انجام پروژه‌هایی در مقیاس بسیار بزرگ لازم‌اند ابداع شدند. این فن در واقع برای اولین بار در نیروی دریایی ایالات متحد امریکا برای هماهنگ کردن پروژه‌های بسیاری که برای ساختن زیردریایی پولاریس[2] لازم بود ابداع و به‌کار گرفته شد.)

نمودارهای شکل ۱۶.۷ را در نظر می‌گیریم. اگر قسمت (الف) بخشی از گراف سودار وابسته به رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ باشد، در این صورت چون $((۱,۲),(۲,۱)) \in \mathcal{R}$ و $۱ \neq ۲$، $\mathcal{R}$ نمی‌تواند پادمتقارن باشد. در قسمت (ب) اگر نمودار بخشی از گراف رابطه‌ای ترایا مانند $\mathcal{R}$ باشد، در این صورت $(۱,۲),(۲,۳) \in \mathcal{R} \Rightarrow (۱,۳) \in \mathcal{R}$. چون $(۳,۱) \in \mathcal{R}$ و $۳ \neq ۱$، $\mathcal{R}$ پادمتقارن نیست و بنابراین، $\mathcal{R}$ نمی‌تواند ترتیبی جزئی باشد.



شکل ۱۶.۷

با توجه به این ملاحظات، اگر رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A مفروض بوده و اگر فرض کنیم G گراف سودار وابسته به $\mathcal{R}$ باشد، می‌بینیم که

یک) اگر G دو یال به‌صورت (a,b) و (b,a)، به‌ازای $a,b \in A$ با شرط $a \neq b$، داشته باشد، یا

دو) اگر $\mathcal{R}$ ترایا باشد و G دور سوداری (به‌طول بزرگتر از یا برابر با سه) داشته باشد،

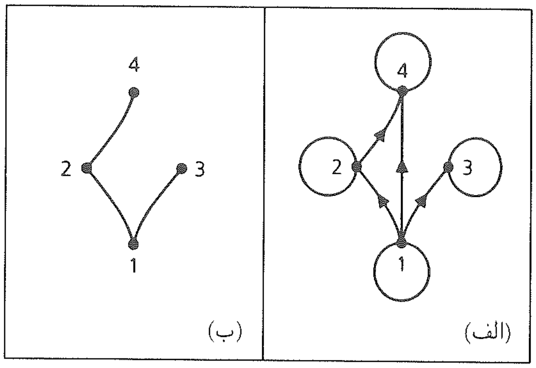
آنگاه رابطهٔ $\mathcal{R}$ نمی‌تواند پادمتقارن باشد بنابراین، $(A,\mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب نیست.

مثال ۳۷.۷ گراف سودار متناظر با ترتیب جزئی مثال ۳۵.۷ را در نظر می‌گیریم. شکل ۱۷.۷ (الف) نمایش نموداری $\mathcal{R}$ است. قسمت (ب) از این شکل، نموداری ساده‌تر راکه نمودار هاسه برای $\mathcal{R}$ نامیده می‌شود نشان می‌دهد.

وقتی می‌دانیم که رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی روی مجموعهٔ A است، می‌توانیم طوقه‌های موجود در رأسهای گراف سودار متناظر با آن را حذف کنیم. چون $\mathcal{R}$ ترایا نیز هست، وجود یالهای $(۱,۲)$ و $(۲,۴)$ برای تضمین وجود یال $(۱,۴)$ کافی است و بنابراین، لزومی ندارد که این یال را در گراف بگنجانیم. به این ترتیب، نمودار شکل ۱۷.۷ (ب) را به‌دست می‌آوریم.

---

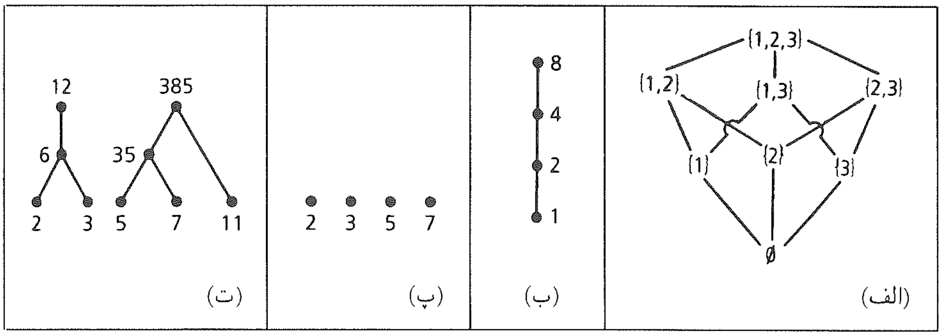
1. Program Evaluation and Review Technique 2. Polaris



شکل ۱۷.۷

به‌طورکلی، اگر $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی روی مجموعهٔ متناهی A باشد. نمودار هاسه برای $\mathcal{R}$ را چنین رسم می‌کنیم: اگر $x, y \in A$ و $x\mathcal{R}y$ و، مهمتر از آن، اگر عنصر دیگری مانند $z \in A$ وجود نداشته باشد به‌طوری که $x\mathcal{R}z$ و $z\mathcal{R}y$ (یعنی چیزی «بین» x و y نباشد)، پاره‌خطی از x به y رسم می‌کنیم. اگر قرارداد کنیم که نمودار را از پایین به بالا بخوانیم، در این صورت لزومی ندارد که هیچ یالی را سودار کنیم.

مثال ۳۸.۷ در شکل ۱۸.۷ نمودارهای هاسهٔ چهار مجموعهٔ جزئاً مرتب زیر را داریم: (الف) با فرض $\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳\}$ و $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$ ، $\mathcal{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه بودن روی A است. (ب) در اینجا $\mathcal{R}$ رابطهٔ «عاد کردن» است که بر $A = \{۱, ۲, ۴, ۸\}$ اعمال می‌شود. (پ) و (ت) در اینجا همان رابطهٔ قسمت (ب)، در قسمت (پ) بر $\{۲, ۳, ۵, ۷\}$ اعمال می‌شود و در قسمت (ت) بر $\{۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۱۱, ۱۲, ۳۵, ۳۸۵\}$. قسمت (پ) نشان می‌دهد ممکن است همهٔ رأسهای نمودار هاسه رأسهای تنها باشند؛ همچنین، چنانکه قسمت (ت) نشان می‌دهد، نمودار هاسه ممکن است دو (یا چند) بخش همبند داشته باشد.



شکل ۱۸.۷

مثال ۳۹.۷ فرض کنیم $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$. رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی A چنین تعریف شده است: $x\mathcal{R}y$ هرگاه $x \leqslant y$؛ $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی است. این رابطه A را مجموعه‌ای جزئاً مرتب می‌کند که می‌توانیم آن را با $(A, \leqslant)$ نشان دهیم. اگر $B = \{۱, ۲, ۴\} \subset A$، در این صورت،

$$(B \times B) \cap \mathcal{R} = \{(۱,۱), (۲,۲), (۴,۴), (۱,۲), (۱,۴), (۲,۴)\}$$

ترتیبی جزئی روی B است.

به‌طورکلی، اگر $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی روی A باشد، آنگاه به‌ازای هر زیرمجموعهٔ B از A، $(B \times B) \cap \mathcal{R}$ مجموعهٔ B را مجموعه‌ای جزئاً مرتب می‌کند، که در آن ترتیب جزئی روی B به‌وسیلهٔ $\mathcal{R}$ القا شده است.

اکنون نوع خاصی از ترتیب جزئی را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۶.۷ اگر $(A, \mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد، می‌گوییم A تماماً مرتب است هرگاه به‌ازای هر $x, y \in A$، داشته باشیم $x\mathcal{R}y$ یا $y\mathcal{R}x$.

در این حالت $\mathcal{R}$ را ترتیبی تام می‌نامیم.

مثال ۴۰.۷

الف) روی مجموعهٔ $\mathbb{N}$، رابطهٔ $\mathcal{R}$ را چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$ هرگاه $x \leqslant y$؛ $\mathcal{R}$ ترتیبی تام است.

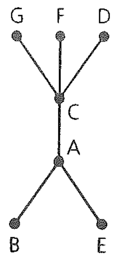
ب) اگر رابطهٔ زیرمجموعه بودن را به $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$، که در آن $\mathcal{U} = \{۱,۲,۳\}$، اعمال کنیم ترتیبی جزئی به‌دست می‌آوریم که ترتیب تام نیست. $\{۱,۲\}, \{۱,۳\} \in A$ ولی هیچ‌یک از $\{۱,۲\} \subseteq \{۱,۳\}$ یا $\{۱,۳\} \subseteq \{۱,۲\}$ درست نیست.

پ) نمودار هاسه در قسمت (ب) از شکل ۱۸۰۷ ترتیبی تام را نشان می‌دهد.

آیا مفاهیم ترتیب جزئی و ترتیب تام در مسائل صنعتی نیز پیش می‌آیند؟

فرض کنیم کارخانه‌داری می‌خواهد محصول جدیدی را به بازار دهد و باید مجموعه‌ای از دستورالعملها را برای مونتاژ آن تنظیم کند. مونتاژ این محصول جدید در هفت مرحلهٔ A ، B ، C ، $\cdots$ ، G انجام می‌شود و این مراحل باید طبق ترتیبی جزئی که نمودار هاسهٔ آن در شکل ۱۹۰۷ نشان داده شده است، انجام شوند. می‌بینیم که، مثلاً، پیش از آنکه بتوانیم مرحلهٔ C را آغاز کنیم باید A ، B، و E کامل شده باشند. چون مجموعهٔ دستورالعملها باید متشکل از فهرست این مراحل، که به‌صورت ۱ ، ۲ ، ۳ ، $\cdots$ ، ۷ شماره‌گذاری شده‌اند، باشد کارخانه‌دار چگونه باید فهرست را بنویسد تا مطمئن باشد که ترتیب جزئی متناظر با نمودار هاسه حفظ می‌شود؟

درواقع این پرسش را مطرح کرده‌ایم که آیا می‌توانیم با مفروض بودن ترتیب جزئی $\mathcal{R}$، که با نمودار هاسه داده شده است، ترتیبی تام مانند $\mathcal{T}$ روی مجموعهٔ مراحل مذکور بیابیم به‌طوری‌که $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$. پاسخ مثبت است، و فن مورد نیاز برای این منظور مرتب‌سازی توپولوژیکی نامیده می‌شود.



شکل ۱۹.۷

الگوریتم مرتب‌سازی توپولوژیکی
(برای ترتیب جزئی $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A با شرط $|A| = n$)
مرحلهٔ ۱: قرار می‌دهیم $k = 1$. فرض کنیم H_1 نمودار هاسه برای ترتیب جزئی مفروض باشد.
مرحلهٔ ۲: رأسی مانند ν_k را در H_k چنان برمی‌گزینیم که در H_k هیچ یالی (به‌طور ضمنی سودار) از ν_k آغاز نشود.
مرحلهٔ ۳: اگر $k = n$، فرایند کامل است و ترتیب تام

$$T : \nu_n < \nu_{n-1} < \cdots < \nu_2 < \nu_1$$

را داریم که شامل $\mathcal{R}$ است.
اگر $k < n$، در این صورت رأس ν_k و همهٔ یالهای (به‌طور ضمنی سودار) H_k را که به ν_k ختم می‌شوند از H_k کنار می‌گذاریم. نمودار حاصل را H_{k+1} می‌نامیم. یک واحد به k می‌افزاییم و به مرحلهٔ ۲ باز می‌گردیم.

در اینجا الگوریتم را به‌صورت فهرست دقیقی از دستورالعملها ارائه کردیم، بی‌آنکه اشاره‌ای به پیاده‌سازی آن در زبان کامپیوتری خاصی کرده باشیم.

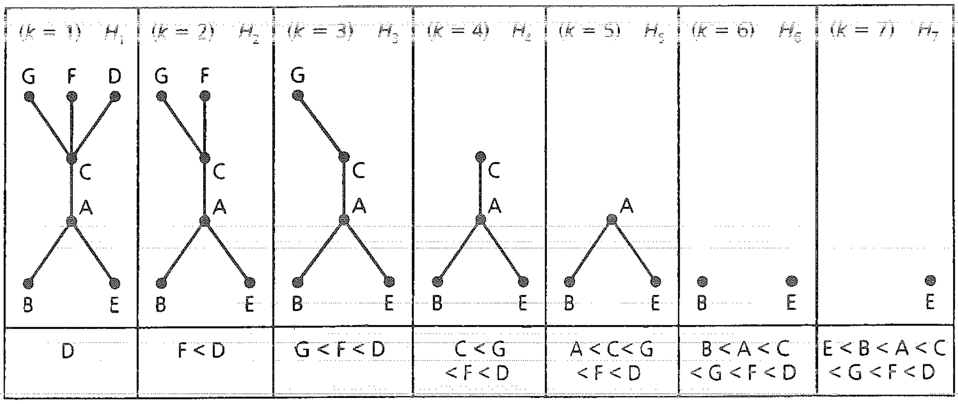
پیش از اعمال این الگوریتم به مسأله‌ای که پیش‌رو داریم، ملاحظه کنید که در مرحلهٔ ۲، واژهٔ «رأس» را عمداً همراه با «یای» نکره به‌کار برده‌ایم. این نشان می‌دهد که گزینش لزوماً یکتا نیست و ممکن است چند ترتیب تام متفاوت شامل $\mathcal{R}$ به‌دست آوریم. همچنین، در مرحلهٔ ۳، برای رأسهای ν_{i-1}، $2 \leqslant i \leqslant n$، نمادگذاری $\nu_i < \nu_{i-1}$ را به این سبب به‌کار گرفتیم که بهتر از نمادگذاری $\nu_i T \nu_{i-1}$ عبارت «ν_i قبل از ν_{i-1}» را تداعی می‌کند.

در شکل ۲۰۰۷، با نمودارهای هاسه نشان داده‌ایم که چگونه ترتیب جزئی نمایانده شده در شکل ۱۹۰۷ با به‌کارگیری الگوریتم مرتب‌سازی توپولوژیکی به‌تدریج به‌ترتیب تام تحول می‌یابد. زیر هر نمودار قسمتی از ترتیب تام را که تا آن مرحله ایجاد شده است نوشته‌ایم.

اگر کارخانه‌دار دستورالعملها را در فهرستی به‌صورت $E - 1$، $B - 2$، $A - 3$، $C - 4$، $G - 5$، $F - 6$، و $D - 7$ بنویسد، ترتیبی تام خواهد داشت که ترتیب جزئی لازم برای مونتاژ درست را حفظ می‌کند. این ترتیب تام یکی از ۱۲ پاسخ ممکن است.

این الگوریتم روالی را به‌دست می‌دهد که کاربرد آن متوالیاً اندازهٔ مسأله را کاهش می‌دهد؛ این نوع الگوریتمها در ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی معمول‌اند.

در الگوریتم مرتب‌سازی توپولوژیکی دیدیم که چگونه نمودار هاسه برای تعیین ترتیبی تام که مجموعهٔ جزئاً



شکل ۲۰.۷

مرتب مفروضی مانند $(A,\mathcal{R})$ را در بر داشته باشد، به‌کارگرفته شد. این الگوریتم ما را به تعمق بیشتر در ویژگیهای ترتیب جزئی سوق می‌دهد. در آغاز تأکید خاصی بر رأس v_k در مرحلهٔ ۲ از الگوریتم خواهیم داشت. چه فعل و انفعالی بین مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\mathcal{R})$ و نمودار هاسهٔ آن وجود دارد که براساس آن بتوانیم رأسی مانند v_k را برحسب $\mathcal{R}$ توصیف کنیم؟ این پرسش ما را به مفاهیم زیر هدایت می‌کند.

تعریف ۱۷.۷ اگر $(A,\mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد، عنصر $x \in A$ را یک عنصر ماکسیمال A می‌نامیم. هرگاه به‌ازای هر $a \in A$، $a \neq x$ مستلزم $x \not\mathcal{R} a$ باشد. عنصر $y \in A$ را یک عنصر مینیمال A می‌نامیم هرگاه $b \in A$ و $b \neq y$ مستلزم $b \not\mathcal{R} y$ باشد.

اگر عکس نقیض گزارهٔ نخست در تعریف ۱۷۰۷ را به‌کارگیریم، می‌توانیم بگوییم که x (متعلق به A) عنصری ماکسیمال است هرگاه به‌ازای هر $a \in A$، $x\mathcal{R}a$ مستلزم $x = a$ باشد. به‌همین ترتیب $y \in A$ عنصری مینیمال است هرگاه به‌ازای هر $b \in A$، $b\mathcal{R}y$ مستلزم $b = y$ باشد.

مثال ۴۱.۷ فرض کنیم $\mathcal{U} = \{۱,۲,۳\}$ و $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

الف) فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه بودن روی A باشد. در این صورت برای مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\subseteq)$، $\mathcal{U}$ ماکسیمال و $\varnothing$ مینیمال است.

ب) B را گردایهٔ زیرمجموعه‌های سرهٔ $\{۱,۲,۳\}$ می‌گیریم. فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه بودن روی B باشد. در مجموعهٔ جزئاً مرتب $(B,\subseteq)$، مجموعه‌های $\{۱,۲\}$، $\{۱,۳\}$، و $\{۲,۳\}$ عنصرهای ماکسیمال‌اند؛ باز هم $\varnothing$ تنها عنصر مینیمال است.

مثال ۴۲.۷ اگر $\mathcal{R}$ رابطهٔ «کوچکتر از یا برابر با» روی مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ باشد، می‌بینیم که $(\mathbf{Z},\leqslant)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب است که نه عنصر ماکسیمال و نه عنصر مینیمال. در حالی‌که مجموعهٔ جزئاً مرتب $(\mathbf{N},\leqslant)$ دارای عنصر مینیمال ۰ است ولی عنصر ماکسیمال ندارد.

مثال ۴۳.۷ وقتی دوباره ترتیبهای جزئی قسمتهای (ب)، (پ)، و (ت) از مثال ۳۸.۰۷ را نگاه می‌کنیم، ملاحظات زیر آشکار می‌شوند.

۱) برای ترتیب جزئی قسمت (ب)، ۸ تنها عنصر ماکسیمال و ۱ تنها عنصر مینیمال است.

۲) برای مجموعهٔ جزئاً مرتب قسمت (پ)، هر یک از چهار عنصر، ۲، ۳، ۵، و ۷، هم عنصر ماکسیمال و هم عنصر مینیمال است.

۳) در قسمت (ت) عنصرهای ۱۲ و ۳۸۵ هر دو ماکسیمال‌اند. هر یک از عنصرهای ۲، ۳، ۵، ۷، و ۱۱ عنصری مینیمال برای این ترتیب جزئی است.

آیا شرایطی هست که نشان دهد چه وقت مجموعه‌ای جزئاً مرتب عنصری ماکسیمال یا مینیمال دارد؟

قضیهٔ ۳.۷ اگر $(A, \mathcal{R})$، مجموعه‌ای جزئاً مرتب و A متناهی باشد، آنگاه A هم عنصر ماکسیمال دارد و هم عنصر مینیمال.

برهان: فرض کنیم $a_1 \in A$. اگر عنصری مانند $a \in A$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $a \neq a_1$ و $a_1 \mathcal{R} a$، در این صورت a_1 ماکسیمال است. در غیر این صورت، عنصری مانند $a_2 \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $a_2 \neq a_1$ و $a_1 \mathcal{R} a_2$. اگر هیچ عنصر $a \in A$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $a \neq a_2$ و $a_2 \mathcal{R} a$، آنگاه a_2 ماکسیمال است. در غیر این صورت، می‌توانیم عنصری مانند $a_3 \in A$ چنان بیابیم که $a_3 \neq a_2$ و $a_3 \neq a_1$ (چرا؟) در حالی‌که $a_1 \mathcal{R} a_2$ و $a_2 \mathcal{R} a_3$. چون A متناهی است، با ادامهٔ این فرایند به عنصری مانند $a_n \in A$ می‌رسیم که به‌ازای هر $a \in A$ به‌طوری‌که $a \neq a_n$، داشته باشیم $a_n \not\mathcal{R} a$؛ بنابراین، a_n ماکسیمال است.

اثبات وجود عنصر مینیمال به‌طور مشابهی انجام می‌گیرد.

اکنون به الگوریتم مرتب‌سازی توپولوژیکی باز می‌گردیم. می‌بینیم که در هر تکرار مرحلهٔ ۲ از این الگوریتم، عنصری ماکسیمال را از مجموعهٔ جزئاً مرتب اصلی $(A, \mathcal{R})$، یا از مجموعه‌ای جزئاً مرتب به‌صورت $(B, \mathcal{R}')$، که در آن $\varnothing \neq b \subset A$ و $\mathcal{R}' = (B \times B) \cap \mathcal{R}$، انتخاب می‌کنیم. بنابر قضیهٔ ۳.۰۷ حداقل یک عنصر از این دست (در هر تکرار) وجود دارد. سپس در قسمت دوم مرحلهٔ ۳، اگر x عنصر ماکسیمال انتخاب شده (در مرحلهٔ ۲) باشد، همهٔ عنصرهایی را که به‌صورت (a, x) هستند از مجموعهٔ جزئاً مرتبی که در دست داریم کنار می‌گذاریم. این عمل مجموعهٔ جزئاً مرتب کوچکتری را در اختیار ما می‌گذارد.

اکنون به مطالعهٔ چند مفهوم دیگر دربارهٔ مجموعه‌های جزئاً مرتب می‌پردازیم.

تعریف ۱۸.۷ اگر $(A, \mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد، عنصر $x \in A$ را یک کوچکترین عنصر می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $a \in A$، $x \mathcal{R} a$. عنصر $y \in A$ را یک بزرگترین عنصر می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $a \in A$، $a \mathcal{R} y$.

مثال ۴۴.۷ فرض کنیم $\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳\}$ و فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه بودن باشد.

الف) با فرض $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$، $\varnothing$ یک کوچکترین و $\mathcal{U}$ یک بزرگترین عنصر مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A, \subseteq)$ است.

ب) فرض کنیم B گردایهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی $\mathcal{U}$ باشد. در این صورت $\mathcal{U}$ یک بزرگترین عنصر مجموعهٔ جزئاً مرتب $(B, \subseteq)$ است. در اینجا هیچ کوچکترین عنصری وجود ندارد، ولی سه عنصر مینیمال وجود دارد.

مثال ۴۵.۷ برای ترتیبهای جزئی مثال ۳۸.۰۷ می‌بینیم که

۱) برای ترتیب جزئی قسمت (ب)، ۸ یک بزرگترین عنصر و ۱ یک کوچکترین عنصر است.

۲) مجموعهٔ جزئاً مرتب قسمت (پ) هیچ بزرگترین یا کوچکترین عنصری ندارد.

۳) ترتیب جزئی قسمت (ت) هیچ بزرگترین یا کوچکترین عنصری ندارد.

دیدیم که مجموعه‌ای جزئاً مرتب ممکن است چند عنصر ماکسیمال و چند عنصر مینیمال داشته باشد. دربارهٔ تعداد بزرگترین و کوچکترین عنصرها چه می‌توان گفت؟

قضیهٔ ۴.۷ اگر مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A, \mathcal{R})$ بزرگترین (یا کوچکترین) عنصر داشته باشد، آنگاه این عنصر یکتاست.

برهان: فرض کنیم $x, y \in A$ و x و y هر دو بزرگترین عنصر باشند. چون x یک بزرگترین عنصر است، $y\mathcal{R}x$. به‌همین ترتیب، $x\mathcal{R}y$ زیرا y یک بزرگترین عنصر است. چون $\mathcal{R}$ پادمتقارن است، نتیجه می‌گیریم که $x = y$.

اثبات در مورد عنصر مینیمال به‌طور مشابهی انجام می‌گیرد.

تعریف ۱۹.۷ فرض کنیم $(A, \mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد و $B \subseteq A$. عنصر $x \in A$ را یک کران پایین برای B می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $b \in B$، $x\mathcal{R}b$. به همین ترتیب، عنصر $y \in A$ را یک کران بالا برای B می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $b \in B$، $b\mathcal{R}y$.

عنصر $x' \in A$ را یک بزرگترین کران پایین (glb) برای B می‌نامیم هرگاه یک کران پایین برای B باشد و به‌ازای هر کران پایین دیگری برای B مانند x'' داشته باشیم $x''\mathcal{R}x'$. به‌طور مشابهی، $y' \in A$ را یک کوچکترین کران بالا (lub) برای B می‌نامیم هرگاه یک کران بالا برای B باشد و به‌ازای هر کران بالای دیگری برای B مانند y'' داشته باشیم $y' \in y''$.

مثال ۴۶.۷ فرض کنیم $\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$ و فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه بودن روی A باشد. اگر $B = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۱, ۲\}\}$، در این صورت $\{۱, ۲\}$ ، $\{۱, ۲, ۳\}$ ، $\{۱, ۲, ۴\}$، و $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ همه کران بالا برای B (در $(A, \mathcal{R})$) هستند، در حالی‌که $\{۱, ۲\}$ یک کوچکترین کران بالاست (و متعلق به B است). ضمناً، $\varnothing$ یک بزرگترین کران پایین برای B است، که متعلق به B نیست.

مثال ۴۷.۷ فرض $\mathcal{R}$ رابطهٔ «کوچکتر از یا برابر با» برای مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A, \mathcal{R})$ باشد.

الف) اگر $A = \mathbf{R}$ و $B = [۰, ۱]$، در این صورت، ۰ بزرگترین کران پایین و ۱ کوچکترین کران بالا برای B است. ملاحظه می‌کنیم که $۰, ۱ \in B$. اگر $C = (۰, ۱]$، ۰ بزرگترین کران پایین و ۱ کوچکترین کران بالا برای C است و $۱ \in C$، ولی $۰ \notin C$.

ب) با حفظ $A=\mathbf{R}$، فرض کنیم $B=\{q\in\mathbf{Q}\mid q^{۲}<۲\}$. در این صورت $\sqrt{۲}$ یک کوچکترین کران بالا و $-\sqrt{۲}$ یک بزرگترین کران پایین برای B است، ولی هیچ‌یک از این اعداد حقیقی متعلق به B نیستند.

پ) اکنون فرض کنیم $A=\mathbf{Q}$ و فرض کنیم B مانند قسمت (ب) تعریف شده باشد. در اینجا B نه کوچکترین کران بالا دارد و نه بزرگترین کران پایین.

این مثالها ما را به نتیجهٔ زیر هدایت می‌کنند.

قضیهٔ ۵.۷ اگر $(A,\mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد و $B\subseteq A$، آنگاه B حداکثر یک lub(glb) دارد.

برهان: برهان این قضیه را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

این بند را با معرفی یک ساختار مرتب دیگر به پایان می‌رسانیم.

تعریف ۲۰.۷ می‌گوییم مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\mathcal{R})$ یک مشبکه است هرگاه به‌ازای هر $x,y\in A$، هر دو عنصر $\text{lub}\{x,y\}$ و $\text{glb}\{x,y\}$ در A وجود داشته باشند.

مثال ۴۸.۷ به‌ازای $A=\mathbf{N}$ و $x,y\in\mathbf{N}$، $x\mathcal{R}y$ را با $x\leqslant y$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، $\text{lub}\{x,y\}=\max\{x,y\}$، $\text{glb}\{x,y\}=\min\{x,y\}$ و $(\mathbf{N},\leqslant)$ مشبکه است.

مثال ۴۹.۷ برای مجموعهٔ جزئاً مرتب مثال ۴۴.۷ (الف)، اگر $S,T\subseteq\mathcal{U}$، در این صورت $\text{lub}\{S,T\}=S\cup T$ و $\text{glb}\{S,T\}=S\cap T$. بنابراین، $(\mathcal{P}(\mathcal{U}),\subseteq)$ مشبکه است.

مثال ۵۰.۷ مجموعهٔ جزئاً مرتب مثال ۳۸.۷ (ت) را در نظر می‌گیریم. می‌بینیم که، مثلاً،

$$\text{lub}\{۳,۶\}=۶,\ \text{lub}\{۵,۷\}=۳۵,\ \text{lub}\{۷,۱۱\}=۳۸۵,\ \text{lub}\{۱۱,۳۵\}=۳۸۵,\ \text{lub}\{۲,۳\}=۶$$

و

$$\text{glb}\{۳,۶\}=۳,\ \text{glb}\{۲,۱۲\}=۲,\ \text{glb}\{۳۵,۳۸۵\}=۳۵$$

اما با وجود آنکه $\text{lub}\{۲,۳\}$ وجود دارد، برای عنصرهای ۲ و ۳، بزرگترین کران پایین وجود ندارد. علاوه برآن، $\text{glb}\{۵,۷\}$، $\text{glb}\{۱۱,۳۵\}$، $\text{glb}\{۳,۳۵\}$، و $\text{lub}\{۳,۳۵\}$ (و بسیاری دیگر) را نیز نداریم. درنتیجه، این مجموعهٔ جزئاً مرتب مشبکه نیست.

تمرینات ۳.۷

۱. نمودار هاسهٔ مجموعهٔ جزئاً مرتب $(\mathcal{P}(\mathcal{U}),\subseteq)$ را که در آن $\mathcal{U}=\{۱,۲,۳,۴\}$، رسم کنید.

۲. فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}$؛ رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که $x\mid y$. نمودار هاسهٔ مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\mathcal{R})$ را رسم کنید.

۳. فرض کنیم $(A,\mathcal{R}_1)$ و $(A,\mathcal{R}_2)$ دو مجموعهٔ جزئاً مرتب باشند. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $A\times B$ چنین تعریف می‌کنیم: $(a,b)\mathcal{R}(x,y)$، در صورتی‌که $a\mathcal{R}_1 x$ و $b\mathcal{R}_2 y$. ثابت کنید که $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی است.

۴. اگر $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_2$ در تمرین ۳ دو ترتیب تام باشند، آیا $\mathcal{R}$ نیز ترتیبی تام است؟

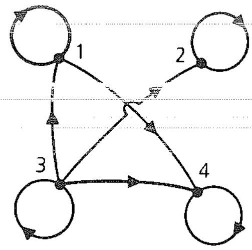
۵. نمودار هاسهٔ قسمت (الف) مثال ۳۸۰۷ را به‌طور توپولوژیکی مرتب کنید.

۶. به‌ازای $A=\{a,b,c,d,e\}$، نمودار هاسهٔ مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\mathcal{R})$ در شکل ۲۱۰۷ نشان داده شده است.

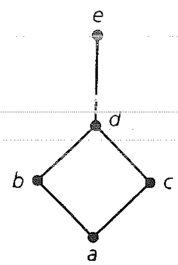
الف) ماتریس رابطه را برای $\mathcal{R}$ تعیین کنید.

ب) گراف سودار G (روی A) را که به $\mathcal{R}$ وابسته است رسم کنید.

پ) مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\mathcal{R})$ را به‌طور توپولوژیکی مرتب کنید.



شکل ۲۲.۷



شکل ۲۱.۷

۷. گراف سودار G برای رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4\}$ در شکل ۲۲۰۷ نشان داده شده است. (الف) تحقیق کنید $(A,\mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب است و نمودار هاسهٔ آن را بیابید. (ب) $(A,\mathcal{R})$ را به‌طور توپولوژیکی مرتب کنید. (پ) در شکل ۲۲۰۷ برای توسیع $(A,\mathcal{R})$ به ترتیبی تام، چند یال سودار دیگر لازم است؟

۸. فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطه‌ای ترایا روی مجموعهٔ A باشد. ثابت کنید $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی روی A است اگر و فقط اگر $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}^c=\{(a,a)\mid a\in A\}$.

۹. ثابت کنید هر مجموعهٔ جزئاً مرتب متناهی مانند $(A,\mathcal{R})$ عنصری مینیمال دارد.

۱۰. ثابت کنید اگر مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\mathcal{R})$ کوچکترین عنصری داشته باشد، آنگاه این عنصر یکتاست.

۱۱. قضیهٔ ۵۰۷ را ثابت کنید.

۱۲. مثالی از مجموعه‌ای جزئاً مرتب بیاورید که چهار عنصر ماکسیمال داشته باشد ولی بزرگترین عنصر نداشته باشد.

۱۳. اگر $(A,\mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب بوده ولی تماماً مرتب نباشد و $\varnothing\neq B\subset A$، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $(B\times B)\cap\mathcal{R}$ مجموعهٔ B را جزئاً مرتب می‌کند ولی تماماً مرتب نمی‌کند؟

۱۴. اگر $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی A و G گراف سودار وابسته به آن باشد، چگونه از G درمی‌یابیم که $(A,\mathcal{R})$ ترتیبی تام است؟

۱۵. اگر G گراف سودار برای رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی A، با شرط $|A|=n$، بوده و اگر $(A,\mathcal{R})$ ترتیبی تام باشد، چند یال (با احتساب طوقه‌ها) در G وجود دارد؟

۱۶. فرض کنیم $M(\mathcal{R})$ ماتریس رابطه برای رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی A، با شرط $n = |A|$، باشد. اگر $(A, \mathcal{R})$ ترتیبی تام باشد، چند ۱ در $M(\mathcal{R})$ وجود دارد؟

۱۷. الف) ساختار نمودار هاسه را برای مجموعه‌ای تماماً مرتب مانند $(A, \mathcal{R})$، که در آن $|A| = n \geqslant ۱$، توصیف کنید.

ب) برای مجموعه‌ای مانند A به‌طوری‌که $|A| = n \geqslant ۱$، چند تا از روابط روی A ترتیب تام‌اند؟

۱۸. الف) به‌ازای $A = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\}$، فرض کنیم $(A, \mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد. اگر $M(\mathcal{R})$ ماتریس رابطهٔ متناظر باشد، چگونه می‌توانیم با توجه به $M(\mathcal{R})$ عنصرهای مینیمال مجموعهٔ جزئاً مرتب مفروض را شناسایی کنیم؟

ب) به پرسش مطرح شده در قسمت (الف) برای عنصرهای ماکسیمال پاسخ دهید.

پ) چگونه می‌توان با توجه به ماتریس رابطهٔ $M(\mathcal{R})$ وجود بزرگترین یا کوچکترین عنصر را در $(A, \mathcal{R})$ تشخیص دهیم؟

۱۹. فرض کنیم $\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$ و $\mathcal{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه بودن روی A باشد. برای هر یک از زیرمجموعه‌های B (از A) که در زیر می‌آید، lub و glb را تعیین کنید.

الف) $B = \{\{۱\}, \{۲\}\}$

ب) $B = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱, ۲\}\}$

پ) $B = \{\varnothing, \{۱\}, \{۲\}, \{۱, ۲\}\}$

ت) $B = \{\{۱\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۱, ۲, ۳\}\}$

ث) $B = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۲, ۳\}\}$

ج) $B = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۲, ۳\}, \{۱, ۲, ۳\}\}$

۲۰. فرض کنیم $\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$، $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$ و $\mathcal{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه بودن روی A باشد. برای $B = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۲, ۳\}\} \subseteq A$، هر یک از موارد زیر را تعیین کنید.

الف) تعداد کرانهای بالای B شامل (یک) سه عنصر از $\mathcal{U}$؛ (دو) چهار عنصر از $\mathcal{U}$؛ (سه) پنج عنصر از $\mathcal{U}$ هستند.

ب) تعداد کرانهای بالای B

پ) lub برای B

ت) تعداد کرانهای پایین برای B

ث) glb برای B

۲۱. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ چنین تعریف می‌کنیم: $a\mathcal{R}b$، در صورتی‌که $a - b$ عدد صحیح نامنفی زوجی باشد. تحقیق کنید $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی برای $\mathbf{Z}$ تعریف می‌کند. آیا این ترتیب جزئی ترتیبی تام است؟

۲۲. به‌ازای $A = \{۲, ۳, ۴, \cdots, ۱۹۹۸, ۱۹۹۹, ۲۰۰۰\}$، رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، درصورتی‌که x عدد y را عاد کند. مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A, \mathcal{R})$ چند عنصر ماکسیمال دارد؟

۲۳. الف) اگر $A = \{x, y\}$، برای چند تا از ترتیبهای جزئی روی A، x عنصری مینیمال است؟

ب) اگر $B = \{x, y, z\}$، برای چند تا از ترتیبهای جزئی روی B، x عنصری مینیمال است؟

۲۴. به‌ازای $X = \{۰, ۱\}$، فرض کنیم $A = X \times X$. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$، در صورتی‌که (یک) $a < c$، یا، (دو) $a = c$ و $b \leqslant d$.

الف) ثابت کنید $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی روی A است.

ب) همهٔ عنصرهای مینیمال و ماکسیمال این ترتیب جزئی را تعیین کنید.

پ) آیا کوچکترین عنصر وجود دارد؟ آیا بزرگترین عنصر وجود دارد؟

ت) آیا این ترتیب جزئی ترتیبی تام است؟

۲۵. فرض کنیم $X = \{۰, ۱, ۲\}$ و $A = X \times X$. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A مانند تمرین ۲۴ تعریف می‌کنیم. به همان پرسشهای تمرین ۲۴ برای این رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A پاسخ دهید.

۲۶. به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، فرض کنیم $X = \{۰, ۱, ۲, \cdots, n-۱, n\}$ و $A = X \times X$. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A مانند تمرین ۲۴ تعریف کنیم. به‌خاطر داشته باشید که هر عنصر متعلق به این ترتیب تام $\mathcal{R}$ جفتی مرتب است که مؤلفه‌های آن خود جفتهای مرتبی هستند. $\mathcal{R}$ چند عنصر دارد؟

۲۷. فرض کنیم $(A, \mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد. درستی هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت یا رد کنید.

الف) اگر $(A, \mathcal{R})$ مشبکه باشد، آنگاه «مجموعه‌ای تماماً مرتب» است.

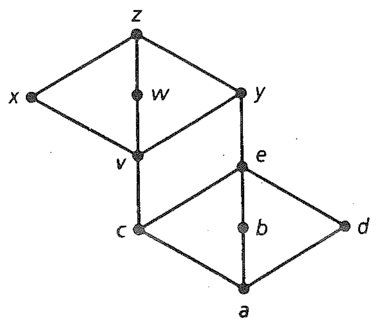
ب) اگر $(A, \mathcal{R})$ «مجموعه‌ای تماماً مرتب» باشد، آنگاه مشبکه است.

۲۸. اگر $(A, \mathcal{R})$ مشبکه و A متناهی باشد، ثابت کنید $(A, \mathcal{R})$ بزرگترین و کوچکترین عنصر دارد.

۲۹. به‌ازای $A = \{a, b, c, d, e, v, w, x, y, z\}$، مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A\mathcal{R})$ را که نمودار هاسهٔ آن در شکل ۲۳.۷ نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. مطلوب است تعیین

الف) $\mathrm{glb}\{b, c\}$ ب) $\mathrm{glb}\{b, w\}$ پ) $\mathrm{glb}\{e, x\}$ ت) $\mathrm{lub}\{c, b\}$

ث) $\mathrm{lub}\{d, x\}$ ج) $\mathrm{lub}\{c, e\}$ چ) $\mathrm{lub}\{a, v\}$



شکل ۲۳.۷

آیا $(A, \mathcal{R})$ مشبکه است؟ آیا عنصر ماکسیمالی وجود دارد؟ عنصر مینیمالی چطور؟ بزرگترین عنصر چطور؟ کوچکترین عنصر چطور؟

۳۰. فرض کنیم $(A, \mathcal{R})$ مجموعه‌ای تماماً مرتب باشد. اگر به‌ازای هر $\varnothing \neq B \subseteq A$ مجموعهٔ تماماً مرتب $(B, (B \times B) \cap \mathcal{R})$ کوچکترین عنصر داشته باشد، آنگاه $(A, \mathcal{R})$ را مجموعه‌ای خوش‌ترتیب می‌نامیم. (در بند ۴.۱ که خوش‌ترتیبی $(\mathbf{Z}^+, \leqslant)$ را برای اثبات اصل استقرای ریاضی به‌کار گرفتیم، با این مفهوم آشنا شدیم.)

تعیین کنید آیا هر یک از مجموعه‌های تماماً مرتب زیر خوش‌ترتیب است یا نه.

الف) $(\mathbf{N}, \leqslant)$ ب) $(\mathbf{Z}, \leqslant)$

پ) $(\mathbf{Q}, \leqslant)$ ت) $(\mathbf{Q}^+, \leqslant)$

ث) $(P, \leqslant)$، که در آن P مجموعهٔ همهٔ اعداد اول است.

ج) $(A, \leqslant)$، که در آن A زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbf{Z}^+$ است.

چ) $(A, \leqslant)$، که در آن $\varnothing \neq A \subset \mathbf{Z}$ مجموعه‌ای متناهی است.

۴.۷ روابط هم‌ارزی و افرازها

همان‌طور که قبلاً در تعریف ۷۰۷ ملاحظه کردیم، رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A رابطهٔ هم‌ارزی است هرگاه بازتابی، متقارن و ترایا باشد. به‌ازای هر مجموعهٔ $A \neq \varnothing$، رابطهٔ برابری رابطهٔ هم‌ارزی روی A است؛ در اینجا دو عنصر A وقتی با یکدیگر در رابطه‌اند که یکی باشند. بنابراین، برابری ویژگی «یکی بودن» را بین عناصر A برقرار می‌کند.

اگر رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $\mathbf{Z}$ چنین تعریف کرده باشیم که $x\mathcal{R}y$، در صورتی که $x - y$ مضربی از ۲ باشد، آنگاه $\mathcal{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbf{Z}$ است؛ در اینجا همهٔ اعداد صحیح زوج با یکدیگر و همهٔ اعداد صحیح فرد هم با یکدیگر در رابطه‌اند. مثلاً، برابری $۸ = ۴$ را نداریم ولی قطعاً $۴\mathcal{R}۸$، زیرا در اینجا دیگر توجهی به‌اندازهٔ اعداد نداریم، بلکه فقط دو ویژگی مورد نظر ماست: «زوج بودن» و «فرد بودن». این رابطه $\mathbf{Z}$ را به دو زیرمجموعهٔ متشکل از اعداد صحیح فرد و زوج تقسیم می‌کند: $\mathbf{Z} = \{\cdots, -۳, -۱, ۱, ۳, \cdots\} \cup \{\cdots, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, \cdots\}$. این تقسیم $\mathbf{Z}$ مثالی از افراز است؛ افراز مفهومی است که ارتباط نزدیکی با رابطهٔ هم‌ارزی دارد. در این بند این ارتباط را بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که چگونه ما را در شمردن تعداد روابط هم‌ارزی موجود روی مجموعه‌ای متناهی یاری می‌دهد.

تعریف ۲۱.۷ مجموعهٔ A و مجموعهٔ اندیسگذار I مفروض‌اند. فرض کنیم به‌ازای هر $i \in I$، $\varnothing \neq A_i \subseteq A$. در این صورت، $\{A_i\}_{i \in I}$ یک افراز A است هرگاه

الف) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ و ب) به‌ازای هر $i, j \in I$، $i \neq j$، $A_i \cap A_j \neq \varnothing$

هر یک از A_iها را یک حجره یا بلوک این افراز می‌نامیم.

مثال ۵۱.۷ اگر $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰\}$، در این صورت هر دسته از مجموعه‌های زیر افرازی برای A است:

الف) $A_۱ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، $A_۲ = \{۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$

ب) $A_۱ = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$، $A_۲ = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$

پ) $A_۱ = \{۱, ۲, ۳\}$، $A_۲ = \{۴, ۶, ۷, ۹\}$، $A_۳ = \{۵, ۸, ۱۰\}$

ت) $A_i = \{i, i + ۵\}$، $۱ \leqslant i \leqslant ۵$

مثال ۵۲.۷ فرض کنیم $A = \mathcal{R}$ و به‌ازای هر $i \in \mathbf{Z}$، فرض کنیم $A_i = [i, i + ۱)$. در این صورت $\{A_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ افرازی از $\mathcal{R}$ است.

اکنون می‌خواهیم ببینیم که چه ارتباطی با رابطه‌های هم‌ارزی دارند؟

تعریف ۲۲.۷ فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ A باشد. به‌ازای هر $x \in A$، ردهٔ هم‌ارزی x، که آن را با $[x]$ نشان می‌دهند، با $[x] = \{y \in A \mid y\mathcal{R}x\}$ تعریف می‌شود.

مثال ۵۳.۷ رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $\mathbf{Z}$ چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که $۴ \mid (x - y)$. برای این رابطهٔ هم‌ارزی می‌بینیم که

$$[۰] = \{\cdots, -۸, -۴, ۰, ۴, ۸, ۱۲, \cdots\} = \{۴k \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

$$[۱] = \{\cdots, -۷, -۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, \cdots\} = \{۴k + ۱ \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

$$[۲] = \{\cdots, -۶, -۲, ۲, ۶, ۱۰, ۱۴, \cdots\} = \{۴k + ۲ \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

$$[۳] = \{\cdots, -۵, -۱, ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \cdots\} = \{۴k + ۳ \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

علاوه بر این، ملاحظه می‌کنیم که، مثلاً $[-۲] = [۲] = [۶]$ ، $[۳] = [۵۱]$، و $[۱] = [۱۷]$. مهمتر از همه، $\{[۰], [۱], [۲], [۳]\}$ افرازی از $\mathbf{Z}$ است.

[یادداشت: در اینجا مجموعهٔ اندیسگذار برای افراز به‌طور ضمنی قید شده است. اگر، مثلاً، قرار دهیم $A_۰ = [۰]$ ، $A_۱ = [۱]$ ، $A_۲ = [۲]$، و $A_۳ = [۳]$، در این صورت مجموعهٔ اندیسگذار I (با توجه به تعریف ۲۱۰۷) عبارت است از $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$. وقتی گردایه‌ای از مجموعه‌ها را افراز (مجموعه‌ای مفروض) می‌نامیم ولی هیچ مجموعهٔ اندیسگذاری را مشخص نمی‌کنیم، خواننده باید دریابد که مانند حالتی که اکنون ذکر کردیم، مجموعهٔ اندیسگذار به‌طور ضمنی قید شده است.]

مثال ۵۴.۷ رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ چنین تعریف می‌کنیم: $a\mathcal{R}b$، در صورتی‌که $a^۲ = b^۲$ (یا $a = \pm b$). به‌ازای هر $a \in \mathbf{Z}$ داریم $a^۲ = a^۲$ و ازاین‌رو، $a\mathcal{R}a$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است. اگر $a, b \in \mathbf{Z}$ و $a\mathcal{R}b$، در این صورت $a^۲ = b^۲$ و درنتیجه، $b^۲ = a^۲$ یا $b\mathcal{R}a$. بنابراین، رابطهٔ $\mathcal{R}$ متقارن است. سرانجام، فرض کنیم $a, b, c \in \mathbf{Z}$ و داشته باشیم $a\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}c$. در این صورت $a^۲ = b^۲$ و $b^۲ = c^۲$؛ پس $a^۲ = c^۲$ و $a\mathcal{R}c$. پس رابطهٔ مفروض ترایاست. اکنون که برقراری این سه ویژگی را ثابت کردیم، می‌دانیم که $\mathcal{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی است.

دربارهٔ افراز $\mathbf{Z}$ متناظر با این رابطه چه می‌توان گفت؟

می‌بینیم که $[۰] = \{۰\}$ ، $[۱] = [-۱] = \{-۱, ۱\}$ ، $[۲] = [-۲] = \{-۲, ۲\}$ و به‌طورکلی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $[n] = [-n] = \{-n, n\}$. علاوه براین، افراز

$$\mathbf{Z} = \bigcup_{n=۰}^{\infty}[n] = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}[n] = \{۰\} \cup \left(\bigcup_{n=۱}^{\infty}\{-n, n\}\right) = \{۰\} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+}\{-n, n\}\right)$$

را داریم.

این مثالها ما را به نتیجهٔ کلی زیر هدایت می‌کنند.

قضیهٔ ۶.۷ اگر $\mathcal{R}$ «یک رابطهٔ» هم‌ارزی روی مجموعهٔ A باشد و $x, y \in A$، آنگاه (الف) $x \in [x]$؛ (ب) $x\mathcal{R}y$ اگر و فقط اگر $[x] = [y]$؛ و، (پ) $[x] = [y]$ یا $[x] \cap [y] = \varnothing$.

برهان:

الف) این نتیجه از بازتابی بودن $\mathcal{R}$ حاصل می‌شود.

ب) اگر $x\mathcal{R}y$، فرض کنیم $w \in [x]$. در این صورت $w\mathcal{R}x$ و چون $\mathcal{R}$ تراياست، $w\mathcal{R}y$. بنابراین، $w \in [y]$ و

$[y] \subseteq [x]$. چون $\mathcal{R}$ متقارن است، $x\mathcal{R}y$ مستلزم $y\mathcal{R}x$ است. پس اگر $t \in [y]$، در این صورت $t\mathcal{R}y$ و بنابر ویژگی ترایایی، $t\mathcal{R}x$. پس $t \in [x]$ و $[y] \subseteq [x]$. درنتیجه، $[x] = [y]$.

برعکس، فرض کنیم $[x] = [y]$. چون بنابر قسمت (الف) داریم $x \in [x]$، پس $x \in [y]$ یا $x\mathcal{R}y$.

پ) این ویژگی می‌گوید که هر دو ردهٔ هم‌ارزی دلخواه فقط به یکی از دو طریق ممکن می‌توانند با هم ارتباط داشته باشند. یا یکسان هستند یا جدا از هم.

فرض کنیم $[x] \neq [y]$. نشان می‌دهیم چگونه نتیجه می‌شود که $[x] \cap [y] = \varnothing$. اگر $[x] \cap [y] \neq \varnothing$، در این صورت فرض کنیم $\nu \in A$ چنان باشد که $\nu \in [x]$ و $\nu \in [y]$. آنگاه $\nu\mathcal{R}x$، $\nu\mathcal{R}y$ و چون $\mathcal{R}$ متقارن است، $x\mathcal{R}\nu$. بنابر ویژگی ترایایی، $(x\mathcal{R}\nu, \nu\mathcal{R}y) \Rightarrow x\mathcal{R}y$. همچنین بنابر قسمت (ب)، $x\mathcal{R}y$ مستلزم $[x] = [y]$ است. این ناقض فرض $[x] \neq [y]$ است. پس فرض $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ را کنار می‌گذاریم و نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

توجه داشته باشید که اگر $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد، آنگاه بنابر قسمتهای (الف) و (پ) از قضیهٔ ۶۰۷، رده‌های هم‌ارزی متمایز تعیین شده به‌وسیلهٔ $\mathcal{R}$ افرازی از A را به‌دست می‌دهند.

مثال ۵۵.۷

الف) اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $\mathcal{R} = \{(۱,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۵)\}$ در این صورت $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است. دراینجا $\{۱\} = [۱]$، $[۳] = \{۲, ۳\} = [۲]$ ، $[۵] = \{۴, ۵\} = [۴]$ و $A = [۱] \cup [۲] \cup [۴]$. همچنین، $[۱] \cap [۲] = \varnothing$ ، $[۱] \cap [۴] = \varnothing$، و $[۲] \cap [۴] = \varnothing$. بنابراین $\{[۱], [۲], [۴]\}$ افرازی برای A است.

ب) باردیگر قسمت (ت) از مثال ۱۶۰۷ را درنظر می‌گیریم. داریم $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$، $B = \{x, y, z\}$ و $f : A \to B$ تابع پوشای

$$f = \{(۱, x), (۲, z), (۳, x), (۴, y), (۵, z), (۶, y), (۷, x)\}$$

است. دیدیم رابطهٔ $\mathcal{R}$ که روی A چنین تعریف شد: $a\mathcal{R}b$، درصورتی‌که $f(a) = f(b)$؛ یک رابطهٔ هم‌ارزی است. در اینجا

$$f^{-۱}(x) = \{۱, ۳, ۷\} = [۱] \;\; (= [۳] = [۷])$$
$$f^{-۱}(y) = \{۴, ۶\} = [۴] \;\; (= [۶])$$
$$f^{-۱}(z) = \{۲, ۵\} = [۲] \;\; (= [۵])$$

باتوجه به $A = [۱] \cup [۴] \cup [۲] = f^{-۱}(x) \cup f^{-۱}(y) \cup f^{-۱}(z)$، می‌بینیم‌که $\{f^{-۱}(x), f^{-۱}(y), f^{-۱}(z)\}$ افرازی برای A است.

درواقع، به‌ازای هر دو مجموعهٔ ناتهی A و B، اگر $f : A \to B$ تابعی پوشا باشد، آنگاه $A = \bigcup_{b \in B} f^{-۱}(b)$ و $\{f^{-۱}(b) \mid b \in B\}$ افرازی از A را به‌دست می‌دهد.

مثال ۵۶.۷ در فورترنِ ANSI با حکم تخصیص غیر اجرایی، یعنی حکم EQUIVALENCE، می‌توان دو یا چند متغیر برنامه‌ای مفروض را به یک مکان حافظه ارجاع داد.

مثلاً، در برنامه‌ای حکم

```
EQUIVALENCE (A, C, P), (UP, DOWN)
```

وجود دارد. این حکم اطلاع می‌دهد که متغیرهای A، C، و P به‌طور مشترک از یک مکان حافظه و متغیرهای UP و DOWN نیز به‌طور مشترک از مکان حافظهٔ دیگری استفاده می‌کنند. در اینجا می‌توان رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی مجموعهٔ همهٔ متغیرهای برنامه‌ای چنین تعریف کرد: $V_1 \mathcal{R} V_2$ هرگاه V_1 و V_2 دو متغیر برنامه باشند که به‌طور مشترک از یک مکان حافظه استفاده می‌کنند. در این صورت، رده‌های هم‌ارزی رابطهٔ $\mathcal{R}$ مجموعهٔ همهٔ متغیرهای برنامه را افراز می‌کنند.

مثال ۵۷.۷ در زبان برنامه‌نویسی پاسکال گردایهٔ همهٔ حکمهای (معتبر) را می‌توان به ۱۱ حجرهٔ زیر افراز کرد.

۱) حکمهای انتساب

۲) حکمهای **case**

۳) حکمهای مرکب

۴) حکمهای تهی

۵) حکمهای **for**

۶) حکمهای **goto**

۷) حکمهای **if**

۸) حکمهای روال_احضار

۹) حکمهای **repeat-until**

۱۰) حکمهای **while**

۱۱) حکمهای **with**

(رابطهٔ هم‌ارزی مناسب برای این افراز چیست؟)

با استفاده از این افراز، می‌توانیم یکی از اهداف اصلی برنامهٔ مترجم را، که عبارت است از شناسایی حجره‌ای از این افراز که حکم مفروضی را می‌توان در آن یافت، بررسی کنیم. در این صورت می‌توانیم پیش‌بینی کنیم که برنامهٔ مترجم، مثلاً وقتی تصمیم می‌گیرد که گزارهٔ s در حجرهٔ (۳) قرار دارد، چگونه عمل می‌کند. در این حالت، برنامهٔ مترجم باید تعیین کند حکم مورد نظر با **begin** آغاز می‌شود تا بتواند رویهٔ لازم برای این نوع حکم را فرا خواند. در این حالت رویه (ای که برنامهٔ مترجم فراخوانده است) باید هر حکم برنامه را پردازش کند تا به **end** جفت نشده‌ای برسد. اگر حکم s در حجرهٔ (۹) از افراز قرار داشته باشد، در این شرایط برنامهٔ مترجم باید تصمیم بگیرد که حکم s با **repeat** آغاز می‌شود تا بتواند رویهٔ صحیح برای چنین حکمی را فراخواند. در این حالت، رویه (ای که فراخوانده شده است) هر حکم برنامه را پردازش می‌کند تا به **until** جفت نشده‌ای برسد. وقتی‌که **until** جفت نشده‌ای یافته شد، برنامهٔ مترجم عبارت بعد از **until** را پردازش می‌کند و ضمن انجام این کار، کد لازم را برای تصمیمگیری دربارهٔ اینکه چه موقع باید تولید کد برای حکم **repeat-until** خاتمه یابد، تولید می‌کند.

مثال ۵۸.۷ تاکنون چند مثال دربارهٔ اینکه چگونه یک رابطهٔ هم‌ارزی افرازی را بر مجموعه‌ای القا می‌کند دیده‌ایم. اکنون در جهت عکس حرکت می‌کنیم. اگر رابطهٔ هم‌ارزی $\mathcal{R}$ روی $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ افراز $A = \{۱, ۲\} \cup \{۳\} \cup \{۴, ۵, ۷\} \cup \{۶\}$ را القا کند، $\mathcal{R}$ کدام است؟

زیرمجموعهٔ $\{۱, ۲\}$ از این افراز را در نظر می‌گیریم. این زیرمجموعه مستلزم این است که $[۱] = \{۱, ۲\} = [۲]$

و بنابراین، $\mathcal{R} \ni (۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۲,۱)$. (دو جفت مرتب نخست به سبب بازتابی بودن $\mathcal{R}$ باید در $\mathcal{R}$ باشند، دو جفت مرتب دیگر تقارن را حفظ می‌کنند.)

به‌همین ترتیب، زیرمجموعهٔ $\{۴,۵,۷\}$ مستلزم این است که تحت $\mathcal{R}$، $\{۴,۵,۷\} = [۷] = [۵] = [۴]$ و $\mathcal{R}$، چون رابطهٔ هم‌ارزی است، باید شامل $\{۴,۵,۷\} \times \{۴,۵,۷\}$ باشد. درواقع،

$$\mathcal{R} = (\{۱,۲\} \times \{۱,۲\}) \cup (\{۳\} \times \{۳\}) \cup (\{۴,۵,۷\} \times \{۴,۵,۷\}) \cup (\{۶\} \times \{۶\})$$

و

$$|\mathcal{R}| = ۲^۲ + ۱^۲ + ۳^۲ + ۱^۲ = ۱۵$$

نتایج مثالهای ۷۰۵۳، ۷۰۵۴، ۷۰۵۵، و ۷۰۵۸ ما را به قضیهٔ زیر هدایت می‌کنند.

قضیهٔ ۷.۷ اگر A یک مجموعه باشد، آنگاه

الف) هر رابطهٔ هم‌ارزی روی A مانند $\mathcal{R}$ افرازی را بر A القا می‌کند و

ب) هر افراز A یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A، مانند $\mathcal{R}$، به‌دست می‌دهد.

برهان: قسمت (الف) از قسمتهای (الف) و (پ) در قضیهٔ ۷۰۶ نتیجه می‌شود. برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ افرازی برای A باشد. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که x و y متعلق به یک حجره از این افراز باشند. جزئیات تحقیق هم‌ارزی بودن $\mathcal{R}$ را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

براساس این قضیه و مثالهایی که بررسی کرده‌ایم نتیجهٔ بعدی را بیان می‌کنیم. طرحی برای اثبات این قضیه را در تمرین ۱۸، در پایان همین بند، آورده‌ایم.

قضیهٔ ۸.۷ به‌ازای هر مجموعهٔ دلخواه A، تناظری یک‌به‌یک بین مجموعهٔ روابط هم‌ارزی روی A و مجموعهٔ افرازهای A وجود دارد.

ما این نتیجه را عمدتاً در مورد مجموعه‌های متناهی به‌کار می‌گیریم.

مثال ۷.۵۹

الف) اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، چند تا از روابط موجود روی A رابطهٔ هم‌ارزی هستند؟

این مسأله را با شمردن افرازهای A حل می‌کنیم. برای این کار توجه می‌کنیم که هر افراز A توزیعی از عنصرهای (متمایز) A در ظروف یکسان است، به‌طوری که هیچ ظرفی خالی نماند. از بند ۵۰۳ می‌دانیم که، مثلاً، تعداد افرازهای A به دو ظرف ناتهی یکسان برابر با $S(۶,۲)$ است. وقتی که تعداد ظرفها از ۱ تا ۶ تغییر می‌کند، با استفاده از اعداد استرلینگ نوع دوم، $\sum_{i=۱}^{۶} S(۶,i) = ۲۰۳$ افراز متفاوت برای A داریم. درنتیجه، ۲۰۳ رابطهٔ هم‌ارزی روی A وجود دارد.

ب) چند تا از روابط هم‌ارزی قسمت (الف) در $[۴] \in ۱, ۲$ صدق می‌کنند؟

اگر عنصرهای ۱ ،۲، و ۴ را تحت این روابط هم‌ارزی «یک» عنصر تلقی کنیم، می‌توانیم مانند قسمت (الف) رابطه‌های هم‌ارزی روی مجموعهٔ $B = \{۱, ۳, ۵, ۶\}$ را بشمریم؛ در این صورت، می‌بینیم که $\sum_{i=۱}^{۴} S(۴, i) = ۱۵$ رابطهٔ هم‌ارزی روی A وجود دارد که به‌ازای آنها داریم $[۴] = [۲] = [۱]$.

این بند را با ملاحظهٔ این نکته به پایان می‌رسانیم که اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد و $|A| = n$، آنگاه به‌ازای هر $n \leqslant r \leqslant n^۲$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A مانند $\mathcal{R}$ با شرط $|\mathcal{R}| = r$ وجود دارد اگر و فقط اگر اعداد $n_۱, n_۲, \cdots, n_k \in \mathbf{Z}^+$ وجود داشته باشند به‌طوری که $\sum_{i=۱}^{k} n_i = n$ و $\sum_{i=۱}^{k} n_i^۲ = r$.

تمرینات ۴.۷

۱. تعیین کنید هر یک از گردایه‌های زیر از مجموعه‌ها افرازی برای مجموعهٔ مفروض A هست یا نه. اگر گردایه مورد نظر افرازی برای مجموعهٔ A نباشد، علت را توضیح دهید.

الف) $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$، $A_۱ = \{۴, ۵, ۶\}$، $A_۲ = \{۱, ۸\}$، $A_۳ = \{۲, ۳, ۷\}$.

ب) $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$؛ $A_۱ = \{d, e\}$، $A_۲ = \{a, c, d\}$، $A_۳ = \{f, h\}$، $A_۴ = \{b, g\}$.

پ) $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$؛ $A_۱ = \{۱, ۳, ۴, ۷\}$، $A_۲ = \{۲, ۶\}$، $A_۳ = \{۵, ۸\}$.

۲. فرض کنیم $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$. به چند طریق می‌توانیم A را به‌صورت $A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$ افراز کنیم به‌طوری که

الف) $۱, ۲ \in A_۱$، $۳, ۴ \in A_۲$، و $۵, ۶, ۷ \in A_۳$؟

ب) $۱, ۲ \in A_۱$، $۳, ۴ \in A_۲$، $۵, ۶ \in A_۳$، و $|A_۱| = ۳$؟

پ) $۱, ۲ \in A_۱$، $۳, ۴ \in A_۲$، و $۵, ۶ \in A_۳$؟

۳. اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد که افراز $A = \{۱, ۲\} \cup \{۳, ۴\} \cup \{۵\}$ را القا کند، $\mathcal{R}$ چیست؟

۴. به‌ازای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$،

$$\mathcal{R} = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴), (۴, ۵), (۵, ۴), (۵, ۵), (۶, ۶)\}$$

یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

الف) رده‌های هم‌ارزی [۱] ، [۲]، و [۳] را تحت این رابطهٔ هم‌ارزی تعیین کنید.

ب) $\mathcal{R}$ کدام افراز را برای A القا می‌کند؟

۵. اگر $A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$، که در آن $A_۱ = \{۱, ۲\}$، $A_۲ = \{۲, ۳, ۴\}$، و $A_۳ = \{۵\}$، رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که x و y در یک زیرمجموعه مانند A_i، $۱ \leqslant i \leqslant ۳$، قرار داشته باشند. آیا $\mathcal{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی است؟

۶. به‌ازای $A = \mathbf{R}^۲$، $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $(x_۱, y_۱)\mathcal{R}(x_۲, y_۲)$، در صورتی‌که $x_۱ = x_۲$.

الف) تحقیق کنید $\mathcal{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ب) رده‌های هم‌ارزی و افراز القا شده روی A به‌وسیلهٔ $\mathcal{R}$ را به‌طور هندسی توصیف کنید.

۷. فرض‌کنیم $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \times \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$؛ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $(x_۱, y_۱)\mathcal{R}(x_۲, y_۲)$،

در صورتی‌که $x_۱ + y_۱ = x_۲ + y_۲$.

الف) تحقیق کنید $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ب) رده‌های هم‌ارزی $[(۱,۳)]$، $[(۲,۴)]$، و $[(۱,۱)]$ را تعیین کنید.

پ) افرازی از A را که توسط $\mathcal{R}$ القا می‌شود تعیین کنید.

۸. اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$، $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $(x,y) \in \mathcal{R}$، در صورتی‌که $x - y$ مضرب ۳ باشد.

الف) نشان دهید $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ب) رده‌های هم‌ارزی و افرازی را که $\mathcal{R}$ بر A القا می‌کند تعیین کنید.

۹. به‌ازای

$$A =\{(-۴,-۲۰),(-۳,-۹),(-۲,-۴),(-۱,-۱۱),(-۱,-۳),(۱,۲),(۱,۵),$$
$$(۲,۱۰),(۲,۱۴),(۳,۶),(۴,۸),(۴,۱۲)\}$$

رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$، در صورتی‌که $ad = bc$.

الف) تحقیق کنید $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ب) رده‌های هم‌ارزی $[(۲,۱۴)]$، $[(-۳,-۹)]$، و $[(۴,۸)]$ را بیابید.

پ) افرازی که $\mathcal{R}$ بر A القا می‌کند چند حجره دارد؟

۱۰. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $\mathbf{Z}^+$ چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که به‌ازای عددی مانند $n \in \mathbf{Z}$ داشته باشیم $x/y = ۲^n$.

الف) تحقیق کنید $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbf{Z}^+$ است.

ب) بین $[۱]$ ، $[۲]$ ، $[۳]$، و $[۴]$ چند ردهٔ هم‌ارزی متمایز وجود دارد؟

پ) بین $[۶]$ ، $[۷]$ ، $[۲۱]$ ، $[۲۴]$ ، $[۲۸]$ ، $[۳۵]$ ، $[۴۲]$، و $[۴۸]$ چند ردهٔ هم‌ارزی متمایز وجود دارد؟

۱۱. فرض کنیم A مجموعه‌ای ناتهی باشد و مجموعهٔ B ، $B \subseteq A$، را ثابت می‌گیریم. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{P}(A)$ چنین تعریف می‌کنیم: به‌ازای $X,Y \subseteq A$، $X\mathcal{R}Y$، در صورتی‌که $B \cap X = B \cap Y$.

الف) تحقیق کنید $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathcal{P}(A)$ است.

ب) اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۱,۲\}$، افرازی را که $\mathcal{R}$ بر $\mathcal{P}(A)$ القا می‌کند بیابید.

پ) اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B = \{۱,۲,۳\}$، مطلوب است تعیین $[X]$ در صورتی‌که، $X = \{۱,۳,۵\}$.

ت) به‌ازای $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B = \{۱,۲,۳\}$، چند ردهٔ هم‌ارزی در افرازی که $\mathcal{R}$ القا می‌کند وجود دارد؟

۱۲. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $\mathbf{Z}^+$ چنین تعریف می‌کنیم: $a\mathcal{R}b$، در صورتی‌که $\mathrm{lcm}(a,۱۶) = \mathrm{lcm}(b,۱۶)$.

الف) ثابت کنید $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbf{Z}^+$ است.

ب) هر یک از رده‌های هم‌ارزی زیر را تعیین کنید: $[۱]$ ، $[۲]$ ، $[۳]$ ، $[۱۰]$ ، $[۱۶]$ ، $[۲۵]$ ، $[۳۲]$ ، $[۳۳]$ ، $[۴۸]$، و $[۶۴]$.

۱۳. چند رابطهٔ هم‌ارزی روی $A = \{a,b,c,d,e,f\}$، (الف) دقیقاً دو ردهٔ هم‌ارزی با اندازهٔ ۳ دارند؟ (ب) دقیقاً یک ردهٔ هم‌ارزی با اندازهٔ ۳ دارند؟ (پ) یک ردهٔ هم‌ارزی با اندازهٔ ۴ دارند؟ (ت) حداقل یک ردهٔ هم‌ارزی با سه عنصر یا بیش از ۳ عنصر دارند؟

۱۴. فرض کنیم $A = \{\nu, w, x, y, z\}$. تعیین کنید چند رابطه روی A، (الف) بازتابی و متقارن‌اند؛ (ب) رابطهٔ هم‌ارزی‌اند؛ (پ) بازتابی و متقارن‌اند ولی ترایا نیستند؛ (ت) رابطهٔ هم‌ارزی بوده و شامل دقیقاً دو ردهٔ هم‌ارزی‌اند؛ (ث) رابطهٔ هم‌ارزی با شرط $w \in [x]$ هستند؛ (ج) رابطهٔ هم‌ارزی با شرط $\nu, w \in [x]$ هستند؛ (چ) رابطهٔ هم‌ارزی با شرایط $w \in [x]$ و $y \in [z]$ هستند؛ و (ح) رابطهٔ هم‌ارزی با شرایط $w \in [x]$، $y \in [z]$، و $[x] \neq [z]$ هستند.

۱۵. اگر $|A| = ۳۰$ و رابطهٔ هم‌ارزی $\mathcal{R}$ روی A مجموعهٔ A را به رده‌های هم‌ارزی (دوبه‌دو جدا از هم) $A_۱$ ، $A_۲$، و $A_۳$ چنان افراز کند که $|A_۱| = |A_۲| = |A_۳|$، در این صورت $|\mathcal{R}|$ چقدر است؟

۱۶. فرض کنیم $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$. به‌ازای هر یک از مقادیر زیر برای r، رابطهٔ هم‌ارزی $\mathcal{R}$ را روی A چنان تعیین کنید که $|\mathcal{R}| = r$، یا توضیح دهید که چرا چنین رابطه‌ای وجود ندارد. (الف) $r = ۶$؛ (ب) $r = ۷$؛ (پ) $r = ۸$؛ (ت) $r = ۹$؛ (ث) $r = ۱۱$؛ (ج) $r = ۲۲$؛ (چ) $r = ۲۳$؛ (ح) $r = ۳۰$؛ (خ) $r = ۳۱$.

۱۷. اثبات قسمت (ب) از قضیهٔ ۷ ۰ ۷ را با نوشتن همهٔ جزئیات کامل کنید.

۱۸. به‌ازای هر مجموعهٔ $A \neq \varnothing$، فرض کنیم $P(A)$ مجموعهٔ همهٔ افرازهای A و $E(A)$ مجموعهٔ همهٔ روابط هم‌ارزی روی A باشد. تابع $f : E(A) \to P(A)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
اگر $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد، $f(\mathcal{R})$ افرازی است که $\mathcal{R}$ بر A القا می‌کند. ثابت کنید f یک‌به‌یک و پوشاست. به این ترتیب، قضیهٔ ۷ ۰ ۸ ثابت می‌شود.

۵.۷ ماشینهای متناهی‌الحالت: فرایند کمینه‌سازی

در بند ۶ ۰ ۳ دو ماشین متناهی‌الحالت را دیدیم که وظیفهٔ یکسانی را انجام می‌دادند ولی تعداد حالتهای درونی آنها متفاوت بود. (شکلهای ۶ ۰ ۹ و ۶ ۰ ۱۰ را ببینید.) ماشینی که حالتهای درونی بیشتری دارد حاوی حالتهای درونی زائد است، یعنی حاوی حالتهایی است که چون حالتهای دیگر وظایف آنها را انجام می‌دهند، می‌توان این حالتها را حذف کرد. چون کمینه‌سازی تعداد حالتهای یک ماشین پیچیدگی و هزینهٔ آن را کاهش می‌دهد، در جستجوی فرایندی برای تبدیل ماشین مفروض به ماشینی فاقد حالتهای درونی زائد هستیم. این فرایند، که فرایند کمینه‌سازی نام دارد، متکی بر مفاهیم رابطهٔ هم‌ارزی و افراز است.

فرض کنیم $M = (S, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$ ماشینی متناهی‌الحالت باشد. رابطهٔ $\mathrm{E}_۱$ را روی S چنین تعریف می‌کنیم: $s_۱ \mathrm{E}_۱ s_۲$، در صورتی‌که به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}$، $\omega(s_۱, x) = \omega(s_۲, x)$. رابطهٔ $\mathrm{E}_۱$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی S بوده و S را به زیرمجموعه‌هایی چنان افراز می‌کند که دو حالت در صورتی در یک زیرمجموعه قرار دارند که به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}$ یک خروجی تولید کنند. در این صورت، حالتهای $s_۱$ و $s_۲$ را ۱ـ هم‌ارز می‌نامیم.

به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$، حالتهای $s_۱$ و $s_۲$ را kـ هم‌ارز می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}^k$، $\omega(s_۱, x) = \omega(s_۲, x)$. در اینجا ω توسیع تابع خروجی مفروض به $S \times \mathcal{I}^*$ است. رابطهٔ kـ هم‌ارزی نیز یک رابطهٔ هم‌ارزی روی S است؛ این رابطه S را به زیرمجموعه‌هایی از حالتهای kـ هم‌ارز افراز می‌کند. برای نشان دادن اینکه $s_۱$ و $s_۲$، kـ هم‌ارزند می‌نویسیم $s_۱ \mathrm{E}_k s_۲$.

سرانجام، اگر $s_۱, s_۲ \in S$ و اگر $s_۱$ و $s_۲$ به‌ازای هر $k \geqslant ۱$، kـ هم‌ارز باشند، می‌گوییم $s_۱$ و $s_۲$ هم‌ارزند و می‌نویسیم $s_۱ \mathrm{E} s_۲$. وقتی که $s_۱$ و $s_۲$ هم‌ارز باشند، می‌بینیم که اگر $s_۱$ را در ماشین حفظ کنیم، $s_۲$ زائد خواهد بود و می‌توانیم آن را حذف کنیم. بنابراین، هدف ما این است که افرازی از S را که E القا می‌کند بیابیم و از هر ردهٔ

هم‌ارزی یک حالت را انتخاب کنیم. در این صورت شکل کمینی از ماشین مفروض را خواهیم داشت.

برای رسیدن به این هدف، کار را با ملاحظات زیر آغاز می‌کنیم.

الف) اگر در ماشینی دو حالت ۲ـ هم‌ارز نباشند، آیا امکان دارد که ۳ـ هم‌ارز باشند؟ (یا، به‌ازای $k \geqslant 4$، kـ هم‌ارز باشند؟)

پاسخ منفی است. اگر $s_1, s_2 \in S$ و $s_1 \not\mathrm{E}_2 s_2$ (یعنی، s_1 و s_2 حالتهای ۲ـ هم‌ارز نباشند)، در این صورت حداقل یک رشته مانند $xy \in \mathcal{I}^2$ وجود دارد به‌طوری که $\omega(s_1, xy) = \nu_1\nu_2 \neq w_1w_2 = \omega(s_2, xy)$، که در آن $\nu_1, \nu_2, w_1, w_2 \in \mathcal{O}$. پس با توجه به E_3، می‌بینیم که $s_1 \not\mathrm{E}_3 s_2$ ، زیرا به‌ازای هر $z \in \mathcal{I}$، $\omega(s_1, xyz) = \nu_1\nu_2\nu_3 \neq w_1w_2w_3 = \omega(s_2, xyz)$.

به‌طورکلی، برای یافتن حالتهای $(k+1)$ـ هم‌ارز به حالتهای kـ هم‌ارز توجه می‌کنیم.

ب) اکنون فرض کنیم $s_1, s_2 \in S$ و $s_1\mathrm{E}_2 s_2$. می‌خواهیم تعیین کنیم آیا $s_1\mathrm{E}_3 s_2$ برقرار است یا نه. یعنی تعیین اینکه آیا به‌ازای هر رشته مانند $x_1x_2x_3 \in \mathcal{I}^3$، برابری $\omega(s_1, x_1x_2x_3) = \omega(s_2, x_1x_2x_3)$ برقرار است یا نه. ببینیم چه روی می‌دهد. نخست $\omega(s_1, x_1) = \omega(s_2, x_1)$ را به‌دست می‌آوریم، زیرا $s_1\mathrm{E}_2 s_2 \Rightarrow s_1\mathrm{E}_1 s_2$. سپس گذاری به حالتهای $\nu(s_1, x_1)$ و $\nu(s_2, x_1)$ وجود دارد. درنتیجه، $\omega(s_1, x_1x_2x_3) = \omega(s_2, x_1x_2x_3)$ هرگاه $\omega(\nu(s_1, x_1), x_2x_3) = \omega(\nu(s_2, x_1), x_2x_3)$ [یعنی هرگاه $\nu(s_1, x_1)\mathrm{E}_2\nu(s_2, x_1)$].

به‌طورکلی، به‌ازای $s_1, s_2 \in S$ داریم $s_1\mathrm{E}_{k+1}s_2$ اگر (و فقط اگر) (یک) $s_1\mathrm{E}_k s_2$ و (دو) به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}$، $\nu(s_1, x)\mathrm{E}_k\nu(s_2, x)$.

اکنون با توجه به این ملاحظات، الگوریتمی را برای کمینه‌سازی ماشینی متناهی‌الحالت مانند M عرضه می‌کنیم.

مرحلهٔ ۱: قرار دهید $k = 1$. با بررسی سطرهای جدول حالت ماشین M حالتهای ۱ـ هم‌ارز را تعیین می‌کنیم. به‌ازای $s_1, s_2 \in S$، می‌بینیم که $s_1\mathrm{E}_1 s_2$ در صورتی‌که s_1 و s_2 سطرهای خروجی یکسانی داشته باشند.

فرض کنیم P_1 افرازی باشد که E_1 بر S القا می‌کند.

مرحلهٔ ۲: اگر P_k تعیین شده باشد، با ملاحظهٔ اینکه $s_1\mathrm{E}_{k+1}s_2$ هرگاه $s_1\mathrm{E}_k s_2$ و به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}$، $\nu(s_1, x)\mathrm{E}_k\nu(s_2, x)$ ، P_{k+1} را به‌دست می‌آوریم. داریم $s_1\mathrm{E}_k s_2$ در صورتی‌که s_1 و s_2 در یک حجرهٔ افراز P_k باشند. به همین ترتیب، به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}$، $\nu(s_1, x)\mathrm{E}_k\nu(s_2, x)$ در صورتی‌که $\nu(s_1, x)$ و $\nu(s_2, x)$ در یک حجرهٔ افراز P_k باشند. به این ترتیب، P_{k+1} از P_k به‌دست می‌آید.

مرحلهٔ ۳: اگر $P_{k+1} = P_k$، فرایند کمینه‌سازی کامل شده است. از هر ردهٔ هم‌ارزی یک حالت برمی‌گزینیم و این حالت تنها شکل کمین M را به‌دست می‌دهند.

اگر $P_{k+1} \neq P_k$، یک واحد به k افزوده و به مرحلهٔ ۲ باز می‌گردیم.

این الگوریتم را با مثال بعد روشن می‌سازیم.

مثال ۶۰.۷ اگر $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \{0, 1\}$، فرض کنیم M با جدول حالت نشان داده شده در جدول ۱۰۷ مشخص شده باشد. اگر به سطرهای خروجی نگاه کنیم، می‌بینیم که s_3 و s_4 و همچنین، s_2 ، s_5، و s_6 حالتهای ۱ـ هم‌ارزند. در اینجا E_1 مجموعهٔ S را به‌صورت زیر افراز می‌کند:

$$P_1 : \{s_1\}, \{s_2, s_5, s_6\}, \{s_3, s_4\}$$

به‌ازای هر $s \in S$ و هر $k \in \mathbb{Z}^+$، $s\mathrm{E}_k s$ ؛ پس در ادامهٔ این فرایند برای تعیین P_k، خود را با رده‌های هم‌ارزی حاوی فقط یک حالت درگیر نمی‌کنیم.

چون $s_3\mathrm{E}_1 s_4$، این امکان هست که داشته باشیم $s_3\mathrm{E}_2 s_4$. در اینجا $\nu(s_3, 0) = s_2$، $\nu(s_4, 0) = s_5$ و می‌دانیم که $s_2\mathrm{E}_1 s_5$؛ همچنین $\nu(s_3, 1) = s_4$، $\nu(s_4, 1) = s_3$ و می‌دانیم که $s_4\mathrm{E}_1 s_3$. بنابراین به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}$، $\nu(s_3, x)\mathrm{E}_1 \nu(s_4, x)$ و درنتیجه، $s_3\mathrm{E}_2 s_4$. به‌طور مشابهی، $\nu(s_2, 0) = s_5$، $\nu(s_5, 0) = s_2$ و می‌دانیم که $s_5\mathrm{E}_1 s_2$، و $\nu(s_2, 1) = s_2$، $\nu(s_5, 1) = s_5$ و می‌دانیم که $s_2\mathrm{E}_1 s_5$. درنتیجه، $s_2\mathrm{E}_2 s_5$. سرانجام، $\nu(s_5, 0) = s_2$ و $\nu(s_6, 0) = s_1$، ولی $s_2 \not\mathrm{E}_1 s_1$ و بنابراین، $s_5 \not\mathrm{E}_2 s_6$. (چرا امکان برقراری $s_2\mathrm{E}_2 s_6$ را بررسی نمی‌کنیم؟) رابطهٔ هم‌ارزی E_2 مجموعهٔ S را به‌صورت زیر افراز می‌کند:

$$P_2 : \{s_1\}, \{s_2, s_5\}, \{s_3, s_4\}, \{s_6\}$$

چون $P_2 \neq P_1$، این فرایند را ادامه می‌دهیم تا P_3 را به‌دست آوریم. برای تعیین اینکه $s_2\mathrm{E}_3 s_5$ برقرار است یا نه، می‌بینیم که $\nu(s_2, 0) = s_5$، $\nu(s_5, 0) = s_2$ و $s_5\mathrm{E}_2 s_2$. همچنین، $\nu(s_2, 1) = s_2$، $\nu(s_5, 1) = s_5$ و $s_2\mathrm{E}_2 s_5$. با $s_2\mathrm{E}_2 s_5$ و $\nu(s_2, x)\mathrm{E}_2 \nu(s_5, x)$ به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}$، داریم $s_2\mathrm{E}_3 s_5$. در مورد s_3 و s_4 می‌بینیم که $(\nu(s_3, 0) = s_2)\mathrm{E}_2(s_5 = \nu(s_4, 0))$ و $(\nu(s_3, 1) = s_4)\mathrm{E}_2(s_3 = \nu(s_4, 1))$ ، و درنتیجه، $s_3\mathrm{E}_3 s_4$. پس E_3 افراز

$$P_3 : \{s_1\}, \{s_2, s_5\}, \{s_3, s_4\}, \{s_6\}$$

را القا می‌کند.

اکنون ملاحظه می‌کنیم که $P_3 = P_2$ و همان‌طور که در مرحلهٔ ۳ از الگوریتم متذکر شدیم، فرایند کمینه‌سازی کامل شده است. می‌بینیم که می‌توانیم s_5 و s_4 را به‌عنوان حالتهای زائد تلقی کنیم. اگر سطرهای مربوط به این حالتها را از جدول کنار بگذاریم و در سطرهای دیگر جدول به‌جای s_5 و s_4، به‌ترتیب s_2 و s_3 را جایگزین کنیم، به جدول ۲.۷ می‌رسیم. این ماشین مینیمالی است که همان وظیفهٔ ماشین مشخص شده با جدول ۱.۷ را انجام می‌دهد.

اگر اصرار داشته باشیم که اندیس حالتها متوالی باشند، همواره می‌توانیم حالتهای ماشین مینیمال را مجدداً نامگذاری کنیم. در این صورت در اینجا حالتهای s_1 ، s_2 ، s_3 ، s_4 (که در آن $s_4 = s_6$) را خواهیم داشت، ولی این s_4 همان s_4ای نیست که در آغاز کار در جدول ۱.۷ داشتیم.

جدول ۱.۷

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_4	s_3	۰	۱
s_2	s_5	s_2	۱	۰
s_3	s_2	s_4	۰	۰
s_4	s_5	s_3	۰	۰
s_5	s_2	s_5	۱	۰
s_6	s_1	s_6	۱	۰

جدول ۲.۷

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_3	s_3	۰	۱
s_2	s_2	s_2	۱	۰
s_3	s_2	s_3	۰	۰
s_6	s_1	s_6	۱	۰

ممکن است بپرسید چگونه دانستیم که وقتی $P_3 = P_2$ می‌توانیم فرایند را متوقف کنیم. آیا این امکان وجود ندارد که $P_4 \neq P_3$ یا $P_4 = P_3$ ولی $P_5 \neq P_4$؟ برای اثبات اینکه این وضعیت هرگز روی نمی‌دهد، مفهوم زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲۳.۷ اگر P_1 و P_2 دو افراز مجموعهٔ A باشند، می‌گوییم P_2 تظریف P_1 است و می‌نویسیم $P_2 \leqslant P_1$، هرگاه هر حجرهٔ P_2 در حجره‌ای از P_1 قرار داشته باشد. وقتی $P_2 \leqslant P_1$ و $P_2 \neq P_1$، می‌نویسیم $P_2 < P_1$. این وضعیت وقتی روی می‌دهد که حداقل یکی از حجره‌های P_2 زیرمجموعهٔ سرهٔ یکی از حجره‌های P_1 باشد.

در فرایند کمینه‌سازی مثال ۶۰۰۷، داشتیم $P_3 = P_2 < P_1$. هنگام به‌کارگیری این الگوریتم، وقتی که P_{k+1} را از P_k به‌دست می‌آوریم، همواره می‌بینیم که $P_{k+1} \leqslant P_k$، زیرا $(k+1)$ـ هم‌ارزی مستلزم kـ هم‌ارزی است. بنابراین، هر افراز تظریفی از افراز قبلی است.

قضیهٔ ۹.۷ هنگام کاربرد فرایند کمینه‌سازی، اگر $k \geqslant 1$ و P_k و P_{k+1} دو افراز متوالی باشند به‌طوری که $P_{k+1} = P_k$، در این صورت به‌ازای هر $r \geqslant k+1$، $P_{r+1} = P_r$.

برهان: اگر چنین نباشد، فرض کنیم $r(\geqslant k+1)$ کوچکترین اندیسی باشد که به‌ازای آن $P_{r+1} \neq P_r$. در این صورت، $P_{r+1} < P_r$ و بنابراین، دو عنصر $s_1, s_2 \in S$ وجود دارند به‌طوری‌که $s_1 \mathrm{E}_r s_2$ ولی $s_1 \not\mathrm{E}_{r+1} s_2$. از طرف دیگر، $s_1 \mathrm{E}_r s_2$ مستلزم این است که به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}$، $\nu(s_1, x)\mathrm{E}_{r-1}\nu(s_2, x)$ و با توجه به $P_r = P_{r-1}$ می‌بینیم که به‌ازای هر $x \in \mathcal{I}$، $\nu(s_1, x)\mathrm{E}_r\nu(s_2, x)$ و درنتیجه، $s_1 P_{r+1} s_2$. بنابراین $P_{r+1} = P_r$.

این بند را با معرفی مفهوم دیگری که مربوط به مفهوم قبلی است به پایان می‌رسانیم. فرض کنیم M ماشینی متناهی‌الحالت باشد، $s_1, s_2 \in S$ و s_1 و s_2 هم‌ارز نباشند. در این صورت باید کوچکترین عدد صحیحی مانند $k \geqslant 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $s_1 \mathrm{E}_k s_2$ ولی $S_1 \not\mathrm{E}_{k+1} s_2$. به‌ازای $k = 0$، s_1 و s_2 دو سطر خروجی متفاوت در جدول حالت ماشین M تولید می‌کنند. در این حالت، به‌آسانی می‌توان رشته‌ای مانند $x \in \mathcal{I}$ چنان یافت که $\omega(s_1, x) \neq \omega(s_2, x)$ و این x این دو حالت ناهم‌ارز را از یکدیگر متمایز می‌سازد. به‌ازای $k \geqslant 1$، s_1 و s_2 سطرهای خروجی یکسانی را در جدول تولید می‌کنند. اکنون اگر بخواهیم این دو حالت را از هم تمیز دهیم، باید رشته‌ای مانند $x = x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1} \in \mathcal{I}^{k+1}$ را چنان بیابیم که $\omega(s_1, x) \neq \omega(s_2, x)$، حتی اگر $\omega(s_1, x_1 x_2 \cdots x_k) = \omega(s_2, x_1 x_2 \cdots x_k)$. چنین رشتهٔ xای را رشتهٔ ممیز برای حالتهای s_1 و s_2 می‌نامیم. این امکان هست که بیش از یکی از این رشته‌ها داشته باشیم، ولی هر کدام دارای طول (مینیمال) $k+1$ است.

پیش از تلاش برای یافتن رشتهٔ ممیزی برای دو حالت ناهم‌ارز در یک ماشین متناهی‌الحالت مشخص، مفهوم مهمی را که در اینجا نقش دارد بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $s_1, s_2 \in S$ و فرض کنیم به‌ازای عددی (ثابت) مانند $k \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم $s_1 \mathrm{E}_k s_2$ ولی $s_1 \not\mathrm{E}_{k+1} s_2$. چه نتیجه‌ای می‌توانیم بگیریم؟

می‌بینیم که

$$
\begin{aligned}
s_1 \not E_{k+1} s_2 &\Rightarrow \exists x_1 \in \mathcal{I}[\nu(s_1, x_1) \not E_k \nu(s_2, x_1)]\\
&\Rightarrow \exists x_2 \in \mathcal{I}[\nu(\nu(s_1, x_1), x_2) \not E_{k-1} \nu(\nu(s_2, x_1), x_2)]\\
&\quad \exists x_2 \in \mathcal{I}[\nu(s_1, x_1x_2) \not E_{k-1} \nu(s_2, x_1x_2)] \quad \text{یا}\\
&\Rightarrow \exists x_3 \in \mathcal{I}[\nu(s_1, x_1x_2x_3) \not E_{k-2} \nu(s_2, x_1x_2x_3)]\\
&\Rightarrow \cdots\\
&\Rightarrow \exists x_i \in \mathcal{I}[\nu(s_1, x_1x_2\cdots x_i) \not E_{k+1-i} \nu(s_2, x_1x_2\cdots x_i)]\\
&\Rightarrow \cdots\\
&\Rightarrow \exists x_k \in \mathcal{I}[\nu(s_1, x_1x_2\cdots x_k) \not E_1 \nu(s_2, x_1x_2\cdots x_k)]
\end{aligned}
$$

۱ـ هم‌ارز نبودن حالتهای $\nu(s_1, x_1x_2\cdots x_k)$، $\nu(s_2, x_1x_2\cdots x_k)$ مستلزم این است که می‌توانیم رشته‌ای مانند $x_{k+1} \in \mathcal{I}$ بیابیم به‌طوری که

$$\omega(\nu(s_1, x_1x_2\cdots x_k), x_{k+1}) \neq \omega(\nu(s_2, x_1x_2\cdots x_k), x_{k+1}) \qquad (1)$$

یعنی، این نمادهای خروجی منفرد متعلق به $\mathcal{O}$ با یکدیگر تفاوت دارند.

نتیجه‌ای که با معادلهٔ (۱) نشان داده شده است مستلزم این نیز هست که

$$\omega(s_1, x) = \omega(s_1, x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}) \neq \omega(s_2, x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}) = \omega(s_2, x)$$

در این صورت دو رشتهٔ خروجی به‌طول $k+1$ داریم که k نماد نخست آنها یکسان است ولی در $(k+1)$اُمین نماد تفاوت دارند.

در مثال زیر، این ملاحظات را همراه با افرازهای P_1، P_2، $\cdots$، P_k، و P_{k+1} که در فرایند کمینه‌سازی پدید می‌آیند به‌کار خواهیم گرفت.

مثال ۶۱.۷ از مثال ۷ ۰ ۶۰ افرازهایی را که در زیر نشان داده شده‌اند داریم. در اینجا $s_2 E_1 s_4$، ولی $s_2 \not E_2 s_4$. پس به جستجوی رشته‌ای ورودی مانند x به‌طول دو می‌پردازیم به‌طوری‌که $\omega(s_2, x) \neq \omega(s_4, x)$.

۱) کار را با P_2 آغاز می‌کنیم. به‌ازای s_2 و s_4 می‌بینیم که $\omega(s_2, 0) = 1 = \omega(s_4, 0)$، ولی $\nu(s_2, 0) = s_5$ و $\nu(s_4, 0) = s_1$ در دو حجرهٔ متفاوت از P_1 قرار دارند؛ یعنی

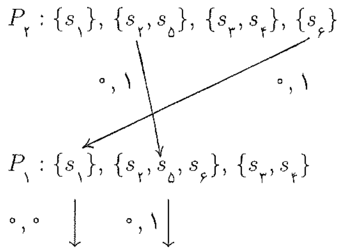
$$s_5 = \nu(s_2, 0) \not E_1 \nu(s_4, 0) = s_1$$

(ورودی ۰ و خروجی ۱ نشان پیکانهایی هستند که از حجره‌های P_2 به حجره‌های P_1 می‌روند.)

۲) اگر در افراز P_1 با s_1 و s_5 کار کنیم می‌بینیم که

$$\omega(\nu(s_2, 0), 0) = \omega(s_5, 0) = 1 \neq 0 = \omega(s_1, 0) = \omega(\nu(s_4, 0), 0)$$

۳) بنابراین $x = ۰۰$ رشتهٔ ممیز مینیمالی برای $s_۲$ و $s_۶$ است، زیرا $\omega(s_۶, ۰۰) = ۱۰ \neq ۱۱ = \omega(s_۲, ۰۰)$



مثال ۶۲.۷ اگر فرایند کمینه‌سازی را در مورد ماشینی که به‌وسیلهٔ جدول حالت قسمت (الف) از جدول ۳۰۷ مشخص شده است به‌کار ببریم، افرازهای قسمت (ب) از جدول ۳۰۷ را به‌دست می‌آوریم. (در اینجا $P_۴ = P_۳$.) می‌بینیم که حالتهای $s_۱$ و $s_۴$ حالتهایی ۲ـ هم‌ارزند ولی ۳ـ هم‌ارز نیستند. برای ساختن رشتهٔ ممیزی (به‌طول ۳) برای این دو حالت چنین عمل می‌کنیم:

۱) چون $s_۱ \not E_۳ s_۴$ ، افرازهای $P_۳$ و $P_۲$ را به‌کار می‌گیریم تا $x_۱ \in \mathcal{I}$ (یعنی، $x_۱ = ۱$) را چنان بیابیم که

$$(\nu(s_۱, ۱) = s_۲) \not E_۲ (s_۵ = \nu(s_۴, ۱))$$

۲) در این صورت از $\nu(s_۱, ۱) \not E_۲ \nu(s_۴, ۱)$ نتیجه می‌گیریم که عنصری مانند $x_۲ \in \mathcal{I}$ (در اینجا $x_۲ = ۱$) وجود دارد به‌طوری‌که $\nu(\nu(s_۱, ۱), ۱) \not E_۱ \nu(\nu(s_۴, ۱), ۱)$ یا $\nu(s_۱, ۱۱) \not E_۱ \nu(s_۴, ۱۱)$. برای به‌دست آوردن $x_۲ = ۱$ افرازهای $P_۲$ و $P_۱$ را به‌کار گرفتیم.

۳) اکنون افراز $P_۱$ را به‌کار می‌بریم و می‌بینیم که به‌ازای $x_۳ = ۱ \in \mathcal{I}$

$$\omega(\nu(s_۱, ۱۱), ۱) = ۰ \neq ۱ = \omega(\nu(s_۴, ۱۱), ۱)$$

یا

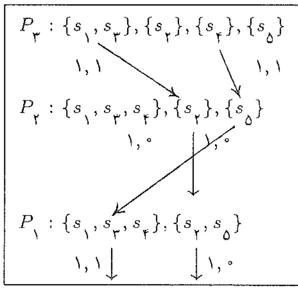
$$\omega(s_۱, ۱۱۱) = ۱۰۰ \neq ۱۰۱ = \omega(s_۴, ۱۱۱)$$

در قسمت (ب) از جدول ۳۰۷، ملاحظه می‌کنیم که چگونه به رشتهٔ ممیز مینیمال $x = ۱۱۱$ برای این حالتها رسیدیم. (همچنین، توجه داشته باشید که چگونه این قسمت از جدول نشان می‌دهد که ۱۱ رشتهٔ ممیز مینیمالی برای حالتهای $s_۲$ و $s_۵$ است که ۱ـ هم‌ارزند ولی ۲ـ هم‌ارز نیستند.)

جدول ۳.۷

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
$s_۱$	$s_۴$	$s_۲$	۰	۱
$s_۲$	$s_۵$	$s_۲$	۰	۰
$s_۳$	$s_۴$	$s_۲$	۰	۱
$s_۴$	$s_۳$	$s_۵$	۰	۱
$s_۵$	$s_۲$	$s_۳$	۰	۰

(الف)



(ب)

بسیاری مطالب دیگر را نیز می‌توان در مورد ماشینهای متناهی‌الحالت بررسی کرد. یکی از نکاتی را که از قلم انداخته‌ایم توضیح دقیق یا اثباتی است که برای اینکه چرا فرایند کمینه‌سازی کارساز است. خوانندهٔ علاقه‌مند برای کسب اطلاعات بیشتر می‌تواند به مراجع پایان فصل مراجعه کند.

تمرینات ۵.۷

۱. فرایند کمینه‌سازی را در مورد هر یک از ماشینهای جدول ۴۰۷ به‌کار ببرید.

جدول ۴.۷

(الف)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_2	s_1	۰	۱
s_2	s_3	s_3	۱	۰
s_3	s_1	s_4	۱	۰
s_4	s_1	s_3	۰	۱
s_5	s_3	s_3	۱	۰

(ب)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_6	s_3	۰	۰
s_2	s_5	s_2	۰	۱
s_3	s_6	s_2	۱	۱
s_4	s_4	s_3	۱	۰
s_5	s_2	s_4	۰	۱
s_6	s_4	s_6	۰	۰

(پ)

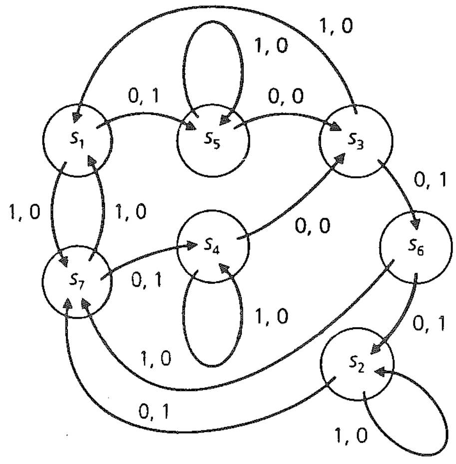
	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_6	s_3	۰	۰
s_2	s_3	s_1	۰	۰
s_3	s_3	s_3	۰	۰
s_4	s_7	s_4	۰	۰
s_5	s_6	s_7	۰	۰
s_6	s_5	s_2	۱	۰
s_7	s_4	s_1	۰	۰

۲. در ماشین جدول ۴۰۷ (پ) برای هر جفت از حالتهای زیر رشتهٔ ممیزی بیابید: (الف) s_1 و s_5؛ (ب) s_2 و s_3؛ (پ) s_5 و s_7.

۳. فرض کنیم M ماشین متناهی‌الحالتی باشد که با نمودار حالت شکل ۲۴۰۷ داده شده است.

الف) ماشین M را کمینه کنید.

ب) برای هر جفت از حالتهای زیر رشتهٔ ممیزی بیابید: (یک) s_3 و s_6؛ (دو) s_3 و s_4؛ (سه) s_1 و s_2.



شکل ۲۴۰۷

۶.۷ خلاصه و مروری تاریخی

بار دیگر مفهوم رابطه مطرح می‌شود. در فصل ۵ این مفهوم را به‌عنوان تعمیمی از مفهوم تابع معرفی کردیم. اینجا در فصل ۷ توجه خود را بر روابط و ویژگیهای خاص زیر متمرکز کردیم: بازتابی بودن، متقارن بودن، پادمتقارن بودن، و ترایا بودن. درنتیجه، توجه ما بر دو نوع خاص از روابط متمرکز شد: ترتیبهای جزئی و روابط هم‌ارزی.

رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A ترتیب جزئی است و A را مجموعه‌ای جزئاً مرتب می‌کند، هرگاه $\mathcal{R}$ بازتابی، پادمتقارن و ترایا باشد. چنین رابطه‌ای تعمیمی از رابطهٔ آشنای «کوچکتر از یا برابر با» روی مجموعهٔ اعداد حقیقی است. سعی کنید حساب دیفرانسیل و انتگرال، یا حتی جبر مقدماتی را بدون این رابطه تصور کنید! یا برنامهٔ کامپیوتری ساده‌ای در نظر بگیرید و ببینید که اگر این برنامه را بدون ترتیب مشخصی وارد کامپیوتر کنید، چه پیش خواهد آمد. ترتیب همه‌جا همراه ماست. ما چنان با مفهوم ترتیب خوگرفته‌ایم که گاهی آن را بدیهی تلقی می‌کنیم. برای مجموعه‌های جزئاً مرتب متناهی، نمودار هاسه، که نوع خاصی از گراف سودار است، نمایشی تصویری از ترتیب تعریف شده توسط مجموعهٔ جزئاً مرتب را عرضه می‌کند، همچنین وقتی ترتیب تامی نیاز داریم که شامل ترتیب جزئی مفروضی باشد، نمودار هاسه سودمند است. این نوع نمودار به افتخار هلموت هاسه[1] (۱۸۹۸ – ۱۹۷۹)، ریاضیدان آلمانی متخصص در نظریهٔ اعداد، نامگذاری شده است. هاسه این نمودارها را در کتاب درسی خود با عنوان جبر عالی[2] (که در سال ۱۹۲۶ منتشر شد)، به‌عنوان ابزاری کمکی برای مطالعهٔ جوابهای معادلات چندجمله‌ای معرفی کرد. روشی که برای اشتقاق ترتیبی تام از ترتیبی جزئی به‌کارگرفتیم الگوریتم مرتب‌سازی توپولوژیکی نام دارد که روش مناسبی در حل شبکه‌های PERT (فن ارزیابی و مرور برنامه) است. همان‌طور که قبلاً متذکر شدیم این روش نخستین بار در نیروی دریایی ایالات متحد امریکا ابداع و به‌کارگرفته شد.

رابطهٔ هم‌ارزی و ترتیب جزئی فقط در یک ویژگی با هم تفاوت دارند، ولی از لحاظ ساختار و کاربرد به‌کلی متفاوت‌اند. هدف ما ترسیم مبدأ پیدایش رابطهٔ هم‌ارزی نیست، بلکه فقط به این نکته اشاره می‌کنیم که ایده‌های مربوط به ویژگیهای بازتابی، متقارن و ترایایی را می‌توان در کتاب اصول هندسه[3] (۱۸۸۹) اثر جوزپه پئانو[4] (۱۸۵۸ – ۱۹۳۲)، ریاضیدان ایتالیایی، یافت. درکارهای کارل فریدریش گاوس[5] (۱۷۷۷ – ۱۸۵۵) دربارهٔ همنهشتی نیز، که در دههٔ ۱۷۹۰ ابداع کرد و گسترش داد این مفاهیم، اگر چه صریحاً نامی از آنها برده نشده است، به‌کارگرفته شده‌اند.

اساساً رابطهٔ هم‌ارزی $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ A تعمیمی از مفهوم برابری است؛ چنین رابطه‌ای ویژگی «یکی بودن» را بین عنصرهای A القا می‌کند. این مفهوم «یکی بودن» موجب می‌شود که مجموعهٔ A به زیرمجموعه‌هایی به‌نام رده‌های هم‌ارزی افراز شود. برعکس، می‌بینیم که هر افراز از مجموعهٔ A رابطه‌ای هم‌ارزی را روی A القا می‌کند. افراز مجموعه‌ها در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات و علم کامپیوتر پیش می‌آید. در علم کامپیوتر بسیاری از الگوریتمهای جستجو متکی بر فنی هستند که متوالیاً اندازهٔ مجموعهٔ مفروض A را که باید جستجو شود کاهش می‌دهد. با افرازکردن مجموعهٔ A به زیرمجموعه‌هایی کوچکتر و کوچکتر، می‌توانیم فرایند جستجو را به‌طور مؤثرتری به‌کار گیریم. هر افراز تظریفی از افراز قبلی است و این، همان‌طور که مثلاً در مورد فرایند کمینه‌سازی ماشینهای متناهی‌الحالت دیدیم، کلید لازم برای حل مسأله است.

---

1. Helmut Hasse 2. Höhere Algebra 3. I Principii di Geometria 4. Giuseppe Peano
5. Friedrich -Gauss

در سرتاسر این فصل بر ارتباط متقابل بین روابط، گرافهای سودار و (۰,۱)ـ ماتریسها تأکید داشتیم. (۰,۱)ـ ماتریس آرایه‌ای مستطیلی شامل اطلاعاتی دربارهٔ روابط یا گرافهاست و در محاسبات خاصی بسیار سودمند است. ذخیره‌سازی اطلاعات به این طریق، یعنی در آرایه‌هایی مستطیلی و در مکانهای حافظهٔ متوالی، از اواخر دههٔ ۱۹۴۰ و اوایل دههٔ ۱۹۵۰ در علم کامپیوتر متداول شد. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ زمینهٔ تاریخی این مطالب به صفحات ۴۶۲ — ۴۵۶ ازکتاب دی.ای.کنوت [۳] مراجعه کنید. راه دیگری برای ذخیره‌سازی اطلاعات گرافها استفاده از نمایش فهرست مجاورت است. (تمرین تکمیلی ۱۳ را ببینید.) در مطالعهٔ ساختارهای داده‌ها، فهرستهای مرتبط و فهرستهای مرتبط مضاعف نقش عمده‌ای در پیاده‌سازی چنین نمایشی دارند. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه، به کتاب ا.وی.آهو، جی.ای.هاپکرافت، و جی.دی.اولمان [۱] مراجعه کنید.

در مورد نظریهٔ گراف، باید بگوییم که تاریخچهٔ این شاخه از ریاضیات به سال ۱۷۳۶ می‌رسد، یعنی زمانی‌که لئونهارت اویلر (۱۷۰۷ — ۱۷۸۳)، ریاضیدان سوئیسی، مسألهٔ هفت پل کونیگسبرگ را حل کرد. از آن پس، تحولات بسیاری در این شاخه، به‌ویژه در ارتباط با ساختارهای داده‌ها در علم کامپیوتر، روی داده است.

برای مطالعهٔ مطالب مشابهی دربارهٔ برخی از موضوعاتی‌که در این فصل آمد، فصل ۳ ازکتاب دی.اف.استانات و دی.اف.مک‌آلیستر [۶] را ببینید. کسانی که به اطلاعات بیشتری دربارهٔ نقش کامپیوتر در ارتباط با مفهوم رابطهٔ هم‌ارزی علاقه‌مند هستند می‌توانند نحوهٔ ارائهٔ جالبی از «مسألهٔ هم‌ارزی» را در صفحات ۳۵۵ — ۳۵۳ از کتاب دی.ای.کنوت [۳] بیابند.

کارهای اولیه دربارهٔ تحول فرایند کمینه‌سازی را می‌توان در مقالهٔ ای.اف.مور[1] [۵] یافت که براساس ایده‌های قبلی دی.ا.هافمن [۲] بنا شده‌اند. فصل ۱۰ ازکتاب زد.کوهاوی[2] [۴] حاوی فرایند کمینه‌سازی برای انواع مختلف ماشینهای متناهی‌الحالت و شامل ملاحظاتی سخت‌افزاری در طراحی آنهاست.

کارل فریدریش گاوس (۱۷۷۷ — ۱۸۵۵)

جوزپه پئانو (۱۸۵۸ — ۱۹۳۲)

1. E. F. Moore   2. Z. Kohavi

مراجع

1. Aho, Alfred V., Hopcroft, John E., and Ullman, Jeffrey D. *Data Structures and Algorithms.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1983.
2. Huffman, D. A. "The Synthesis of Sequential Switching Circuits." *Journal of Franklin Institute* 257, no. 3: pp. 161-190; no. 4: pp. 275-303, 1954.
3. Knuth, Donald E. *The Art of Computer Programming*, 2nd ed., Volume 1, *Fundamental Algorithms.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973.
4. Kohavi, Zvi. *Switching and Finite Automata Theory*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1978.
5. Moore, E. F. "Gedanken-experiments on Sequential Machines." *Automata Studies, Annals of Mathematical Studies*, no. 34: pp. 129-153. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1956.
6. Stanat, Donald F., and McAllister, David F. *Discrete Mathematics in Computer Science.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.

تمرینات تکمیلی

۱. فرض کنیم A یک مجموعه، I مجموعه‌ای اندیسگذار و به‌ازای هر $i \in I$، $\mathcal{R}_i$ رابطه‌ای روی A باشد. هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت یا رد کنید.

الف) $\bigcup_{i\in I} \mathcal{R}_i$ روی A بازتابی است اگر و فقط اگر هر $\mathcal{R}_i$ روی A بازتابی باشد.

ب) $\bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i$ روی A بازتابی است اگر و فقط اگر هر $\mathcal{R}_i$ روی A بازتابی باشد.

۲. در تمرین ۱ همه‌جا (یک) متقارن؛ (دو) پادمتقارن؛ (سه) ترایا را جایگزین «بازتابی» کرده و هر یک از گزاره‌های حاصل را ثابت یا رد کنید.

۳. فرض کنیم $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_2$ دو رابطهٔ متقارن روی مجموعهٔ A باشند. اگر $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ ثابت کنید $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.

۴. اگر $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی مجموعهٔ A باشد، گزارهٔ زیر را ثابت یا رد کنید.

$$(\mathcal{R} \text{ بازتابی است}) \Rightarrow (\mathcal{R}^2 \text{ بازتابی است})$$

۵. به‌ازای مجموعه‌های A، B، و C و روابط $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$ و $\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$، گزارهٔ زیر را ثابت یا رد کنید.

$$(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2)^c = \mathcal{R}_2^c \circ \mathcal{R}_1^c$$

۶. هر یک از روابط زیر را روی مجموعهٔ مشخص شده در نظر بگیرید و تعیین کنید آیا رابطه بازتابی، متقارن، پادمتقارن یا ترایا هست یا نه. همچنین، تعیین کنید آیا هر یک از این رابطه‌ها ترتیب جزئی یا رابطهٔ هم‌ارزی هست یا نه. اگر رابطهٔ مورد نظر رابطهٔ هم‌ارزی باشد، افرازی را که القا می‌کند توصیف کنید.

الف) $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbf{Q}$ است که در آن $a\mathcal{R}b$، در صورتی‌که $|a-b| < 1$.

ب) فرض کنیم T مجموعهٔ همهٔ مثلثها در صفحه باشد. به‌ازای $t_1, t_2 \in T$، تعریف می‌کنیم $t_1 \mathcal{R} t_2$، در صورتی‌که مساحت t_1 و t_2 یکی باشد.

پ) برای T در قسمت (ب)، تعریف می‌کنیم $t_1 \mathcal{R} t_2$، در صورتی‌که حداقل دو ضلع t_1 روی ضلعهای t_2 قرار داشته باشند.

ت) فرض کنیم $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$. $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که $xy \geqslant ۱۰$.

ث) $\mathcal{R}$ را روی $\mathbf{Z}$ چنین تعریف می‌کنیم: $a\mathcal{R}b$، در صورتی‌که $۷ \mid (a-b)$.

ج) به‌ازای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \times \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2)$، در صورتی‌که $(y_1 - x_1) = \pm(y_2 - x_2)$.

۷. مثالی از مجموعه‌ای جزئاً مرتب بیاورید که ۵ عنصر مینیمال (ماکسیمال) داشته باشد ولی کوچکترین (بزرگترین) عنصر نداشته باشد.

۸. مجموعهٔ A مفروض است. فرض کنیم $C = \{P_i \mid$ افرازی از A است $P_i\}$. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی C چنین تعریف می‌کنیم: $P_i \mathcal{R} P_j$، در صورتی‌که $P_i \leqslant P_j$، یعنی در صورتی‌که P_i تظریفی از P_j باشد.

الف) تحقیق کنید $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی روی C است.

ب) به‌ازای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، فرض کنیم P_iها، $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، افرازهای زیر باشند:

$$P_1 : \{۱, ۲\}, \{۳, ۴, ۵\}; P_2 : \{۱, ۲\}, \{۳, ۴\}, \{۵\};$$
$$P_3 : \{۱\}, \{۲\}, \{۳, ۴, ۵\}; P_4 : \{۱, ۲\}, \{۳\}, \{۴\}, \{۵\}$$

نمودار هاسهٔ $C = \{P_i \mid ۱ \leqslant i \leqslant ۴\}$ را، که در آن C به‌وسیلهٔ تظریف جزئاً مرتب شده است، رسم کنید.

۹. اگر گراف کامل K_n دارای ۴۵ یال باشد، n را تعیین کنید؟

۱۰. فرض کنیم $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \times \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2)$، در صورتی‌که $x_1 y_1 = x_2 y_2$.

الف) تحقیق کنید $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ب) رده‌های هم‌ارزی $[(۱, ۱)]$، $[(۲, ۲)]$، $[(۳, ۲)]$، و $[(۴, ۳)]$ را تعیین کنید.

۱۱. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}\}$، یعنی $\mathcal{F}$ مجموعهٔ همهٔ توابعی است که قلمرو آنها $\mathbf{Z}^+$ و حوزهٔ مقادیر آنها $\mathbf{R}$ است.

الف) رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{F}$، به‌ازای $g, h \in \mathcal{F}$ چنین تعریف می‌کنیم: $g\mathcal{R}h$، در صورتی که g مغلوب h و h مغلوب g باشد. ثابت کنید یک $\mathcal{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathcal{F}$ است.

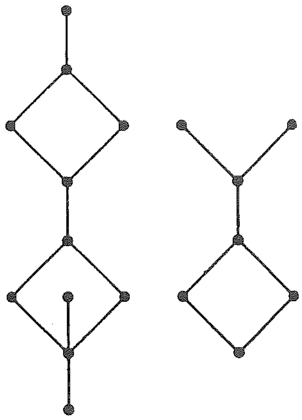
ب) به‌ازای $f \in \mathcal{F}$، فرض کنیم $[f]$ ردهٔ هم‌ارزی f را نسبت به رابطهٔ $\mathcal{R}$، که در قسمت (الف) معرفی شد، نشان دهد. فرض کنیم $\mathcal{F}'$ مجموعهٔ همهٔ رده‌های هم‌ارزی القا شده توسط $\mathcal{R}$ باشد. رابطهٔ $\mathcal{S}$ را روی $\mathcal{F}'$، به‌ازای $[g], [h] \in \mathcal{F}'$، چنین تعریف می‌کنیم: $[g]\mathcal{S}[h]$، در صورتی که g مغلوب h باشد. تحقیق کنید که $\mathcal{S}$ ترتیبی جزئی است.

پ) رابطهٔ $\mathcal{R}$ در قسمت (الف) را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ و $f_1, f_2 \in [f]$. اگر $f_1 + f_2 : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ را به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ با $(f_1 + f_2)(n) = f_1(n) + f_2(n)$ تعریف کنیم، گزارهٔ $f_1 + f_2 \in [f]$ را ثابت یا رد کنید.

۱۲. مجموعهٔ

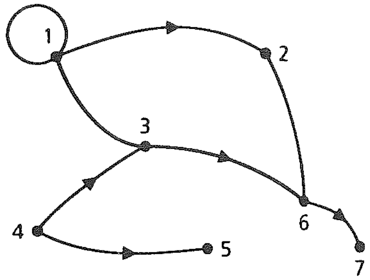
$$A = \{۲, ۴, ۸, ۲۰, ۲۸, ۵۶, ۱۱۲, ۲۲۴, ۳۳۶, ۶۷۲, ۱۳۴۴, ۳, ۹, ۱۵, ۴۵, ۱۳۵, ۴۰۵, ۶۷۵\}$$

را در نظر می‌گیریم. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که $x \mid y$. رابطهٔ $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی است که نمودار هاسهٔ آن در شکل ۲۵۰۷ نشان داده شده است. رأسهای نمودار را طوری نشانگذاری کنید که ترتیب جزئی را نشان دهد. به چند طریق متفاوت می‌توانیم $\mathcal{R}$ را به‌طور توپولوژیکی چنان مرتب کنیم که ترتیبی تام مانند $\mathcal{T}$ با شرط $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$ به‌دست آوریم؟ (گاهی می‌گوییم $\mathcal{R}$ در $\mathcal{T}$ نشانده شده است.)



شکل۲۵.۷

۱۳. دیدیم که می‌توانیم ماتریس مجاورت را برای نمایش گراف به‌کار ببریم. وقتی تعداد ۰ها در ماتریس مجاورت زیاد باشد این روش نمایش گراف نسبتاً ناموثر است. روش بهتری برای ذخیره‌سازی چنین گرافهایی استفاده از نمایش فهرست مجاورت است، که از یک فهرست مجاورت به‌ازای هر رأس v و یک فهرست اندیس تشکیل شده است. برای گراف شکل ۲۶۰۷، این نوع نمایش با دو فهرست جدول ۵۰۷ ارائه شده است.



شکل۲۶.۷

به‌ازای هر رأس v در این گراف، همهٔ رأسهای w را که مجاور از رأس v هستند، ترجیحاً به‌ترتیب عددی، فهرست می‌کنیم. بنابراین، برای رأس ۱، رأسهای ۱، ۲، و ۳ را به‌عنوان سه درایهٔ نخست در فهرست مجاورت می‌نویسیم. در فهرست اندیس در سمت راست ۲ یک ۴ می‌نویسیم تا معلوم شود که برای تعیین رأسهای مجاور از رأس ۲، جستجو در فهرست مجاورت را از کجا باید آغاز کنیم. چون در فهرست اندیس در سمت راست ۳ عدد ۵ نوشته شده است می‌دانیم که تنها رأس مجاور از ۲ رأس ۶ است. به‌همین ترتیب، وجود ۷ در سمت راست ۴ در فهرست اندیس ما را به هفتمین درایهٔ فهرست مجاورت، یعنی ۳، هدایت می‌کند و می‌بینیم که رأس ۴ مجاور به رأس ۳ (هفتمین رأس در فهرست مجاورت) و رأس ۵ (رأس هشتم در فهرست

جدول ۵.۷

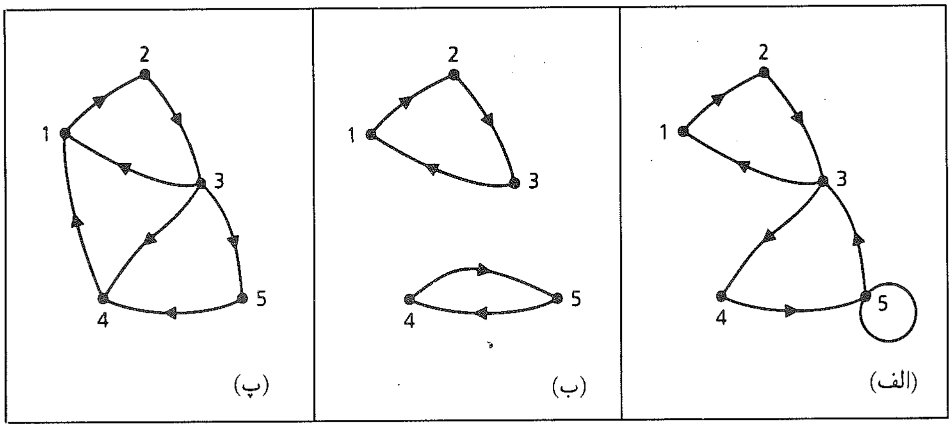
فهرست اندیس		فهرست مجاورت	
۱	۱	۱	۱
۴	۲	۲	۲
۵	۳	۳	۳
۷	۴	۶	۴
۹	۵	۱	۵
۹	۶	۶	۶
۱۱	۷	۳	۷
۱۱	۸	۵	۸
		۲	۹
		۷	۱۰

مجاورت) است. به سبب وجود ۹ در سمت راست رأس ۵ در فهرست اندیس، در رأس ۵ توقف می‌کنیم. ۹هایی که در فهرست اندیس کنار ۵ و ۶ نوشته شده‌اند بر این امر دلالت دارند که هیچ رأسی مجاور از رأس ۵ نیست. به‌طور مشابهی، ۱۱هایی که در فهرست اندیس کنار ۷ و ۸ نوشته شده‌اند نشان می‌دهند که رأس ۷ مجاور به هیچ رأسی از این گراف سودار نیست.

به‌طورکلی، این روش راه ساده‌ای را برای تعیین رأسهای مجاور از رأس v در اختیار ما می‌گذارد. این رأسها در مکانهای (اندیس (v))، ۱+ (اندیس (v))، . . .، ۱− (اندیس ($v + ۱$)) از فهرست مجاورت نوشته می‌شوند.

سرانجام آخرین جفت از درایه‌های فهرست اندیس، یعنی ۸ و ۱۱، «شبحی» است که نشان می‌دهد اگر رأس هشتمی در این گراف باشد، جستجوی رأسهای مجاور از آن را از کجای فهرست مجاورت باید آغاز کرد.

هریک از گرافهای شکل ۲۷۰۷ را به این طریق نمایش دهید.



شکل ۲۷.۷

۱۴. نمایش فهرست مجاورت برای گراف سودار G با فهرستهای جدول ۶۰۷ داده شده است. با توجه به این نمایش گراف G را بسازید.

جدول ۶.۷

فهرست اندیس		فهرست مجاورت	
۱	۱	۲	۱
۴	۲	۳	۲
۵	۳	۶	۳
۵	۴	۳	۴
۸	۵	۳	۵
۱۰	۶	۴	۶
۱۰	۷	۵	۷
۱۰	۸	۳	۸
		۶	۹

۱۵. فرض کنیم G گرافی بیسو با مجموعهٔ رأسهای V باشد. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی V چنین تعریف می‌کنیم: $v\mathcal{R}w$ ، در صورتی‌که $v = w$ یا درصورتی که مسیری از v به w (یا از w به v، زیرا G بیسو است) وجود داشته باشد. (الف) ثابت کنید $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی V است. (ب) دربارهٔ افراز وابسته به این رابطه چه می‌توان گفت؟

۱۶. الف) برای ماشین متناهی‌الحالت مشخص شده در جدول ۷۰۷، ماشین مینیمالی را تعیین کنید که با این ماشین هم‌ارز باشد.

جدول ۷.۷

w		v		
۱	۰	۱	۰	
۰	۱	s_6	s_7	s_1
۰	۰	s_7	s_7	s_2
۰	۱	s_2	s_7	s_3
۰	۰	s_3	s_2	s_4
۰	۰	s_7	s_3	s_5
۰	۰	s_1	s_4	s_6
۰	۱	s_5	s_3	s_7
۰	۰	s_3	s_7	s_8

ب) رشتهٔ مینیمالی را بیابید که حالتهای s_4 و s_6 را از هم متمایز سازد.

۱۷. در یک مرکز کامپیوتر، آزاده باید ۱۰ برنامهٔ کامپیوتری را اجرا کند و با توجه به اولویتهای تعیین شده، چنین

شرایطی وجود دارد: (الف) ۸,۳ < ۱۰؛ (ب) ۷ < ۸؛ (پ) ۵ < ۷؛ (ت) ۶,۹ < ۳؛ (ث) ۴,۱ < ۶؛ (ج) ۴,۵ < ۹؛ (چ) ۲ < ۴,۵,۱؛ در اینجا مثلاً، ۸,۳ < ۱۰ به این معناست که برنامهٔ شمارهٔ ۱۰ را باید پیش از برنامه‌های ۸ و ۳ اجرا کرد. ترتیبی را برای اجرای این برنامه‌ها تعیین کنید که اولویتها را حفظ کند.

۱۸. الف) نمودار هاسهٔ مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صحیح مثبت عدد صحیح n را در صورتی‌که n برابر با (یک) ۲؛ (دو) ۴؛ (سه) ۶؛ (چهار) ۸؛ (پنج) ۱۲؛ (شش) ۱۶؛ (هفت) ۲۴؛ (هشت) ۳۰؛ (نه) ۳۲؛ باشد رسم کنید.

ب) به‌ازای هر $2 \leqslant n \leqslant 35$، نشان دهید نمودار هاسهٔ مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صحیح مثبت عدد n مشابه یکی از نُه نمودار قسمت (الف) است. (اعدادی را که در رأسهای نمودار نوشته می‌شوند نادیده بگیرید و توجه خود را به ساختار رأسها و یالها متمرکز کنید.) به‌ازای $n = 36$ چه روی می‌دهد؟

پ) به‌ازای $n \in \mathbb{Z}^+$، فرض کنیم

$$\tau(n) = (\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت } n)$$

(تمرین تکمیلی ۳۳ در فصل ۵ را ببینید.) فرض کنیم $m, n \in \mathbb{Z}^+$ و فرض کنیم S و T، به‌ترتیب، مجموعه‌های مقسوم‌علیه‌های صحیح مثبت m و n باشند. نتایج قسمتهای (الف) و (ب) نشان می‌دهند که اگر نمودارهای هاسهٔ S و T از نظر ساختاری یکسان باشند، آنگاه $\tau(m) = \tau(n)$. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

ت) نشان دهید در صورتی‌که تعریف کنیم $\mathrm{glb}\{x, y\} = \gcd(x, y)$ و $\mathrm{lub}\{x, y\} = \mathrm{lcm}(x, y)$، هر یک از نمودارهای هاسهٔ قسمت (الف) یک مشبکه است.

۱۹. به‌ازای $\mathcal{I} = \{0, 1\}$، فرض کنیم $A = \{x_1x_2x_3x_4x_5 \mid x_i \in \mathcal{I}, 1 \leqslant i \leqslant 5\}$.

الف) $|A|$ را تعیین کنید؟

ب) به‌ازای هر $x \in A$، وزن x را با $\mathrm{wt}(x)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $\mathrm{wt}(x) = \sum_{i=1}^{5} x_i$. [بنابراین، $\mathrm{wt}(x)$ تعداد ۱های موجود در x است.] رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $x\mathcal{R}y$، در صورتی‌که $\mathrm{wt}(x) = \mathrm{wt}(y)$. تحقیق کنید $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

پ) در افرازی که $\mathcal{R}$ بر A القا می‌کند چند ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد؟ تعداد عناصر هر یک از رده‌های هم‌ارزی را تعیین کنید.

ت) نتایج قسمت (الف)، (ب)، و (پ) را تعمیم دهید.

۲۰. الف) به‌ازای $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$، فرض کنیم $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی A چنین تعریف می‌کنیم: $B\mathcal{R}C$، در صورتی‌که $B \subseteq C$. چند جفت مرتب در رابطهٔ $\mathcal{R}$ وجود دارد؟

ب) پاسخ قسمت (الف) را به‌ازای $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ بیابید.

پ) نتایج قسمت (الف) و (ب) را تعمیم دهید.

۲۱. به‌ازای $n \in \mathbb{Z}^+$، فرض کنیم $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ چنین تعریف می‌کنیم: $A\mathcal{R}B$، در صورتی‌که $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq A$. چند جفت مرتب در این رابطه وجود دارد؟

۲۲. فرض کنیم مجموعه‌ای ناتهی و متناهی باشد و $B \subseteq A$ (B ثابت است) و فرض کنیم $|A| = n$ و $|B| = m$. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{P}(A)$، به‌ازای $X, Y \subseteq A$ چنین تعریف می‌کنیم: $X\mathcal{R}Y$، در صورتی‌که $X \cap B = Y \cap B$. همان‌طور که در تمرین ۱۱ در بند ۴۰۷ تحقیق شد، $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

الف) در افرازی که $\mathcal{R}$ بر $\mathcal{P}(A)$ القا می‌کند چند ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد؟

ب) در هر ردهٔ هم‌ارزی از افرازی که $\mathcal{R}$ القا می‌کند چند تا از زیرمجموعه‌های A قرار دارند؟

۲۳. به‌ازای $A \neq \varnothing$، فرض کنیم $(A,\mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد و فرض کنیم $\varnothing \neq B \subseteq A$. $\mathcal{R}' = (B \times B) \cap \mathcal{R}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $(B,\mathcal{R}')$ تماماً مرتب باشد، $(B,\mathcal{R}')$ را زنجیری در $(A,\mathcal{R})$ می‌نامیم. درحالتی‌که B متناهی باشد، می‌توانیم عنصرهای B را به‌صورت $b_1\mathcal{R}'b_2\mathcal{R}'b_3\mathcal{R}'\cdots\mathcal{R}'b_{n-1}\mathcal{R}'b_n$ مرتب کنیم. در این صورت، معمولاً می‌گوییم B زنجیری به طول n است. زنجیری (به‌طول n) را ماکسیمال می‌نامیم هرگاه عنصری مانند $a \in A$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $a \notin \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\}$ و $a\mathcal{R}b_1$، $b_n\mathcal{R}a$ یا $b_i\mathcal{R}\,a\mathcal{R}\,b_{i+1}$ به‌ازای اندیسی مانند $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

الف) برای مجموعهٔ جزئاً مرتبی که نمودار هاسهٔ آن در شکل ۷ ۰ ۱۹ داده شده است دو زنجیر به‌طول سه بیابید. برای این مجموعهٔ جزئاً مرتب زنجیر ماکسیمالی بیابید. این مجموعهٔ جزئاً مرتب چند زنجیر ماکسیمال دارد؟

ب) برای مجموعهٔ جزئاً مرتبی که نمودار هاسهٔ آن در شکل ۷ ۰ ۱۸ (ت) داده شده است دو زنجیر ماکسیمال با طولهای متفاوت بیابید. طول طولانیترین زنجیر (ماکسیمال) برای این مجموعهٔ جزئاً مرتب چند است؟

پ) فرض کنیم $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ و $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$. برای مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A, \subseteq)$ دو زنجیر ماکسیمال بیابید. این مجموعهٔ جزئاً مرتب چند زنجیر ماکسیمال دارد؟

ت) اگر $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$، مجموعهٔ جزئاً مرتب $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$ چند زنجیر ماکسیمال دارد؟

۲۴. به‌ازای $\varnothing \neq C \subseteq A$، فرض کنیم $(C,\mathcal{R}')$ زنجیر ماکسیمالی در مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\mathcal{R})$ باشد، که در آن $\mathcal{R}' = (C \times C) \cap \mathcal{R}$. اگر عنصرهای C را به‌صورت $c_1\mathcal{R}'\,c_2\,\mathcal{R}'\cdots\mathcal{R}'\,c_n$ مرتب کنیم، ثابت کنید c_1 عنصری مینیمال و c_n عنصری ماکسیمال در $(A,\mathcal{R})$ است.

۲۵. فرض کنیم $(A,\mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد که در آن طول طولانیترین زنجیر (ماکسیمال) $n \geqslant 2$ است. فرض کنیم M مجموعهٔ همهٔ عنصرهای ماکسیمال در $(A,\mathcal{R})$ باشد و فرض کنیم $B = A - M$. اگر $\mathcal{R}' = (B \times B) \cap \mathcal{R}$، ثابت کنید طول طولانیترین زنجیر در $(B,\mathcal{R}')$ برابر با $n-1$ است.

۲۶. فرض کنیم $(A,\mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد و $\varnothing \neq C \subseteq A$. اگر $(C \times C) \cap \mathcal{R} = \varnothing$، آنگاه به‌ازای هر دو عنصر متمایز $x, y \in C$ داریم $x \not\mathcal{R} y$ و $y \not\mathcal{R} x$. می‌گوییم عنصرهای C پادزنجیری در مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A,\mathcal{R})$ تشکیل می‌دهند.

الف) برای مجموعهٔ جزئاً مرتبی که نمودار هاسهٔ آن در شکل ۷ ۰ ۱۸ (ت) داده شده است پادزنجیری با سه عنصر بیابید. یکی از طولانیترین پادزنجیرهایی را که شامل عنصر ۶ است تعیین کنید. یکی از طولانیترین پادزنجیرهای این مجموعهٔ جزئاً مرتب را بیابید.

ب) اگر $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$، فرض کنیم $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$. دو پادزنجیر متفاوت برای مجموعهٔ جزئاً مرتب $(A, \subseteq)$ بیابید. در طولانیترین پادزنجیر این مجموعهٔ جزئاً مرتب چند عنصر وجود دارد؟

پ) ثابت کنید در هر مجموعهٔ جزئاً مرتب مانند $(A,\mathcal{R})$، مجموعهٔ همهٔ عنصرهای ماکسیمال و مجموعهٔ همهٔ عنصرهای مینیمال دو پادزنجیرند.

۲۷. فرض کنیم $(A,\mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد که در آن طولانیترین زنجیر n است. بااستفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید می‌توان عنصرهای A را به n پادزنجیر C_1، C_2، $\cdots$، C_n (که در آن به‌ازای $1 \leqslant i < j \leqslant n$، $C_i \cap C_j = \varnothing$) افراز کرد.

قسمت دوم

موضوعات دیگر در شمارش

۸

اصل شمول و طرد

با بررسی اصل شمول و طرد دوباره به مبحث شمارش باز می‌گردیم. این اصل با بسط ایده‌هایی که در مسائل شمارشی دربارهٔ نمودارهای ون در فصل ۳ مطرح کردیم، ما را یاری خواهد داد تا فرمولی را که در بند ۳۰۵ برای تعداد توابع پوشای $f: A \to B$، به‌ازای مجموعه‌های (ناتهی) متناهی A و B، حدس زدیم ثابت کنیم. کاربردهای دیگری از این اصل ماهیت عام آن را در ریاضیات ترکیبیاتی به‌عنوان روشی غیرمستقیم برای حل مسائل شمارشی که در بسیاری از موقعیتهای گوناگون پیش می‌آیند، آشکار می‌سازند.

۱.۸ اصل شمول و طرد

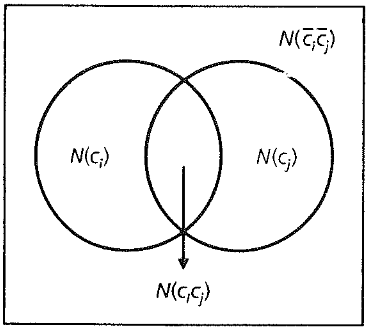
در این بند نمادهایی را برای بیان این اصل شمارشی جدید معرفی می‌کنیم. سپس با استدلالی ترکیبیاتی این اصل را ثابت می‌کنیم. پس از آن با چند مثال نشان می‌دهیم که این اصل چگونه به‌کار گرفته می‌شود.

فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد به‌طوری‌که $|S| = N$ و فرض کنیم c_1 ، c_2 ، $\cdots$ ، c_t گردایه‌ای از شرایط یا ویژگیهایی باشد که برخی از عنصرهای S، یا همهٔ عنصرهای S، در آنها صدق می‌کنند. برخی از عنصرهای S ممکن است در بیش از یک شرط صدق کنند، در حالی‌که برخی دیگر ممکن است در هیچ‌یک از این شرطها صدق نکنند. به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant t$، $N(c_i)$ تعداد عنصرهایی از S را نشان می‌دهد که در شرط c_i صدق می‌کنند. (در اینجا، هم عنصرهایی از S را که فقط در شرط c_i صدق می‌کنند می‌شماریم و هم عنصرهایی را که در c_i و شرایط دیگری مانند c_j، $j \neq i$، صدق می‌کنند.) به‌ازای هر $i, j \in \{1, 2, 3, \cdots, t\}$ با شرط $i \neq j$، $N(c_i c_j)$ تعداد عنصرهایی از S را نشان می‌دهد که در هر دو شرط c_i و c_j، و شاید هم در شرایط دیگر، صدق می‌کنند. [$N(c_i c_j)$ تعداد عنصرهایی از S که فقط در c_i و c_j صدق می‌کنند نیست.] به همین ترتیب، اگر $1 \leqslant i, j, k \leqslant t$ سه عدد صحیح متمایز باشند، $N(c_i c_j c_k)$ تعداد عنصرهایی از S را نشان می‌دهد که در هر سه شرط c_i ، c_j، و c_k، و شاید هم در شرایط دیگر، صدق می‌کنند.

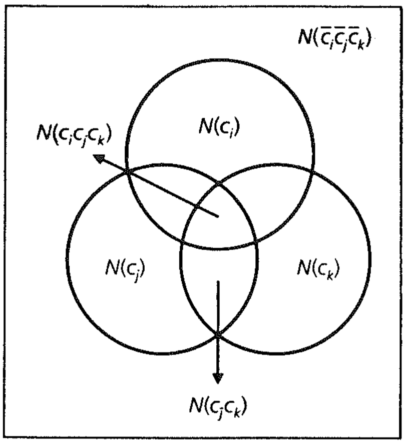
به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant t$، $N(\overline{c}_i) = N - N(c_i)$ تعداد عنصرهایی از S را نشان می‌دهد که در شرط c_i صدق نمی‌کنند. اگر $1 \leqslant i, j \leqslant t$ و $i \neq j$، $N(\overline{c}_i \overline{c}_j)$ برابر است با تعداد عنصرهایی از S که در هیچ‌یک از شرطهای c_i و c_j صدق نمی‌کنند. [این عدد با $N(\overline{c_i c_j})$ یکی نیست.]

با توجه به نمودار ون در شکل ۱۰۸، می‌بینیم که اگر $N(c_i)$ تعداد عنصرها در دایرهٔ سمت چپ و $N(c_j)$ تعداد عنصرها در دایرهٔ سمت راست را نشان دهد، $N(c_i c_j)$ تعداد عنصرها در ناحیهٔ مشترک است، در حالی‌که $N(\overline{c}_i \overline{c}_j)$ تعداد عنصرهای خارج از اجتماع این دو دایره است.

درنتیجه، بنابر شکل ۱۰۸، $N(\overline{c}_i \overline{c}_j) = N - [N(c_i) + N(c_j)] + N(c_i c_j)$، که در آن جملهٔ آخر را به این جهت افزوده‌ایم که در جملهٔ $[N(c_i) + N(c_j)]$ دوبار حذف شده است.



شکل ۱.۸



شکل ۲.۸

به‌همین ترتیب، بنابر شکل ۲۰۸ می‌بینیم که

$$N(\overline{c}_i\overline{c}_j\overline{c}_k) = N - [N(c_i) + N(c_j) + N(c_k)] + [N(c_ic_j) + N(c_ic_k) + N(c_jc_k)] - N(c_ic_jc_k)$$

با توجه به الگویی که این دو حالت القا می‌کنند قضیهٔ زیر را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۸ اصل شمول و طرد. مجموعه‌ای مانند S به‌طوری‌که $|S| = N$ و شرایط c_i، $t \geqslant i \geqslant ۱$، را که برخی از عنصرهای S در آنها صدق می‌کنند در نظر می‌گیریم. تعداد عنصرهایی از S که در هیچ‌یک از شرایط c_i، $۱ \leqslant i \leqslant t$، صدق نمی‌کنند با $\overline{N} = N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_t)$ نشان داده می‌شود و داریم

$$\begin{aligned}\overline{N} = N &- [N(c_۱) + N(c_۲) + N(c_۳) + \cdots + N(c_t)] \\ &+ [N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + \cdots + N(c_۱c_t) + N(c_۲c_۳) + \cdots + N(c_{t-۱}c_t)] \\ &- [N(c_۱c_۲c_۳) + N(c_۱c_۲c_۴) + \cdots + N(c_۱c_۲c_t) + N(c_۱c_۳c_۴) + \cdots \\ &+ N(c_۱c_۳c_t) + \cdots + N(c_{t-۲}c_{t-۱}c_t)] + \cdots + (-۱)^t N(c_۱c_۲c_۳\cdots c_t) \qquad (۱)\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}\overline{N} = N - \sum_{۱\leqslant i\leqslant t} N(c_i) + \sum_{۱\leqslant i<j\leqslant t} N(c_ic_j) - \sum_{۱\leqslant i<j<k\leqslant t} N(c_ic_jc_k) + \cdots \\ + (-۱)^t N(c_۱c_۲c_۳\cdots c_t) \qquad (۲)\end{aligned}$$

برهان: گرچه می‌توان این قضیه را با استقرا روی t ثابت کرد، ولی در اینجا استدلالی ترکیبیاتی می‌آوریم.

بهازای هر $x \in S$ نشان می‌دهیم که x در شمارش هر دو طرف معادلهٔ (۲) سهمی یکسان، ۰ یا ۱، دارد. اگر x در هیچ‌یک از شرایط صدق نکند، در این صورت x یک‌بار در $\overline{N}$ شمرده می‌شود و یک‌بار در N، ولی در هیچ جملهٔ دیگری از معادلهٔ (۲) شمرده نمی‌شود. درنتیجه، سهم x در شمارش هر دو طرف این معادله ۱ است.

امکان دیگر این است که x دقیقاً در r، شرط $1 \leqslant r \leqslant t$، صدق کند. در این حالت، x هیچ سهمی در شمارش $\overline{N}$ ندارد. ولی در طرف راست معادلهٔ (۲)، x چند بار به‌صورت زیر شمرده می‌شود:

۱) یک‌بار در N.

۲) r بار در $\sum_{1 \leqslant i \leqslant t} N(c_i)$. (یک‌بار برای هر یک از r شرط.)

۳) $\binom{r}{2}$ بار در $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant t} N(c_i c_j)$. (یک‌بار برای هر دو شرطی که از بین این r شرط انتخاب کنیم.)

۴) $\binom{r}{3}$ بار در $\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant t} N(c_i c_j c_k)$. (چرا؟)

....

$(r+1)$ $\binom{r}{r} = 1$ بار در $\sum N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r})$، که در آن مجموع روی همهٔ انتخابهای rتایی از t شرط محاسبه می‌شود.

در نتیجه، تعداد دفعاتی که x در طرف راست معادلهٔ (۲) شمرده می‌شود، بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای، برابر است با

$$1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} = [1 + (-1)]^r = 0^r = 0$$

بنابراین، در هر دو طرف معادلهٔ (۲) یک تعداد از عنصرهای S شمرده می‌شود و برابری برقرار است.

یک نتیجهٔ بی‌درنگ از این اصل نتیجهٔ زیر است.

فرع ۱.۸ با مفروضات قضیهٔ ۱۰۸، تعداد عنصرهایی از S که حداقل در یکی از شرایط c_i، $1 \leqslant i \leqslant t$ صدق کنند، برابر است با $N(c_1 \text{ یا } c_2 \text{ یا } \cdots \text{ یا } c_t) = N - \overline{N}$.

قبل از حل چند مثال، چند نماد دیگر را برای ساده‌تر بیان کردن قضیهٔ ۱۰۸ معرفی می‌کنیم. می‌نویسیم

$$S_0 = N,$$
$$S_1 = [N(c_1) + N(c_2) + \cdots + N(c_t)],$$
$$S_2 = [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_1c_t) + (c_2c_3) + \cdots + N(c_{t-1}c_t)],$$

و به‌طورکلی،

$$S_k = \sum N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k}),\ 1 \leqslant k \leqslant t$$

که در آن مجموع روی همهٔ انتخابهای kتایی از گردایهٔ t شرط مفروض انجام می‌گیرد. بنابراین، S_k حاوی $\binom{t}{k}$ جمعوند است.

اکنون ببینیم چگونه این اصل در حل برخی از مسائل شمارشی به‌کار گرفته می‌شود.

مثال ۱.۸ مطلوب است تعیین تعداد اعداد صحیح مثبت n به‌طوری‌که $۱ \leqslant n \leqslant ۱۰۰$ و n بر ۲، ۳ یا ۵ بخش‌پذیر نباشد.

در اینجا $S = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰۰\}$ و $N = ۱۰۰$. به‌ازای $n \in S$،

الف) n در شرط $c_۱$ صدق می‌کند هرگاه n بر ۲ بخش‌پذیر باشد،

ب) n در شرط $c_۲$ صدق می‌کند هرگاه n بر ۳ بخش‌پذیر باشد، و

پ) n در شرط $c_۳$ صدق می‌کند هرگاه n بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

در این صورت پاسخ این مسئله $N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳)$ است.

مانند بند ۲۰۵، به‌ازای هر عدد حقیقی r، نماد $\lfloor r \rfloor$ را برای نشان دادن بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا برابر با r به‌کار می‌گیریم. استفاده از این تابع در این مسأله سودمند است، زیرا می‌بینیم که

$N(c_۱) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۲} \rfloor = ۵۰$ [زیرا، ۵۰ (یعنی $\lfloor \frac{۱۰۰}{۲} \rfloor$) عدد صحیح ۲، ۴، ۶، ۸، $\cdots$، ۹۸ (یعنی ۴۹×۲) و ۱۰۰ (یعنی ۵۰×۲) بر ۲ بخش‌پذیرند]؛

$N(c_۲) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۳} \rfloor = \lfloor ۳۳\frac{۱}{۳} \rfloor = ۳۳$ [زیرا، ۳۳ (یعنی $\lfloor \frac{۱۰۰}{۳} \rfloor$) عدد صحیح مثبت ۳، ۶، ۹، ۱۲، $\cdots$، ۹۶ (یعنی ۳۲×۳) و ۹۹ (یعنی ۳۳×۳) بر ۳ بخش‌پذیرند]؛

$N(c_۳) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۵} \rfloor = ۲۰$؛

$N(c_۱c_۲) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۶} \rfloor = ۱۶$ [زیرا، ۱۶ (یعنی $\lfloor \frac{۱۰۰}{۶} \rfloor$) عنصر S هم بر ۲ و هم بر ۳، و بنابراین بر $\mathrm{lcm}(۲, ۳) = ۲ \times ۳ = ۶$، بخش‌پذیرند]؛

$N(c_۱c_۳) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۱۰} \rfloor = ۱۰$؛

$N(c_۲c_۳)\lfloor \frac{۱۰۰}{۱۵} \rfloor = ۶$؛

و $N(c_۱c_۲c_۳) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۳۰} \rfloor = ۳$.

اگر اصل شمول و طرد را به‌کار ببریم می‌بینیم که

$$\begin{aligned} N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳) &= S_۰ - S_۱ + S_۲ - S_۳ = N - [N(c_۱) + N(c_۲) + N(c_۳)] \\ &\quad + [N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + N(c_۲c_۳)] - N(c_۱c_۲c_۳) \\ &= ۱۰۰ - [۵۰ + ۳۳ + ۲۰] + [۱۶ + ۱۰ + ۶] - ۳ = ۲۶ \end{aligned}$$

(این ۲۶ عدد عبارت‌اند از ۱، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۴۹، ۵۳، ۵۹، ۶۱، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۷، ۷۹، ۸۳، ۸۹، ۹۱، و ۹۷.)

مثال ۲.۸ در فصل ۱ تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۸$ را به‌دست آوردیم. اکنون همین مسأله را با شرط اضافی $x_i \leqslant ۷$ به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، حل می‌کنیم.

در اینجا S مجموعهٔ جوابهای $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۸$ با شرایط $x_i \geqslant ۰$ به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$ است. بنابراین، $|S| = N = \binom{۴+۱۸-۱}{۱۸} = \binom{۲۱}{۱۸}$.

می‌گوییم جواب $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ در شرط c_i، $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، صدق می‌کند هرگاه $x_i > ۷$ (یا $x_i \geqslant ۸$). در این صورت جواب مسأله $N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\overline{c}_۴)$ است.

با توجه به تقارن موجود، داریم $N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = N(c_4)$. برای محاسبهٔ $N(c_1)$، جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ را با شرایط $x_i \geqslant 0$ به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant 4$، در نظر می‌گیریم. سپس در هر جواب، x_1 را با ۸ جمع می‌کنیم تا جوابهایی از $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ را بیابیم که در شرط c_1 صدق می‌کنند. بنابراین، $N(c_i) = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10}$ به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، و $S_1 = \binom{4}{1}\binom{13}{10}$.

به‌همین ترتیب، $N(c_1c_2)$ تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$، با شرایط $x_i \geqslant 0$ به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، است. بنابراین، $N(c_1c_2) = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2}$، و $S_2 = \binom{4}{2}\binom{5}{2}$.

چون به‌ازای هر سه شرط c_i ، c_j، و c_k که انتخاب کنیم، $N(c_ic_jc_k) = 0$ و همچنین، $N(c_1c_2c_3c_4) = 0$، پس

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = \binom{21}{18} - \binom{4}{1}\binom{13}{10} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} - 0 + 0 = 246$$

بنابراین از بین ۱۳۳۰ جواب صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$، فقط ۲۴۶ جواب در $x_i \leqslant 7$ به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، صدق می‌کنند.

در مثال بعدی فرمولی را که در بند ۳۰۵ برای محاسبهٔ تعداد توابع پوشا حدس زدیم ثابت می‌کنیم.

مثال ۳.۸ به‌ازای دو مجموعهٔ متناهی A و B که در شرط $|A|=m \geqslant n=|B|$ صدق می‌کنند، فرض کنیم $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$، $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ و فرض کنیم S مجموعهٔ همهٔ توابع $f : A \to B$ باشد. در این صورت $N = |S| = n^m$.

به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، فرض کنیم c_i شرطی بر S باشد به این ترتیب که $f : A \to B$ در c_i صدق می‌کند هرگاه b_i در برد f نباشد. (به تفاوت این c_i با c_i در مثالهای ۱۰۸ و ۲۰۸ توجه کنید.) در این صورت $N(\bar{c}_i)$ تعداد توابعی متعلق به S است که b_i در برد آنهاست و $N(\bar{c}_1\bar{c}_2 \cdots \bar{c}_n)$ تعداد توابع پوشای $f : A \to B$ را به‌دست می‌دهد.

به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، داریم $N(c_i) = (n-1)^m$، زیرا هر عنصر متعلق به B، جز b_i، را می‌توان به‌عنوان مؤلفهٔ دوم جفت مرتبی برای تابعی مانند $f : A \to B$ به‌کارگرفت که برد آن شامل b_i نیست. به‌همین ترتیب، به‌ازای هر $1 \leqslant i < j \leqslant n$، $(n-2)^m$ تابع مانند $f : A \to B$ وجود دارد که برد آنها نه شامل b_i است نه شامل b_j. با توجه به این ملاحظات می‌بینیم که $S_1 = [N(c_1) + N(c_2) + \cdots + N(c_n)] = n(n-1)^m = \binom{n}{1}(n-1)^m$ و

$$S_2 = [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_1c_n) + N(c_2c_3) + \cdots + N(c_2c_n) + \cdots + N(c_{n-1}c_n)]\binom{n}{2}(n-2)^m$$

به‌طورکلی، به‌ازای هر $1 \leqslant k \leqslant n$،

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} N(c_{i_1}c_{i_2} \cdots c_{i_k}) = \binom{n}{k}(n-k)^m$$

اکنون از اصل شمول و طرد نتیجه می‌گیریم که تعداد توابع پوشا از A در B برابر است با

$$\begin{aligned}N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_n) &= N - S_۱ + S_۲ - S_۳ + \cdots + (-۱)^n S_n \\ &= n^m - \binom{n}{۱}(n-۱)^m + \binom{n}{۲}(n-۲)^m - \binom{n}{۳}(n-۳)^m \\ &\quad + \cdots + (-۱)^n(n-n)^m = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}(n-i)^m \\ &= \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m\end{aligned}$$

پیش از آنکه بحث این مثال را به پایان برسانیم، ملاحظه می‌کنیم که حتی اگر $m < n$، می‌توانیم

$$\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m$$

را محاسبه کنیم. گذشته از این، به‌ازای $m < n$ و با فرض $|A| = m$ و $|B| = n$، باز هم عبارت

$$N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_n)$$

تعداد توابعی مانند $f : A \to B$ را به‌دست می‌دهد که برد آنها شامل همهٔ عنصرهای B است. ولی اکنون این عدد برابر با ۰ است.

مثلاً فرض کنیم که $m = ۳ < ۷ = n$. در این صورت، $N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_۷)$ تعداد توابع پوشای $f : A \to B$ به‌ازای $|A| = ۳$ و $|B| = ۷$ است. می‌دانیم که این عدد برابر با ۰ است و همچنین، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\sum_{i=۰}^{۷}(-۱)^i\binom{۷}{۷-i}(۷-i)^۳ &= \binom{۷}{۷}۷^۳ - \binom{۷}{۶}۶^۳ + \binom{۷}{۵}۵^۳ - \binom{۷}{۴}۴^۳ \\ &\quad + \binom{۷}{۳}۳^۳ - \binom{۷}{۲}۲^۳ + \binom{۷}{۱}۱^۳ - \binom{۷}{۰}۰^۳ \\ &= ۳۴۳ - ۱۵۱۲ + ۲۶۲۵ - ۲۲۴۰ + ۹۴۵ - ۱۶۸ + ۷ - ۰ = ۰\end{aligned}$$

بنابراین، به‌ازای هر $m, n \in \mathbf{Z}^+$، اگر $m < n$، آنگاه

$$\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m = ۰$$

اکنون مسأله‌ای را حل می‌کنیم که مشابه مسائلی است که در فصل ۳ در مورد نمودارهای ون حل کردیم.

مثال ۸.۴ به چند طریق می‌توان ۲۶ حرف الفبای لاتین را چنان کنار هم چید که هیچ‌یک از الگوهای car، dog، pun یا byte روی ندهد؟

فرض کنیم S مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای ۲۶ حرف الفبای لاتین را نشان دهد. در این صورت $|S| = ۲۶!$.
به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، می‌گوییم جایگشتی از S در شرط c_i صدق می‌کند هرگاه این جایگشت، به‌ترتیب، شامل car، dog، pun یا byte باشد.

مثلاً، برای محاسبهٔ $N(c_۱)$، تعداد طرق کنار هم چیدن ۲۴ نماد

$$\text{car}, \text{b}, \text{d}, \text{e}, \text{f}, \cdots, \text{p}, \text{q}, \text{s}, \text{t}, \cdots, \text{x}, \text{y}, \text{z}$$

را می‌شمریم. پس $N(c_۱) = ۲۴!$؛ با محاسبات مشابهی به‌دست می‌آوریم

$$N(c_۲) = N(c_۳) = ۲۴! \quad \text{و} \quad N(c_۴) = ۲۳!$$

برای محاسبهٔ $N(c_۱c_۲)$ با ۲۲ نماد

$$\text{car}, \text{dog}, \text{b}, \text{e}, \text{f}, \text{h}, \text{i}, \cdots, \text{m}, \text{n}, \text{p}, \text{q}, \text{s}, \text{t}, \cdots, \text{x}, \text{y}, \text{z}$$

سروکار داریم، که می‌توان آنها را به $۲۲!$ طریق کنار هم چید. بنابراین $N(c_۱c_۲) = ۲۲!$ و با انجام محاسبات مشابهی می‌بینیم که

$$N(c_۱c_۳) = N(c_۲c_۳) = ۲۲!، \quad \text{و به‌ازای هر } i \neq ۴،\ N(c_ic_۴) = ۲۱!$$

گذشته از این،

$$N(c_۱c_۲c_۳) = ۲۰!, \qquad N(c_ic_jc_۴) = ۱۹! \qquad (۱ \leqslant i < j \leqslant ۳)$$
$$N(c_۱c_۲c_۳c_۴) = ۱۷!$$

پس تعداد جایگشتهایی از S که شامل هیچ‌یک از الگوهای مفروض نیستند برابر است با

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴) = ۲۶! - [۳(۲۴!) + ۲۳!] + [۳(۲۲!) + ۳(۲۱!)] - [۲۰! + ۳(۱۹!)] + ۱۷!$$

مثال بعدی مسأله‌ای از نظریهٔ اعداد است.

مثال ۵.۸ به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geqslant ۲$، فرض کنیم $\varnothing(n)$ تعداد اعداد صحیح مثبت m با شرط $۱ \leqslant m < n$ و $\gcd(m,n) = ۱$ــ یعنی m و n نسبت به هم اول‌اندــ باشد. این تابع که تابع فی‌اویلر نام دارد، در جبر مجرد در موقعیتهای متعددی در ارتباط با شمارش پیش می‌آید. می‌بینیم که $\varnothing(۲) = ۱$، $\varnothing(۳) = ۲$، $\varnothing(۴) = ۲$، $\varnothing(۵) = ۴$، و $\varnothing(۶) = ۲$. به‌ازای هر عدد اول p، $\varnothing(p) = p - ۱$. می‌خواهیم فرمولی برای محاسبهٔ $\varnothing(n)$ برحسب n بیابیم تا مجبور به مقایسهٔ حالت به حالت هر m، $۱ \leqslant m < n$، با n نباشیم.

برای به‌دست آوردن چنین فرمولی اصل شمول‌ـطرد را مانند مثال ۱۰۸ به‌کار می‌گیریم. چنین عمل می‌کنیم: به‌ازای $n \geqslant ۲$، با استفاده از قضیهٔ بنیادی حساب می‌نویسیم $n = p_۱^{e_۱}p_۲^{e_۲}\cdots p_t^{e_t}$، که در آن $p_۱$، $p_۲$، ...، p_t اعداد اول متمایزی هستند و به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant t$، $e_i \geqslant ۱$. حالت $t = ۴$ را در نظر می‌گیریم. همین برای روشن شدن ایدهٔ کلی کافی خواهد بود.

با فرض $S = \{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$ داریم $N = |S| = n$ و به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$ می‌گوییم که $k \in S$ در

شرط c_i صدق می‌کند هرگاه k بر p_i بخش‌پذیر باشد. به‌ازای $n > k \geqslant ۱$، $\gcd(k,n) = ۱$ هرگاه k بر هیچ‌یک از اعداد اول p_i، $۴ \geqslant i \geqslant ۱$، بخش‌پذیر نباشد. بنابراین $\varnothing(n) = N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴)$.

به‌ازای هر $۴ \geqslant i \geqslant ۱$ داریم $N(c_i) = \frac{n}{p_i}$ و به‌ازای هر $۴ \geqslant j > i \geqslant ۱$ داریم $N(c_ic_j) = \frac{n}{p_ip_j}$. همچنین، به‌ازای هر $۴ \geqslant \ell > j > i \geqslant ۱$ داریم $N(c_ic_jc_\ell) = \frac{n}{p_ip_jp_\ell}$ و $N(c_۱c_۲c_۳c_۴) = \frac{n}{p_۱p_۲p_۳p_۴}$. بنابراین،

$$\begin{aligned}
\varnothing(n) &= S_۰ - S_۱ + S_۲ - S_۳ + S_۴ \\
&= n - \left[\frac{n}{p_۱} + \cdots + \frac{n}{p_۴}\right] + \left[\frac{n}{p_۱p_۲} + \frac{n}{p_۱p_۳} + \cdots + \frac{n}{p_۳p_۴}\right] \\
&\quad - \left[\frac{n}{p_۱p_۲p_۳} + \cdots + \frac{n}{p_۲p_۳p_۴}\right] + \frac{n}{p_۱p_۲p_۳p_۴} \\
&= n\left[۱ - \left(\frac{۱}{p_۱} + \cdots + \frac{۱}{p_۴}\right) + \left(\frac{۱}{p_۱p_۲} + \frac{۱}{p_۱p_۳} + \cdots + \frac{۱}{p_۳p_۴}\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{۱}{p_۱p_۲p_۳} + \cdots + \frac{۱}{p_۲p_۳p_۴}\right) + \frac{۱}{p_۱p_۲p_۳p_۴}\right] \\
&= \frac{n}{p_۱p_۲p_۳p_۴}[p_۱p_۲p_۳p_۴ - (p_۲p_۳p_۴ + p_۱p_۳p_۴ + p_۱p_۲p_۴ + p_۱p_۲p_۳) \\
&\quad + (p_۳p_۴ + p_۲p_۴ + p_۲p_۳ + p_۱p_۴ + p_۱p_۳ + p_۱p_۲) \\
&\quad - (p_۴ + p_۳ + p_۲ + p_۱) + ۱] \\
&= \frac{n}{p_۱p_۲p_۳p_۴}[(p_۱ - ۱)(p_۲ - ۱)(p_۳ - ۱)(p_۴ - ۱)] \\
&= n\left[\frac{p_۱ - ۱}{p_۱} \cdot \frac{p_۲ - ۱}{p_۲} \cdot \frac{p_۳ - ۱}{p_۳} \cdot \frac{p_۴ - ۱}{p_۴}\right] = n\prod_{i=۱}^{۴}\left(۱ - \frac{۱}{p_i}\right).
\end{aligned}$$

به‌طورکلی، $\varnothing(n) = n\prod_{p|n}\left(۱ - \frac{۱}{p}\right)$، که در آن حاصل‌ضرب روی همهٔ اعداد اولی که n را عاد می‌کنند محاسبه می‌شود. وقتی $n = p$، که p عددی اول است، $\varnothing(n) = \varnothing(p) = p\left(۱ - \frac{۱}{p}\right) = p - ۱$، یعنی همان جوابی که قبلاً به‌دست آورده بودیم. به‌ازای $n = ۲۳۱۰۰$، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
\varnothing(۲۳۱۰۰) &= \varnothing(۲^۲ \times ۳ \times ۵^۲ \times ۷ \times ۱۱) \\
&= (۲۳۱۰۰)\left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۳}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۵}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۷}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۱۱}\right) \\
&= ۴۸۰۰
\end{aligned}$$

برنامهٔ پاسکال در شکل ۳۰۸ مقدار $\varnothing(n)$ را به‌ازای $n \geqslant ۳$ محاسبه می‌کند. در این برنامه ساختار کنترل

```
Program EulerPhiFunction (input,output);
Var
     i,j,k,n,phi,originalvalue: integer;
Begin
     Write ('The value of n is ');
     Read (n);
     phi := n;
     originalvalue := n;
     If n Mod 2 = 0 then
          Begin
               phi := phi Div 2;
               While n Mod 2 = 0 do
                    n := n Div 2
          End;
     If n Mod 3 = 0 then
          Begin
               phi := (phi * 2) Div 3;
               While n Mod 3 = 0 do
                    n := n Div 3
          End;
     i := 5;
     While n >= 5 do
          Begin
               j := 1;
               Repeat
                         j := j + 1;
                         k := i Mod j
               Until (k = 0) or (j = trunc(sqrt(i)));
               If (k <> 0) and (n Mod i = 0) then
                         Begin
                              phi := (phi * (i - 1)) Div i;
                              While n Mod i = 0 do
                                   n := n Div i
                         End;
               i := i + 2
          End;
     Write ('For n=', originalvalue:0, 'there are', phi:0);
     Writeln (' numbers smaller than ', originalvalue:0);
     Writeln (' and relatively prime to it.')
End.

The value of n is 131
For n = 131 there are 130 numbers smaller than 131
and relatively prime to it.

The value of n is 31500
For n = 31500 there are 7200 numbers smaller than 31500
and relatively prime to it.

The value of n is 198000
For n = 198000 there are 48000 numbers smaller than 198000
and relatively prime to it.
```

شکل۳.۸

Repeat-Until برای تعیین اینکه عدد صحیح i عددی اول است یا نه به‌کارگرفته شده است. شرط

```
j=trunc (sqrt(i))
```

برای خاتمه دادن به اجرای این حلقه از نتیجهٔ مثال ۴ ۲۸۰ حاصل می‌شود.

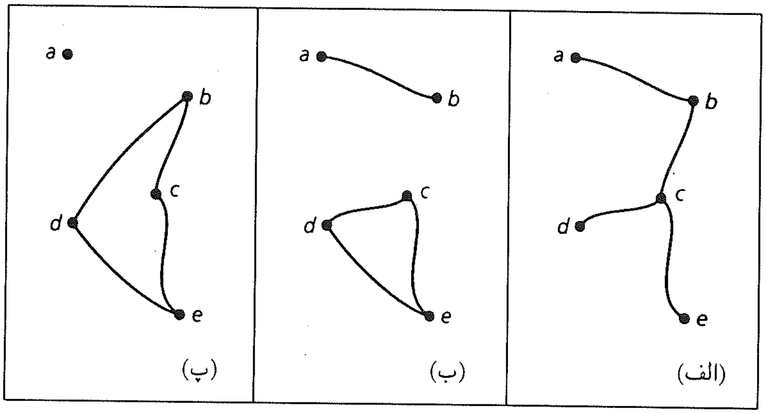
با استفاده از این برنامه $\phi(n)$ را به‌ازای ۱۳۱ $= n$، ۳۱۵۰۰ $= n$ و ۱۹۸۰۰۰ $= n$ به‌دست آورده‌ایم.

تابع فی اویلر ویژگیهای جالب فراوانی دارد. بعضی از این ویژگیها را در تمرینات همین بند و در تمرینات تکمیلی بررسی می‌کنیم.

آخرین مثال این بند یادآور برخی از مفاهیم نظریهٔ گراف است که در فصل ۷ مطالعه کردیم.

مثال ۶.۸ در ناحیه‌ای خارج از شهر پنج روستا هست. مهندسی می‌خواهد سیستمی از جاده‌های دوطرفه را بین این روستاها چنان طراحی کند که پس از تکمیل این سیستم، هیچ روستایی تنها نماند. این مهندس به چند طریق می‌تواند چنین سیستمی را طراحی کند؟

اگر روستاها را a، b، c، d، و e بنامیم، در این صورت می‌خواهیم تعداد گرافهای بیسوی بیطوقه‌ای را روی این رأسها تعیین کنیم که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد. در نتیجه، می‌خواهیم گرافهایی مانند گرافهای قسمتهای (الف) و (ب) از شکل ۴٫۸ را بشمریم، ولی گرافهایی نظیر گراف قسمت (پ) از شکل ۴٫۸ را نخواهیم شمرد.



شکل۴.۸

فرض کنیم S مجموعهٔ گرافهای بیسوی بیطوقهٔ G روی $V = \{a, b, c, d, e\}$ باشد. در این صورت $N = |S| = ۲^{۱۰}$، زیرا $۱۰ = \binom{۵}{۲}$ جادهٔ دوطرفه را می‌توان بین این پنج روستا در نظر گرفت و هر جاده ممکن است در سیستم باشد یا نباشد.

به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۵$، می‌گوییم سیستمی از این جاده‌ها در شرط c_i صدق می‌کند هرگاه روستاهای، به‌ترتیب، a، b، c، d، و e را تنها گذارد. در این صورت، پاسخ مسأله $N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴\bar{c}_۵)$ است.

به‌ازای شرط $c_۱$، روستای a تنها می‌ماند؛ پس شش یال (جادهٔ) $\{b, c\}$، $\{b, d\}$، $\{b, e\}$، $\{c, d\}$، $\{c, e\}$، و $\{d, e\}$ را در نظر می‌گیریم. چون برای هر یال دو گزینه داریم ـ این یال را در گراف بگنجانیم یا این یال را کنار گذاریم ـ می‌بینیم که $N(c_۱) = ۲^۶$. با توجه به تقارن موجود، به‌ازای هر $۲ \leqslant i \leqslant ۵$ داریم $N(c_i) = ۲^۶$. بنابراین، $S_۱ = \binom{۵}{۱}۲^۶$.

وقتی بنا باشد روستاهای a و b تنها بمانند، هر یک از یالهای $\{c,d\}$، $\{d,e\}$، و $\{c,e\}$ را می‌توان در گراف گنجاند یا کنار گذاشت. 2^3 امکان برای این کار وجود دارد. بنابراین، $N(c_1c_2) = 2^3$، و $S_2 = \binom{5}{2}2^3$.

استدلالهای مشابهی نشان می‌دهند که $N(c_1c_2c_3) = 2^1$ و $S_3 = \binom{5}{3}2^1$؛ $N(c_1c_2c_3c_4) = 2^0$ و $S_4 = \binom{5}{4}2^0$؛ $N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 2^0$ و $S_5 = \binom{5}{5}2^0$.

درنتیجه، $N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\overline{c}_4\overline{c}_5) = 2^{10} - \binom{5}{1}2^6 + \binom{5}{2}2^3 - \binom{5}{3}2^1 + \binom{5}{4}2^0 - \binom{5}{5}2^0 = 768$

تمرینات ۱.۸

۱. مطلوب است تعیین تعداد اعداد صحیح مثبت n، $1 \leqslant n \leqslant 2000$، که

الف) بر ۲ ، ۳ یا ۵ بخش‌پذیر نیستند. ب) بر ۲ ، ۳ ، ۵ یا ۷ بخش‌پذیر نیستند.

پ) بر ۲ ، ۳ یا ۵ بخش‌پذیر نیستند، ولی بر ۷ بخش‌پذیرند.

۲. مطلوب است تعیین تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$، در صورتی‌که

الف) به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، $0 \leqslant x_i$. ب) به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، $0 \leqslant x_i < 8$.

پ) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$، $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$، $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$، $3 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

۳. به چند طریق می‌توانیم همهٔ حروف واژهٔ INFORMATION را چنان مرتب کنیم که، هیچ جفتی از حروف متوالی بیش از یک‌بار دیده نشود؟ [در این تمرین می‌خواهیم ترتیبهایی نظیر IINNOOFRMTA و FORTMAIINON را بشمریم، ولی ترتیبهایی نظیر INFORINMOTA (که در آن «IN» دوبار دیده می‌شود) یا NORTFNOIAMI (که در آن «NO» دوبار دیده می‌شود) را نخواهیم شمرد.]

۴. مطلوب است تعیین تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ در صورتی‌که به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، $-5 \leqslant x_i \leqslant 10$.

۵. تعداد اعداد صحیح مثبت x را به‌طوری‌که $x \leqslant 9999999$ و مجموع ارقام x برابر با ۳۱ باشد، بیابید.

۶. یکی از استادان ریاضی دانشگاهی ۱۲ پرسش برای امتحان درس خود طرح کرد و ۲۰۰ امتیاز برای کل آنها در نظر گرفت. این استاد به چند طریق می‌تواند ۲۰۰ امتیاز را به پرسشها تخصیص دهد در صورتی‌که (الف) هر پرسش حداقل ۱۰ و حداکثر ۲۵ امتیاز داشته باشد؟ (ب) هر پرسش حداقل ۱۰ و حداکثر ۲۵ امتیاز داشته باشد و امتیاز هر پرسش مضرب ۵ باشد؟

۷. فروشندهٔ یک گل‌فروشی می‌خواهد ۱۵ گل مختلف را در پنج ردیف در ویترین مغازه به نمایش بگذارد. او به چند طریق می‌تواند این گلها را بچیند به‌طوری‌که در هر ردیف حداقل یک گل و حداکثر چهار گل باشد؟

۸. به چند طریق می‌توان نه مهره از کیسه‌ای حاوی دوازده مهره (این مهره‌ها از هر جهت، جز از نظر رنگ، یکسان‌اند) بیرون کشید در صورتی‌که سه مهرهٔ قرمز، سه مهرهٔ آبی، سه مهرهٔ سفید، و سه مهرهٔ سبز در کیسه باشد؟

۹. مطلوب است تعیین تعداد جایگشتهای a ، b ، c ، ... ، x ، y ، و z به‌طوری‌که در آنها هیچ‌یک از الگوهای spin، game، path یا net پیش نیاید؟

۱۰. به پرسش مطرح شده در مثال ۶.۸ در صورتی‌که تعداد روستاها شش باشد پاسخ دهید.

۱۱. اگر هشت تاس متمایز ریخته شوند، احتمال اینکه هر شش عدد (۱ ، ۲ ، ... ، ۶) بنشینند چقدر است؟

۱۲. چند عدد نه رقمی هست که در آنها ارقام ۱ ، ۳، و ۷ حداقل یک‌بار ظاهر می‌شوند؟

۱۳. به چند طریق می‌توان سه x، سه y، و سه z را چنان مرتب‌کرد که هیچ‌یک از حروف سه بار متوالی ظاهر نشود؟

۱۴. چهار گروه ۲۰ نفره از امدادگران در محلی گرد آمده‌اند و قرار است برای انجام مأموریت خاصی ۵۰ نفر از آنها انتخاب شوند. احتمال اینکه در این انتخاب حداقل یک نفر از هر گروه حضور داشته باشد چقدر است؟

۱۵. تاسی را پنج‌بار می‌ریزیم، احتمال اینکه مجموع اعداد حاصل ۲۰ باشد چقدر است؟

۱۶. در طول یک کنفرانس ۱۲ هفته‌ای دربارهٔ ریاضیات، ریحانه هفت نفر از همکلاسان دانشکدهٔ خود را ملاقات کرد. ریحانه در طول این کنفرانس به هنگام صرف ناهار، هر یک از دوستانش را ۳۵ بار، هر جفت از دوستان را ۱۶ بار، هر مجموعهٔ سه نفری از دوستان را ۸ بار، هر مجموعهٔ چهار نفری از دوستان را ۴ بار، هر مجموعهٔ پنج نفری از دوستان را ۲ بار، و هر مجموعهٔ شش نفری از آنها را ۱ بار ملاقات کرد، ولی هرگز هر هفت نفر را با هم ملاقات نکرد. اگر او در طول این ۸۴ روز برگزاری کنفرانس هر روز ناهار خورده باشد، آیا هرگز هنگام صرف ناهار تنها بوده است؟

۱۷. $\phi(n)$ را به‌ازای n برابر با (الف) ۵۱؛ (ب) ۴۲۰؛ (پ) ۱۲۳۰۰، محاسبه کنید.

۱۸. $\phi(n)$ را به‌ازای n برابر با (الف) ۵۱۸۶؛ (ب) ۵۱۸۷؛ (پ) ۵۱۸۸، محاسبه کنید.

۱۹. فرض کنیم $n \in \mathbf{Z}^+$. (الف) $\phi(2^n)$ را تعیین کنید. (ب) اگر p یک عدد اول فرد باشد، $\phi(2^n p)$ را تعیین کنید.

۲۰. به‌ازای کدام اعداد $n \in \mathbf{Z}^+$، $\phi(n)$ فرد است؟

۲۱. چند عدد صحیح مثبت کوچکتر از ۶۰۰۰ مانند n (الف) در $\gcd(n, 6000) = 1$ صدق می‌کنند؟ (ب) یک مقسوم‌علیه مشترک اول با ۶۰۰۰ دارند؟

۲۲. اگر $m, n \in \mathbf{Z}^+$، ثابت کنید $\phi(n^m) = n^{m-1}\phi(n)$.

۲۳. سه مقدار برای $n \in \mathbf{Z}^+$ بیابید به‌طوری‌که $\phi(n) = 16$.

۲۴. به‌ازای کدام اعداد صحیح مثبت n، $\phi(n)$ توانی از ۲ است؟

۲۵. به‌ازای کدام اعداد صحیح مثبت n، ۴ عدد $\phi(n)$ را عاد می‌کند؟

۲۶. برنامهٔ شکل ۸.۳ را چنان گسترش دهید که حالت $n = 2$ را نیز بررسی کند و نتیجه را چنان چاپ کند که از نظر دستور زبان درست باشد.

۲۷. در برنامهٔ شکل ۸.۳، سه حلقهٔ While دو خطی چه کاری انجام می‌دهند؟ چرا در خط $i := i + 2$، i به‌جای ۱ واحد ۲ واحد افزایش یافته است؟ (اگر i را ۱ واحد افزایش دهیم آیا نتیجهٔ متفاوتی به‌دست می‌آوریم؟)

۲.۸ تعمیم اصل شمول و طرد

مجموعهٔ S به‌طوری‌که $|S| = N$ و شرایط c_1، c_2، $\cdots$، c_t را که بعضی از عنصرهای S در آنها صدق می‌کنند در نظر می‌گیریم. در بند ۱.۸ دیدیم که چگونه اصل شمول و طرد راهی را برای تعیین $N(\overline{c}_1\overline{c}_2\cdots\overline{c}_t)$، یعنی تعداد عنصرهایی از S که در هیچ‌یک از این t شرط صدق نمی‌کنند، به‌دست می‌دهد. اگر $m \in \mathbf{Z}^+$ و $1 \leqslant m \leqslant t$، می‌خواهیم E_m، یعنی تعداد عنصرهایی از S را که دقیقاً در m تا از این t شرط صدق می‌کنند تعیین کنیم. (در حال حاضر می‌توانیم E_0 را به‌دست آوریم.)

می‌توانیم معادلاتی نظیر

$$E_1 = N(c_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_t) + N(\overline{c}_1 c_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_t) + \cdots + N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_{t-1}c_t)$$

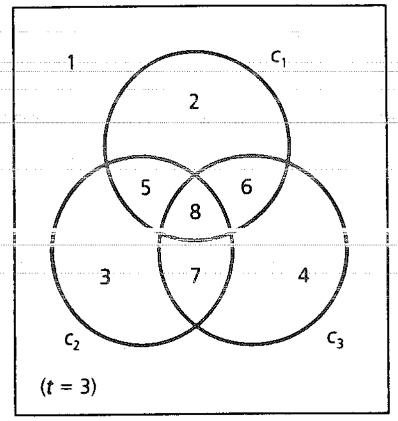
و

$$E_2 = N(c_1 c_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_t) + N(c_1\overline{c}_2 c_3\cdots\overline{c}_t) + \cdots + N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_{t-2}c_{t-1}c_t)$$

بنویسیم. چنین نتایجی، اگر چه آن‌طور که انتظار داریم سودمند نیستند، هنگام بررسی نمودارهای ون برای حالات $t = ۳$ و $t = ۴$، نقطهٔ آغاز سودمندی خواهند بود.

در شکل ۸ ۰ ۵، که در آن $t = ۳$، هر شرط را با شماره‌ای کنار یکی از دایره‌ها مشخص می‌کنیم و هر دایره عنصرهایی از S را نمایش می‌دهد که در یکی از شرطها صدق می‌کنند. در این صورت $E_۱$ برابر است با تعداد عنصرهای ناحیه‌های ۲ ، ۳، و ۴. ولی برابری زیر را نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$E_۱ = N(c_۱) + N(c_۲) + N(c_۳) - ۲[N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + N(c_۲c_۳)] + ۳N(c_۱c_۲c_۳)$$



شکل۵.۸

در $N(c_۱)+N(c_۲)+N(c_۳)$ عنصرهای ناحیه‌های ۵ ، ۶،و ۷ رادو بارو عنصرهای ناحیهٔ ۸ راسه بار می‌شمریم. در جملهٔ بعدی، عنصرهای ناحیه‌های ۵ ، ۶،و ۷ دوبارکم می‌شوند. با تفریق‌کردن عبارت $۲[N(c_۱c_۲)+N(c_۱c_۳)+N(c_۲c_۳)]$، عنصرهای ناحیهٔ ۸ را شش بارکم می‌کنیم. پس، جملهٔ $۳N(c_۱c_۲c_۳)$ را می‌افزاییم تا عنصرهای ناحیهٔ ۸ را به‌حساب نیاورده باشیم. بنابراین، داریم $E_۱ = S_۱ - ۲S_۲ + ۳S_۳ = S_۱ - \binom{۲}{۱}S_۲ + \binom{۳}{۲}S_۳$.

وقتی به محاسبهٔ $E_۲$ می‌پردازیم، معادله‌ای که قبلاً نوشتیم نشان می‌دهد که می‌خواهیم عنصرهایی از S را بشمریم که در ناحیه‌های ۵ ، ۶، و ۷ قرار دارند. با توجه به نمودار ون، داریم

$$E_۲ = N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + N(c_۲c_۳) - ۳N(c_۱c_۲c_۳) = S_۲ - ۳S_۳ = S_۲ - \binom{۳}{۱}S_۳$$

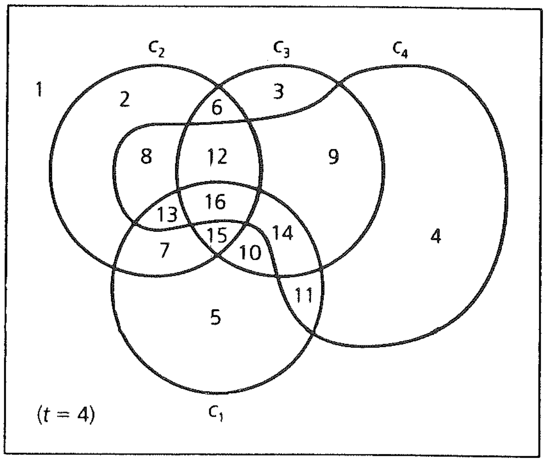
و

$$E_۳ = N(c_۱c_۲c_۳) = S_۳$$

در شکل ۸ ۰ ۶، شرایط $c_۱$ ، $c_۲$، و $c_۳$ به زیرمجموعه‌های دایره‌ای شکل S وابسته‌اند، در حالی‌که $c_۴$ به شکل نسبتاً نامنظمی که از ناحیه‌های ۴ ، ۸ ، ۹ ، ۱۱ ، ۱۲ ، ۱۳ ، ۱۴، و ۱۶ تشکیل شده است وابسته است. به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، E_i به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$E_۱$ [ناحیه‌های ۲ ، ۳ ، ۴، و ۵]:

$$\begin{aligned} E_۱ =& [N(c_۱) + N(c_۲) + N(c_۳) + N(c_۴)] \\ &- ۲[N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + N(c_۱c_۴) + N(c_۲c_۳) + N(c_۲c_۴) + N(c_۳c_۴)] \end{aligned}$$



شکل ۶.۸

$$
\begin{aligned}
&+ ۳[N(c_۱c_۲c_۳) + N(c_۱c_۲c_۴) + N(c_۱c_۳c_۴) + N(c_۲c_۳c_۴)] \\
&- ۴N(c_۱c_۲c_۳c_۴) \\
=&S_۱ - ۲S_۲ + ۳S_۳ - ۴S_۴ = S_۱ - \binom{۲}{۱}S_۲ + \binom{۳}{۲}S_۳ - \binom{۴}{۳}S_۴
\end{aligned}
$$

[یادداشت: اگر عنصری را در ناحیهٔ ۳ در نظر بگیریم، می‌بینیم که این عنصر یک‌بار در $E_۱$ و یک‌بار در $S_۱$ [در $N(c_۳)$] به‌حساب آمده است. اگر عنصری را در ناحیهٔ ۶ در نظر بگیریم، می‌بینیم که این عنصر در $E_۱$ به‌حساب نیامده است؛ در $S_۱$ دوبار به‌حساب آمده است [هم در $N(c_۲)$ و هم در $N(c_۳)$] ولی دوبار در $۲S_۲$ کم شده است [زیرا یک‌بار در $S_۲$ شمرده شده است و یک‌بار در $N(c_۲c_۳)$ به‌حساب آمده است]، ازاین‌رو، این عنصر درکل شمرده نشده است. اکنون خواننده باید عنصری از ناحیهٔ ۱۲ و عنصری از ناحیهٔ ۱۶ را در نظر بگیرد و نشان دهد که سهم هر یک از این دو عنصر در مجموع هر دو طرف فرمول $E_۱$ برابر ۰ است.]

$E_۲$ [ناحیه‌های ۶ـ۱۱]:

با توجه به شکل ۸ ۰ ۶، $E_۲ = S_۲ - ۳S_۳ + ۶S_۴ = S_۲ - \binom{۳}{۱}S_۳ + \binom{۴}{۲}S_۴$. برای توضیح جزئیات این فرمول، نتایجی را که در جدول ۸ ۰ ۱ آمده است بررسی می‌کنیم. در این جدول، در ستون مربوط به هر یک از جمعوندهای $S_۲$ ، $S_۳$، و $S_۴$ ناحیه‌هایی را فهرست کرده‌ایم که عنصرهایشان برای تعیین آن جمعوندها شمرده شده‌اند. برای محاسبهٔ $S_۲ - ۳S_۳ + ۶S_۴$ عنصرهای ناحیه‌های ۶ـ۱۱، یعنی دقیقاً عنصرهایی را که باید برای محاسبهٔ $E_۲$ به‌حساب آیند، می‌شمریم.

سرانجام، عنصرهای لازم برای محاسبهٔ $E_۳$ در ناحیه‌های ۱۲ـ۱۵ قرار دارند و $E_۳ = S_۳ - ۴S_۴ = S_۳ - \binom{۴}{۱}S_۴$؛ عنصرهای لازم برای محاسبهٔ $E_۴$ عنصرهای ناحیهٔ ۱۶ هستند و $E_۴ = S_۴$.

این نتایج قضیهٔ زیر را القا می‌کنند.

قضیهٔ ۲.۸ با مفروضات قضیهٔ ۸ ۰ ۱، به‌ازای هر $۱ \leqslant m \leqslant t$، تعداد عنصرهایی از S که دقیقاً در m شرط از

جدول ۱.۸

$S_۲$	$S_۳$	$S_۴$
$N(c_۱c_۲)$: ۷, ۱۳, ۱۵, ۱۶	$N(c_۱c_۲c_۳)$: ۱۵, ۱۶	$N(c_۱c_۲c_۳c_۴)$: ۱۶
$N(c_۱c_۳)$: ۱۰, ۱۴, ۱۵, ۱۶	$N(c_۱c_۲c_۴)$: ۱۳, ۱۶	
$N(c_۱c_۴)$: ۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۶	$N(c_۱c_۳c_۴)$: ۱۴, ۱۶	
$N(c_۲c_۳)$: ۶, ۱۲, ۱۵, ۱۶	$N(c_۲c_۳c_۴)$: ۱۲, ۱۶	
$N(c_۲c_۴)$: ۸, ۱۲, ۱۳, ۱۶		
$N(c_۳c_۴)$: ۹, ۱۲, ۱۴, ۱۶		

شرایط $c_۱$، $c_۲$، $\cdots$، c_t صدق می‌کنند برابر است با

$$E_m = S_m - \binom{m+۱}{۱} S_{m+۱} + \binom{m+۲}{۲} S_{m+۲} - \cdots + (-۱)^{t-m}\binom{t}{t-m} S_t \qquad (۱)$$

(اگر $m = ۰$، قضیهٔ ۱۰۸ را به‌دست می‌آوریم.)

برهان: با استدلالی مشابه اثبات قضیهٔ ۱۰۸، فرض می‌کنیم $x \in S$ و سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) وقتی x در کمتر از m شرط صدق کند، سهم آن در محاسبهٔ هر یک از جمله‌های E_m، S_m، $S_{m+۱}$، $\cdots$، S_t برابر با ۰ است و بنابراین، در هیچ‌یک از دو طرف معادله شمرده نمی‌شود.

ب) وقتی x دقیقاً در m شرط صدق کند، یک‌بار در E_m و یک‌بار در S_m شمرده می‌شود، ولی در $S_{m+۱}$ ، $\cdots$ ، S_t شمرده نمی‌شود. در نتیجه، در هر یک از دو طرف معادله یک‌بار به‌حساب می‌آید.

پ) فرض کنیم x در r شرط به‌طوری‌که، $m < r \leqslant t$، صدق کند. در این صورت، x سهمی در محاسبهٔ E_m ندارد. ولی $\binom{r}{m}$ بار در S_m، $\binom{r}{m+۱}$ بار در $S_{m+۱}$، $\cdots$ و $\binom{r}{r}$ بار در S_r شمرده می‌شود، ولی در هیچ‌یک از جمله‌های بعد از S_r شمرده نمی‌شود. پس x در طرف راست معادله،

$$\binom{r}{m} - \binom{m+۱}{۱}\binom{r}{m+۱} + \binom{m+۲}{۲}\binom{r}{m+۲} - \cdots + (-۱)^{r-m}\binom{r}{r-m}\binom{r}{r}$$

بار به‌حساب می‌آید.

به‌ازای $۰ \leqslant k \leqslant r-m$،

$$\begin{aligned}\binom{m+k}{k}\binom{r}{m+k} &= \frac{(m+k)!}{k!m!}\cdot\frac{r!}{(m+k)!(r-m-k)!}\\ &= \frac{r!}{m!}\cdot\frac{۱}{k!(r-m-k)!} = \frac{r!}{m!(r-m)!}\cdot\frac{(r-m)!}{k!(r-m-k)!}\\ &= \binom{r}{m}\binom{r-m}{k}.\end{aligned}$$

درنتیجه، x در طرف راست معادلهٔ (۱)،

$$\binom{r}{m}\binom{r-m}{0}-\binom{r}{m}\binom{r-m}{1}+\binom{r}{m}\binom{r-m}{2}-\cdots+(-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r-m}{r-m}$$

$$=\binom{r}{m}\left[\binom{r-m}{0}-\binom{r-m}{1}+\binom{r-m}{2}-\cdots+(-1)^{r-m}\binom{r-m}{r-m}\right]$$

$$=\binom{r}{m}[1-1]^{r-m}=\binom{r}{m}\cdot 0=0$$

بار به‌حساب آمده، و فرمول ثابت می‌شود.

با تکیه بر این نتیجه، اگر L_m تعداد عنصرهایی از S را نشان دهد که (با توجه به مفروضات قضیهٔ ۱۰۸) حداقل در m شرط از t شرط مفروض صدق کنند، در این صورت فرمول زیر را داریم.

فرع ۲.۸ $L_m=S_m-\binom{m}{m-1}S_{m+1}+\binom{m+1}{m-1}S_{m+2}-\cdots+(-1)^{t-m}\binom{t-1}{m-1}S_t$.

برهان: طرحی برای اثبات این فرع در تمرینات پایان همین بند عرضه شده است.

وقتی $m=1$، فرمول فرع ۲۰۸ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$L_1=S_1-\binom{1}{0}S_2+\binom{2}{0}S_3-\cdots+(-1)^{t-1}\binom{t-1}{0}S_t$$

$$=S_1-S_2+S_3-\cdots+(-1)^{t-1}S_t$$

اگر این را با فرمول قضیهٔ ۱۰۸ مقایسه کنیم، می‌بینیم که

$$L_1=N-\overline{N}=|S|-\overline{N}$$

این نتیجه چندان شگفت‌آور نیست، زیرا عنصری مانند x متعلق به S در صورتی در L_1 به حساب می‌آید که حداقل در یکی از شرایط c_1، c_2، c_3، $\cdots$، c_t صدق کند، یعنی در صورتی‌که $x\in S$ و x در $\overline{N}=N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_t)$ به‌حساب نیامده باشد.

مثال ۷.۸ مجدداً به مثال ۶۰۸ برمی‌گردیم. اکنون می‌توانیم تعداد سیستمهایی از جاده‌های دوطرفه را که دقیقاً دو روستا را تنها بگذارند (E_2) و تعداد سیستمهایی از جاده‌های دوطرفه را که حداقل دو روستا را تنها بگذارند (L_2) محاسبه کنیم.

نتایجی که قبلاً در مثال ۶۰۸ محاسبه شدند نشان می‌دهند که

$$E_۲ = S_۲ - \binom{۳}{۱} S_۳ + \binom{۴}{۲} S_۴ - \binom{۵}{۳} S_۵ = ۸۰ - ۳(۲۰) + ۶(۵) - ۱۰(۱) = ۴۰,$$

$$L_۲ = S_۲ - \binom{۲}{۱} S_۳ + \binom{۳}{۱} S_۴ - \binom{۴}{۱} S_۵ = ۸۰ - ۲(۲۰) + ۳(۵) - ۴(۱) = ۵۱$$

تمرینات ۲.۸

۱. در مثالهای ۶۰۸ و ۷۰۸، E_i را بهازای $۰ \leqslant i \leqslant ۵$ محاسبه کنید و نشان دهید $\sum_{i=۰}^{۵} E_i = N = |S|$.

۲. الف) به چند طریق می‌توان حروف واژهٔ ARRANGEMENT را چنان مرتب کرد که دقیقاً دو جفت حروف یکسان متوالی مشاهده شود؟ حداقل دو جفت حروف یکسان متوالی مشاهده شود؟

ب) به همان پرسشهای قسمت (الف) برای سه جفت حروف یکسان متوالی ـ به‌جای دو جفت ـ پاسخ دهید.

۳. به چند طریق می‌توان حروف واژهٔ CORRESPONDENTS را چنان مرتب کرد که (الف) هیچ دو حرف یکسان متوالی مشاهده نشود؟ (ب) دقیقاً دو جفت حروف یکسان متوالی مشاهده شود؟ (پ) حداقل سه جفت حروف یکسان متوالی مشاهده شود؟

۴. فرض کنیم $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۷\}$. چند تابع $f : A \to B$ در $|f(A)| = ۴$ صدق می‌کنند؟ چند تابع در $|f(A)| \leqslant ۴$ صدق می‌کنند؟

۵. به چند طریق می‌توان ده جایزهٔ متمایز را بین چهار دانشجو چنان توزیع کرد که دقیقاً دو دانشجو جایزه‌ای نگیرند؟ به چند طریق می‌توان این جایزه‌ها را چنان توزیع کرد که حداقل دو دانشجو جایزه‌ای نگیرند؟

۶. به چند طریق می‌توان ده حرف نخست الفبا را چنان مرتب کرد که دقیقاً چهار تا از آنها در جای عادی خود قرار گیرند؟ به چند طریق می‌توان آنها را چنان مرتب کرد که حداقل چهار تا از آنها در جای عادی خود قرار گیرند؟

۷. ۵۲ کارت هم‌اندازه در چهار رنگ داریم؛ ۱۳ کارت سفید، ۱۳ کارت آبی، ۱۳ کارت قرمز و ۱۳ کارت سیاه‌اند. به چند طریق می‌توان ۱۳ تا از این کارتها را انتخاب کرد به‌طوری‌که بین کارتهای انتخاب شده (الف) حداقل یک کارت از هر رنگ باشد؟ (ب) دقیقاً یکی از رنگها (مثلاً، رنگ سفید) نباشد؟ (پ) دقیقاً دو تا از رنگها نباشند؟

۸. در اینجا طرحی برای اثبات فرع ۲۰۸ عرضه شده است. جزئیات لازم را بنویسید.

الف) نخست ملاحظه می‌کنیم که $E_t = L_t = S_t$.

ب) $E_{t-۱}$ چیست و L_t چه ارتباطی با $L_{t-۱}$ دارد؟

پ) نشان دهید $L_{t-۱} = S_{t-۱} - \binom{t-۱}{t-۲} S_t$.

ت) بهازای هر $۱ \leqslant m \leqslant t-۱$، L_m، $L_{m+۱}$، و E_m چه ارتباطی با هم دارند؟

ث) با استفاده از نتایج مراحل (الف) تا (ت)، این فرع را با استقرا در جهت عکس ثابت کنید.

۳.۸ پریش: هیچ چیز در جای خود نیست

در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌بینیم که سری مک‌لورن برای تابع نمایی با

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

بیان می‌شود؛ درنتیجه،

$$e^{-۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!} = ۱ - ۱ + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots$$

تا پنج رقم اعشار، داریم $e^{-۱} = ۰/۳۶۷۸۸$ و $۱ - ۱ + (\frac{۱}{۲!}) - (\frac{۱}{۳!}) + \cdots - (\frac{۱}{۷!}) \doteq ۰/۳۶۷۸۶$ در نتیجه، به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$، اگر $k \geqslant ۷$، در این صورت $e^{-۱}$ تقریب بسیار خوبی برای $\sum_{n=۰}^{k} \frac{(-۱)^n}{n!}$ است.

این ایده‌ها ما را در بعضی از مثالهای زیر یاری می‌دهند.

مثال ۸.۸ شخصی در یک مسابقهٔ اسب‌دوانی روی هر یک از ده اسب شرکت‌کننده در مسابقه، طبق پیش‌بینیهای انجام گرفته، شرطبندی می‌کند. به چند طریق ممکن است این اسبها به‌گونه‌ای به خط پایان برسند که این شخص در همهٔ شرطبندیها بازنده شود؟

اگر واژه‌های اسب و مسابقهٔ اسب‌دوانی را از مسأله کنار بگذاریم، در واقع می‌خواهیم بدانیم که به چند طریق می‌توانیم اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، $\cdots$ ، ۱۰ را چنان مرتب کنیم که ۱ در جای نخست (جای طبیعی خودش)، ۲ در جای دوم (جای طبیعی خودش)، $\cdots$، و ۱۰ در جای دهم (جای طبیعی خودش) نباشد. چنین ترتیبهایی را پریشهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، $\cdots$ ، ۱۰ می‌نامیم.

اصل شمول و طرد کلید محاسبهٔ تعداد پریشها را به‌دست می‌دهد. به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۱۰$، می‌گوییم ترتیبی از ۱ ، ۲ ، ۳ ، $\cdots$ ، ۱۰ در شرط c_i صدق می‌کند هرگاه عدد صحیح i در جای iاُم باشد. در این صورت تعداد پریشها، $d_{۱۰}$، را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} d_{۱۰} &= N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_{۱۰}) = ۱۰! - \binom{۱۰}{۱}۹! + \binom{۱۰}{۲}۸! - \binom{۱۰}{۳}۷! + \cdots + \binom{۱۰}{۱۰}۰! \\ &= ۱۰!\left[۱ - \binom{۱۰}{۱}(۹!/۱۰!) + \binom{۱۰}{۲}(۸!/۱۰!) - \binom{۱۰}{۳}(۷!/۱۰!) + \cdots + \binom{۱۰}{۱۰}(۰!/۱۰!)\right] \\ &= ۱۰![۱ - ۱ + (۱/۲!) - (۱/۳!) + \cdots + (۱/۱۰!)] \doteq (۱۰!)(e^{-۱}). \end{aligned}$$

در اینجا فضای نمونه‌ای عبارت است از !۱۰ طریقی که اسبها می‌توانند مسابقه را به پایان برسانند. بنابراین، احتمال اینکه شخص مورد بحث در هر ده شرطبندی بازنده شود، تقریباً $e^{-۱} = (\frac{e^{-۱}}{۱۰!})(۱۰!)$ است. اگر تعداد اسبهای شرکت‌کننده در مسابقه ۱۱ ، ۱۲ ، $\cdots$ باشد این احتمال (کم‌وبیش) تغییری نمی‌کند. از طرف دیگر، به‌ازای n اسب، $n \geqslant ۱۰$، احتمال اینکه شخص مورد بحث حداقل در یکی از شرطبندیها برنده شود تقریباً $۱ - e^{-۱} \doteq ۰/۶۳۲۱۲$ است.

مثال ۹.۸ تعداد پریشهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ برابر است با

$$d_۴ = ۴! \left[۱ - ۱ + \left(\frac{۱}{۲!}\right) - \left(\frac{۱}{۳!}\right) + \left(\frac{۱}{۴!}\right) \right]$$
$$= ۴! \left[\left(\frac{۱}{۲!}\right) - \left(\frac{۱}{۳!}\right) + \left(\frac{۱}{۴!}\right) \right] = (۴)(۳) - ۴ + ۱ = ۹$$

این نه پریش عبارت‌اند از

۲۱۴۳	۳۱۴۲	۴۱۲۳
۲۳۴۱	۳۴۱۲	۴۳۱۲
۲۴۱۳	۳۴۲۱	۴۳۲۱

بین ۱۵ = ۹ − ۲۴ جایگشتی از اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ که پریش نیستند، جایگشتهای زیر را می‌بینیم:

۱۲۳۴	۲۳۱۴	۳۲۴۱
۱۳۴۲	۲۴۳۱	۲۳۱۴

مثال ۱۰.۸ یک مؤسسهٔ انتشاراتی در نظر دارد هفت کتاب را ویرایش کند. هفت نفر برای ویرایش این کتابها به همکاری دعوت می‌شوند. چون قرار است که هر کتاب دوبار ویرایش شود، در هفتهٔ اول هر کتاب به یک نفر داده می‌شود و سپس در آغاز هفتهٔ دوم کتابها مجدداً بین این هفت نفر توزیع می‌شود. این دو توزیع را به چند طریق می‌توان انجام داد تا هر کتاب توسط دو شخص مختلف ویرایش شود؟

در هفتهٔ اول کتابها را می‌توان به !۷ طریق توزیع کرد. اگر هم کتابها و هم ویراستاران آنها را (در هفتهٔ اول) با ۱ ، ۲ ، ... ، ۷ شماره‌گذاری کنیم، در هفتهٔ دوم باید این اعداد را چنان مرتب کرد که هیچ‌یک از آنها در جای طبیعی خود نباشد. انجام این‌کار هم به $d_۷$ طریق امکان‌پذیر است. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، این دو توزیع را می‌توان به $(۷!)d_۷ \doteq (۷!)^۲(e^{-۱})$ طریق انجام داد.

تمرینات ۳.۸

۱. به چند طریق می‌توان اعداد صحیح ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، ۱۰ را در یک خط چنان مرتب کرد که هیچ عدد صحیح زوجی در جای طبیعی خود نباشد؟

۲. الف) همهٔ پریشهایی از ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ را بنویسید که در آنها نخستین سه عدد، ۱ ، ۲، و ۳ (نه لزوماً با همین ترتیب) باشند.

ب) همهٔ پریشهایی از ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ را بنویسید که در آنها نخستین سه عدد، ۱ ، ۲، و ۳ (نه لزوماً با همین ترتیب) باشند.

۳. چند پریش برای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ وجود دارد؟

۴. چند تا از جایگشتهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ پریش نیستند؟

۵. الف) فرض کنیم $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۷\}$. می‌گوییم تابع $f : A \to A$ نقطهٔ ثابت دارد هرگاه به‌ازای عنصری مانند $x \in A$ داشته باشیم $f(x) = x$. چند تابع یک‌به‌یک $f : A \to A$ حداقل یک نقطهٔ ثابت دارند؟

ب) می‌خواهیم کد رمزی را به این ترتیب بسازیم که هر حرف الفبا را با حرف دیگری از الفبا نمایش دهیم. این کد رمز را به چند طریق می‌توان ساخت؟

۶. چند تا از پریشهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ (الف) با ۱ ، ۲ ، ۳، و ۴ (نه لزوماً با این ترتیب) شروع می‌شوند؟ چند تا از این پریشها با ۵ ، ۶ ، ۷، و ۸ (نه لزوماً با این ترتیب) شروع می‌شوند؟

۷. برای اعداد صحیح مثبت ۱ ، ۲ ، ۳، $\cdots$ ، $n-۱$ ، n ، ۱۱۶۶۰ پریش وجود دارد که در آنها ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴، و ۵ در پنج جای نخست ظاهر می‌شوند. n را تعیین کنید.

۸. بناست که در مؤسسه‌ای از چهار متقاضی برای استخدام در آن مؤسسه مصاحبه‌ای به‌عمل آید. هر مصاحبه ۳۰ دقیقه به‌طول می‌انجامد: ۱۵ دقیقه با هریک از دو مصاحبه‌کننده. (مصاحبه‌ها در اتاقهای جداگانه به‌عمل می‌آیند و در ساعت ۹ صبح شروع می‌شوند.) (الف) به چند طریق می‌توان این مصاحبه‌ها را در مدت یک ساعت زمانبندی کرد؟ (ب) یکی از متقاضیان ۹ صبح در مؤسسه حضور می‌یابد. احتمال اینکه مصاحبه‌های این متقاضی یکی پس از دیگری به عمل آیند چقدر است؟ (پ) متقاضی دیگری نیز در ساعت ۹ صبح در مؤسسه حضور می‌یابد و امیدوار است که مصاحبه‌هایش قبل از ۹ : ۵۰ به پایان برسند تا به موقع به مصاحبه‌ای در مؤسسهٔ دیگری برسد. احتمال اینکه این متقاضی بتواند به موقع مؤسسه را ترک کند چقدر است؟

۹. ده کتاب متمایز را بین ده نفر توزیع می‌کنیم (یک کتاب به هر نفر). سپس کتابها را جمع‌آوری و مجدداً آنها را بین همان ده نفر توزیع می‌کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد به‌طوری‌که هر نفر دو کتاب مختلف بخواند؟

۱۰. الف) در ظرفی n مهره به شماره‌های ۱ ، ۲ ، ۳ ، $\cdots$ ، n ریخته‌ایم. این مهره‌ها را یکی پس از دیگری از ظرف بیرون می‌کشیم. اگر به‌ازای عددی مانند m، $۱ \leqslant m \leqslant n$، شمارهٔ مهره‌ای که دفعهٔ mام بیرون می‌کشیم m باشد می‌گوییم تطابق روی داده است. مطلوب است تعیین احتمال اینکه (یک) هیچ تطابقی روی ندهد؛ (دو) دقیقاً یک تطابق روی دهد؛ (سه) حداقل یک تطابق روی دهد؛ و (چهار) r تطابق، $۱ \leqslant r \leqslant n$، روی دهد.

ب) پاسخهای پرسشهای قسمت (الف) را تقریب بزنید.

۱۱. ده نفر در سمیناری شرکت کرده‌اند. هر یک از آنها به هنگام ورود به سالن سخنرانی پالتو و کیف خود را به مسئول سالن تحویل می‌دهد. در پایان سخنرانی، به هر یک از این ده نفر به تصادف پالتو و کیفی داده می‌شود. (الف) به چند طریق می‌توان پالتوها و کیفها را چنان توزیع کرد که هیچ‌یک از این ده نفر کیف یا پالتوی خود را دریافت نکند؟ (ب) به چند طریق می‌توان آنها را چنان توزیع کرد که هیچ‌یک از این ده نفر هم پالتو و هم کیف خود را دریافت نکند؟

۱۲. معلمی به یک کلاس ۱۲ نفری درس هندسه و سپس در ساعت بعد درس جبر می‌دهد. هر دو کلاس در اتاقی تشکیل می‌شود که فقط ۱۲ صندلی دارد. به چند طریق این معلم می‌تواند دانش‌آموزان را روی صندلیها بنشاند به‌طوری‌که (الف) هیچ دانش‌آموزی برای هر دو درس روی یک صندلی ننشیند؟ (ب) دقیقاً شش دانش‌آموز برای هر دو درس روی یک صندلی بنشینند؟

۱۳. با استدلالی ترکیباتی نشان دهید بهازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$،

$$n! = \binom{n}{۰}d_۰ + \binom{n}{۱}d_۱ + \binom{n}{۲}d_۲ + \cdots + \binom{n}{n}d_n = \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}d_k$$

(بهازای هر $n \leqslant k \leqslant ۱$، d_k تعداد پریشهای ۱، ۲، ۳، ...، k را نشان میدهد؛ $d_۰ = ۱$.)

۱۴. الف) به چند طریق میتوان اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ...، n را در یک خط چنان مرتب کرد که هیچیک از الگوهای ۱۲، ۲۳، ۳۴، ...، $(n-۱)n$ روی ندهد؟

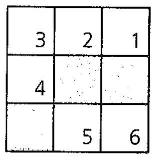
ب) نشان دهید جواب قسمت (الف) برابر است با $d_{n-۱} + d_n$. (d_n تعداد پریشهای ۱، ۲، ۳، ...، n را نشان میدهد.)

۱۵. به چند طریق میتوان اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ...، n را روی دایرهای، در جهت حرکت عقربههای ساعت، چنان مرتب کرد که هیچیک از الگوهای ۱۲، ۲۳، ۳۴، ...، $(n-۱)n$، $n۱$ روی ندهد؟

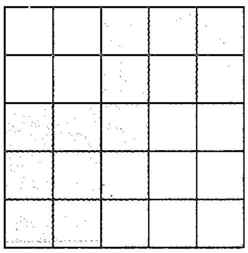
۱۶. احتمال اینکه شخص مذکور در مثال ۸.۸ (الف) دقیقاً پنج شرطبندی را ببرد چقدر است؟ (ب) احتمال اینکه حداقل پنج شرطبندی را ببرد چقدر است؟

۴.۸ چند جملهایهای رُخ

صفحهٔ «شطرنجی» شکل ۷.۸ را که دارای شش مربع است در نظر میگیریم. در بازی شطرنج مهرهای که رخ نامیده میشود مجاز است که در هر حرکت بهطور افقی یا عمودی از فراز هر تعداد مربع اشغال نشدهای که مایل باشیم عبور کند. در این شکل، رخی که در مربع ۳ قرار دارد میتواند در یک حرکت به مربعهای ۱، ۲ یا ۴ برود. رخی که در مربع ۵ قرار دارد میتواند به مربع ۶ یا مربع ۲ برود (باوجود آنکه هیچ مربعی بین مربعهای ۵ و ۲ نیست).



شکل ۷.۸



شکل ۸.۸

بهازای $k \in \mathbf{Z}^+$ میخواهیم تعیین کنیم به چند طریق میتوان k رخ را در این صفحهٔ شطرنجی قرار داد بهطوریکه هیچ دوتایی از آنها نتوانند یکدیگر را بگیرند، یعنی، هیچ دوتایی از آنها در یک سطر یا در یک ستون این صفحهٔ شطرنجی نباشند. این عدد را با r_k، یا اگر بخواهیم روی صفحهٔ شطرنجی خاص C که مورد مطالعه است تأکید کنیم، با $r_k(C)$ نشان میدهیم.

بهازای هر صفحهٔ شطرنجی، $r_۱$ تعداد مربعهای موجود در این صفحه است. در اینجا $r_۱ = ۶$. اگر دو رخ نتوانند یکدیگر را بگیرند باید در مربعهای (۱,۴)، (۱,۵)، (۲,۴)، (۲,۶)، (۳,۵)، (۳,۶)، (۴,۵)، یا (۴,۶) قرار داشته باشند. بنابراین، $r_۲ = ۸$. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم میبینیم سه رخ که نتوانند یکدیگر را بگیرند باید در

مربعهای $(۱,۴,۵)$ یا $(۲,۴,۶)$ باشند، و $r_۳ = ۲$؛ $r_k = ۰$ به‌ازای هر $k \geqslant ۴$.

بافرض $r_۰ = ۱$، چندجمله‌ای رخ، $r(C,x)$، رابرای صفحهٔ شطرنجی شکل ۸ـ۷ با $r(C,x) = ۱+۶x+۸x^۲+۲x^۳$ تعریف می‌کنیم. به‌ازای هر $k \geqslant ۰$، ضریب x^k عبارت است از تعداد طرقی که می‌توانیم k رخ را روی صفحهٔ شطرنجی C قرار دهیم به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری را بگیرد.

با بزرگ شدن صفحهٔ شطرنجی، به‌زودی در می‌یابیم آنچه در اینجا انجام دادیم (با استفاده از تحلیل حالت به حالت) خسته‌کننده می‌شود. به‌تدریج که‌اندازهٔ صفحهٔ شطرنجی افزایش می‌یابد، باید حالاتی مانند $r_۴$ و $r_۵$ را، که دیگر صفر نیستند، در نظر بگیریم. با ملاحظاتی که اکنون بیان می‌کنیم می‌توانیم از صفحه‌های کوچک استفاده کرده و هر صفحهٔ بزرگ را به‌گونه‌ای به زیر صفحه‌های کوچکتر تقسیم کنیم.

صفحهٔ شطرنجی C در شکل ۸ـ۸ دارای ۱۱ مربع بدون سایه است. ملاحظه می‌کنیم که C متشکل از یک زیرصفحهٔ ۲×۲ به‌نام $C_۱$ و یک زیرصفحهٔ هفت مربعی $C_۲$ درگوشهٔ راست پایینی C است. این زیرصفحه‌ها جداازهم‌اند زیرا مربعهایی که در یک سطر یا در یک ستون از C باشند ندارند.

با انجام محاسباتی نظیر آنچه برای صفحهٔ شطرنجی نخست انجام دادیم، می‌بینیم که

$$r(C_۱,x) = ۱ + ۴x + ۲x^۲, \qquad r(C_۲,x) = ۱ + ۷x + ۱۰x^۲ + ۲x^۳$$
$$r(C,x) = ۱ + ۱۱x + ۴۰x^۲ + ۵۶x^۳ + ۲۸x^۴ + ۴x^۵ = r(C_۱,x) \cdot r(C_۲,x)$$

بنابراین، $r(C,x) = r(C_۱,x) \cdot r(C_۲,x)$. آیا این برابری برحسب تصادف روی داد یا رویدادی است که بررسی دقیقتری را می‌طلبد؟ مثلاً، برای آنکه $r_۳$ را برای C به‌دست آوریم، باید ببینیم به چند طریق می‌توان سه رخ را روی صفحهٔ C قرار داد به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری را بگیرد. اینها به سه دسته تقسیم می‌شوند:

الف) هر سه رخ روی زیرصفحهٔ $C_۲$ هستند (و هیچ‌یک روی $C_۱$ نیست): $(۱)(۲) = ۲$ راه.

ب) دو رخ روی زیرصفحهٔ $C_۲$ هستند و یکی روی $C_۱$: $(۴)(۱۰) = ۴۰$ راه.

پ) یک رخ روی زیرصفحهٔ $C_۲$ است و دو تا روی $C_۱$ هستند: $(۲)(۷) = ۱۴$ راه.

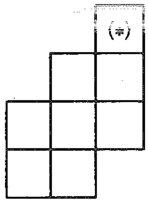
در نتیجه، سه رخ را می‌توان به $(۱)(۲) + (۴)(۱۰) + (۲)(۷) = ۵۶$ طریق روی صفحهٔ C قرار داد به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری را بگیرد. می‌بینیم که ۵۶ دقیقاً ضریب $x^۳$ در حاصل‌ضرب $r(C_۱,x) \cdot r(C_۲,x)$ است.

> به‌طورکلی، اگر C صفحهٔ شطرنجی مرکب از زیرصفحه‌های دوبه‌دو جدا از هم $C_۱$، $C_۲$، $\cdots$، C_n باشد، آنگاه $r(C,x) = r(C_۱,x) r(C_۲,x) \cdots r(C_n,x)$.

آخرین نتیجهٔ این بند، اصلی را نشان می‌دهد ازگونه‌ای که در نتایج دیگری از ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی نیز دیده‌ایم: اگر صفحهٔ شطرنجی بزرگی مفروض باشد آن را به زیرصفحه‌های کوچکتری که بتوان چندجمله‌ایهای رخ آنها را با بررسی تعیین کرد، تقسیم می‌کنیم.

صفحهٔ شطرنجی C را در شکل ۸ـ۹ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $k \geqslant ۱$. به‌ازای هر مربع متعلق به C، مانند مربعی که با $(*)$ نشان داده شده است، دو امکان را باید بررسی کنیم.

الف) یکی از رخها را در مربع نشاندار قرار می‌دهیم. سپس باید همهٔ مربعهای دیگر C را که در سطر و ستون مربع نشاندار قرار دارند و می‌توانند موقعیتهای ممکنی برای $k-۱$ رخ دیگر باشند، کنار بگذاریم. زیرصفحهٔ کوچکتر باقیمانده را با نماد C_s نشان می‌دهیم.



شکل۹.۸

ب) اصلاً از مربع نشاندار استفاده نمی‌کنیم. هر k رخ را در زیرصفحهٔ C_e (یعنی Cای که مربع نشاندار از آن حذف شده است) قرار می‌دهیم.

چون این دو حالت جدا از هم تنها حالتهای ممکن هستند،

$$r_k(C) = r_{k-1}(C_s) + r_k(C_e)$$

از اینجا می‌بینیم که

$$r_k(C)x^k = r_{k-1}(C_s)x^k + r_k(C_e)x^k \qquad (1)$$

اگر n تعداد مربعهای موجود در صفحهٔ شطرنجی باشد (در اینجا $n = 8$)، در این صورت معادلهٔ (۱) به‌ازای هر $1 \leqslant k \leqslant n$ معتبر است و می‌نویسیم

$$\sum_{k=1}^{n} r_k(C)x^k = \sum_{k=1}^{n} r_{k-1}(C_s)x^k + \sum_{k=1}^{n} r_k(C_e)x^k \qquad (2)$$

در مورد معادلهٔ (۲) در می‌یابیم که ممکن است جمع‌بندیها قبل از $k = n$ متوقف شوند. قبلاً حالتهایی را، مانند شکل ۹.۷، دیدیم که در آنها r_n و بعضی از r_kهای قبل از آن ۰ هستند. جمع‌بندیها با $k = 1$ آغاز می‌شوند، زیرا در غیر این صورت در نخستین جمعوند طرف راست معادلهٔ (۲) با جملهٔ $r_{-1}(C_s)x^0$ مواجه خواهیم شد.

می‌توان معادلهٔ (۲) را به‌صورت

$$\sum_{k=1}^{n} r_k(C)x^k = x\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}(C_s)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} r_k(C_e)x^k \qquad (3)$$

یا

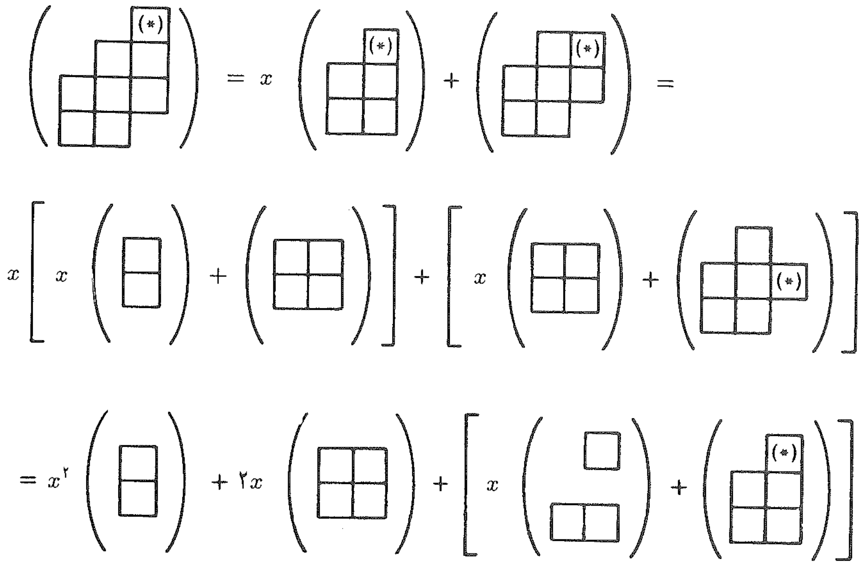
$$1 + \sum_{k=1}^{n} r_k(C)x^k = x \cdot r(C_s, x) + \sum_{k=1}^{n} r_k(C_e)x^k + 1$$

بازنویسی کرد، که از آن نتیجه می‌شود

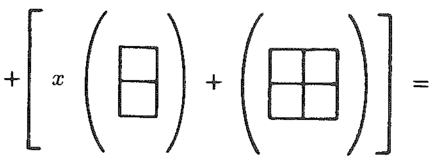
$$r(C, x) = x \cdot r(C_s, x) + r(C_e, x) \qquad (4)$$

اکنون این معادله را برای تعیین چندجمله‌ای رخ مربوط به صفحهٔ شطرنجی شکل ۹.۸ به‌کار می‌گیریم. هر

بار که ایدهٔ معادلهٔ (۴) را به کار می‌گیریم، مربع خاصی را که از آن استفاده می‌کنیم با $(*)$ نشان می‌دهیم. صفحهٔ شطرنجی درون پرانتز نشان‌دهندهٔ چندجمله‌ای رخ برای آن صفحهٔ شطرنجی است.



$$= x^۲(۱ + ۲x) + ۲x(۱ + ۴x + ۲x^۲) + x(۱ + ۳x + x^۲)$$



$$۳x + ۱۲x^۲ + ۷x^۳ + x(۱ + ۲x) + (۱ + ۴x + ۲x^۲) = ۱ + ۸x + ۱۶x^۲ + ۷x^۳.$$

۵.۸ ترتیب با مواضع ممنوع

چندجمله‌ایهای رخ را که در بند قبلی بررسی کردیم به خودی خود جالب به‌نظر می‌رسند. اکنون می‌بینیم که این چندجمله‌ایها در حل مسائل زیر نیز سودمندند.

مثال ۱۱.۸ در سالنی پنج میز T_j، $۱ \leqslant j \leqslant ۵$ قرار دارد و کنار هر میز نیز فقط یکی از صندلیها خالی است. بناست که افراد R_i، $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، با توجه به شرطهای زیر، پشت این میزها بنشینند.

الف) $R_۱$ پشت میز $T_۱$ یا $T_۲$ نخواهد نشست. ب) $R_۲$ پشت میز $T_۲$ نخواهد نشست.

پ) $R_۳$ پشت میز $T_۳$ یا $T_۴$ نخواهد نشست. ت) $R_۴$ پشت میز $T_۴$ یا $T_۵$ نخواهد نشست.

این وضعیت در شکل ۸ ۰ ۱۰ نمایش داده شده است. تعداد راههایی که می‌توانیم این چهار نفر را با توجه به شرایط (الف) تا (ت) پشت میزهای مختلف بنشانیم برابر است با تعداد راههایی که می‌توان چهار رخ را روی صفحهٔ شطرنجی متشکل از مربعهای بدون سایه در شکل ۸ ۰ ۱۰ قرار داد به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری

را بگیرد. ولی چون فقط هفت مربع سایه‌دار در مقابل سیزده مربع بدون سایه وجود دارد، کارکردن با صفحهٔ شطرنجی سایه‌دار آسانتر است.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
R_1					
R_2					
R_3					
R_4					

شکل۱۰.۸

کار را با بیان شرایطی که برای کاربرد اصل شمول و طرد لازم است آغاز می‌کنیم: به‌ازای هر $۴ \leqslant i \leqslant ۱$، فرض کنیم شرط c_i عبارت باشد از نشاندن این چهار نفر پشت میزها به‌طوری‌که R_i در یکی از مواضع ممنوع (سایه‌دار) بنشیند. طبق معمول، $|S|$ تعداد کل راههایی است که می‌توان این چهار نفر را چنان نشاند که هر یک از آنها پشت یکی از میزها باشد. در این صورت $|S| = N = S_۰ = ۵!$

برای تعیین $S_۱$ هر یک از موارد زیر را در نظر می‌گیریم:

- $N(c_۱) = ۴! + ۴!$، زیرا اگر $R_۱$ در موضع ممنوع $T_۱$ باشد، $۴!$ راه برای نشاندن $R_۲$، $R_۳$، و $R_۴$ پشت میزهای $T_۲$، $T_۳$، $T_۴$، و $T_۵$، و اگر $R_۱$ در موضع ممنوع $T_۲$ باشد، $۴!$ راه برای نشاندن $R_۲$، $R_۳$، و $R_۴$ پشت میزهای $T_۱$، $T_۳$، $T_۴$، و $T_۵$ وجود دارد.
- $N(c_۲) = ۴!$، زیرا پس از نشاندن $R_۲$ در موضع ممنوع $T_۲$، باید هر یک از $R_۱$، $R_۳$، و $R_۴$ را پشت یکی از میزهای $T_۱$، $T_۳$، $T_۴$، و $T_۵$ بنشانیم.
- $N(c_۳) = ۴! + ۴!$، یکی از این دو جمعوند برای حالتی است که $R_۳$ در موضع ممنوع $T_۳$ باشد و جمعوند دیگر برای حالتی است که $R_۳$ در موضع ممنوع $T_۴$ باشد.
- $N(c_۴) = ۴! + ۴!$، یکی از دو جمعوند برای حالتی است که $R_۴$ در موضع ممنوع $T_۴$ بنشیند و جمعوند دیگر برای حالتی است که $R_۴$ در موضع ممنوع $T_۵$ بنشیند.

بنابراین، $S_۱ = ۷(۴!)$.

برای محاسبهٔ $S_۲$ ملاحظات زیر را در نظر می‌گیریم:

- $N(c_۱c_۲) = ۳!$، زیرا پس از نشاندن $R_۱$ در $T_۱$ و $R_۲$ در $T_۲$، سه میز ($T_۳$، $T_۴$، و $T_۵$) هست که می‌توان $R_۳$ و $R_۴$ را پشت آنها نشاند.
- $N(c_۱c_۳) = ۳! + ۳! + ۳! + ۳!$، زیرا برای نشاندن $R_۱$ و $R_۳$ در مواضع ممنوع چهار حالت وجود دارد:

یک) $R_۱$ در $T_۱$؛ $R_۳$ در $T_۳$ دو) $R_۱$ در $T_۲$؛ $R_۳$ در $T_۳$

سه) $R_۱$ در $T_۱$؛ $R_۳$ در $T_۴$ چهار) $R_۱$ در $T_۲$؛ $R_۳$ در $T_۴$

به‌همین ترتیب می‌بینیم که $N(c_۱c_۴) = ۴(۳!)$، $N(c_۲c_۳) = ۲(۳!)$، $N(c_۲c_۴) = ۲(۳!)$، و $N(c_۳c_۴) = ۳(۳!)$.

در نتیجه، $S_۲ = ۱۶(۳!)$.

پیش از ادامهٔ کار، چند نکته را دربارهٔ $S_۱$ و $S_۲$ خاطرنشان می‌سازیم. برای $S_۱$ داریم $۷(۴!) = ۷(۵ - ۱)!$، که ۷ تعداد مربعهای سایه‌دار در شکل ۱۰.۸ است؛ همچنین، $S_۲ = ۱۶(۳!) = ۱۶(۵ - ۲)!$، که ۱۶ تعداد راههایی

است که می‌توان دو رخ را روی صفحهٔ شطرنجی سایه‌دار قرار داد به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری را بگیرد.

به‌طورکلی، به‌ازای هر $۰ \leqslant i \leqslant ۴$، $S_i = r_i(۵-i)!$، که r_i تعداد راههایی است که می‌توان i رخ را روی صفحهٔ شطرنجی سایه‌دار شکل ۸۰۱۰ قرار داد به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری را بگیرد.

در نتیجه، برای تسریع حل این مسأله، $r(C,x)$ یعنی چندجمله‌ای رخ برای این صفحهٔ شطرنجی سایه‌دار را در نظر می‌گیریم. با استفاده از تجزیهٔ C به زیر صفحه‌های جدا از هم در گوشهٔ چپ بالایی و گوشهٔ راست پایینی، می‌بینیم که

$$r(C,x) = (۱ + ۳x + x^۲)(۱ + ۴x + ۳x^۲) = ۱ + ۷x + ۱۶x^۲ + ۱۳x^۳ + ۳x^۴$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴) &= S_۰ - S_۱ + S_۲ - S_۳ + S_۴ = ۵! - ۷(۴!) + ۱۶(۳!) - ۱۳(۲!) + ۳(۱!) \\ &= \sum_{i=۰}^{۴} (-۱)^i r_i (۵-i)! = ۲۵ \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به شرطهای مفروض ۲۵ طریق برای نشاندن این چهار نفر پشت میزها وجود دارد.

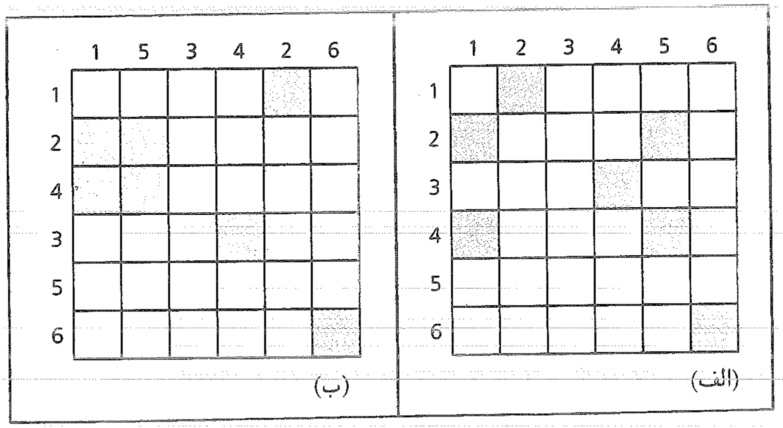
آخرین مثال این بند نشان می‌دهد که چگونه تغییر آرایش مختصری در صفحهٔ شطرنجی می‌تواند در محاسبات یاری‌دهنده باشد.

مثال ۱۲.۸ یک جفت تاس داریم؛ یکی از آنها قرمز است و دیگری سبز. این تاسها را شش‌بار می‌ریزیم. احتمال اینکه هر شش عدد را روی هر دو تاس قرمز و سبز به‌دست آوریم چقدر است، در صورتی که بدانیم جفتهای مرتب (۱,۲)، (۲,۱)، (۲,۵)، (۳,۴)، (۴,۱)، (۴,۵)، و (۶,۶) ننشسته‌اند؟ [در هر جفت مرتب (x,y)، x عدد روی تاس قرمز و y عدد روی تاس سبز را نشان می‌دهند.]

وقتی‌که تشخیص دهیم این مسأله با جایگشتها و مواضع ممنوع سروکار دارد، صفحهٔ شطرنجی شکل ۸۰۱۱ (الف) را می‌سازیم، که در آن مربعهای سایه‌دار مواضع ممنوع را نشان می‌دهند. در این شکل، مربعهای سایه‌دار پراکنده هستند. اگر سطرها و ستونها را مجدداً نامگذاری کنیم، می‌توانیم این صفحهٔ شطرنجی را به‌صورتی که در شکل ۸۰۱۱ (ب) نشان داده شده است ترسیم کنیم، که در آن مربعهای سایه‌دار واقع در یک سطر (یا یک ستون) صفحهٔ نشان داده شده در شکل (الف) راگرفته و آنها راکنار هم قرار داده‌ایم. در شکل ۸۰۱۱ (ب)، صفحهٔ شطرنجی C (که هفت مربع سایه‌دار دارد) اجتماع چهار زیرصفحهٔ دوبه‌دو جدا از هم است و بنابراین

$$r(C,x) = (۱ + ۴x + ۲x^۲)(۱ + x)^۳ = ۱ + ۷x + ۱۷x^۲ + ۱۹x^۳ + ۱۰x^۴ + ۲x^۵$$

به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۶$، فرض کنیم c_i این شرط باشد که وقتی تاسها را شش بار بریزیم، هر شش عدد روی هر دو تاس قرمز و سبز بنشینند، ولی i روی تاس قرمز با یکی از اعداد ممنوع روی تاس سبز جفت شود. [توجه داریم که $N(c_۵) = ۰$.] در این صورت تعداد دنباله‌های (مرتب) مرکب از شش بار ریختن این تاسها و مساعد



شکل۱۱.۸

برای پیشامد مورد نظر عبارت است از

$$(۶!)N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴\bar{c}_۵\bar{c}_۶) = (۶!)\sum_{i=۰}^{۶}(-۱)^i S_i = (۶!)\sum_{i=۰}^{۶}(-۱)^i r_i \cdot (۶-i)!$$

$$= ۶![۶! - ۷(۵!) + ۱۷(۴!) - ۱۹(۳!) + ۱۰(۲!) - ۲(۱!) + ۰(۰!)]$$

$$= ۶![۱۹۲] = ۱۳۸۲۴۰$$

چون فضای نمونه‌ای از همهٔ دنباله‌های مرکب از شش جفت مرتب برگزیده شده (همراه با تکرار) از ۲۹ مربع بدون سایهٔ صفحهٔ شطرنجی تشکیل شده است، احتمال پیشامد مورد نظر $۰٫۰۰۰۲۳ \doteq ۱۳۸۲۴۰/(۲۹)^۶$ است.

تمرینات ۴.۸ و ۵.۸

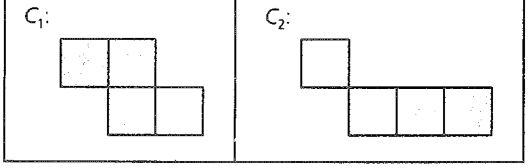
۱. چندجمله‌ایهای رخ را برای (الف) صفحه‌های شطرنجی بدون سایهٔ شکلهای ۸.۸ و ۹.۸، و (ب) صفحه‌های شطرنجی شکلهای ۱۰.۸ و ۱۱.۸ (ب) مستقیماً به‌دست آورید.

۲. کوچکترین (از نظر تعداد مربعها) صفحهٔ شطرنجی را که به‌ازای آن $r_{۱۰} \neq ۰$ بسازید یا آن را توصیف کنید.

۳. الف) چندجمله‌ای رخ را برای صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ استاندارد بیابید.

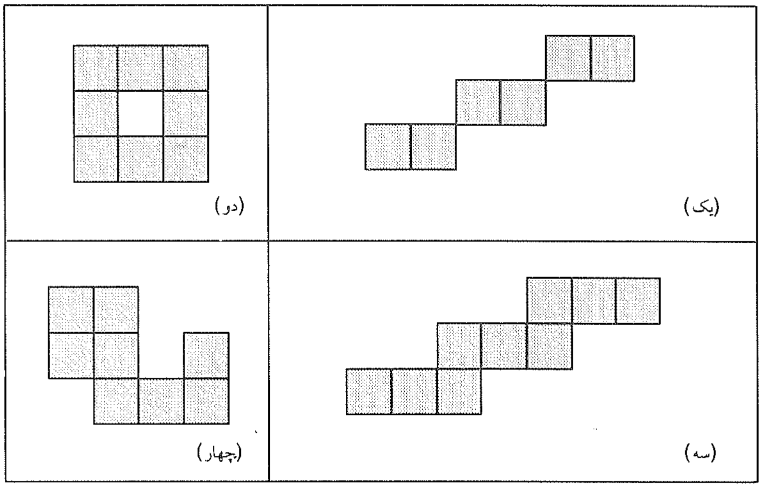
ب) چندجمله‌ای رخ را برای هر صفحهٔ شطرنجی $n \times n$، $n \in \mathbf{Z}^+$، بیابید.

۴. چندجمله‌ایهای رخ را برای صفحه‌های شطرنجی سایه‌دار شکل ۱۲.۸ بیابید.



شکل۱۲.۸

۵. الف) چندجمله‌ایهای رخ را برای صفحه‌های شطرنجی سایه‌دار شکل ۱۳۰۸ بیابید.



شکل۱۳.۸

ب) صفحهٔ شطرنجی شکل ۱۳۰۸ (یک) (و چندجمله‌ای رخ آن) را تعمیم دهید.

۶. فرض کنیم صفحهٔ شطرنجی C دارای m سطر و n ستون، $m \leqslant n$، باشد (که در نتیجه دارای mn مربع است). به‌ازای $\circ \leqslant k \leqslant m$، به چند طریق می‌توانیم k رخ (یکسان) را روی C قرار دهیم به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری را بگیرد؟

۷. در یک مؤسسهٔ خدمات کامپیوتری بناست که پنج برنامه به زبانهای APL، بیسیک، فورترن، پاسکال و PL/I نوشته شود. مدیر مؤسسه این برنامه‌ها را بین پنج نفر از برنامه‌نویسان این مؤسسه توزیع می‌کند. دو نفر اول و دوم فورترن را دوست ندارند. نفر سوم از بیسیک و PL/I احتراز دارد. نفر چهارم از APL و بیسیک متنفر است و نفر پنجم نوشتن برنامه به زبانهای فورترن و پاسکال را رد می‌کند. مدیر این مؤسسه به چند طریق می‌تواند هر یک از پنج برنامه را به هر یک از این پنج نفر واگذار کند به‌طوری‌که هر پنج زبان به‌کار گرفته شوند و هر پنج نفر هم راضی باشند؟

۸. در حل مثال ۱۲۰۸ چرا در جملهٔ $N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\cdots\overline{c}_۴)$(!۶)، ضریب !۶ را داریم؟

۹. درگروه ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاهی بناست تدریس درسهای حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ ، ۲ ، ۳ ، آمار و ترکیبیات به پنج نفر از استادان به‌نامهای A، B، C، D، و E واگذار شود. A درس حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲ یا ترکیبیات را تدریس نخواهد کرد، C آمار را تدریس نمی‌کند، B و E هر دو تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ یا ۳ را رد می‌کنند و D تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲ را دوست ندارد.

الف) مدیرگروه ریاضی به چند طریق می‌تواند تدریس این پنج درس را به این استادان واگذار کند به‌طوری‌که همه راضی باشند؟

ب) با توجه به قسمت (الف)، احتمال اینکه تدریس ترکیبیات به B واگذار شود چقدر است؟

۱۰. دو تاس را، که یکی از آنها قرمز و دیگری سبز است، شش بار ریخته‌ایم. می‌دانیم که جفتهای مرتب (۱, ۱)، (۱, ۵)، (۲, ۴)، (۳, ۶)، (۴, ۲)، (۴, ۴)، (۵, ۱)، و (۵, ۵) ننشسته‌اند. احتمال اینکه هر یک از شش مقدار روی هر دو تاس قرمز و سبز نشسته باشد چقدر است؟

۱۱. شش پیچ و چهار مهره در اختیار داریم و می‌خواهیم پیچ و مهره‌های مناسب یکدیگر را با توجه به اطلاعات زیر جفت کنیم.

- مهرهٔ ۱ مناسب پیچهای ۱ ، ۳ یا ۶ نیست.
- مهرهٔ ۲ مناسب پیچهای ۲ یا ۴ نیست.
- مهرهٔ ۳ مناسب پیچهای ۳ یا ۶ نیست.
- مهرهٔ ۴ مناسب پیچهای ۴ یا ۵ نیست.

به چند طریق می‌توان هر یک از این چهار مهره را با پیچ مناسبی جفت کرد؟

۶.۸ خلاصه و مروری تاریخی

در فصلهای اول و سوم این کتاب با مسائل شمارشی مواجه شدیم که در آنها می‌بایست در مورد شمارش اضافی ترتیبها یا گزینشها احتیاط می‌کردیم. این وضعیت در فصل ۵ (جلد ۱) هنگامی‌که می‌کوشیدیم تعداد توابع پوشا را برای دو مجموعهٔ متناهی به‌دست آوریم باز هم پیچیده‌تر شد.

در این فصل، با در دست داشتن نمودارهای ون به‌عنوان راهنما، الگویی به‌نام اصل شمول و طرد را به‌دست آوردیم. با استفاده از این اصل، هر مسأله را برحسب شرایط و زیرمجموعه‌ها مجدداً تنظیم کردیم. با به‌کارگیری فرمولهایی شمارشی که قبلاً دربارهٔ جایگشتها و ترکیبها به‌دست آورده بودیم، چند زیرمسألهٔ ساده‌تر را حل کردیم و با در دست داشتن اصل شمول و طرد نگران اضافه شماری نبودیم. در نتیجه، توانستیم مسائل گوناگونی را حل کنیم که بعضی از آنها دربارهٔ نظریهٔ اعداد بودند و یکی از آنها دربارهٔ نظریهٔ گراف بود. همچنین، فرمولی را که قبلاً در بند ۵ ۳ برای محاسبهٔ تعداد توابع پوشا برای دو مجموعهٔ متناهی حدس زده بودیم، ثابت کردیم.

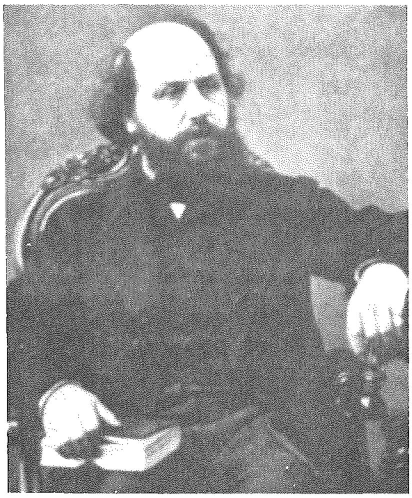
این اصل تاریخچهٔ جالبی دارد و دستنوشته‌های گوناگون با نامهایی مانند «روش غربال کردن»[1] یا «اصل طبقه‌بندی چلیپایی»[2] دیده شده است. بیان مجموعه‌ای این اصل، که با اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها پیوند دارد، در متنی دربارهٔ نظریهٔ احتمال که به‌وسیلهٔ آبراهام دموآور (۱۶۶۷ – ۱۷۵۴) با عنوان اصول شانس[3] منتشر شد، یافت می‌شود. کمی زودتر، در ۱۷۰۸ پییر رمون دو مونمور[4] (۱۶۷۸ – ۱۷۱۹) ایدهٔ نهفته در این اصل را در حل مسأله‌ای که عموماً مسألهٔ تطابق[5] نام دارد، به کار گرفت.

نحوهٔ ارائه و بررسی ما از اصل شمول و طرد به جیمز جوزف سیلوستر (۱۸۱۴ – ۱۸۹۷) منسوب است. (این ریاضیدان برجستهٔ انگلیسی تبار سهم بسزایی نیز در نظریهٔ معادلات، نظریهٔ ماتریسها و دترمینانها و نظریهٔ پایایی داشت، که نظریهٔ اخیر را او و کیلی (۱۸۲۱ – ۱۸۹۵) با هم بنیاد نهادند. علاوه‌بر آن، سیلوستر مجلهٔ *American Journal of Mathematics* را که نخستین مجلهٔ امریکایی مختص تحقیقات ریاضی بود، بنیاد نهاد.) ولی، همگان اهمیت فن شمول و طرد را تا زمان انتشار کتاب دابلیو. ا. ویتورث[6] [۱۰] که ریاضیدانان را به پتانسیل و سودمندی این فن آگاهتر کرد، در نیافتند.

برای کسب اطلاعات بیشتر دربارهٔ کاربرد این اصل، فصل ۴ از کتاب سی. ال. لیو[7] [۴]، فصل ۲ از کتاب اچ. جی. رایزر[8] [۸]، یا فصل ۸ از کتاب ا. توکر [۹] را مطالعه کنید. نتایج بیشتری در نظریهٔ اعداد و در ارتباط با این اصل، از جمله فرمول انعکاس موبیوس[9] ، را می‌توان در فصل ۲ از کتاب ام. هال[10] [۱]، فصل ۱۰ از کتاب

---

1. Sieve Method 2. Principle of Cross Classification 3. Doctrine of Chances
4. Pierre Rémond de Montmort 5. problème des rencontres 6. W. A. Whitworth 7. C. L. Liu
8. H. J. Ryser 9. Möbius 10. M. Hall



جیمز جوزف سیلوستر (۱۸۱۴ — ۱۸۹۷)

سی. ال. لیو [۵]، و فصل ۱۶ ازکتاب جی. اچ. هاردی[1] و ای. ام. رایت[2] [۳] یافت. تعمیمی از این اصل در مقالهٔ جی. سی. روتا[3] [۷] ارائه شده است.

مقالهٔ دی. هانسون[4]، کی. سی‌فارث[5] و جی. اچ. وستون[6] [۲] تعمیم جالبی از مسألهٔ پریش را، که در بند ۳۰۸ مورد بحث قرار گرفت، به‌دست می‌دهد. ایده‌های نهفته در چندجمله‌ایهای رخ و کاربردهای آنها در اواخر دههٔ ۱۹۳۰ و در طول دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ گسترش یافتند. مطالب دیگری دربارهٔ این موضوع را می‌توان در فصلهای ۷ و ۸ ازکتاب جی. ریوردان [۶] یافت.

مراجع

1. Hall, Marshall, Jr. *Combinatorial Theory.* Waltham, Mass.: Blaisdell, 1967.
2. Hanson, Denis, Seyffarth, Karen, and Weston, J. Harley. "Matchings, Derangements, Rencontres." *Mathematics Magazine* 56, no. 4 (September 1983): pp. 224 - 229.
3. Hardy, Godfrey Harold, and Wright. Edward Maitland. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed. Oxford: Oxford University Press, 1979.
4. Liu, C. L. *Introduction to Combinatorial Mathematics.* New York: McGraw-Hill, 1968.
5. Liu, C. L. *Topics in Combinatorial Mathematics.* Mathematical Association of America, 1972.
6. Riordan, John. *An Introduction to Combinatorial Analysis.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1980. (Originally published in 1958 by John Wiley & Sons.)
7. Rota, Gian Carlo. "On the Foundations of Combinatorial Theory, I. Theory of

1. G. H. Hardy 2. E. M. Wright 3. G. C. Rota 4. D. Hanson 5. K. Seyffarth 6. J. H. Weston

Möbius Functions." *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeits Theorie 2*: pp. 340 - 368, 1964.
8. Ryser, Herbert J. *Combinatorial Mathematics.* Carus Mathematical Monograph, No. 14. Published by the Mathematical Association of America, distributed by John Wiley & Sons, New York, 1963.
9. Tucker, Alan. *Applied Combinatorics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1985.
10. Whitworth, William Allen. *Choice and Chance.* Originally published at Cambridge in 1867. Reprint of the 5th ed. (1901), Hafner, New York, 1965.

تمرینات تکمیلی

۱. تعداد اعداد $n \in \mathbb{Z}^+$ را که $n \leqslant ۵۰۰$ صدق می‌کنند و بر ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۶ ، ۸ یا ۱۰ بخش‌پذیر نیستند تعیین کنید.

۲. چند عدد صحیح n هست که در $۰ \leqslant n < ۱۰۰۰۰۰۰$ صدق کنند و مجموع رقمهای آنها کوچکتر از یا برابر با ۳۷ باشد؟

۳. می‌خواهیم شش توپ بیسبال، شش توپ راگبی، شش توپ فوتبال، و شش توپ والیبال را در چهار قفسه چنان مرتب کنیم که در هر قفسه حداقل دو و حداکثر هفت توپ باشد. (فرض بر این است که هر شش توپ مربوط به هر یک از این چهار ورزش از نظر ظاهر کاملاً یکسان هستند.) به چند طریق می‌توانیم این توپها را در قفسه‌ها مرتب کنیم؟

۴. مطلوب است تعیین اعداد صحیح مثبتی مانند n به‌طوری‌که

الف) $۱ \leqslant n \leqslant ۱۰۰۰$ و n مجذور کامل، مکعب کامل یا توان چهارم کامل نباشد.

ب) $۱ \leqslant n \leqslant ۳۰۰۰$ و n مجذور کامل، مکعب کامل یا توان پنجم کامل نباشد.

۵. به چند طریق می‌توانیم اعداد صحیح ۱ ، ۲ ، ۳ ، $\cdots$ ، ۸ را در یک خط چنان مرتب کنیم که هیچ یک از الگوهای ۱۲ ، ۲۳ ، $\cdots$ ، ۷۸ ، ۸۱ مشاهده نشود؟

۶. الف) اگر k رنگ مختلف در اختیار داشته باشیم، به چند طریق می‌توانیم دیوارهای اتاق پنج دیواری را چنان رنگ‌آمیزی کنیم که هر دو دیوار مجاور با رنگهای مختلف رنگ‌آمیزی شوند؟

ب) کوچکترین مقدار k را تعیین کنید که به‌ازای آن چنین رنگ‌آمیزی‌ای امکان‌پذیر باشد.

پ) در صورتی که این اتاق شش دیوار داشته باشد، به قسمتهای (الف) و (ب) پاسخ دهید.

۷. به چند طریق می‌توانیم ده نفر را که هر دو نفرشان از یک شهر آمده‌اند را دور میزگردی چنان بنشانیم که هیچ دو همشهری کنار هم نباشند؟ (در اینجا میز مانند مثال ۱۶۰۱، بین دو ترتیب، که ترتیب اولی از دومی با دوران جای این ده نفر حاصل شود، فرقی قائل نمی‌شویم.)

۸. با استفاده از نتیجهٔ قضیهٔ ۲۰۸، ثابت کنید تعداد طرقی که می‌توانیم s شیءِ مختلف را در n ظرف متمایز چنان قرار دهیم که m تا از ظرفها هر یک حاوی دقیقاً r شیء باشد برابر است با

$$\frac{(-1)^m n! s!}{m!} \sum_{i=m}^{n} \frac{(-1)^i (n-i)^{s-ir}}{(i-m)!(n-i)!(s-ir)!(r!)^i}$$

۹. اگر ترتیبی از حروف واژهٔ SURREPTITIOUS را به تصادف برگزینیم، احتمال اینکه این ترتیب (الف)

دقیقاً حاوی سه جفت حروف یکسان متوالی باشد چقدر است؟ (ب) حاوی حداکثر سه جفت حروف یکسان متوالی باشد چقدر است؟

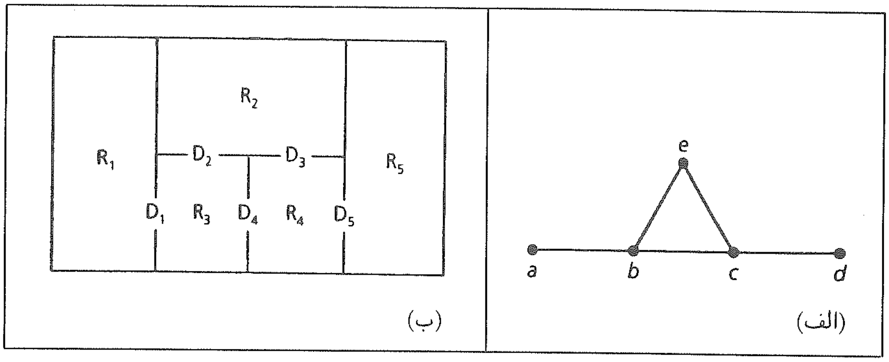
۱۰. به چند طریق می‌توان چهار w، چهار x، چهار y، و چهار z را چنان مرتب کرد که هیچ چهار حرف یکسان متوالی مشاهده نشود؟

۱۱. الف) n شیءِ متمایز مفروض‌اند. به چند طریق می‌توانیم r تا از این اشیا را چنان برگزینیم که هر گزینش حاوی m شیءِ مشخص از n شیءِ مفروض باشد؟ (با فرض $m \leqslant r \leqslant n$.)

ب) با استفاده از اصل شمول و طرد، ثابت کنید به‌ازای $m \leqslant r \leqslant n$،

$$\binom{n-m}{n-r} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \binom{n-i}{r}$$

۱۲. الف) فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{Z}^+$. اگر λ رنگ مختلف در اختیار داشته باشیم، به چند طریق می‌توانیم رأسهای گراف شکل ۱۴۰۸ (الف) را چنان رنگ‌آمیزی کنیم که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند؟ نتیجه‌ای که برحسب λ به‌دست می‌آید چندجمله‌ای رنگی این گراف و کوچکترین مقدار λ که به‌ازای آن مقدار این چندجمله‌ای مثبت است عدد رنگی این گراف نامیده می‌شود. عدد رنگی این گراف چند است؟ [در فصل ۱۱ (جلد سوم) مطالب بیشتری را دربارهٔ این ایده خواهیم دید.]



شکل۱۴.۸

ب) اگر شش رنگ در اختیار داشته باشیم، به چند طریق می‌توان اتاقهای R_i، $1 \leqslant i \leqslant 5$، نشان داده شده در شکل ۱۴۰۸ (ب) را چنان رنگ‌آمیزی کرد که اتاقهایی که درگاه مشترکی مانند D_j، $1 \leqslant j \leqslant 5$، دارند رنگهای مختلفی داشته باشند؟

۱۳. اگر $n \in \mathbb{Z}^+$، ثابت کنید

الف) $\phi(2n) = 2\phi(n)$ در صورتی که n زوج باشد؛ و

ب) $\phi(2n) = \phi(n)$ در صورتی که n فرد باشد.

۱۴. فرض کنیم $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ به‌طوری‌که $c = \gcd(a, b)$. ثابت کنید $\phi(ab)\phi(c) = \phi(a)\phi(b)c$.

۹

توابع مولد

در این فصل و فصل بعد، مطالعهٔ خود را دربارهٔ شمارش ادامه می‌دهیم؛ در این فصل مفهوم مهم تابع مولد را معرفی می‌کنیم.

مسألهٔ گزینش را، در صورتی‌که تکرار مجاز باشد، در فصل ۱ (جلد اول) مطالعه کردیم. در آنجا، مثلاً، در جستجوی تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 25$ در صورتی‌که به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، $c_i \geqslant 0$ بودیم. در فصل ۸ با استفاده از اصل شمول و طرد توانستیم صورت مقیدتری از این مسأله را، نظیر اینکه $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 25$ و به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، $0 \leqslant c_i < 10$ حل کنیم. اگر علاوه‌بر این بخواهیم که c_2 زوج و c_3 مضرب ۳ باشد، می‌توانیم نتایج فصل ۱ (جلد اول) و فصل ۸ را در مورد چند زیر حالت به کار ببریم.

قدرت تابع مولد در این است که هم در حل مسائلی از گونه‌هایی که تاکنون بررسی کرده‌ایم و هم در موقعیتهای جدیدی که شرایط دیگری نیز اضافه می‌شوند به کار می‌آید.

۱.۹ مثالهای مقدماتی

به‌جای اینکه کار را با تعریف تابع مولد آغاز کنیم، می‌کوشیم تا با چند مثال انگیزهٔ این ایده را بهتر دریابیم. ضمن اینکه ممکن است متوجه شویم که در موقعیتهای قبلی با این مفهوم سر و کار داشته‌ایم.

مثال ۱.۹ مادری برای فرزندان خود، زهرا، علی، و حسن، ۱۲ کتاب می‌خرد. مادر به چند طریق می‌تواند کتابها را بین فرزندانش تقسیم کند به‌طوری‌که زهرا حداقل چهار کتاب، و علی و حسن هر یک حداقل دو کتاب بگیرند، ولی حسن بیشتر از پنج کتاب نگیرد؟ در جدول ۱۰۹ همهٔ توزیعهای ممکن را فهرست کرده‌ایم. می‌بینیم که این جدول همهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ $c_1 + c_2 + c_3 = 12$ را با شرایط $4 \leqslant c_1$، $2 \leqslant c_2$، و $2 \leqslant c_3 \leqslant 5$ به‌دست می‌دهد.

اگر دو حالت نخست در این جدول را در نظر بگیریم، جوابهای $12 = 5 + 3 + 4$ و $12 = 4 + 4 + 4$ را می‌یابیم. در تجربه‌های قبلی خود در جبر، کجا چیزی شبیه این را دیده‌ایم؟ هنگام ضرب چند جمله‌ایها در هم توانهای متغیر را با هم جمع می‌کنیم و در اینجا، وقتی سه چند جمله‌ای زیر را در هم ضرب می‌کنیم،

$$(x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

دو راه به‌دست آوردن x^{12} به‌صورت زیر است:

۱) از حاصل ضرب $x^4x^3x^5$، که در آن x^4 از $(x^4 + x^5 + \cdots + x^8)$، x^3 از $(x^2 + x^3 + \cdots + x^6)$ و x^5 از $(x^2 + x^3 + \cdots + x^5)$ گرفته شده است.

۲) از حاصل‌ضرب $x^4x^4x^4$، که در آن نخستین x^4 در نخستین چند جمله‌ای قرار دارد، دومین x^4 در دومین چند جمله‌ای و سومین x^4 در سومین چند جمله‌ای.

جدول ۱.۹

زهرا	علی	حسن	زهرا	علی	حسن
۴	۲	۶	۵	۳	۴
۳	۳	۶	۴	۴	۴
۲	۴	۶	۳	۵	۴
۳	۲	۷	۲	۶	۴
۲	۳	۷	۵	۲	۵
۲	۲	۸	۴	۳	۵
			۳	۴	۵
			۲	۵	۵

اگر حاصل‌ضرب

$$(x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x^2+x^3+x^4+x^5)$$

را دقیقتر بررسی کنیم، در می‌یابیم که به‌ازای هر سه‌تایی (i,j,k) که در جدول ۱۰۹ نوشته شده است حاصل‌ضرب $x^i x^j x^k$ را نیز داریم. در نتیجه، ضرب x^{12} در

$$f(x)=(x^4+x^5+\cdots+x^8)(x^2+x^3+\cdots+x^6)(x^2+x^3+\cdots+x^5)$$

تعداد توزیعها، یعنی ۱۴، را به‌دست می‌دهد. تابع $f(x)$ را یک تابع مولد برای این توزیعها می‌نامند.

ولی عوامل این حاصل‌ضرب از کجا آمدند؟

مثلاً عامل $x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$ نشان می‌دهد که می‌توانیم به زهرا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۷ یا ۸ کتاب بدهیم. در اینجا باز هم داریم از پیوند موجود بین یاء مانع جمع و جمع معمولی استفاده می‌کنیم. ضریب هر یک از توانهای x برابر با ۱ است، زیرا اگر کتابها را اشیای یکسان تلقی کنیم، در این صورت فقط به یک طریق می‌توان چهار کتاب به زهرا داد، فقط به یک طریق می‌توان پنج کتاب به او داد و غیره. چون علی و حسن هر یک باید حداقل دو کتاب بگیرند، دو عامل $(x^2+x^3+\cdots+x^6)$ و $(x^2+x^3+\cdots+x^5)$ با x^2 آغاز می‌شوند و چون حسن بیشتر از پنج کتاب نمی‌گیرد، عامل ضرب آخر به x^5 ختم می‌شود. (چرا عامل متناظر با علی به x^6 ختم می‌شود؟)

اکنون بیشتر ما به اندازهٔ کافی قانع شده‌ایم که ضریب x^{12} در $f(x)$ جواب موردنظر را به‌دست می‌دهد. ولی بعضی ممکن است هنوز نسبت به این ایدهٔ جدید کمی شک و تردید داشته باشند. به نظر می‌رسد که فهرست کردن حالتها در جدول ۱۰۹ سریعتر از ضرب کردن سه عامل ضرب در $f(x)$ یا به‌دست آوردن ضریب x^{12} در $f(x)$، انجام می‌گیرد. در حال حاضر ممکن است چنین تصوری درست باشد. ولی به‌تدریج که با مسائلی حاوی مجهولات بیشتر و حاوی کمیتهای بزرگتری برای توزیع کردن مواجه می‌شویم، ارزش تابع مولد بیشتر آشکار می‌شود. (اکنون ممکن است متوجه شده باشید که چند جمله‌ایهای رخ که در فصل ۸ مطالعه کردیم مثالهایی از توابع مولدند.) فعلاً دو مثال دیگر را نیز بررسی می‌کنیم.

مثال ۲.۹ اگر تعدادی نامحدود (یا حداقل ۲۴ تا از هر رنگ) مهرهٔ قرمز، سبز، سفید و سیاه موجود باشد، به چند طریق می‌توانیم ۲۴ تا از آنها را چنان برگزینیم که تعدادی زوج مهرهٔ سفید و حداقل شش مهرهٔ سیاه داشته باشیم؟

چند جمله‌ایهای وابسته به رنگ مهره‌ها به‌صورت زیر هستند:

- قرمز (سبز): $1+x+x^2+\cdots+x^{24}$، که در آن ضریب پیشرو ۱ برای $1x^0$ است، زیرا یکی از امکانات برای مهره‌های قرمز (و سبز) این است که هیچ یک از آنها برگزیده نشود.
- سفید: $(1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{24})$
- سیاه: $(x^6+x^7+x^8+\cdots+x^{24})$

بنابراین، جواب مسأله برابر است با ضریب x^{24} در تابع مولد

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{24})^2(1+x^2+x^4+\cdots+x^{24})(x^6+x^7+\cdots+x^{24})$$

یکی از این گزینشها عبارت است از پنج مهرهٔ قرمز، سه مهرهٔ سبز، هشت مهرهٔ سفید و هشت مهرهٔ سیاه. این گزینش از x^5 در نخستین عامل، x^3 در دومین عامل و x^8 در دو عامل آخر به‌دست می‌آید.

مثال ۳.۹ چند جواب صحیح برای معادلهٔ $c_1+c_2+c_3+c_4=25$، در صورتی‌که به‌ازای هر $1\leqslant i\leqslant 4$، $c_i\geqslant 0$ وجود دارد؟

می‌توانیم طور دیگری نیز این پرسش را مطرح کنیم: به چند طریق می‌توان ۲۵ سکهٔ یک تومانی (یکسان) را بین چهار کودک توزیع کرد؟

برای هر کودک می‌توان حالتهای ممکن را با چند جمله‌ای $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{25}$ توصیف کرد. در این صورت جواب این مسأله برابر است با ضریب x^{25} در تابع مولد

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{25})^4$$

اگر پرسش مورد بحث را به‌صورت توزیع ۲۵ سکه، از تعدادی زیاد (یا نامحدود) سکه، بین چهار کودک در نظر بگیریم، می‌توان جواب آن را برابر با ضریب x^{25} در تابع مولد

$$g(x)=(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{25}+x^{26}+\cdots)^4$$

دانست. [$f(x)$ یک چند جمله‌ای است، اما $g(x)$ یک سری توانی برحسب x است.] توجه داشته باشید که جمله‌های x^k، به‌ازای $k\geqslant 26$، را هرگز به کار نمی‌گیریم. پس چرا زحمت نوشتن این جمله‌ها را به خود بدهیم؟ به این سبب که گاهی محاسبه کردن با سریهای توانی آسانتر از محاسبه کردن با چند جمله‌ایهاست.

تمرینات ۱.۹

۱. برای هر یک از مسأله‌های زیر تابع مولد را تعیین کنید و نشان دهید کدام ضریب در تابع برای حل مسأله لازم است. (هر جا که مناسب باشد هم صورت چند جمله‌ای و هم صورت سری توانی تابع مولد را بنویسید.)
تعداد جوابهای صحیح معادلات زیر را بیابید:
الف) $c_1+c_2+c_3+c_4=20$، $0\leqslant c_i\leqslant 7$ به‌ازای هر $1\leqslant i\leqslant 4$.
ب) $c_1+c_2+c_3+c_4=20$، $0\leqslant c_i$ به‌ازای هر $1\leqslant i\leqslant 4$، و c_2 و c_3 زوج هستند.
پ) $c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=30$، $2\leqslant c_1\leqslant 4$ و $3\leqslant c_i\leqslant 8$ به‌ازای هر $2\leqslant i\leqslant 5$.
ت) $c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=30$، $0\leqslant c_i$ به‌ازای هر $1\leqslant i\leqslant 5$، و c_2 زوج و c_3 فرد است.

۲. مطلوب است تعیین تابع مولد برای تعداد طرق توزیع ۳۵ سکهٔ یک تومانی (از تعدادی نامحدود سکه) بین

پنج کودک در صورتی‌که
الف) هیچ قید و شرطی نباشد؛
ب) هرکودک حداقل ۱ تومان بگیرد؛
پ) هرکودک حداقل ۲ تومان بگیرد؛
ت) بزرگترین کودک حداقل ۱۰ تومان بگیرد؛ و
ث) دوکودک کوچکتر هر یک حداقل ۱۰ تومان بگیرند.

۳. الف) تابع مولد برای تعداد طرق گزینش ۱۰ مهره از میان تعداد زیادی مهره از شش نوع مختلف را بیابید.
ب) تابع مولد برای تعداد طرق گزینش r شیء از گردایه‌ای متشکل از n شیء متمایز را، در صورت مجاز بودن تکرار، بیابید.

۴. الف) توضیح دهید چرا تابع مولد برای تعداد طرق دارا بودن n تومان مرکب از سکه‌های یک تومانی و پنج تومانی عبارت است از $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)$.
ب) تابع مولد برای تعداد طرق دارا بودن n تومان مرکب از سکه‌های یک تومانی، پنج تومانی و ده تومانی را بیابید.

۵. تابع مولد برای تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$ را، با فرض $-3 \leqslant c_1$، $-3 \leqslant c_2$، $-5 \leqslant c_3 \leqslant 5$ و $0 \leqslant c_4$ بیابید.

۶. به‌ازای $S = \{a, b, c\}$، تابع

$$f(x) = (1 + ax)(1 + bx)(1 + cx) = 1 + ax + bx + cx + abx^2 + acx^2 + bcx^2 + abcx^3$$

را در نظر می‌گیریم. در $f(x)$

- ضریب x^0، ۱ است (برای زیر مجموعهٔ $\varnothing$ از S).
- ضریب x^1، $a + b + c$ است (برای زیرمجموعه‌های $\{a\}$، $\{b\}$ و $\{c\}$ از S).
- ضریب x^2، $ab + ac + bc$ است (برای زیر مجموعه‌های $\{a, b\}$، $\{a, c\}$ و $\{b, c\}$ از S).
- ضریب x^3، abc است (برای زیر مجموعهٔ $S = \{a, b, c\}$).

در نتیجه، $f(x)$ تابع مولد برای زیرمجموعه‌های S است. درواقع وقتی $f(1)$ را محاسبه می‌کنیم حاصل جمعی به‌دست می‌آوریم که در آن هر یک از هشت جمعوند متناظر با یک زیرمجموعهٔ S است؛ جمعوند ۱ متناظر با $\varnothing$ است. [اگر گامی فراتر رویم و در $f(x)$ قرار دهیم $a = b = c = 1$، در این صورت $f(1) = 8$، یعنی تعداد زیر مجموعه‌های S حاصل می‌شود.]
الف) تابع مولد برای زیرمجموعه‌های $S = \{a, b, c, \cdots, r, s, t\}$ را بیابید.
ب) پاسخ قسمت (الف) را برای گزینشهایی که در آنها هر عنصر را می‌توان کنار گذاشت یا تا سه بار برگزید، بیابید.

۲.۹ تعریف و چند مثال: فنون محاسباتی

در این بند چند فرمول و مثال مربوط به سریهای توانی را بررسی می‌کنیم. از این نکات برای محاسبهٔ ضرایب جمله‌های خاصی از توابع مولد استفاده خواهیم کرد.
کار را با مفهوم صفحهٔ بعد آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۹ فرض کنیم a_0، a_1، a_2، $\cdots$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. تابع

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

را تابع مولد این دنبالهٔ مفروض می‌نامیم.

منشاءِ این ایده چه می‌تواند باشد؟

مثال ۴.۹ به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

بنابراین، $(1+x)^n$ تابع مولد برای دنبالهٔ

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \ldots$$

است.

مثال ۵.۹

الف) به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$،

$$(1 - x^{n+1}) = (1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)$$

بنابراین، $(1+x+x^2+\cdots+x^n) = \dfrac{(1-x^{n+1})}{1-x}$ و $\dfrac{(1-x^{n+1})}{1-x}$ تابع مولد برای دنبالهٔ ۱ ، ۱ ، ۱ ، $\cdots$ ، ۱ ، ۰ ، ۰ ، ۰ ، $\cdots$ است، که در آن $n+1$ جملهٔ نخست ۱ هستند.

ب) اگر ایدهٔ قسمت (الف) را تعمیم دهیم، می‌بینیم که

$$1 = (1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)$$

بنابراین، $\dfrac{1}{1-x}$ تابع مولد برای دنبالهٔ ۱ ، ۱ ، ۱ ، ۱ ، ۱ ، $\cdots$ است. [برابری $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ به‌ازای هر x حقیقی به‌طوری‌که $|x| < 1$، معتبر است؛ به‌ازای این مجموعه از مقادیر، سری هندسی $1 + x + x^2 + \cdots$ همگراست. ولی در مطالعهٔ توابع مولد به ضرایب توانهای x بیشتر علاقه‌مندیم تا به مسألهٔ همگرایی. این به معنی آن نیست که مفهوم همگرایی اهمیت ندارد، بلکه به این معنی است که برای مطلبی که در این فصل مطالعه می‌کنیم نیازی به آن نداریم.]

پ) با فرض $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$، اگر از دو طرف مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} &= \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}\\ &= \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\end{aligned}$$

در نتیجه، $\frac{1}{(1-x)^2}$ تابع مولد برای دنبالهٔ ۱، ۲، ۳، ۴، ⋯ است، درحالی‌که

$$\frac{x}{(1-x)^2} = 0 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$$

تابع مولد برای دنبالهٔ ۰، ۱، ۲، ۳، ⋯ است.

ت) اگر از تابع مولدی که در قسمت (پ) به‌دست آوردیم مشتق بگیریم می‌بینیم که

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right] = \frac{d}{dx}[0 + x + 2x^2 + \cdots]$$

یا

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \cdots$$

بنابراین، $\frac{x+1}{(1-x)^3}$ دنبالهٔ 1^2، 2^2، 3^2، ⋯ و $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ دنبالهٔ 0^2، 1^2، 2^2، 3^2، ⋯ را تولید می‌کنند.

مثال ۶.۹

الف) از قسمت (ب) در مثال ۵۰۹ می‌دانیم که تابع مولد برای دنبالهٔ ۱، ۱، ۱، ⋯ تابع $f(x) = \frac{x}{1-x}$ است. بنابراین، تابع

$$g(x) = f(x) - x^2 = \frac{1}{1-x} - x^2$$

تابع مولد برای دنبالهٔ ۱، ۱، ۰، ۱، ۱، ۱، ⋯ است، درحالی‌که تابع

$$h(x) = f(x) + 2x^3 = 1/(1-x) + 2x^3$$

دنبالهٔ ۱، ۱، ۱، ۳، ۱، ۱، ⋯ را تولید می‌کند.

ب) آیا می‌توانیم با استفاده از نتایج مثال ۵۰۹ تابع مولد دنبالهٔ ۰، ۲، ۶، ۱۲، ۲۰، ۳۰، ۴۲، ⋯ را بیابیم؟

در اینجا ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{array}{ll} a_0 = 0 = 0^2 + 0, & a_1 = 2 = 1^2 + 1, \\ a_2 = 6 = 2^2 + 2, & a_3 = 12 = 3^2 + 3, \\ a_4 = 20 = 4^2 + 4, \ \cdots & \end{array}$$

به‌طورکلی، به‌ازای هر $n \geqslant 0$ داریم $a_n = n^2 + n$.

اکنون با استفاده از قسمتهای (پ) و (ت) از مثال ۵۰۹ می‌بینیم که

$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(x+1) + x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

تابع مولد برای دنبالهٔ مفروض است. (در اینجا برای حال مسأله باید بتوانیم تشخیص دهیم که هر a_n مجموع n^2 و n است. اگر این نکته را در نیابیم ممکن است قادر به پاسخ دادن به این پرسش نباشیم. در نتیجه، در مثال ۵۰۱۰ در فصل بعدی، فن دیگری را بررسی می‌کنیم که ما را در شناسایی فرمول محاسبهٔ a_n یاری خواهد کرد.)

به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، قضیهٔ دو جمله‌ای می‌گوید که

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

می‌خواهیم این ایده را به حالتهای (الف) $n < 0$ و (ب) n لزوماً عددی صحیح نیست، تعمیم دهیم.

با فرض $n, r \in \mathbf{Z}^+$ و $n \geqslant r > 0$، داریم

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{[r!(n-r)!]} = \frac{[n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)]}{r!}$$

اگر $n \in \mathbf{R}$، عبارت $[n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)]/r!$ را برای تعریف $\binom{n}{r}$ به کار می‌بریم. مثلاً اگر $n \in \mathbf{Z}^+$، در این صورت

$$\begin{aligned}\binom{-n}{r} &= [(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)]/r!\\ &= (-1)^r(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)/r!\\ &= (-1)^r(n+r-1)!/[(n-1)!r!] = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}\end{aligned}$$

سرانجام، به‌ازای هر عدد حقیقی n تعریف می‌کنیم $\binom{n}{0} = 1$.

مثال ۷.۹ به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، سری مک لورن برای $(1+x)^{-n}$ عبارت است از

$$\begin{aligned}(1+x)^{-n} &= 1 + (-n)x + (-n)(-n-1)x^2/2!\\ &\quad + (-n)(-n-1)(-n-2)x^3/3! + \cdots\\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}x^r\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}x^r\end{aligned}$$

بنابراین، $(1+x)^{-n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}x^r$. این فرمول قضیهٔ دو جمله‌ای را که در فصل ۱ بیان کردیم تعمیم می‌دهد و نشان می‌دهد که $(1+x)^{-n}$ تابع مولد برای دنبالهٔ $\binom{-n}{0}$، $\binom{-n}{1}$، $\binom{-n}{2}$، $\binom{-n}{3}$، $\cdots$ است.

مثال ۸.۹ ضریب x^5 را در $(1-2x)^{-7}$ بیابید.

با فرض $y = -2x$ و با استفاده از مثال ۷.۹ می‌نویسیم

$$(1-2x)^{-7} = (1+y)^{-7} = \Sigma_{r=0}^{\infty}\binom{-7}{r}y^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-7}{r}(-2x)^r$$

در نتیجه، ضریب x^5 برابر است با $\binom{-7}{5}(-2)^5 = (-1)^5\binom{7+5-1}{5}(-32) = (32)\binom{11}{5} = 14784$.

مثال ۹.۹ به‌ازای هر عدد حقیقی n، سری مک‌لورن برای $(1+x)^n$ عبارت است از

$$1 + nx + n(n-1)x^2/2! + (n)(n-1)(n-2)x^3/3! + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} x^r$$

بنابراین،

$$(1+3x)^{-1/3} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1/3)(-4/3)(-7/3)\cdots((-3r+2)/3)}{r!}(3x)^r$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)(-4)(-7)\cdots(-3r+2)}{r!} x^r$$

و $(1+3x)^{-1/3}$ دنبالهٔ ۱، ۱−، $\frac{(-1)(-4)}{2!}$، $\frac{(-1)(-4)(-7)}{3!}$، ...، $\frac{(-1)(-4)(-7)\cdots(-3r+2)}{r!}$، ... را تولید می‌کند.

مثال ۱۰.۹ ضریب x^{15} را در $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$ تعیین کنید.

چون $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = x^2(1 + x + x^2 + \cdots) = x^2/(1-x)$، ضریب x^{15} در $f(x)$ برابر است با ضریب x^{15} در $(x^2/(1-x))^4 = x^8/(1-x)^4$. بنابراین، ضریب موردنظر برابر است با ضریب x^7 در $(1-x)^{-4}$، یعنی، $120 = \binom{10}{7} = (-1)^7\binom{4+7-1}{7}(-1)^7 = \binom{-4}{7}(-1)^7$.

به‌طورکلی، به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، اگر $0 \leqslant n \leqslant 7$، آنگاه ضریب x^n در $f(x)$ برابر با ۰ است. به‌ازای هر $n \geqslant 8$، ضریب x^n در $f(x)$ برابر است با ضریب x^{n-8} در $(1-x)^{-4}$ و این هم برابر است با

$$\binom{-4}{n-8}(-1)^{n-8} = \binom{n-5}{n-8}$$

در جدول ۹.۲ اتحادهایی را گرد آورده‌ایم که بعداً به آنها مراجعه خواهیم کرد.

مثال ۱۱.۹ در صورتی‌که تکرار مجاز باشد، به چند طریق می‌توانیم r شیئ را از میان n شیئ متمایز برگزینیم؟

به‌ازای هر یک از این n شیئ متمایز، سری هندسی $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ انتخابهای ممکن برای آن شیئ (یعنی هیچ، یک، دو، ...) را نمایش می‌دهد. اگر هر n شیئ متمایز را در نظر بگیریم،

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$$

تابع مولد است و جواب مطلوب برابر است با ضریب x^r در $f(x)$. اکنون با استفاده از اتحاد ۷ در جدول ۹.۲ داریم

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n+i-1}{i}x^i$$

جدول ۲.۹

به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ و m، و هر $a \in \mathbf{R}$،
۱) $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$
۲) $(1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax + \binom{n}{2}a^2x^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^nx^n$
۳) $(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + \binom{n}{n}x^{nm}$
۴) $(1-x^{n+1})/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
۵) $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$
۶) $1/(1+x)^n = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-n}{i}x^i = 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}x + (-1)^2\binom{n+2-1}{2}x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n+i-1}{i}x^i$
۷) $1/(1-x)^n = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2}(-x)^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-n}{i}(-x)^i = 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}(-x) + (-1)^2\binom{n+2-1}{2}(-x)^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n+i-1}{i}x^i$
اگر $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$، $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ و $h(x) = f(x)g(x)$، آنگاه $h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$، که در آن به‌ازای هر $k \geqslant 0$، $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$.

بنابراین، ضریب x^r برابر است با

$$\binom{n+r-1}{r}$$

و این همان نتیجه‌ای است که قبلاً در فصل ۱ به دست آورده بودیم.

مثال ۱۲.۹ به چند طریق یک فرماندهٔ پلیس می‌تواند ۲۴ فشنگ را بین چهار افسر پلیس چنان توزیع کند که هر افسر حداقل سه فشنگ بگیرد ولی هیچ افسری بیش از ۸ فشنگ نگیرد؟

انتخابهای ممکن برای تعداد فشنگهایی که هر افسر می‌گیرد با $x^3 + x^4 + \cdots + x^8$ بیان می‌شود. چون فشنگها بین چهار افسر توزیع می‌شود، تابع مولد عبارت است از

$$f(x) = (x^3 + x^4 + \cdots + x^8)^4$$

ما در جستجوی ضریب x^{24} در $f(x)$ هستیم. با توجه به

$$(x^3 + x^4 + \cdots + x^8)^4 = x^{12}(1 + x + x^2 + \cdots + x^5)^4 = x^{12} \cdot \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$$

جواب مسأله برابر است با ضریب $x^{۱۲}$ در

$$(۱-x^۶)^۴(۱-x)^{-۴} = \left[۱-\binom{۴}{۱}x^۶+\binom{۴}{۲}x^{۱۲}-\binom{۴}{۳}x^{۱۸}+x^{۲۴}\right]\left[\binom{-۴}{۰} + \binom{-۴}{۱}(-x)+\binom{-۴}{۲}(-x)^۲+\cdots\right]$$

که برابر است با

$$\left[\binom{-۴}{۱۲}(-۱)^{۱۲}-\binom{۴}{۱}\binom{-۴}{۶}(-۱)^۶+\binom{۴}{۲}\binom{-۴}{۰}\right] = \left[\binom{۱۵}{۱۲}-\binom{۴}{۱}\binom{۹}{۶}+\binom{۴}{۲}\right] = ۱۲۵$$

مثال ۱۳.۹ تحقیق کنید به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $\binom{۲n}{n} = \sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}^۲$.

چون $(۱+x)^{۲n} = [(۱+x)^n]^۲$، با مقایسهٔ ضرایب (توانهای مشابه x)، ضریب x^n در $(۱+x)^{۲n}$، یعنی $\binom{۲n}{n}$، باید برابر با ضریب x^n در $\left[\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}x+\binom{n}{۲}x^۲+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]^۲$ یعنی:

$$\binom{n}{۰}\binom{n}{n}+\binom{n}{۱}\binom{n}{n-۱}+\binom{n}{۲}\binom{n}{n-۲}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{۰}$$

باشد. با توجه به اینکه به‌ازای هر $۰ \leqslant r \leqslant n$، $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

مثال ۱۴.۹ ضریب $x^۸$ را در $\dfrac{۱}{(x-۳)(x-۲)^۲}$ تعیین کنید.

چون به‌ازای هر $a \neq ۰$، $\dfrac{۱}{x-a} = \left(\dfrac{-۱}{a}\right)\left(\dfrac{۱}{۱-\dfrac{x}{a}}\right) = \left(\dfrac{-۱}{a}\right)\left[۱+\left(\dfrac{x}{a}\right)+\left(\dfrac{x}{a}\right)^۲+\cdots\right]$،
این مسأله را می‌توانیم با یافتن ضریب $x^۸$ در $\dfrac{۱}{(x-۳)(x-۲)^۲}$ که به‌صورت

$$\left(\frac{-۱}{۳}\right)\left[۱+\left(\frac{x}{۳}\right)+\left(\frac{x}{۳}\right)^۲+\cdots\right]\left(\frac{۱}{۴}\right)\left[\binom{-۲}{۰}+\binom{-۲}{۱}\left(-\frac{x}{۲}\right)+\binom{-۲}{۲}\left(\frac{-x}{۲}\right)^۲+\cdots\right]$$

بیان می‌شود حل می‌کنیم.

فن دیگری برای حل مسأله استفاده از تجزیهٔ عبارت مفروض به کسرهای جزئی است:

$$\frac{۱}{(x-۳)(x-۲)^۲} = \frac{A}{x-۳}+\frac{B}{x-۲}+\frac{۳}{(x-۲)^۲}$$

این تجزیه مستلزم این است که

$$۱ = A(x-۲)^۲+B(x-۲)(x-۳)+C(x-۳)$$

یا

$$۰.x^۲+۰.x+۱ = ۱ = (A+B)x^۲+(-۴A-۵B+C)x+(۴A+۶B-۳C)$$

با مقایسهٔ ضرایب (به‌ترتیب، برای $x^۲$، x و ۱) می‌بینیم که $A+B=۰$، $-۴A-۵B+C=۰$ و

$4A + 6B - 3C = 1$. از حل این معادلات خواهیم داشت $A = 1$، $B = -1$ و $C = -1$. بنابراین،

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$= \left(\frac{-1}{3}\right)\frac{1}{1-(x/3)} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-(x/2)} + \left(\frac{-1}{4}\right)\frac{1}{(1-(x/2))^2}$$

$$= \left(\frac{-1}{3}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^i$$

$$+ \left(\frac{-1}{4}\right)\left[\binom{-2}{0} + \binom{-2}{1}\left(\frac{-x}{2}\right) + \binom{-2}{2}\left(\frac{-x}{2}\right)^2 + \cdots\right]$$

ضریب x^8 برابر است با

$$\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{-1}{4}\right)\binom{-2}{8}\left(\frac{-1}{2}\right)^8 = -\left[\left(\frac{1}{3}\right)^9 + 7\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]$$

مثال ۱۵.۹ با استفاده از توابع مولد تعیین کنید چند تا از زیرمجموعه‌های چهار عنصری مجموعهٔ $S = \{1, 2, 3, \cdots, 15\}$ حاوی هیچ دو عدد صحیح متوالی نیست.

الف) یکی از این زیر مجموعه‌ها، مثلاً $\{1, 3, 7, 10\}$ را در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم $1 \leqslant 1 < 3 < 7 < 10 \leqslant 15$، می‌بینیم که این از نابرابریها تفاضلهای $0 = 1 - 1$، $2 = 3 - 1$، $4 = 7 - 3$، $3 = 10 - 7$ و $5 = 15 - 10$ را تعیین می‌کنند، و مجموع این تفاضلها ۱۴ است. یکی دیگر از این زیر مجموعه‌ها، (مثلاً $\{2, 5, 11, 15\}$) را در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم $1 \leqslant 2 < 5 < 11 < 15 \leqslant 15$؛ این نابرابریها تفاضلهای ۱، ۳، ۶، ۴، و ۰ را به‌دست می‌دهند، که مجموع آنها نیز ۱۴ است.

از طرف دیگر، می‌بینیم که مجموع اعداد صحیح نامنفی ۰، ۲، ۳، ۲ و ۷ برابر با ۱۴ است و این عددها تفاضلهای حاصل از نابرابریهای $1 \leqslant 1 < 3 < 6 < 8 \leqslant 15$ (به‌ازای زیرمجموعهٔ $\{1, 3, 6, 8\}$) هستند.

با توجه به این مثالها به‌نظر می‌رسد که تناظری یک به یک بین زیرمجموعه‌های چهارعنصری موردنظر و جوابهای صحیح $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 14$ با شرایط $0 \leqslant c_1, c_5$ و $2 \leqslant c_2, c_3, c_4$، وجود دارد. (یادداشت: در اینجا شرط $2 \leqslant c_2, c_3, c_4$ تضمین می‌کند که در زیرمجموعهٔ موردنظر هیچ دو عدد متوالی وجود نداشته باشد.) جواب برابر است با ضریب x^{14} در

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^3$$
$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = x^6(1-x)^{-5}$$

که این ضریب هم برابر است با ضریب x^8 در $(1-x)^{-5}$، یعنی $\binom{-5}{8}(-1)^8 = \binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = 495$

ب) راه دیگری برای حل مسأله به‌صورت زیر است.

به‌ازای زیر مجموعهٔ $\{1, 3, 7, 10\}$، نابرابریهای اکید $0 < 1 < 3 < 7 < 10 < 16$ را در نظر گرفته و تعداد عددهای صحیح بین هر دو عدد متوالی در این نابرابریها را به‌دست می‌آوریم. ملاحظه می‌کنیم که

در اینجا ۰، ۱، ۳، ۲ و ۵ به‌دست می‌آید: ۰ زیرا هیچ عدد صحیحی بین ۰ و ۱ نیست، ۱ برای تنها عدد صحیح ۲ که بین ۱ و ۳ است، ۳ برای اعداد صحیح ۴، ۵، ۶ که بین ۳ و ۷ هستند و غیره. مجموع این پنج عدد صحیح ۱۱ است. اگر همین کار را برای زیرمجموعهٔ $\{2,5,11,15\}$ نیز انجام دهیم، نابرابریهای اکید $0 < 2 < 5 < 11 < 15 < 16$ نتایج ۱، ۲، ۵، ۳ و ۰ را به‌دست می‌دهند که مجموع این عددها نیز ۱۱ است.

از طرف دیگر، می‌بینیم که مجموع اعداد صحیح نامنفی ۰، ۱، ۲، ۱ و ۷ برابر با ۱۱ است و این اعداد تعداد عددهای صحیح متمایز موجود بین اعداد صحیح متوالی در پنج نابرابری اکید $0 < 1 < 3 < 6 < 8 < 16$ هستند. اعداد ۱، ۳، ۶ و ۸ متناظر با زیرمجموعهٔ $\{1,3,6,8\}$ هستند.

این نتایج وجود تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های مطلوب و جوابهای صحیح $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 = 11$ با شرایط $b_1, b_5 \geqslant 0$ و $b_2, b_3, b_4 \geqslant 1$، را القا می‌کنند. (یادداشت: در این حالت، شرط $b_1, b_2, b_3 \geqslant 1$ تضمین می‌کند که در زیرمجموعهٔ موردنظر هیچ دو عدد صحیح متوالی وجود نداشته باشد.) تعداد این جوابها برابر است با ضریب x^{11} در

$$\begin{aligned} g(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(x + x^2 + x^3 + \cdots)^3(1 + x + x^2 + \cdots) \\ &= x^3(1 - x)^{-5} \end{aligned}$$

یعنی $\binom{-5}{8}(-1)^8 = 495$ و این همان جواب قبلی است. [اکنون خواننده می‌تواند مجدداً تمرین تکمیلی ۱۷ در فصل ۳ (جلد اول) را ببیند.]

در مثال بعدی، آخرین اتحاد جدول ۲.۹ را به‌کار می‌گیریم. (این اتحاد را قبلاً به‌طور ضمنی، در مثالهای ۱۲.۹ و ۱۳.۹ به‌کارگرفته بودیم.)

مثال ۱۶.۹ فرض کنیم $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. این تابع، تابع مولد دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، ...، است که در آن به‌ازای هر $k \in \mathbf{N}$، $a_k = k$. تابع $g(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ دنبالهٔ b_0، b_1، b_2، ...، را که در آن به‌ازای هر $k \in \mathbf{N}$، $b_k = k^2$ تولید می‌کند.

درنتیجه، تابع $h(x) = f(x)g(x)$ سری توانی $a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$ را به‌دست می‌دهد و بنابراین، $h(x)$ تابع مولد برای دنبالهٔ c_0، c_1، c_2، ... است، که در آن به‌ازای هر $k \in \mathbf{N}$،

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_{k-2}b_2 + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$$

می‌بینیم که مثلاً،

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \cdot 0^2 = 0 \\ c_1 &= 0 \cdot 1^2 + 1 \cdot 0^2 = 0 \\ c_2 &= 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^2 = 1 \\ c_3 &= 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 0^2 = 6 \\ c_4 &= 0 \cdot 4^2 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 0^2 = 20 \end{aligned}$$

و به‌طورکلی، $c_k = \sum_{i=0}^{k} i(k-i)^2$. (در تمرینات پایان همین بند این فرمول مجموعیابی را ساده خواهیم کرد.)
وقتی مانند آنچه در این مثال دیدیم، دنباله‌ای نظیر c_0، c_1، c_2، ... از دو تابع مولد $f(x)$ [برای a_0، a_1، a_2، ...] و $g(x)$ [برای b_0، b_1، b_2، ...] حاصل می‌شود، دنبالهٔ c_0، c_1، c_2، ... را پیچش دنباله‌های a_0، a_1، a_2، ... و b_0، b_1، b_2، ... می‌نامیم.

آخرین مثال این بند حاوی دو مورد دیگر از پیچش دنباله‌هاست.

مثال ۱۷.۹

الف) به‌ازای $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ و $g(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$، می‌بینیم که

$$f(x)g(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

در نتیجه، دنبالهٔ ۱، ۰، ۱، ۰، ۱، ۰، ... پیچش دنباله‌های ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ... و ۱، ۱−، ۱، ۱−، ۱، ۱−، ... است.

ب) فرض کنیم $h(x) = 1 + x + x^2 + x^3$، یعنی $h(x)$ تابع مولد دنبالهٔ ۱، ۱، ۱، ۱، ۰، ۰، ۰، ... باشد. همچنین، فرض کنیم $k(x) = \frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + (3x)^2 + (3x)^3 + \cdots$، یعنی $k(x)$ تابع مولد دنبالهٔ ۱، ۳، ۳^۲، ۳^۳، ... باشد. در این صورت، $h(x)k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ تابع مولد برای پیچش این دو دنباله است، که در آن

$$c_0 = 1,\ c_1 = 1 + 3 = 4,\ c_2 = 1 + 3 + 9 = 13,$$
$$c_n = 3^{n-3} + 3^{n-2} + 3^{n-1} + 3^n,\ n \geqslant 3$$

تمرینات ۲.۹

۱. توابع مولد دنباله‌های زیر را بیابید. [مثلاً در مورد دنبالهٔ ۰، ۱، ۳، ۹، ۲۷، ...، جواب مطلوب $\frac{x}{1-3x}$ است، نه $\sum_{i=0}^{\infty} 3^i x^{i+1}$ یا $0 + x + 3x^2 + 9x^3 + \cdots$]

الف) $\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \binom{8}{2}, \cdots, \binom{8}{8}$
ب) $\binom{8}{1}, 2\binom{8}{2}, 3\binom{8}{3}, \cdots, 8\binom{8}{8}$
پ) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$
ت) $0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots$
ث) $0, 0, 0, 6, -6, 6, -6, 6, \cdots$
ج) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots$
چ) $1, 2, 4, 8, 16, \cdots$
ح) $0, 0, 1, a, a^2, a^3, \cdots, a \neq 0$

۲. دنباله‌ای را که هر یک از توابع مولد زیر تولید می‌کند تعیین کنید.

الف) $f(x) = (2x-3)^3$
ب) $f(x) = \frac{x^4}{1-x}$
پ) $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$
ت) $f(x) = \frac{1}{1+3x}$
ث) $f(x) = \frac{1}{3-x}$
ج) $f(x) = \frac{1}{1-x} + 3x^7 - 11$

۳. در هر یک از موارد زیر، $f(x)$ تابع مولد دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، ... و $g(x)$ تابع مولد دنبالهٔ b_0، b_1، b_2، ... است. $g(x)$ را بر حسب $f(x)$ بیان کنید.

الف) $b_3 = 3$
$b_n = a_n$، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $n \neq 3$

ب) $b_3 = 3$
$b_7 = 7$
$b_n = a_n$، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $n \neq 3, 7$

پ) $b_1 = 1$
$b_3 = 3$
$b_n = 2a_n$، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $n \neq 1, 3$

ت) $b_1 = 1$
$b_3 = 3$
$b_7 = 7$
$b_n = 2a_n + 5$، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $n \neq 1, 3, 7$

۴. مقدار ثابت (یعنی ضریب x^0) را در $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^{15}$ تعیین کنید.

۵. الف) ضریب x^7 را در $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^{15}$ بیابید.
ب) به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، ضریب x^7 را در $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$ بیابید.

۶. ضریب x^{50} را در $(x^7 + x^8 + x^9 + \cdots)^6$ بیابید.

۷. ضریب x^{20} را در $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5$ بیابید.

۸. اگر $n \in \mathbf{Z}^+$، ضریب (الف) x^7؛ (ب) x^8؛ و پ) x^r، $r \in \mathbf{Z}$ و $0 \leqslant r \leqslant n + 2$، را در $(1 + x + x^2)(1 + x)^n$ بیابید.

۹. ضریب x^{15} را در هر یک از توابع زیر بیابید.

الف) $x^3(1 - 2x)^{10}$ ب) $\frac{x^3 - 5x}{(1 - x)^3}$ پ) $\frac{(1 + x)^4}{(1 - x)^4}$

۱۰. به چند طریق می‌توان بیست‌وچهار روبوت یکسان را در چهار خط تولید چنان گمارد که (الف) در هر خط حداقل سه روبوت گماشته شوند؟ (ب) در هر خط حداقل سه و حداکثر نه روبوت گماشته شوند؟

۱۱. به چند طریق می‌توان ۳۰۰۰ پاکت یکسان را در بسته‌های ۲۵ تایی بین چهار نفر چنان تقسیم کرد که هر نفر حداقل ۱۵۰ و حداکثر ۱۰۰۰ پاکت بگیرد؟

۱۲. دو صندوق نوشابه، یکی حاوی ۲۴ بطری از یک نوع و دیگری حاوی ۲۴ بطری از نوع دیگر، را بین پنج نفر تقسیم می‌کنیم. به چند طریق می‌توان این ۴۸ بطری را چنان تقسیم کرد که (الف) هر نفر حداقل دو بطری از هر نوع بگیرد؟ (ب) هر نفر حداقل دو بطری از یک نوع خاص و حداقل سه بطری از نوع دیگر بگیرد؟

۱۳. اگر تاسی را ۱۲ بار بریزیم، احتمال اینکه مجموع اعداد حاصل ۳۰ باشد چقدر است؟

۱۴. دانش‌آموزی در حال گردآوری مبلغی پول است تا به مناسبت روز معلم هدیه‌ای برای آموزگار خود تهیه کند. اگر هشت نفر از دانش‌آموزان تعهد کنند که هر یک ۲۰، ۳۰، ۴۰ یا ۵۰ تومان بدهند، و دو نفر دیگر هر یک ۵۰ یا ۱۰۰ تومان بدهند، احتمال اینکه این دانش‌آموز بتواند دقیقاً ۴۰۰ تومان جمع کند چقدر است؟

۱۵. به چند طریق می‌توان n مهره را از میان تعداد بسیار زیادی مهرهٔ آبی، قرمز و زرد (که همه هم‌اندازه‌اند) برگزید در صورتی‌که هر گزینش الزاماً حاوی تعدادی زوج مهرهٔ آبی باشد؟

۱۶. چگونه می‌توان ۱۲ مداد و ۱۶ خودکار را بین چهار دانش‌آموز چنان تقسیم کرد به‌طوری که نفر چهارم حداقل

یک مداد و سه خودکار و هر یک از سه نفر دیگر حداقل دو مداد و حداکثر پنج خودکار بگیرد؟

۱۷. در کیسه‌ای ۶ مهرهٔ یکسان هست که اعداد ۱ تا ۶ را روی آنها نوشته‌ایم. به تعداد دفعات دلخواه مهره‌ای را از کیسه بیرون می‌کشیم و عدد روی مهره را می‌خوانیم. تحقیق کنید که $(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1}$ تابع مولد برای تعداد طرقی است که مجموع اعداد خوانده شده برابر با n، $n \in \mathbf{N}$، شود.

۱۸. نشان دهید که $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ دنبالهٔ $\binom{2n}{n}$، $n \in \mathbf{N}$، را تولید می‌کند.

۱۹. قسمت (الف) از مثال ۹.۱۵ را در نظر می‌گیریم.

الف) تفاضلهای حاصل از نابرابریهایی را که برای زیرمجموعهٔ $\{3,6,8,15\}$ از S می‌نویسیم تعیین و تحقیق کنید که مجموع این تفاضلها همان است که در مثال مذکور بیان شد.

ب) زیرمجموعه‌ای از S را بیابید که تفاضلهای ۲، ۲، ۳، ۷ و ۰ را به‌دست دهد.

پ) زیرمجموعه‌ای از S چنان بیابید که تفاضلهای a، b، c، d و e را به‌دست دهد که در آن $a, e \geqslant 0$، و $b, c, d \geqslant 2$.

۲۰. به چند طریق می‌توانیم هفت عدد صحیح نامتوالی را از $\{1,2,3,\cdots,50\}$ برگزینیم؟

۲۱. با استفاده از فرمولهای مجموعیابی زیر [که قبلاً آنها را در مطالب و تمرینات بند ۴.۱ (جلد اول) دیده‌ایم] عبارت c_k را در مثال ۹.۱۶ ساده کنید:

$$\sum_{i=0}^{k} i = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \sum_{i=0}^{k} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

$$\sum_{i=0}^{k} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

۲۲. الف) چهار جملهٔ نخست پیچش هر جفت از دنباله‌های زیر، یعنی c_0، c_1، c_2، و c_3، را بیابید.

یک) به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $a_n = 1$، $b_n = 1$ دو) به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $a_n = 1$، $b_n = 2^n$

سه) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$؛ $a_n = 0$، $n \in \mathbf{N}$ و $n \neq 0,1,2,3$؛ به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $b_n = 1$

ب) برای هر یک از نتایج قسمت (الف)، فرمول کلی برای c_n بیابید.

۲۳. برای پیچش هر جفت از دنباله‌های زیر فرمولی بیابید:

الف) $a_n = 1$، $0 \leqslant n \leqslant 4$، و به‌ازای هر $n \geqslant 5$، $a_n = 0$؛ به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $b_n = n$

ب) به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $a_n = (-1)^n$، $b_n = (-1)^n$

پ) $a_n = 1$، $0 \leqslant n \leqslant 3$، و به‌ازای هر $n \geqslant 4$، $a_n = 0$؛ $b_0 = 0$، $b_1 = 1$، $b_2 = 2$، $b_3 = 3$ و به‌ازای هر $n \geqslant 4$، $b_n = 0$

۹.۳ افرازهای اعداد صحیح

در مطالعهٔ نظریهٔ اعداد با مسألهٔ افرازکردن عدد صحیح مثبتی مانند n به جمعوندهای مثبت و یافتن تعداد این گونه افرازها، بدون توجه به ترتیب، مواجه می‌شویم. تعداد این‌گونه افرازها را با $p(n)$ نشان می‌دهیم. مثلاً،

$$p(1) = 1: \quad 1$$
$$p(2) = 2: \quad 2 = 1+1$$

$$p(۳) = ۳: \qquad ۳ = ۲ + ۱ = ۱ + ۱ + ۱$$
$$p(۴) = ۵: \qquad ۴ = ۳ + ۱ = ۲ + ۲ = ۲ + ۱ + ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$
$$p(۵) = ۷: \qquad ۵ = ۴ + ۱ = ۳ + ۲ = ۳ + ۱ + ۱ = ۲ + ۲ + ۱$$
$$= ۲ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

می‌خواهیم به‌ازای هر n مفروض $p(n)$ را بدون فهرست کردن همهٔ افرازها به دست آوریم. به ابزاری نیاز داریم که به‌کمک آن بتوانیم حساب تعداد ۱ها، ۲ها، ...، nهایی را که به‌صورت جمعوند در n ظاهر می‌شوند نگاه داریم.

اگر $n \in \mathbf{Z}^+$، تعداد ۱هایی که می‌توانیم به‌کار گیریم برابر است با ۰ یا ۱ یا ۲ یا .... سری توانی $۱ + x + x^۲ + x^۳ + x^۴ + \cdots$ حساب این ۱ها را نگاه می‌دارد. به‌طور مشابهی، $۱ + x^۲ + x^۴ + x^۶ + \cdots$ حساب تعداد ۲ها را در افراز n نگاه می‌دارد، در حالی‌که $۱ + x^۳ + x^۶ + x^۹ + \cdots$ برای تعداد ۳هاست. بنابراین، برای تعیین، مثلاً، $p(۱۰)$، باید ضریب $x^{۱۰}$ را در

$$f(x) = (۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots)(۱ + x^۲ + x^۴ + x^۶ + \cdots)(۱ + x^۳ + x^۶ + x^۹ + \cdots)\cdots$$
$$(۱ + x^{۱۰} + x^{۲۰} + \cdots)$$

یا در

$$g(x) = (۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots + x^{۱۰})(۱ + x^۲ + x^۴ + \cdots + x^{۱۰})(۱ + x^۳ + x^۶ + x^۹)\cdots(۱ + x^{۱۰})$$

بیابیم.

ما ترجیح می‌دهیم که با $f(x)$ کار کنیم، زیرا می‌توانیم آن را به‌صورت فشرده‌تر

$$f(x) = \frac{۱}{(۱-x)}\frac{۱}{(۱-x^۲)}\frac{۱}{(۱-x^۳)}\cdots\frac{۱}{(۱-x^{۱۰})} = \prod_{i=۱}^{۱۰}\frac{۱}{(۱-x^i)}$$

بنویسیم. اگر این حاصل‌ضرب را به جمله‌های فراتر از $i = ۱۰$ نیز بسط دهیم، $p(x) = \prod_{i=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۱-x^i}\right)$ را به‌دست می‌آوریم که دنبالهٔ $p(۰)$، $p(۱)$، $p(۲)$، $p(۳)$، ... را تولید می‌کند، البته با این قرارداد که $p(۰) = ۱$.

متأسفانه، محاسبهٔ همهٔ بی‌نهایت جملهٔ $p(x)$ عملاً امکان‌پذیر نیست. اگر فقط $\prod_{i=۱}^{r}\left(\frac{۱}{۱-x^i}\right)$ را به‌ازای r مشخصی در نظر بگیریم، آنگاه ضریب x^n برابر است با تعداد افرازهایی از n که در آنها هیچ‌یک از جمعوندها از r بزرگتر نیست.

با وجود آنکه محاسبهٔ $p(n)$ از $p(x)$ به‌ازای مقادیر بزرگ n دشوار است، ایدهٔ تابع مولد در مطالعهٔ انواع معینی از افرازها سودمند خواهد بود.

مثال ۱۸.۹ مطلوب است تعیین تابع مولد برای تعداد طرقی که یک شرکت تبلیغاتی می‌تواند n دقیقه ($n \in \mathbf{Z}^+$) از زمان پخش رادیویی را خریداری کند درصورتی‌که مدت زمان پخش آگهیهای بازرگانی به‌صورت بلوکهای ۳۰ ثانیه‌ای، ۶۰ ثانیه‌ای یا ۱۲۰ ثانیه‌ای عرضه شود.

فرض کنیم هر ۳۰ ثانیه یک واحد زمان را نشان دهد. در این صورت پاسخ مسأله برابر است با تعداد جوابهای

صحیح معادلهٔ $a + 2b + 4c = 2n$ با شرطهای $a, b, c \geqslant 0$.
تابع مولد وابسته عبارت است از

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots) \\ &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^4} \end{aligned}$$

و ضریب x^{2n} برابر است با تعداد افرازهای $2n$ به ۱ها، ۲ها و ۴ها، که همان پاسخ مسأله است.

مثال ۱۹.۹ مطلوب است تعیین تابع مولد برای $p_d(n)$، تعداد افرازهای عدد صحیح و مثبتی مانند n به جمعوندهای متمایز.

قبل از شروع به حل مسأله، هر ۱۱ افراز ۶ را در نظر می‌گیریم:

(۱	$1+1+1+1+1+1$	(۲	$1+1+1+1+2$
(۳	$1+1+1+3$	(۴	$1+1+4$
(۵	$1+1+2+2$	(۶	$1+5$
(۷	$1+2+3$	(۸	$2+2+2$
(۹	$2+4$	(۱۰	$3+3$
(۱۱	6		

افرازهای (۶)، (۷)، (۹) و (۱۱) جمعوندهای متمایز دارند؛ بنابراین، $p_d(6) = 4$.

هنگام محاسبهٔ $p_d(n)$، برای هر $k \in \mathbf{Z}^+$ دو انتخاب داریم: یا k یکی از جمعوندهای n نیست، یا هست. این را می‌توان با چند جمله‌ای $1 + x^k$ بیان کرد و در نتیجه، تابع مولد برای این افرازها عبارت است از

$$P_d(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i)$$

به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $p_d(n)$ ضریب x^n در $(1 + x)(1 + x^2)\cdots(1 + x^n)$ است. [بنابر تعریف، $p_d(0) = 1$.] وقتی $n = 6$، ضریب x^6 در $(1 + x)(1 + x^2)\cdots(1 + x^6)$ برابر با ۴ است.

مثال ۲۰.۹ اگر افرازهای فهرست شده در مثال ۱۹.۹ را در نظر بگیریم، می‌بینیم که چهار تا از افرازهای ۶ حاوی جمعوندهای فردند: یعنی، افرازهای (۱)، (۳)، (۶) و (۱۰). همچنین داریم $p_d(6) = 4$. آیا این صرفاً یک تصادف است؟

وقتی $n \geqslant 1$، فرض کنیم $p_o(n)$ تعداد افرازهایی از n را نشان دهد که حاوی جمعوندهای فردند. تعریف می‌کنیم $p_o(0) = 1$. تابع مولد برای دنبالهٔ $p_o(0)$، $p_o(1)$، $p_o(2)$، ... عبارت است از

$$\begin{aligned} P_o(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots) \\ &\quad (1 + x^7 + \cdots)\cdots = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^7}\cdots \end{aligned}$$

چون

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x},\qquad 1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2},\qquad 1+x^3=\frac{1-x^6}{1-x^3},\cdots$$

داریم

$$\begin{aligned}P_d(x)&=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots\\&=\frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\cdots=P_o(x)\end{aligned}$$

با توجه به برابری توابع مولد می‌بینیم که به‌ازای هر $n \geqslant 0$، $p_d(n)=p_o(n)$.

مثال ۲۱.۹ بار دیگر فرض کنیم فقط جمعوندهای فرد داشته باشیم، ولی در این مثال هر جمعوند (فرد) یا باید به تعدادی فرد از دفعات حضور داشته باشد یا اصلاً حضور نداشته باشد. مثلاً برای عدد صحیح ۱، یک‌چنین افرازی هست، که همان ۱ است، ولی چنین افرازی برای عدد صحیح ۲ وجود ندارد. برای عدد صحیح ۳ دو تا از این افرازها داریم: ۳ و ۱ + ۱ + ۱. وقتی امکانات مختلف را برای عدد صحیح ۴ بررسی می‌کنیم، فقط افراز ۱ + ۳ را می‌یابیم.

تابع مولد برای افرازهایی که در اینجا توصیف شد عبارت است از

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+x+x^3+x^5+\cdots)(1+x^3+x^9+x^{15}+\cdots)(1+x^5+x^{15}+x^{25}+\cdots)\cdots\\&=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\sum_{i=0}^{\infty}x^{(2k+1)(2i+1)}\right)\end{aligned}$$

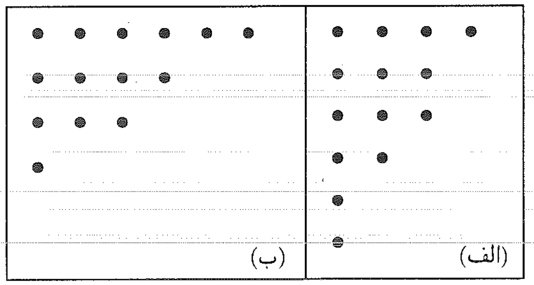
تابع مولد مطلوب به‌صورت

$$(x+x^3+x^5+\cdots)(x^3+x^9+x^{15}+\cdots)(x^5+x^{15}+x^{25}+\cdots)\cdots \qquad (*)$$

نیست. اگر این طور می‌بود، حاصل‌ضرب نمی‌توانست شامل جمله‌ای باشد که در آن توان x متناهی باشد. موقعیت نشان داده شده با معادلهٔ $(*)$ در صورتی روی می‌دهد که قبول کنیم هر عدد صحیح مثبت فرد باید حداقل یک‌بار به‌عنوان جمعوند حضور داشته باشد. در چنین «افراز»ی تعداد جمعوندها و در نتیجه، خود مجموع بی‌نهایت خواهند بود. بنابراین، چه صریحاً بیان شده باشد و چه بیان نشده باشد، باید دریابیم که هر جمعوند فرد ممکن است اصلاً حضور نداشته باشد و این شرط را با جمعوند ۱ که در هر یک از عوامل ضرب $f(x)$ منظور شده است بیان می‌کنیم. در حقیقت، این امر در مورد همهٔ جمعوندهای فرد، جز تعدادی متناهی از آنها، صادق است. البته، اگر جمعوند فردی در افرازی حضور داشته باشد، به تعدادی فرد از دفعات حضور خواهد داشت.

این بند را با معرفی ایده‌ای به نام نمودار فِرِرز به پایان می‌رسانیم. در این نمودار برای نمایش افرازی از یک عدد صحیح، سطرهایی متشکل از تعدادی نقطه به‌کار گرفته می‌شوند و وقتی از سطری به سطر زیر آن می‌رویم تعداد نقطه‌ها در سطر افزایش نمی‌یابد.

در شکل ۹ ۰ ۱ نمودارهای فررز برای دو افراز ۱۴ نمایش داده شده است: (الف) ۱ + ۱ + ۲ + ۳ + ۳ + ۴ و (ب) ۱ + ۳ + ۴ + ۶. نمودار قسمت (ب) را ترانهش نمودار قسمت (الف) می‌نامیم و برعکس، زیرا هر یک از آنها را می‌توان با تعویض جای سطرها و ستونهای دیگری به‌دست آورد.



شکل۱.۹

این نمودارها غالباً نتایجی را دربارهٔ افرازها القا می‌کنند. در اینجا افرازی از ۱۴ را برحسب تعدادی جمعوند می‌بینیم، که در آن ۴ بزرگترین جمعوند است و افراز دیگری از ۱۴ را می‌بینیم که دقیقاً چهار جمعوند دارد. بین هر گراف فررز و ترانهش آن تناظری یک به یک برقرار است و بنابراین، این مثال حالت خاصی از نتیجه‌ای کلی را نشان می‌دهد: تعداد افرازهای عدد صحیح n به m جمعوند برابر است با تعداد افرازهای n به جمعوندهایی که بین آنها m بزرگترین جمعوند است.

تمرینات ۹ .۳

۱. همهٔ افرازهای ۷ را بیابید.

۲. مطلوب است تعیین تابع مولد برای دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، ...، که در آن a_n تعداد افرازهای عدد n است به الف) جمعوندهای زوج؛ ب) جمعوندهای زوج متمایز؛ و پ) جمعوندهای فرد متمایز.

۳. در $f(x) = [1/(1-x)][1/(1-x^2)][1/(1-x^3)]$ ضریب x^6 برابر با ۷ است. این نتیجه را برحسب افرازهای ۶ تعبیر کنید.

۴. تابع مولد را برای تعداد جوابهای صحیح هر یک از معادلات زیر بیابید:

الف) $2w + 3x + 5y + 7z = n$، $w, x, y, z \geqslant 0$

ب) $2w + 3x + 5y + 7z = n$، $w \geqslant 0$، $x, y \geqslant 4$، $z \geqslant 5$

پ) $2w + 3x + 5y + 7z = n$، $2 \leqslant w \leqslant 4 \leqslant x \leqslant 7 \leqslant y \leqslant 10 \leqslant z$

۵. مطلوب است تعیین تابع مولد برای تعداد افرازهای عدد صحیح نامنفی n به جمعوندهایی که (الف) هر جمعوند به تعدادی زوج از دفعات ظاهر شود؛ و (ب) هر جمعوند زوج باشد.

۶. مطلوب است تعیین تابع مولد برای تعداد افرازهای $n \in \mathbf{N}$ به جمعوندهایی که (الف) هیچ جمعوندی بیشتر از پنج بار ظاهر نشود؛ و (ب) هیچ جمعوندی از ۱۲ بزرگتر نباشد و بیشتر از پنج بار ظاهر نشود.

۷. نشان دهید تعداد افرازهایی از عدد صحیح مثبت n که در آنها هیچ جمعوندی بیشتر از دوبار ظاهر نشود برابر است با تعداد افرازهایی از n که در آنها هیچ جمعوندی بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۸. نشان دهید تعداد افرازهایی از $n \in \mathbf{Z}^+$ که در آنها هیچ جمعوندی بر ۴ بخش‌پذیر نیست برابر است با تعداد

افرازهایی از n که در آنها هیچ جمعوند زوجی تکرار نمی‌شود (گرچه جمعوندهای فرد ممکن است تکرار شوند).

۹. با استفاده از نمودار فررز، نشان دهید تعداد افرازهایی از n که در آنها هیچ جمعوندی از m بزرگتر نیست برابر است با تعداد افرازهایی از n که در آنها حداکثر m جمعوند وجود دارد.

۱۰. با استفاده از نمودار فررز نشان دهید تعداد افرازهای n برابر است با تعداد افرازهای $2n$ به n جمعوند.

۴.۹ تابع مولد نمایی

نوعی از تابع مولد را که تا اینجا مطالعه کرده‌ایم غالباً تابع مولد معمولی برای دنبالهٔ مفروض می‌نامند. این نوع توابع در مسائلی گزینشی که در آنها ترتیب هیچ نقشی نداشت پیش آمدند. ولی اکنون که می‌خواهیم به مسائل مربوط به آرایشها بپردازیم، که در آنها ترتیب نقشی قاطع دارد، باید در جستجوی ابزار مناسبی باشیم. برای یافتن چنین ابزاری، دوباره به قضیهٔ دوجمله‌ای توجه می‌کنیم.

به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ داریم $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$ و بنابراین، $(1+x)^n$ تابع مولد (معمولی) برای دنبالهٔ $\binom{n}{0}$، $\binom{n}{1}$، $\binom{n}{2}$، ...، $\binom{n}{n}$، ۰، ۰، ... است. در فصل ۱ هنگامی‌که می‌خواستیم تأکید کنیم که $\binom{n}{r}$ تعداد ترکیبهای rتایی n شیء، $0 \leqslant r \leqslant n$، را نمایش می‌دهد، نوشتیم $C(n,r) = \binom{n}{r}$. در نتیجه، $(1+x)^n$ دنبالهٔ $C(n,0)$، $C(n,1)$، $C(n,2)$، ...، $C(n,n)$، ۰، ۰، ... را تولید می‌کند.

ولی به‌ازای هر $0 \leqslant r \leqslant n$،

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \left(\frac{1}{r!}\right) P(n,r)$$

که در آن $P(n,r)$ تعداد جایگشتهای rتایی از n شیء را نشان می‌دهد. بنابراین،

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= C(n,0) + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + C(n,3)x^3 + \cdots + C(n,n)x^n \\ &= P(n,0) + P(n,1)x + P(n,2)\frac{x^2}{2!} + P(n,3)\frac{x^3}{3!} + \cdots + P(n,n)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

بنابراین، اگر در بسط $(1+x)^n$، ضریب $\frac{x^r}{r!}$، $0 \leqslant r \leqslant n$، را در نظر بگیریم، $P(n,r)$ را به‌دست می‌آوریم. براساس این نکته تعریف زیر را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۲.۹ به‌ازای دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، a_3، ... از اعداد حقیقی،

$$f(x) + a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$$

را تابع مولدنمایی برای دنبالهٔ مفروض می‌نامیم.

مثال ۲۲.۹ اگر بسط سری مک لورن برای e^x را در نظر بگیریم، می‌بینیم که

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

بنابراین، e^x تابع مولد نمایی برای دنبالهٔ ۱، ۱، ۱، . . . است. (e^x تابع مولد معمولی برای دنبالهٔ ۱، ۱، $\frac{1}{2!}$، $\frac{1}{3!}$، $\frac{1}{4!}$، . . . است.)

مثال بعدی نشان می‌دهد که چگونه این مفهوم ما را در شمردن انواع خاصی از ترتیبها یاری دهد.

مثال ۲۳.۹ به چند طریق می‌توانیم چهار تا از حروف واژهٔ ENGINE را مرتب کنیم؟

جدول ۳.۹

EENN	$4!/(2!2!)$	EGNN	$4!/2!$
EEGN	$4!/2!$	EINN	$4!/2!$
EEIN	$4!/2!$	GINN	$4!/2!$
EEGI	$4!/2!$	EIGN	$4!$

در جدول ۳.۹ انتخابهای ۴ حرفی ممکن از حروف E ،N ،I ،G ،N ،E را، همراه با تعداد ترتیبهایی که هر یک از این انتخابها تعیین می‌کند، فهرست کرده‌ایم.

اکنون پاسخ مطلوب را با استفاده از تابع مولد نمایی به‌دست می‌آوریم. برای حرف E عبارت $[1+x+(x^2/2!)]$ را به‌کار می‌گیریم، زیرا ۰، ۱ یا ۲ تا E برای مرتب کردن داریم. ملاحظه می‌کنیم که ضریب $x^2/2!$ برابر با ۱ است، یعنی تعداد طرق متمایز مرتب کردن (فقط) دو E. به‌طور مشابهی، برای ترتیبهای ۰، یا ۲ تا N عبارت $[1 + x + (x^2/2!)]$ را داریم. ترتیبهای هر یک از حروف G و I با عبارت $(1 + x)$ نمایش داده می‌شوند.

در نتیجه می‌بینیم که در اینجا $f(x) = [1 + x + (x^2/2!)]^2(1 + x)^2$ تابع مولد نمایی است و می‌توانیم ادعا کنیم که جواب مطلوب برابر با ضریب $x^4/4!$ در $f(x)$ است.

برای توجیه ادعای خود، دو تا از هشت طریق ظاهر شدن جملهٔ $\frac{x^4}{4!}$ را در بسط

$$f(x) = [1 + x + (x^2/2!)][1 + x + (x^2/2!)](1 + x)(1 + x)$$

در نظر می‌گیریم.

۱) یکی از آنها از حاصل‌ضرب $(x^2/2!)(x^2/2!)(1)(1)$ حاصل می‌شود، که در آن $(x^2/2!)$ از هر یک از دو عامل نخست (یعنی $[1 + x + (x^2/2!)]$) گرفته شده است و ۱ از هر یک از دو عامل آخر [یعنی $(1 + x)$]. در این صورت،

$$(x^2/2!)(x^2/2!)(1)(1) = x^4/(2!2!) = (4!/(2!2!))(x^4/4!)$$

و ضریب $x^4/4!$ برابر با $4!/(2!2!)$ است، یعنی برابر با تعداد طرقی که می‌توان چهار حرف E، E، N و N را مرتب کرد.

۲) دیگری از حاصل‌ضرب $(x^2/2!)(1)(x)(x)$ حاصل می‌شود، که در آن $(x^2/2!)$ از عامل نخست (یعنی از $[1 + x + (x^2/2!)]$)، ۱ از عامل دوم (یعنی از $[1 + x + (x^2/2!)]$) و x از هر یک از دو عامل آخر (یعنی، $(1 + x)$) گرفته شده است. در اینجا $(x^2/2!)(1)(x)(x) = x^4/2! = (4!/2!)(x^4/4!)$ و بنابراین، ضریب $x^4/4!$ برابر با $4!/2!$ است، یعنی تعداد طرقی که می‌توان چهار حرف E، E، G و I را مرتب کرد.

در بسط کامل $f(x)$، جملهٔ حاوی $x^۴/۴!$ عبارت است از

$$\left(\frac{x^۴}{۲!۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+x^۴\right)$$
$$=\left[\left(\frac{۴!}{۲!۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+۴!\right]\left(\frac{x^۴}{۴!}\right)$$

و ضریب $\frac{x^۴}{۴!}$ همان پاسخ مطلوب (یعنی ۱۰۲ ترتیب) است که هشت سطر جدول ۳۰۹ پدید آورده‌اند.

مثال ۲۴.۹ سریهای مک لورن e^x و e^{-x} را در نظر می‌گیریم.

$$e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۴}{۴!}+\cdots\qquad,\qquad e^{-x}=۱-x+\frac{x^۲}{۲!}-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۴}{۴!}-\cdots$$

اگر این دو سری را با هم جمع کنیم، می‌بینیم که

$$e^x+e^{-x}=۲\left(۱+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}+\cdots\right)$$

یا

$$\frac{e^x+e^{-x}}{۲}=۱+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}+\cdots$$

اگر e^{-x} را از e^x کم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{e^x-e^{-x}}{۲}=x+\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}+\cdots$$

مثال ۲۵.۹ در یک کشتی برای ارسال پیام به کشتیهای مجاور ۴۸ پرچم هست: از هر یک از رنگهای قرمز، سفید، آبی و سیاه ۱۲ پرچم. دوازده‌تا از این پرچمها را روی دیرک قائمی برافراشته‌اند.

الف) در چند تا از پیامهایی که می‌توان ارسال کرد تعدادی زوج پرچم آبی و تعدادی فرد پرچم سیاه به کار می‌رود؟

در تابع مولدنمایی

$$f(x)=\left(۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots\right)^۲\left(۱+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}+\cdots\right)$$

همهٔ چنین پیامهایی که متشکل از n پرچم، $۱\leqslant n$، باشند در نظرگرفته شده است. دو عامل آخر در $f(x)$ پیامها را، به ترتیب، به تعدادی زوج پرچم آبی و تعدادی فرد پرچم سیاه محدود می‌کنند.

چون

$$f(x)=(e^x)^۲\left(\frac{e^x+e^{-x}}{۲}\right)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{۲}\right)=\left(\frac{۱}{۴}\right)(e^{۲x})(e^{۲x}-e^{-۲x})=\frac{۱}{۴}(e^{۴x}-۱)$$
$$=\frac{۱}{۴}\left(\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{(۴x)^i}{i!}-۱\right)=\left(\frac{۱}{۴}\right)\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{(۴x)^i}{i!}$$

ضریب $\frac{x^{12}}{12!}$ در $f(x)$، یعنی $(4^{12})(\frac{1}{4}) = 4^{11}$، تعداد پیامهایی است که با ۱۲ پرچم حاوی تعدادی زوج پرچم آبی و تعدادی فرد پرچم سیاه ساخته می‌شوند.

ب) در چند تا از پیامها حداقل سه پرچم سفید وجود دارد یا اصلاً پرچم سفید وجود ندارد؟ در این وضعیت تابع مولد نمایی

$$g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2$$

$$= e^x\left(e^x - x - \frac{x^2}{2!}\right)(e^x)^2 = e^{3x}\left(e^x - x - \frac{x^2}{2!}\right) = e^{4x} - xe^{3x} - (1/2)x^2e^{3x}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(4x)^i}{i!} - x\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(3x)^i}{i!} - (x^2/2)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(3x)^i}{i!}\right)$$

را به کار می‌گیریم. در این حالت، عامل $\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) = e^x - x - \frac{x^2}{2!}$ در $g(x)$ پیامها را به آنهایی محدود می‌کند که حاوی حداقل سه پرچم سفید از ۱۲ پرچم هستند یا اصلاً پرچم سفید ندارند.

تعداد پیامهای موردنظر برابر است با ضریب $\frac{x^{12}}{12!}$ در $g(x)$ وقتی جمعوندها را (که هرکدام مشتمل بر یک جمعبندی نامتناهی است) بررسی می‌کنیم، عبارتهای زیر را می‌یابیم.

یک) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(4x)^i}{i!}$. در اینجا جملهٔ $\frac{(4x)^{12}}{12!} = 4^{12}\left(\frac{x^{12}}{12!}\right)$ و ضریب $\frac{x^{12}}{12!}$ برابر با 4^{12} است؛

دو) $x\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(3x)^i}{i!}\right)$. اکنون می‌بینیم که برای به‌دست آوردن $\frac{x^{12}}{12!}$ باید جملهٔ

$$x\left[(3x)^{11}/11!\right] = 3^{11}(x^{12}/11!) = (12)(3^{11})(x^{12}/12!)$$

را در نظر بگیریم و در اینجا ضریب $x^{12}/12!$ برابر با $(12)(3^{11})$، است و

سه) $(x^2/2)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(3x)^i}{i!}\right)$. در مورد این آخرین جمعوند ملاحظه می‌کنیم که

$$(x^2/2)[(3x)^{10}/10!] = (1/2)(3^{10})(x^{12}/10!) = (1/2)(12)(11)(3^{10})(x^{12}/12!)$$

که در آن ضریب $x^{12}/12!$ برابر با $(1/2)(12)(11)(3^{10})$ است.

در نتیجه، تعداد پیامهای متشکل از ۱۲ پرچم که حاوی حداقل سه پرچم سفید هستند یا اصلاً پرچم سفید ندارند، برابر است با

$$4^{12} - 12(3^{11}) - (1/2)(12)(11)(3^{10}) = 10754218$$

آخرین مثال یادآور نتایجی از گذشته است.

مثال ۲۶.۹ شرکتی ۱۱ کارمند جدید استخدام می‌کند که هر یک از آنها باید در یکی از چهار بخش شرکت به

کارگماشته شود. در هر یک از چهار بخش شرکت باید حداقل یکی از کارمندان جدید به کارگرفته شود. به چند طریق می‌توان کارمندان جدید را در چهار بخش شرکت به کارگماشت؟

اگر بخشهای شرکت را A، B، C و D بنامیم، مسألهٔ عنوان شده هم‌ارز است با مسألهٔ شمارش دنباله‌هایی ۱۱ حرفی که در آنها هر یک از حروف A، B، C و D حداقل یک‌بار حضور داشته باشد. تابع مولد نمایی برای این ترتیبها عبارت است از

$$f(x) = \left(x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots\right)^۴ = (e^x - ۱)^۴ = e^{۴x} - ۴e^{۳x} + ۶e^{۲x} - ۴e^x + ۱$$

بنابراین، پاسخ مطلوب برابر است با ضریب $x^{۱۱}/۱۱!$ در $f(x)$:

$$۴^{۱۱} - ۴(۳^{۱۱}) + ۶(۲^{۱۱}) = \sum_{i=۰}^{۴} (-۱)^i \binom{۴}{i} (۴-i)^{۱۱}$$

این شکل جواب باید بعضی از مسائل شمارشی فصل ۵ (جلد اول) را در خاطر ما زنده کند. اگر واژه‌های خاص مبحث فعلی را کنار بگذاریم، می‌بینیم که می‌خواهیم با فرض $|X| = ۱۱$ و $|Y| = ۴$، تعداد توابع پوشای $g : X \to Y$ را بشماریم.

تمرینات ۴.۹

۱. تابع مولد نمایی هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $۱، -۱، ۱، -۱، ۱، -۱، \cdots$

ب) $۱، ۲، ۲^۲، ۲^۳، ۲^۴، \cdots$

پ) $۱، -a، a^۲، -a^۳، a^۴، \cdots، a \in \mathbf{R}$

ت) $۱، a^۲، a^۴، a^۶، \cdots، a \in \mathbf{R}$

ث) $a، a^۳، a^۵، a^۷، \cdots، a \in \mathbf{R}$

ج) $۰، ۱، ۲(۲)، ۳(۲^۲)، ۴(۲^۳)، \cdots$

۲. دنبالهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ هر یک از توابع مولد نمایی زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = ۳e^{۳x}$

ب) $f(x) = ۶e^{۵x} - ۳e^{۲x}$

پ) $f(x) = e^x + x^۲$

ت) $f(x) = e^{۲x} - ۳x^۳ + ۵x^۲ + ۷x$

ث) $f(x) = \frac{۱}{۱-x}$

ج) $f(x) = \frac{۳}{۱-۲x} + e^x$

۳. در هر یک از موارد زیر، تابع $f(x)$ تابع مولد نمایی برای دنبالهٔ $a_۰، a_۱، a_۲، \cdots$، و تابع $g(x)$ تابع مولد نمایی برای دنبالهٔ $b_۰، b_۱، b_۲، \cdots$ است. $g(x)$ را برحسب $f(x)$ بیان کنید درصورتی‌که

الف) $b_۳ = ۳$

$b_n = a_n$، $n \in \mathbf{N}$، $n \neq ۳$

ب) $a_n = ۵^n$، $n \in \mathbf{N}$

$b_۳ = -۱$

$b_n = a_n$، $n \in \mathbf{N}$، $n \neq ۳$

پ) $b_۱ = ۲$

$b_۲ = ۴$

$b_n = ۲a_n$، $n \in \mathbf{N}$، $n \neq ۱, ۲$

ت) $b_۱ = ۲$

$b_۲ = ۴$

$b_۳ = ۸$

$b_n = ۲a_n + ۳$، $n \in \mathbf{N}$، $n \neq ۱, ۲, ۳$

۴. الف) در مورد کشتی مثال ۹.۲۵، در چند تا از پیامها حداقل یک پرچم از هر رنگ به کار گرفته می‌شود؟ (این مسأله را با یک تابع مولد نمایی حل کنید.)
ب) مسألهٔ قسمت (الف) را به شکل دیگری عنوان کنید به‌طوری که در آن مفهوم تابع پوشا به کار گرفته شود.
پ) در مثال ۹.۲۵ چند پیام وجود دارد که در آنها تعداد کل پرچمهای آبی و سیاه زوج باشد؟

۵. مطلوب است تعیین تابع مولد نمایی برای تعداد راههای مرتب کردن n حرف، $n \geqslant 0$، برگزیده شده از حروف واژه‌های زیر:
الف) HAWAII ب) MISSISSIPPI پ) ISOMORPHISM

۶. در قسمت (ب) از تمرین ۵، مطلوب است تعیین تابع مولد نمایی درصورتی که هر ترتیب لزوماً شامل حداقل دو I باشد.

۷. در مثال ۹.۲۶ فرض کنید که شرکت ۲۵ کارمند جدید استخدام کند. مطلوب است تعیین تابع مولد نمایی برای تعداد راههای به کار گماردن این افراد در بخشهای شرکت به‌طوری که در هر بخش حداقل ۳ و حداکثر ۱۰ نفر از کارمندان جدید به کار گرفته شوند.

۸. اگر دنباله‌های a_0، a_1، a_2، $\cdots$ و b_0، b_1، b_2، $\cdots$ به ترتیب با توابع مولد نمایی $f(x)$ و $g(x)$ مفروض باشند، نشان دهید $h(x) = f(x)g(x)$ تابع مولد نمایی برای دنبالهٔ c_0، c_1، c_2، $\cdots$ است، که در آن به‌ازای هر $n \geqslant 0$، $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$.

۹. اگر دنباله‌ای ۲۰ رقمی مرکب از ارقام ۰، ۱ و ۲ به تصادف تولید شود، احتمال اینکه (الف) تعدادی زوج ۱ داشته باشد؛ (ب) تعدادی زوج ۱ و تعدادی زوج ۲ داشته باشد؛ (پ) تعدادی فرد ۰ داشته باشد؛ (ت) تعداد کل ۰ ها و ۱ها فرد باشد؛ (ث) تعداد کل ۰ها و ۱ها زوج باشد؛ چقدر است؟

۱۰. چند دنبالهٔ ۲۰ رقمی مرکب از ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ وجود دارد که در آنها (الف) حداقل یک ۲ و تعدادی فرد ۰ وجود داشته باشد؟ (ب) هیچ نمادی دقیقاً دوبار ظاهر نشده باشد؟ (پ) هیچ نمادی دقیقاً سه بار ظاهر نشده باشد؟ (ت) دقیقاً دو رقم ۳ وجود داشته باشد یا اصلاً ۳ وجود نداشته باشد؟

۱۱. قرار است بیست و پنج قرارداد (برای ساخت ۲۵ نوع قطعهٔ مختلف) با پنج شرکت c_1، c_2، $\cdots$، c_5 منعقد شود. مطلوب است تعیین تابع مولد نمایی برای تعداد راههای ممکن برای انعقاد این قراردادها با شرکتها به‌طوری که (الف) با شرکت c_1 حداقل پنج قرارداد و با هر یک از شرکتهای دیگر حداقل دو قرارداد منعقد شود؛ (ب) با هر شرکت حداقل یک قرارداد منعقد شود، تعداد قراردادهای منعقد شده با شرکت c_2 بیشتر از تعداد قراردادهای منعقد شده با شرکت c_1 باشد و با شرکت c_2 بیشتر از ۵ قرارداد منعقد نشود.

۵.۹ عملگر مجموعیابی

در این بند فنی را معرفی می‌کنیم که به کمک آن می‌توانیم از تابع مولد (معمولی) برای دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، $\cdots$ به تابع مولد برای دنبالهٔ a_0، $a_0 + a_1$، $a_0 + a_1 + a_2$، $\cdots$ برسیم.

با فرض $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$، تابع $f(x)/(1-x)$ را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} f(x)/(1-x) =& [a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots][1 + x + x^2 + x^3 + \cdots] \\ =& a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 \\ &+ (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

بنابراین، $f(x)/(1-x)$ دنبالهٔ مجموعهای a_0، a_0+a_1، $a_0+a_1+a_2$، $a_0+a_1+a_2+a_3$، $\cdots$ را تولید می‌کند. این دنباله همان پیچش دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، $\cdots$ و دنبالهٔ b_0، b_1، b_2، $\cdots$ است، که در آن به‌ازای $n \in \mathbf{N}$، $b_n = 1$.

در مثال بعدی می‌بینیم که این فن بسیار کارساز است.

مثال ۲۷.۹ فرمولی برای بیان $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ به‌صورت تابعی از n بیابید.

مانند بند ۲۰۹، کار را با $g(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ آغاز می‌کنیم. در این صورت،

$$(-1)(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{dg(x)}{dx} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

بنابراین، $x/(1-x)^2$ تابع مولد برای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، $\cdots$ است. با تکرار این فن می‌بینیم که

$$x\frac{d}{dx}\left[x\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)\right] = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots$$

بنابراین، $x(1+x)/(1-x)^3$ دنبالهٔ 0^2، 1^2، 2^2، 3^2، $\cdots$ را تولید می‌کند. ولی در بحث قبلی دیدیم که

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\frac{1}{(1-x)} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

تابع مولد برای دنبالهٔ 0^2، 0^2+1^2، $0^2+1^2+2^2$، $0^2+1^2+2^2+3^2$، $\cdots$ است. بنابراین، ضریب x^n در $x(1+x)/(1-x)^4$ برابر با $\sum_{i=0}^{n} i^2$ است. ولی می‌توانیم ضریب x^n در $x(1+x)/(1-x)^4$ را به‌صورت زیر نیز محاسبه کنیم:

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^4} = (x+x^2)(1-x)^{-4} = (x+x^2)\left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(-x) + \binom{-4}{2}(-x)^2 + \cdots\right]$$

که در آن ضریب x^n برابر است با

$$\begin{aligned}
\binom{-4}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{-4}{n-2}(-1)^{n-2} \\
&= (-1)^{n-1}\binom{4+(n-1)-1}{n-1}(-1)^{n-1} \\
&\quad + (-1)^{n-2}\binom{4+(n-2)-1}{n-2}(-1)^{n-2} \\
&= \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} + \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} \\
&= \frac{1}{6}[(n+2)(n+1)(n) + (n+1)(n)(n-1)] \\
&= \frac{1}{6}(n)(n+1)[(n+2)+(n-1)] = (n)(n+1)(2n+1)/6
\end{aligned}$$

تمرینات ۵.۹

۱. ایده‌های مطرح شده در مثال ۹.۲۷ را گسترش دهید و فرمول $\sum_{i=0}^{n} i^3 = [n(n+1)/2]^2$ را به‌دست آورید.

۲. الف) تابع مولد دنبالهٔ حاصل‌ضربهای $(-1) \times 0$، 0×1، 1×2، 2×3، 3×4، $\cdots$، $(i-1) \times i$، $\cdots$ را بیابید.

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) فرمولی برای $\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$ به‌دست آورید.

۳. فرض کنید $f(x)$ تابع مولد برای دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، $\cdots$ باشد. $(1-x)f(x)$ تابع مولد کدام دنباله است؟

۴. اگر $f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} a_n x^n$، تابع مولد برای دنبالهٔ a_0، $a_0 + a_1$، $a_1 + a_2$، $a_2 + a_3$، $\cdots$ کدام است؟ تابع مولد برای دنبالهٔ a_0، $a_0 + a_1$، $a_0 + a_1 + a_2$، $a_1 + a_2 + a_3$، $a_2 + a_3 + a_4$، $\cdots$ کدام است؟

۵. اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=0}^{n-1} a_i) x^n = x f(x)/(1-x)$.

۶. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ و $f(1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ عددی مشخص باشد. تحقیق کنید خارج قسمت $[f(x) - f(1)]/(x-1)$ تابع مولد دنبالهٔ s_0، s_1، s_2، $\cdots$ است، که در آن $s_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$.

۷. تابع مولد دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، $\cdots$ را، که در آن به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n = \sum_{i=0}^{n} (1/i!)$ بیابید.

۶.۹ خلاصه و مروری تاریخی

در اوایل قرن سیزدهم ریاضیدان ایتالیایی لئوناردو پیزایی[1] (۱۱۷۵ - ۱۲۵۰) با اثر خود به نام Liber Abaci اروپا را با نمادگذاری عربی برای ارقام و الگوریتمهای حساب آشنا کرد. همچنین، او در این کتاب برای نخستین بار مطالعه‌ای دربارهٔ دنبالهٔ ۰، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، $\cdots$ به عمل آورد. این دنباله را می‌توان به‌طور بازگشتی نیز با $F_0 = 0$، $F_1 = 1$، و به‌ازای هر $n \geqslant 0$، $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ تعریف کرد. چون لئوناردو فرزند بوناچیو[2] بود، این دنباله را اعداد فیبوناچی[3] می‌نامند. (Filius Bonaccii در زبان لاتین به معنی «پسر بوناچیو» است.)

اگر فرمول

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \qquad n \geqslant 0$$

را در نظر بگیریم می‌بینیم که $F_0 = 0$، $F_1 = 1$، $F_2 = 1$، $F_3 = 2$، $F_4 = 3$، $\cdots$. آری، این فرمول هر عدد فیبوناچی را به‌صورت تابعی از n به‌دست می‌دهد. (در اینجا جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی فیبوناچی را داریم. در فصل بعدی نکات بیشتری را دربارهٔ این موضوع خواهیم آموخت.) ولی این فرمول در سال ۱۷۱۸ به‌دست آمد. در این سال آبراهام دوموآور (۱۶۶۷ – ۱۷۵۴) این فرمول را از تابع مولد

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) x} - \frac{1}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) x} \right]$$

به‌دست آورد.

1. Leonardo of Pisa 2. Bonaccio 3. Fibonacci

لئونهارت اویلر (۱۷۰۷ – ۱۷۸۳) با تعمیم فنون موجود دربارهٔ توابع مولد، مطالعهٔ افرازهای اعداد صحیح را در اثر دو جلدی خود به نام مقدمه‌ای بر آنالیز بینهایتها[1]، که در ۱۷۴۸ منتشر شد، پیش برد. عبارت

$$P(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\cdots = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}$$

تابع مولد برای $p(0)$، $p(1)$، $p(2)$، $\cdots$ است، که در آن $p(n)$ تعداد افرازهای n به جمعوندهای مثبت را نشان می‌دهد و $p(0)$ را برابر با ۱ تعریف می‌کنیم.

لئونهارت اویلر (۱۷۰۷ ـ ۱۷۸۳)

در نیمهٔ دوم قرن هجدهم، در ارتباط با ایده‌هایی در نظریهٔ احتمال، به‌ویژه آنچه امروزه «تابع مولد گشتاور» نامیده می‌شود، توابع مولد بیشتر بسط یافتند. نخستین بررسی کامل دربارهٔ این مفاهیم را پییرسیمون دولاپلاس[2] (۱۷۴۹ – ۱۸۲۷)، دانشمند بزرگ، در اثر خود به نام نظریهٔ تحلیلی احتمالات، که در سال ۱۸۱۲ منتشر شد، عرضه کرد.

سرانجام، از نرمان مکلئود فررز[3] (۱۸۲۹ – ۱۹۰۳) یاد می‌کنیم که نمودار فررز را به افتخار او نامگذاری کرده‌اند.

مطالعهٔ توابع مولد معمولی و نمایی فن نیرومندی را برای وحدت بخشیدن به ایده‌های عرضه شده در فصلهای ۱، ۵ (جلد اول) و ۸ در اختیار ما گذاشت. با تعمیم تجربیات قبلی خود دربارهٔ چند جمله‌ایها به سریهای توانی و با تعمیم قضیهٔ دو جمله‌ای به $(1+x)^n$ برای حالاتی که n لزوماً مثبت یا حتی عددی صحیح نیست، ابزار لازم را برای محاسبهٔ ضرایب در این توابع مولد یافتیم. ارزش این کار بیش از تلاشی بود که به عمل آوردیم، زیرا در محاسباتی جبری که انجام می‌دهیم همهٔ فرایندهای گزینشی که می‌خواستیم در نظر بگیریم به حساب می‌آیند. همچنین،

1. Introductio in Analysin Infinitorum 2. Pierre-Simon de Laplace 3. Norman Mcleod Ferrers

ملاحظه کردیم که چگونه برخی از توابع مولد که در فصلهای قبلی دیده بودیم در مطالعهٔ افراز مطرح می‌شوند. مفهوم افراز اعداد صحیح مثبت ما را قادر می‌سازد تا خلاصهٔ بحثهای قبلی خود را دربارهٔ توزیعها که در جدولهای ۸۰۱ و ۱۳۰۵ (جلد اول) یادداشت کرده بودیم کامل کنیم. اکنون می‌توانیم توزیعهای m شیء بین n $(n \leqslant m)$ ظرف را برای حالتهایی که نه اشیا متمایزند و نه ظرفها مورد بررسی قرار دهیم. درایه‌های سطرهای دوم و چهارم در جدول ۴۰۹ این حالتها را نشان می‌دهند. نماد $p(m,n)$ در درایهٔ آخرین ستون این سطرها برای نشان دادن تعداد افرازهای عدد صحیح مثبت m به دقیقاً n جمعوند (مثبت) به کار رفته است. (در تمرین تکمیلی شمارهٔ ۳ در فصل بعدی این مفهوم را بیشتر بررسی می‌کنیم.) توزیعهای سطرهای اول و سوم این جدول در جدول ۱۳۰۵ (جلد اول) نیز فهرست شده بودند. این سطرها را در اینجا برای مقایسه و کامل بودن بحث تکرار کرده‌ایم.

جدول ۴.۹

اشیا متمایزند	ظرفها متمایزند	بعضی از ظرفها ممکن است خالی باشند	تعداد توزیعها
نه	بله	بله	$\binom{n+m-1}{m}$
نه	نه	بله	$p(m)$ (۱) به‌ازای $n=m$ $p(m,1)+p(m,2)+\cdots+p(m,n)$ (۲) به‌ازای $n<m$
نه	بله	نه	$\binom{n+(m-n)-1}{(m-n)}=\binom{m-1}{m-n}=\binom{m-1}{n-1}$
نه	نه	نه	$p(m,n)$

خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند برای مطالعهٔ مطالب مشابه آنچه در این فصل عرضه شد به فصل ۲ ازکتاب سی. ال. لیو [۳] و فصل ۶ ازکتاب ا. تاکر [۷] مراجعه کند. کتاب جی. ریوردان [۵] مطالب مفصلی دربارهٔ توابع مولد معمولی و نمایی دارد. مقالهٔ توصیفی جالبی دربارهٔ توابع مولد، به قلم ریچارد پی. استنلی[1]، در مجموعه‌ای از مقالات زیر نظر جی. سی. روتا[۶] آورده شده است. موضوع کتاب اچ.اس. ویلف[2] [۸] دربارهٔ توابع مولد و بعضی از طرق به‌کارگیری آنها در ریاضیات گسسته است. این اثر این نکته را نیز آشکار می‌سازد که چگونه توابع مولد پلی بین ریاضیات گسسته و آنالیز پیوسته (به‌ویژه نظریهٔ توابع با متغیرهای مختلط) برقرار می‌کنند.

خواننده‌ای که علاقه‌مند به فراگرفتن مطالب بیشتری دربارهٔ افرازهاست باید به فصل ۱۰ ازکتاب آی.نیون و اچ زوکرمن [۴] مراجعه کند.

سرانجام، می‌توان مطالب بسیار زیادی دربارهٔ تابع مولد گشتاور و کاربرد آن در احتمال را در فصل ۳ ازکتاب اچ.جی. لارسن[3] [۲] و در فصل ۱۱ از اثر جامع دابلیو. فلر[4] [۱] یافت.

مراجع

1. Feller, William, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, 3rd ed. New York: Wiley, 1968.
2. Larson, Harold J. *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference*, 2nd ed. New York: Wiley, 1969.

1. Richard P. Stanley 2. H. S. Wilf 3. H. J. Larson 4. W. Feller

3. Liu, C. L. *Introduction to Combinatorial Mathematics.* New York: McGraw-Hill, 1968.
4. Niven, Ivan, and Zuckerman, Herbert. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. New York: Wiley, 1980.
5. Riordan, John. *An Introduction to Combinatorial Analysis.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1980. (Originally published in 1958 by John Wiley & Sons.)
6. Rota. Gian-Carlo, ed. *Studies in Combinatorics*, Studies in Mathematics, Vol. 17. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1978.
7. Tucker, Alan. *Applied Combinatorics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1984.
8. Wilf, Herbert S. *Generatingfunctionology.* San Diego, Calif.: Academic Press, 1990.

تمرینات تکمیلی

۱. تابع مولد هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) ۷، ۸، ۹، ۱۰، ...

ب) ۱، a، $a^{۲}$، $a^{۳}$، $a^{۴}$، ...، $a \in \mathbf{R}$

پ) ۱، $(۱+a)$، $(۱+a)^{۲}$، $(۱+a)^{۳}$، ...، $a \in \mathbf{R}$

ت) ۲، $۱+a$، $۱+a^{۲}$، $۱+a^{۳}$، ...، $a \in \mathbf{R}$

۲. ضریب $x^{۸۳}$ را در

$$f(x) = (x^{۵} + x^{۸} + x^{۱۱} + x^{۱۴} + x^{۱۷})^{۱۰}$$

بیابید.

۳. افسری باید ۴۰ فشنگ (۲۰ تا برای تفنگ و ۲۰ تا برای سلاح کمری) را بین چهار درجه‌دار چنان توزیع کند که هر درجه‌دار از هر نوع فشنگ حداقل دو و حداکثر هفت تا دریافت کند. افسر به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۴. مطلوب است تعیین تابع مولد برای تعداد راههای افراز عدد صحیح مثبت n به جمعوندهای صحیح مثبت به‌طوری که هر جمعوند تعدادی فرد از دفعات ظاهر شود یا اصلاً ظاهر نشود.

۵. به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^{+}$، نشان دهید تعداد افرازهایی از n که در آنها هیچ جمعوند زوجی تکرار نمی‌شود (جمعوندهای فرد ممکن است تکرار شوند) برابر است با تعداد افرازهایی از n که در آنها هیچ جمعوندی بیشتر از سه بار حضور ندارد.

۶. در چند شمارهٔ تلفن ۱۰ رقمی فقط ارقام ۱، ۳، ۵ و ۷ به کار رفته است و در آنها هر یک از این ارقام یا حداقل دوبار به کار رفته یا اصلاً به کار نرفته است؟

۷. الف) تابع $g(x) = (۱-۲x)^{-۵/۲}$ تابع مولد نمایی برای کدام دنباله از اعداد است؟

ب) a و b را چنان تعیین کنید که $(۱-ax)^{b}$ تابع مولد نمایی دنبالهٔ ۱، ۷، ۷×۱۱، $۷ \times ۱۱ \times ۱۵$، ... باشد.

۸. به‌ازای اعداد صحیح $n, k \geqslant ۰$ فرض کنیم

- $p_{۱}$ تعداد افرازهای n باشد.
- $p_{۲}$ تعداد افرازهایی از $۲n+k$ باشد، که در آنها $n+k$ بزرگترین جمعوند است.
- $p_{۳}$ تعداد افرازهایی از $۲n+k$ باشد که دقیقاً $n+k$ جمعوند دارند.

با استفاده از مفهوم نمودار فررز، ثابت کنید $p_{۱} = p_{۲}$ و $p_{۲} = p_{۳}$ و بنابراین، نتیجه بگیرید که به‌ازای هر k

تعداد افرازهایی از $2n+k$ که دقیقاً $n+k$ جمعوند دارند یکسان است.

۹. مجموع زیر را که در آن $n \in \mathbf{Z}^+$ ساده کنید:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

(راهنمایی: می‌توانید کار را با قضیهٔ دوجمله‌ای آغاز کنید.)

۱۰. مطلوب است تعیین تابع مولد برای تعداد افرازهایی از $n \in \mathbf{N}$ که در آنها ۱ حداکثر یک بار، ۲ حداکثر دوبار، ۳ حداکثر ۳ بار و به‌طورکلی، به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$، k حداکثر k بار حضور دارد.

۱۱. ۱۲ ظرف داریم.

الف) به چند طریق می‌توان ۲۰ مهرهٔ یکسان را بین این ظرفها چنان توزیع کرد که به هر ظرف حداقل یک مهره برسد؟

ب) اگر این ظرفها را در دو ردیف شش‌تایی قرار دهیم، احتمال اینکه توزیعی از قسمت (الف) ۱۰ تا از مهره‌ها را در شش ظرف ردیف اول و ۱۰ تای دیگر را در شش ظرف دیگر بگذارد چقدر است؟

۱۲. فرض کنیم S مجموعه‌ای حاوی n شیءِ متمایز باشد. تحقیق کنید که $e^x/(1-x)^k$ تابع مولد نمایی برای تعداد طرق انتخاب m شیء، $0 \leq m \leq n$، از اشیای S و توزیع این اشیا بین k ظرف متمایز است درصورتی‌که ترتیب اشیا در هر ظرف مهم باشد.

۱۰

روابط بازگشتی

در فصلهای قبلی این کتاب با چند تعریف و ساختار بازگشتی آشنا شدید. در تعریفهای ۵.۱۹۰، ۶.۰۷، ۶.۱۲۰، و ۹.۰۷ پس از اثبات اینکه مفهومی به‌ازای مقداری آغازی برای n، مانند ۰ یا ۱، برقرار است، مفهومی در سطح $n+۱$ (یا با اندازهٔ $n+۱$) را از مفهوم مشابهی در سطح n (یا با اندازهٔ n) به‌دست آوردیم. در بند ۴.۲۰ که اعداد فیبوناچی و اعداد لوکاس را بررسی کردیم دیدیم که نتایج سطح $n+۱$ وابسته به نتایج سطوح n و $n-۱$ هستند؛ و در هر یک از این دنباله‌ها پایه از نخستین دو عدد صحیح (همان دنباله) تشکیل شده بود. اکنون در موقعیت مشابهی قرار داریم. در اینجا به بررسی توابعی مانند $a(n)$ که ترجیح می‌دهیم آنها را به‌صورت a_n (به‌ازای $n \geqslant ۰$) بنویسیم، می‌پردازیم که در آنها a_n به بعضی از جمله‌های قبلی $a_{n-۱}$، $a_{n-۲}$، $\cdots$، $a_۱$، $a_۰$ بستگی دارد. این مطالعه در مورد روابط بازگشتی یا معادلات تفاضلی همتای گسستهٔ ایده‌هایی است که در معادلات دیفرانسیل معمولی به کار برده می‌شوند.

اینجا موضوع را بدون به‌کارگیری ایده‌هایی از معادلات دیفرانسیل بسط می‌دهیم و کار خود را با مفهوم تصاعد هندسی آغاز می‌کنیم. به‌تدریج که مفاهیم بیشتری را بسط می‌دهیم برخی از کاربردهای بسیار زیادی که این موضوع را چنین مهم ساخته‌اند خواهیم دید.

۱.۱۰ رابطهٔ بازگشتی خطی مرتبهٔ اول

تصاعد هندسی دنباله‌ای نامتناهی از اعداد، نظیر ۵، ۱۵، ۴۵، ۱۳۵، ... است که در آن خارج‌قسمت هر جمله، غیر از نخستین جمله، بر جملهٔ بلافاصله قبل از آن عددی ثابت است؛ این عدد ثابت را نسبت مشترک (قدرنسبت) می‌نامیم. در مثالی که ذکر کردیم نسبت مشترک ۳ است: $۳(۵) = ۱۵$، $۳(۱۵) = ۴۵$، ... . اگر $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$، ... تصاعدی هندسی باشد، در این صورت، $r = \cdots = \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \cdots = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a_۱}{a_۰}$، که r همان قدرنسبت مشترک است. در تصاعد هندسی خاصی که ذکر کردیم، به‌ازای هر $n \geqslant ۰$ داریم $a_{n+۱} = ۳a_n$.

رابطهٔ بازگشتی $a_{n+۱} = ۳a_n$، $n \geqslant ۰$، تصاعد هندسی یکتایی را تعریف نمی‌کند. دنبالهٔ ۷، ۲۱، ۶۳، ۱۸۹، ... نیز در این رابطه صدق می‌کند. برای آنکه دقیقاً دنبالهٔ خاص مذکور را با $a_{n+۱} = ۳a_n$ توصیف کنیم باید یکی از جمله‌های دنباله را نیز معرفی کنیم. بنابراین،

$$a_{n+۱} = ۳a_n ،\ n \geqslant ۰ \text{ و به‌ازای هر } ،\ a_۰ = ۵$$

دنبالهٔ ۵، ۱۵، ۴۵، ... را به‌طور یکتا تعریف می‌کند، درحالی‌که

$$a_{n+۱} = ۳a_n ،\ n \geqslant ۰ \text{ و به‌ازای هر } ،\ a_۱ = ۲۱$$

دنبالهٔ ۷، ۲۱، ۶۳، ... را به‌عنوان تصاعد هندسی مورد مطالعه مشخص می‌کند.

معادلهٔ $a_{n+1} = 3a_n$، $n \geqslant 0$، رابطه‌ای بازگشتی است زیرا مقدار a_{n+1} (جملهٔ فعلی) به a_n (جملهٔ قبلی) وابسته است. چون a_{n+1} فقط به جملهٔ بلافاصله قبل از خود وابسته است، این رابطه را رابطهٔ مرتبهٔ اول می‌نامیم. به‌ویژه، این رابطه، رابطهٔ بازگشتی همگن خطی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت است. (دربارهٔ این مفاهیم بعداً بیشتر سخن خواهیم گفت.) صورت کلی چنین معادله‌ای را می‌توان به‌صورت $a_{n+1} = da_n$، $n \geqslant 0$، نوشت که در آن d عددی ثابت است.

مقادیری مانند a_0 یا a_1 را که همراه با روابط بازگشتی داده می‌شوند، شرایط مرزی می‌نامند. عبارت $a_0 = A$ را، که در آن A مقداری ثابت است، شرط آغازی نیز می‌نامند. مثالهایی که ذکر کردیم اهمیت شرایط مرزی را در تعیین پاسخ یکتا برای رابطهٔ بازگشتی نشان می‌دهند.

اکنون مجدداً به رابطهٔ بازگشتی

$$a_{n+1} = 3a_n \text{، } n \geqslant 0 \text{ و به‌ازای هر } \text{، } a_0 = 5$$

توجه می‌کنیم. چهار جملهٔ نخست این دنباله عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} a_0 &= 5 \\ a_1 &= 3a_0 = 3(5) \\ a_2 &= 3a_1 = 3(3a_0) = 3^2(5) \end{aligned}$$

و

$$a_3 = 3a_2 = 3(3^2(5)) = 3^3(5)$$

این نتایج فرمول $a_n = 5(3^n)$ را به‌ازای هر $n \geqslant 0$ القا می‌کنند. این را جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی مفروض می‌نامند. در جواب عمومی، مقدار a_n تابعی از n است و، درصورتی‌که a_0 مشخص باشد، دیگر اثری از وابستگی به جمله‌های قبلی دنباله وجود ندارد. مثلاً برای محاسبهٔ a_{10} فقط می‌نویسیم $5(3^{10}) = 295245$؛ برای به‌دست آوردن a_{10} لزومی ندارد که همهٔ جمله‌ها را از a_0 تا a_9 محاسبه کنیم.

این مثال ما را به نتیجهٔ زیر هدایت می‌کند. (این نتیجه را می‌توان با استقرای ریاضی ثابت کرد.)

> جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی
> $a_{n+1} = da_n$ به‌ازای $n \geqslant 0$، d ثابت و $a_0 = A$ یکتاست و عبارت است از
>
> $$a_n = Ad^n, \qquad n \geqslant 0$$

بنابراین، جواب $a_n = Ad^n$، $n \geqslant 0$، تابعی گسسته را تعریف می‌کند که قلمرو آن $\mathbf{N}$، یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است.

مثال ۱.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n = 7a_{n-1}$ را، که در آن $n \geqslant 1$ و $a_2 = 98$، حل کنید.

این رابطه چیزی نیست جز صورت دیگری از رابطهٔ $a_{n+1} = 7a_n$ به‌ازای $n \geqslant 0$ و $a_2 = 98$. بنابراین، جواب عمومی آن به‌صورت $a_n = a_0(7^n)$ است. چون $a_2 = 98 = a_0(7^2)$، نتیجه می‌گیریم که $a_0 = 2$ و

$a_n = ۲(۷^n)$، $n \geqslant ۰$، جواب یکتای رابطهٔ بازگشتی مفروض است.

مثال ۲.۱۰ در بانکی به حسابهای پس‌انداز بهرهٔ (سالانهٔ) ۶٪ تعلق می‌گیرد و این بهره ماهانه به حساب پس‌انداز واریز می‌شود. شخصی روز اول فروردین در این بانک حساب پس‌اندازی به مبلغ ۱۰۰۰ تومان باز می‌کند. ارزش سپردهٔ این شخص پس از یک سال چقدر است؟

نرخ بهرهٔ سالانه ۶٪ است، پس نرخ بهرهٔ ماهانه $\frac{۶\%}{۱۲} = ۰/۵\% = ۰/۰۰۵$ است. به‌ازای $۰ \leqslant n \leqslant ۱۲$، فرض کنیم p_n مبلغ سپردهٔ شخص مذکور را در پایان n ماه نشان دهد. در این صورت، $p_{n+۱} = p_n + ۰/۰۰۵p_n$، که درآن $۰/۰۰۵p_n$، $۰ \leqslant n \leqslant ۱۱$، بهره‌ای است که در طول ماه $(n+۱)$ام به p_n تعلق گرفته است و $p_۰ = ۱۰۰۰$.

رابطهٔ $p_{n+۱} = (۱/۰۰۵)p_n$، $p_۰ = ۱۰۰۰$، دارای جواب عمومی

$$p_n = p_۰(۱/۰۰۵)^n = ۱۰۰۰(۱/۰۰۵)^n$$

است. در نتیجه، ارزش سپردهٔ این شخص پس از یک سال $۱۰۶۱/۶۸ = ۱۰۰۰(۱/۰۰۵)^{۱۲}$ تومان است.

رابطهٔ بازگشتی $a_{n+۱} - da_n = ۰$ را خطی می‌نامیم زیرا توان هر یک از جمله‌های اندیسدار ۱ است (مانند x و y در معادلهٔ خط در صفحه). گاهی می‌توان رابطهٔ بازگشتی غیرخطی را با جایگذاری جبری مناسب به رابطهٔ بازگشتی خطی تبدیل کرد.

مثال ۳.۱۰ درصورتی‌که $a_{n+۱}^۲ = ۵a_n^۲$ که در آن به‌ازای هر $n \geqslant ۰$، $a_n > ۰$ و $a_۰ = ۲$، $a_{۱۲}$ را تعیین کنید.

گرچه این رابطهٔ بازگشتی نسبت به a_n خطی نیست، اگر قرار دهیم $b_n = a_n^۲$، در این صورت رابطهٔ جدید $b_{n+۱} = ۵b_n$ به‌ازای $n \geqslant ۰$، و $b_۰ = ۴$، رابطه‌ای خطی و جواب آن $b_n = ۴ \cdot ۵^n$ است. بنابراین، به‌ازای $n \geqslant ۰$، $a_n = ۲(\sqrt{۵})^n$ و $a_{۱۲} = ۳۱۲۵۰$.

صورت کلی رابطهٔ بازگشتی خطی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت $a_{n+۱} + ca_n = f(n)$، $n \geqslant ۰$، است که در آن c ثابت و $f(n)$ تابعی روی $\mathbf{N}$، یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است.

وقتی به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $f(n) = ۰$، رابطه را همگن می‌نامند؛ در غیر این صورت، رابطه ناهمگن نامیده می‌شود. تا اینجا فقط با رابطه‌های همگن سر و کار داشته‌ایم.

اکنون به حل رابطه‌ای ناهمگن می‌پردازیم. بعداً فنون خاصی را معرفی خواهیم کرد که برای حل کردن هر رابطهٔ بازگشتی همگن خطی با ضرایب ثابت به‌کار می‌آیند. ولی هنگامی‌که با مسأله‌ای ناهمگن سروکار داریم فنون مختلف سودمند زیادی وجود دارند، گرچه هیچ یک از آنها این امکان را فراهم نمی‌آورد که بتوانیم هر مسأله‌ای را حل کنیم. با وجود این، اگر بتوانیم بعضی از الگوهای تجارب گذشتهٔ خود را به‌خاطر بسپریم احتمال موفقیت در حل مسائل بیشتر است.

مثال ۴.۱۰ احتمالاً متداولترین، ولی نه مؤثرترین، روش مرتب‌سازی داده‌های عددی فنی است که مرتب‌سازی حبابی نام دارد. در اینجا ورودی آرایه‌ای مرکب از n عدد حقیقی $A[۱]$، $A[۲]$، $\cdots$ ، $A[n]$ است که باید به ترتیب افزایشی چیده شوند.

قطعه برنامهٔ پاسکال نشان داده شده در شکل ۱۰٫۱ یک پیاده‌سازی برای این نوع الگوریتم است. متغیر صحیح i شمارندهٔ حلقهٔ For خارجی است و متغیر صحیح j شمارندهٔ حلقهٔ For داخلی است. سرانجام، متغیر حقیقی temp برای ذخیره‌سازی لازم هنگام تعویضها به کار گرفته می‌شود.

```
Begin
  For i := 1 to n-1 do
    For j := n downto i+1 do
      If A[j] < A[j-1] then
        Begin
          temp := A[j-1];
          A[j-1] := A[j];
          A[j] := temp
        End
End;
```

شکل ۱۰٫۱

آخرین درایهٔ آرایهٔ مفروض، یعنی $A[n]$، را با جملهٔ بلافاصله قبل از آن، یعنی $A[n-۱]$، مقایسه می‌کنیم. اگر $A[n] < A[n-۱]$، جای مقادیر ذخیره شده در $A[n-۱]$ و $A[n]$ را با هم عوض می‌کنیم. اکنون در هر صورت داریم $A[n-۱] \leqslant A[n]$. سپس $A[n-۱]$ را با جملهٔ بلافاصله قبل از آن، یعنی $A[n-۲]$، مقایسه می‌کنیم. اگر $A[n-۱] < A[n-۲]$، مقادیر ذخیره شده در این دو درایه را با هم عوض می‌کنیم. این فرایند را ادامه می‌دهیم. بعد از $n-۱$ مقایسه، کوچکترین عدد این فهرست در $A[۱]$ ذخیره می‌شود. سپس این فرایند را برای $n-۱$ عددی که اینک در آرایهٔ (کوچکتر) $A[۲]$، $A[۳]$، $\cdots$، $A[n]$ ذخیره شده‌اند تکرار می‌کنیم. به این ترتیب، هر بار که این فرایند انجام می‌گیرد (متغیر i نشان می‌دهد که فرایند چند بار انجام گرفته است)، کوچکترین عدد موجود در فهرست باقیمانده همچون «حباب» به بالای فهرست می‌آید.

برای نشان دادن اینکه چگونه الگوریتم مرتب‌سازی حبابی در شکل ۱۰٫۱ دنبالهٔ مفروضی را به‌ترتیب افزایشی می‌چیند، مثال کوچکی با فرض $n = ۵$ و $A[۱] = ۷$، $A[۲] = ۹$، $A[۳] = ۲$، $A[۴] = ۵$ و $A[۵] = ۸$ در شکل ۱۰٫۲ عرضه شده است. در این شکل هر مقایسه‌ای که منجر به تعویض شود با نماد $\Big($ نشان داده شده است. نماد $\{$ مقایسه‌ای را نشان می‌دهد که تعویضی در پی ندارد.

هنگام اِعمال این الگوریتم به ورودی (آرایه‌ای) با اندازهٔ $n \geqslant ۱$، برای تعیین تابع پیچیدگی زمانی، $f(n)$، تعداد کل مقایسه‌هایی را می‌شمریم که برای مرتب‌سازی n عدد مفروض به ترتیب افزایشی لازم‌اند.

اگر a_n تعداد مقایسه‌های لازم برای این‌گونه مرتب‌سازی این n عدد را به این ترتیب نشان دهد، در این صورت رابطهٔ بازگشتی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$a_n = a_{n-۱} + (n-۱) \text{ ، } n \geqslant ۲ \text{ و به‌ازای هر } \text{ ، } a_۱ = ۰$$

این رابطه به شیوهٔ زیر به‌دست می‌آید. اگر فهرستی از n عدد مفروض باشد، $n-۱$ مقایسه انجام می‌دهیم تا کوچکترین عدد در آغاز فهرست قرار گیرد. در این صورت، فهرست باقی‌مانده که حاوی $n-۱$ عدد است به $a_{n-۱}$ مقایسه نیاز دارد تا کاملاً مرتب شود.

این رابطه یک رابطهٔ خطی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت است که جملهٔ $n-۱$ آن را ناهمگن کرده است. چون هیچ

i = 1									
A[1]	7		7		7		7	j = 2	2
A[2]	9		9		9	j = 3	2		7
A[3]	2		2	j = 4	2		9		9
A[4]	5	j = 5	5		5		5		5
A[5]	8		8		8		8		8

چهار مقایسه و دو تعویض

i = 2							
A[1]	2		2		2		2
A[2]	7		7		7	j = 3	5
A[3]	9		9	j = 4	5		7
A[4]	5	j = 5	5		9		9
A[5]	8		8		8		8

سه مقایسه و دو تعویض

i = 3					
A[1]	2		2		2
A[2]	5		5		5
A[3]	7		7	j = 4	7
A[4]	9	j = 5	8		8
A[5]	8		9		9

دو مقایسه و یک تعویض

i = 4		
A[1]	2	
A[2]	5	
A[3]	7	
A[4]	8	j = 5
A[5]	9	

یک مقایسه، بدون تعویض

شکل ۲.۱۰

فنی برای حل چنین رابطه‌ای در اختیار نداریم، چند جملهٔ آن را فهرست می‌کنیم تا الگوی آشنایی به‌دست آوریم

$$\begin{aligned}
a_{۱} &= ۰\\
a_{۲} &= a_{۱} + (۲ - ۱) = ۱\\
a_{۳} &= a_{۲} + (۳ - ۱) = ۱ + ۲\\
a_{۴} &= a_{۳} + (۴ - ۱) = ۱ + ۲ + ۳\\
\cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

به‌طور کلی، $a_n = ۱ + ۲ + \cdots + (n - ۱) = [(n - ۱)n]/۲ = (n^۲ - n)/۲$.

در نتیجه، تابع پیچیدگی زمانی برای مرتب‌سازی حبابی تابع $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ با $f(n) = a_n = (n^۲ - n)/۲$ است. بنابراین، به‌عنوان معیاری از مدت زمان اجرای این الگوریتم، می‌نویسیم $f \in O(n^۲)$. پس می‌گوییم مرتب‌سازی حبابی به $O(n^۲)$ مقایسه نیاز دارد.

مثال ۵.۱۰ در قسمت (ب) از مثال ۹.۶ در جستجوی تابع مولدی برای دنبالهٔ ۰، ۲، ۶، ۱۲، ۲۰، ۳۰، ۴۲، $\ldots$ بودیم و یافتن جواب مطلوب به این بستگی داشت که تشخیص دهیم به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $a_n = n^۲ + n$. اگر نتوانیم این رابطه را تشخیص دهیم، شاید بتوانیم با بررسی دنبالهٔ مفروض الگوی دیگری را تعیین کنیم که ما را یاری دهد.

در اینجا $a_۰ = ۰$، $a_۱ = ۲$، $a_۲ = ۶$، $a_۳ = ۱۲$، $a_۴ = ۲۰$، $a_۵ = ۳۰$، و $a_۶ = ۴۲$

$$\begin{aligned}
a_۱ - a_۰ &= ۲ & \qquad a_۴ - a_۳ &= ۸\\
a_۲ - a_۱ &= ۴ & \qquad a_۵ - a_۴ &= ۱۰\\
a_۳ - a_۲ &= ۶ & \qquad a_۶ - a_۵ &= ۱۲
\end{aligned}$$

این محاسبات رابطهٔ بازگشتی

$$a_۰ = ۰ \text{، و به‌ازای هر } n \geqslant ۱ \text{، } a_n - a_{n-۱} = ۲n$$

را القا می‌کنند. برای حل این رابطه، روشی در پیش می‌گیریم که با روش به کار رفته در مثال ۴.۱۰ اندکی تفاوت دارد. n معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
a_۱ - a_۰ &= ۲\\
a_۲ - a_۱ &= ۴\\
a_۳ - a_۲ &= ۶\\
\vdots \quad \vdots \quad & \vdots\\
a_n - a_{n-۱} &= ۲n
\end{aligned}$$

وقتی این معادلات را با هم جمع کنیم، مجموع جمله‌های طرف چپ شامل a_i و $-a_i$ به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant n - ۱$ خواهد بود. بنابراین، به‌دست می‌آوریم

$$a_n - a_۰ = ۲ + ۴ + ۶ + \cdots + ۲n = ۲(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n)$$
$$= ۲[n(n+۱)/۲] = n^۲ + n$$

چون $a_۰ = ۰$، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $a_n = n^۲ + n$. یعنی همان فرمولی که قبلاً در قسمت (ب) از مثال ۶.۰۹ یافته بودیم.

اکنون رابطهٔ بازگشتی‌ای را بررسی می‌کنیم که ضریب متغیری دارد.

مثال ۶.۱۰ رابطهٔ $a_n = n \cdot a_{n-۱}$ را، که در آن $n \geqslant ۱$ و $a_۰ = ۱$، حل کنید.

اگر نخستین پنج جمله‌ای را که این رابطه تعریف می‌کند بنویسیم، خواهیم داشت

$$a_۰ = ۱ \qquad a_۳ = ۳ \cdot a_۲ = ۳ \cdot ۲ \cdot ۱$$
$$a_۱ = ۱ \cdot a_۰ = ۱ \qquad a_۴ = ۴ \cdot a_۳ = ۴ \cdot ۳ \cdot ۲ \cdot ۱$$
$$a_۲ = ۲ \cdot a_۱ = ۲ \cdot ۱$$

بنابراین، $a_n = n!$ و جواب مطلوب، تابع گسستهٔ a_n، $n \geqslant ۰$، است که تعداد جایگشتهای n شیئ را به‌دست می‌دهد.

اکنون که موضوع جایگشتها مطرح شده است، الگوریتمی بازگشتی را برای تولید جایگشتهای $\{۱, ۲, ۳, \cdots, n-۱, n\}$ با استفاده از جایگشتهای $\{۱, ۲, ۳, \cdots, n-۱\}$ بررسی می‌کنیم[۱].

مجموعهٔ $\{۱\}$ فقط یک جایگشت دارد. با بررسی جایگشتهای $\{۱, ۲\}$، یعنی

۱ ۲
۲ ۱

می‌بینیم که بعد از دو بار نوشتن جایگشتهای ۱، اگر ۲ را در دو طرف ۱ بگذاریم جایگشتهای فهرست شده را به‌دست می‌آوریم. در هر یک از این جایگشتها سه موضع برای نوشتن عدد ۳ داریم: پیش از دو عدد، بین دو عدد و بعد از دو عدد. اگر هر یک از این جایگشتها را سه بار بنویسیم و در هر یک ۳ را در یکی از این مواضع قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم.

۱ ۲ ۳
۱ ۳ ۲
۳ ۱ ۲
۳ ۲ ۱
۲ ۳ ۱
۲ ۱ ۳

در اینجا می‌بینیم که نخستین جایگشت ۱۲۳ است و می‌بینیم که هر یک از دو جایگشت بعدی با تعویض

۱. از اینجا تا پایان این بند مطالبی اضافی است که در آنها ایدهٔ بازگشت را به‌کار گرفته‌ایم. این مطالب ربطی به حل رابطه‌های بازگشتی ندارد و حذف آن لطمه‌ای به پیوستگی مطالب نمی‌زند.

جدول ۱۰.۱۰

(۱)		۱		۲		۳	۴
(۲)		۱		۲	۴	۳	
(۳)		۱	۴	۲		۳	
(۴)	۴	۱		۲		۳	
(۵)	۴	۱		۳		۲	
(۶)		۱	۴	۳		۲	
(۷)		۱		۳	۴	۲	
(۸)		۱		۳		۲	۴
(۹)		۳		۱		۲	۴
(۱۰)		۳		۱	۴	۲	
(۱۱)		۳	۴	۱		۲	
...		...		...		...	
(۱۵)		۳		۲	۴	۱	
(۱۶)		۳		۲		۱	۴
(۱۷)		۲		۳		۱	۴
...		...		...		...	
(۲۲)		۲	۴	۱		۳	
(۲۳)		۲		۱	۴	۳	
(۲۴)		۲		۱		۴	۴

جای دو عدد در جایگشت بلافاصله قبل از آن، یعنی ۳ و عدد صحیحی که در سمت چپ آن قرار دارد، به‌دست می‌آید. وقتی ۳ به طرف چپ جایگشت می‌رسد، اعداد باقیمانده را مطابق با فهرست جایگشتهای $\{۱,۲\}$ جابه‌جا می‌کنیم. (این عمل صورتی بازگشتی به این روش می‌دهد.) سپس متوالیاً جای ۳ را با عدد صحیح سمت راست آن عوض می‌کنیم تا اینکه ۳ به طرف راست جایگشت برسد. ملاحظه می‌کنیم که اگر جای ۱ و ۲ را در آخرین جایگشت عوض کنیم، ۱۲۳ را به‌دست می‌آوریم که همان جایگشتی است که در آغاز نوشتیم.

برای $S = \{۱,۲,۳,۴\}$، نخست هر یک از شش جایگشت $\{۱,۲,۳\}$ را چهار بار می‌نویسیم. کار را با جایگشت ۱۲۳۴ آغاز می‌کنیم و همان‌طور که در جدول ۱۰.۱۰ دیده می‌شود، در ۲۳ جایگشت دیگر، ۴ را در همهٔ مواضع ممکن جای می‌دهیم. در اینجا تنها یک ایدهٔ جدید را مطرح کردیم: وقتی از جایگشت (۵) به (۶)، به (۷) و به (۸) می‌رویم، جای ۴ را با عدد صحیح سمت راست آن عوض می‌کنیم. در جایگشت (۸)، که ۴ به‌طرف راست می‌رسد، جای ۴ را ثابت نگاه می‌داریم و به‌جای جایگشت ۳۱۲، جایگشت ۱۳۲ را از فهرست جایگشتهای $\{۱,۲,۳\}$ قرار می‌دهیم تا جایگشت (۹) را به‌دست آوریم. پس از آن، کار را مانند هشت جایگشت نخست ادامه می‌دهیم تا به جایگشت (۱۶) برسیم، که در آن بازهم ۴ در طرف راست قرار دارد. سپس ۲۳۱ را به‌جای ۳۲۱ می‌گذاریم و قرار دادن ۴ را بین ارقام این جایگشت ادامه می‌دهیم تا همهٔ ۲۴ جایگشت تولید شوند. باز هم اگر جای ۱ و ۲ را در آخرین جایگشت عوض کنیم، نخستین جایگشت فهرست را به‌دست می‌آوریم.

در مراجعی که در پایان این فصل ذکر شده است می‌توانید اطلاعات بیشتری را دربارهٔ فرایندهای بازگشتی برای تولید جایگشتها و ترکیبها به‌دست آورید.

در پایان این بند باز هم به یکی از مفاهیمی که قبلاً بیان کردیم، یعنی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح مثبت، توجه می‌کنیم.

مثال ۷.۱۰ روشهای بازگشتی نقشی بنیادی در ریاضیات گسسته و تحلیل الگوریتمها دارند. چنین روشهایی وقتی به کار می‌آیند که بخواهیم مسأله‌ای را با تقسیم آن به مسائل مشابه کوچکتر حل کنیم. این روشها را در زبان برنامه‌نویسی پاسکال می‌توان با به‌کارگیری توابع و روالهای بازگشتی، که مجاز به فراخوانی خود هستند، پیاده‌سازی کرد.

در این مثال چنین تابعی را به‌دست می‌آوریم.

هنگام محاسبهٔ $\gcd(۳۳۳, ۸۴)$ با استفاده از الگوریتم اقلیدسی (که در بند ۴ ۰ ۴ معرفی شد) نتایج زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$۳۳۳ = ۳(۸۴) + ۸۱ \qquad ۰ < ۸۱ < ۸۴ \tag{۱}$$

$$۸۴ = ۱(۸۱) + ۳ \qquad ۰ < ۳ < ۸۱ \tag{۲}$$

$$۸۱ = ۲۷(۳) + ۰ \tag{۳}$$

چون ۳ آخرین باقیماندهٔ غیرصفر است، بنابر الگوریتم اقلیدسی $\gcd(۳۳۳, ۸۴) = ۳$. ولی اگر فقط محاسبات معادله‌های (۲) و (۳) را به‌کار بگیریم، می‌بینیم که $\gcd(۸۴, ۸۱) = ۳$. معادلهٔ (۳) به تنهایی نشان می‌دهد که $\gcd(۸۱, ۳) = ۳$، زیرا ۳ عدد ۸۱ را عاد می‌کند. در نتیجه،

$$\gcd(۳۳۳, ۸۴) = \gcd(۸۴, ۸۱) = \gcd(۸۱, ۳) = ۳$$

می‌بینیم که به‌تدریج که از معادلهٔ (۱) به معادلهٔ (۲) و به معادلهٔ (۳) می‌رسیم اعداد صحیح به‌کار رفته در محاسبات متوالی کوچکتر و کوچکتر می‌شوند.

همچنین، ملاحظه می‌کنیم که

$$۳ = ۸۴ \text{ Mod } ۸۱ \quad \text{و} \quad ۸۱ = ۳۳۳ \text{Mod } ۸۴$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که

$$\gcd(۳۳۳, ۸۴) = \gcd(۸۴, ۳۳۳\text{Mod } ۸۴) = \gcd(۳۳۳\text{Mod } ۸۴, ۸۴\text{Mod}(۳۳۳, \text{Mod } ۸۴))$$

این نتایج روش بازگشتی زیر را برای محاسبهٔ $\gcd(a, b)$، که در آن $a, b \in \mathbf{Z}^+$، به‌دست می‌دهند.

فرض کنیم ورودی $a, b \in \mathbf{Z}^+$ را در اختیار داریم

مرحلهٔ ۱. اگر $b|a$ (یا $a\text{Mod } b = ۰$)، آنگاه $\gcd(a, b) = b$.

مرحلهٔ ۲. اگر $b \nmid a$، در این صورت وظایف زیر را به‌همین ترتیب مشخص شده انجام می‌دهیم.

یک) قرار می‌دهیم $a = b$.

دو) قرار می‌دهیم $b = a\text{Mod } b$، که در آن مقدار a برای این تخصیص مقدار قبلی a است.

سه) به مرحلهٔ ۱ باز می‌گردیم.

این ایده‌ها را در برنامهٔ پاسکال شکل ۱۰ ۰ ۳ به کار گرفته‌ایم؛ در این برنامه، قطعهٔ سایه‌دار تابعی بازگشتی است که $\gcd(a,b)$ را تعیین می‌کند. (خواننده می‌تواند این برنامه را با برنامه شکل ۴ ۰ ۹ در جلد اول مقایسه کند.)

تمرینات ۱.۱۰

۱. رابطه‌ای بازگشتی با شرط آغازی چنان بیابید که هر یک از تصاعدهای هندسی زیر را به‌طور یکتا تعیین کند.

الف) ۲، ۱۰، ۵۰، ۲۵۰، ...

ب) ۶، ۱۸ −، ۵۴، ۱۶۲ −، ...

پ) ۱، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۹}$، $\frac{۱}{۲۷}$، ...

ت) ۷، $\frac{۱۴}{۵}$، $\frac{۲۸}{۲۵}$، $\frac{۵۶}{۱۲۵}$، ...

```
Program  EuclideanAlgorithm2 (input,output);

Var
   p,q: integer;

Function gcd (a,b: integer): integer;

Begin
   If  a Mod b=0  then
      gcd := b
   Else  gcd := gcd (b,a Mod b)
End;

Begin
   Writeln ('This program is designed to find');
   Writeln ('the gcd of two positive integers');
   Writeln ('p and q.');
   Write ('The first positive integer p is ');
   Readln (p);
   Write ('The second positive integer q is ');
   Readln (q);

   Writeln ('The greatest common divisor of ');
   Writeln (p,' and ', q,' is ', gcd (p,q), '.')
End.
```

شکل ۳.۱۰

۲. جواب عمومی هر یک از رابطه‌های بازگشتی زیر را بیابید.

الف) $a_{n+1} - 1/5 a_n = 0$، $n \geqslant 0$ ب) $4a_n - 5a_{n-1} = 0$، $n \geqslant 1$

پ) $3a_{n+1} - 4a_n = 0$، $n \geqslant 0$، $a_1 = 5$ ت) $2a_n - 3a_{n-1} = 0$، $n \geqslant 1$، $a_4 = 81$

۳. اگر a_n، $n \geqslant 0$، جوابی برای رابطهٔ بازگشتی $a_{n+1} - da_n = 0$ باشد، و $a_3 = \frac{153}{49}$، $a_5 = \frac{1377}{2401}$، در این صورت d چند است؟

۴. تعداد باکتریها در یک کشت آزمایشگاهی (تقریباً) ۱۰۰۰ است و این تعداد در هر دو ساعت ۲۵۰٪ افزایش می‌یابد. تعداد باکتریها را پس از یک روز با استفاده از رابطهٔ بازگشتی تعیین کنید.

۵. اگر شخصی ۱۰۰ تومان با بهرهٔ ۶٪ سرمایه‌گذاری کند و اگر بنا باشد که هر سه ماه یک بار بهره را به سرمایهٔ او بیفزایند، این شخص چند ماه باید منتظر بماند تا سرمایهٔ اولیه‌اش دو برابر شود؟ (این شخص نمی‌تواند قبل از پایان هر دورهٔ سه ماهه پولی برداشت کند.)

۶. شخصی ۱۵ سال پیش حساب پس‌اندازی با بهرهٔ ۸٪ در بانکی بازکرده است و هر سه ماه یک بار بهرهٔ پول به حساب او واریز می‌شود. اگر سپردهٔ او در حال حاضر ۷۲۱۸/۲۷ تومان باشد، سپردهٔ اولیهٔ او چقدر بوده است؟

۷. فرض کنیم x_1، x_2، $\cdots$، x_{20} فهرستی از اعداد حقیقی باشد که قرار است با استفاده از فن مرتب‌سازی حبابی مثال ۴۰۱۰ مرتب شوند. (الف) بعد از چند مقایسه کوچکترین ۱۰ عدد فهرست اصلی به‌ترتیب افزایشی قرار می‌گیرند؟ (ب) چند مقایسهٔ دیگر لازم است تا کار مرتب‌سازی تمام شود؟

۸. در پیاده‌سازی نشان داده شده در مثال ۱۰۱۰ برای مرتب‌سازی حبابی، حلقهٔ For خارجی $n-۱$ بار اجرا می‌شود. این وضعیت مستقل از اینکه در طول اجرای حلقهٔ For داخلی تعویضی صورت گیرد یا نه، روی می‌دهد. در نتیجه، به‌ازای $i=k$، $۱ \leqslant k \leqslant n-۲$، اگر اجرای حلقهٔ For داخلی به تعویضی منجر نشود، فهرست مفروض به‌ترتیب افزایشی مرتب شده است. بنابراین، نیازی به اجرای حلقهٔ For خارجی به‌ازای $k+۱ \leqslant i \leqslant n-۱$ نیست.

الف) برای وضعیتی که در اینجا توصیف شد، در صورتی که اجرای حلقهٔ For داخلی به‌ازای $i=k$($۱ \leqslant k \leqslant n-۲$) به هیچ تعویضی منجر نشود، چند مقایسهٔ غیرضروری صورت گرفته است؟

ب) نسخهٔ اصلاح شده‌ای از مرتب‌سازی حبابی نشان داده شده در شکل ۱۰۱۰ را بنویسید. (در برنامه‌ای که می‌نویسید باید مقایسه‌های غیرضروری مورد بحث در این تمرین حذف شوند.)

پ) با استفاده از تعداد مقایسه‌ها به‌عنوان معیاری برای مدت زمان اجرای برنامه، پیچیدگی زمانی بهترین حالت و پیچیدگی زمانی بدترین حالت را برای الگوریتم پیاده‌سازی شده در قسمت (ب) تعیین کنید.

۹. فرض کنید جایگشتهای $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ با روالی که پس از مثال ۶۰۱۰ معرفی کردیم تولید شوند. (الف) آخرین جایگشت در فهرست کدام است؟ (ب) دو جایگشتی که قبل از ۲۵۱۳۴ می‌آیند کدام‌اند؟ (پ) سه جایگشتی که بعد از ۲۵۱۳۴ می‌آیند کدام‌اند؟

۱۰. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $\cdots$، x_n، n عدد حقیقی باشند به‌طوری‌که $x_۱ \leqslant x_۲ \leqslant x_۳ \leqslant \cdots \leqslant x_n$. میانهٔ مجموعهٔ حاوی این n عدد را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$x_{(n+۱)/۲}$، به‌ازای n فرد

$(۱/۲)[x_{n/۲} + x_{(n/۲)+۱}]$، به‌ازای n زوج

الف) فرض کنید $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، $\cdots$، $A[n]$ آرایه‌ای از n عدد حقیقی باشد که لزوماً به‌ترتیب افزایشی یا کاهشی نوشته نشده‌اند. برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی ابداع کنید) که میانهٔ این مجموعه از اعداد حقیقی را تعیین کند.

ب) دربارهٔ پیچیدگی زمانی بدترین حالت برای برنامه‌ای که در قسمت (الف) نوشته‌اید بحث کنید.

۲.۱۰ رابطهٔ بازگشتی همگن خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت

فرض کنیم $k \in \mathbf{Z}^+$ و فرض کنیم $C_n(\neq ۰)$، $C_{n-۱}$، $C_{n-۲}$، $\cdots$، $C_{n-k}(\neq ۰)$ اعدادی حقیقی باشند. اگر a_n، $n \geqslant ۰$، تابعی گسسته باشد، در این صورت

$$C_n a_n + C_{n-۱} a_{n-۱} + C_{n-۲} a_{n-۲} + \cdots + C_{n-k} a_{n-k} = f(n), \qquad n \geqslant k$$

یک رابطهٔ بازگشتی خطی مرتبهٔ kاُم (با ضرایب ثابت) است. وقتی به‌ازای هر $n \geqslant ۰$، $f(n) = ۰$ این رابطه را همگن می‌نامیم؛ در غیر این صورت، ناهمگن است.

در این بند توجه خود را به رابطهٔ همگن مرتبهٔ دوم، یعنی

$$C_n a_n + C_{n-۱} a_{n-۱} + C_{n-۲} a_{n-۲} = ۰ \text{ و } n \geqslant ۲$$

معطوف می‌کنیم. بر پایهٔ کارهایی که در بند ۱۰۱۰ انجام دادیم، در جستجوی جوابی به‌صورت $a_n = cr^n$ هستیم، که در آن $c \neq ۰$ و $r \neq ۰$.

اگر $a_n = cr^n$ را در $C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0$ بگذاریم، برابری

$$C_n cr^n + C_{n-1} cr^{n-1} + C_{n-2} cr^{n-2} = 0$$

به‌دست می‌آید. با توجه به $c, r \neq 0$، برابری بالا به‌صورت $C_n r^2 + C_{n-1} r + C_{n-2} = 0$ درمی‌آید که معادله‌ای از درجهٔ دوم است و معادلهٔ مشخصه نامیده می‌شود. اگر ریشه‌های این معادله را r_1 و r_2 بنامیم، سه حالت ممکن است پیش آید: (الف) r_1 و r_2 دو عدد حقیقی متمایزند؛ (ب) r_1 و r_2 دو عدد مختلط مزدوج‌اند؛ یا (پ) r_1 و r_2 حقیقی‌اند، ولی $r_1 = r_2$. در هر سه حالت، r_1 و r_2 را ریشه‌های مشخصه می‌نامیم.

حالت (الف): (ریشه‌های حقیقی متمایز)

مثال ۸.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ را، که در آن $n \geqslant 2$ و $a_0 = 1$، $a_1 = 2$، حل کنید.

اگر $a_n = cr^n$ و $c, r \neq 0$، به‌دست می‌آوریم $cr^n + cr^{n-1} - 6cr^{n-2} = 0$ و در نتیجه، معادلهٔ مشخصهٔ $r^2 + r - 6 = 0$ حاصل می‌شود:

$$0 = r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2) \Longrightarrow r = 2, -3$$

چون دو ریشهٔ حقیقی متمایز داریم هر دوی $a_n = 2^n$ و $a_n = (-3)^n$ جواب هستند [و به‌طورکلی، به‌ازای هر دو ثابت دلخواه b و d، $b(2^n)$ و $d(-3)^n$ نیز جواب هستند]. این دو جواب جوابهای مستقل خطی‌اند زیرا هیچ‌یک از آنها مضرب دیگری نیست؛ یعنی، هیچ ثابت حقیقی مانند k وجود ندارد به‌طوری که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، [1] $k(2^n) = (-3)^n$. جواب عمومی معادله را به‌صورت $a_n = c_1(2)^n + c_2(-3)^n$ می‌نویسیم، که در آن c_1 و c_2 ثابتهایی دلخواه‌اند.

با فرض $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$، c_1 و c_2 را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$1 = a_0 = c_1(2)^0 + c_2(-3)^0 = c_1 + c_2$$
$$2 = a_1 = c_1(2)^1 + c_2(-3)^1 = 2c_1 - 3c_2$$

پس از حل این دستگاه معادلات، به‌دست می‌آوریم $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$. بنابراین، $a_n = 2^n$، $n \geqslant 0$، جواب یکتای رابطهٔ بازگشتی مفروض است.

یکی از روابط بازگشتی همگن مرتبهٔ دوم جالب رابطهٔ فیبوناچی است. (قبلاً در بندهای ۲۰۴ و ۸۰۵ از جلد اول و در بند ۶۰۹ دربارهٔ این رابطه صحبت کرده بودیم.)

مثال ۹.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ را، که در آن $n \geqslant 0$ و $F_0 = 0$، $F_1 = 1$، حل کنید.

مانند مثال قبلی، به‌ازای $c \neq 0$، $r \neq 0$ و $n \geqslant 0$ قرار می‌دهیم $F_n = cr^n$. پس از جایگذاری به‌دست می‌آوریم $cr^{n+2} = cr^{n+1} + cr^n$. از اینجا معادلهٔ مشخصهٔ $r^2 - r - 1 = 0$ حاصل می‌شود. ریشه‌های مشخصه عبارت‌اند

---

[1] همچنین، در صورتی‌که شرط زیر برقرار باشد می‌توانیم جوابهای $a_n = 2^n$ و $a_n(-3)^n$ را مستقل خطی بنامیم به‌ازای $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$، اگر به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $k_1(2^n) + k_2(-3)^n = 0$، آنگاه $k_1 = k_2 = 0$.

از $r=(1\pm\sqrt{5})/2$ و بنابراین، جواب عمومی عبارت است از $F_n = c_1[(1+\sqrt{5})/2]^n + c_2[(1-\sqrt{5})/2]^n$.
برای یافتن c_1 و c_2، مقادیر آغازی مفروض را به‌کارگرفته و می‌نویسیم $0 = F_0 = c_1 + c_2$،
$1 = F_1 = c_1[(1+\sqrt{5})/2] + c_2[(1-\sqrt{5})/2]$
چون $c_2 = -c_1$، خواهیم‌داشت $2 = c_1(1+\sqrt{5}) - c_1(1-\sqrt{5})$ و $c_1 = 1/\sqrt{5}$. پس جواب مطلوب عبارت‌است‌از

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \qquad n \geqslant 0$$

مثال ۱۰.۱۰ به‌ازای $n \geqslant 0$ فرض کنیم $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ (اگر $n = 0$، آنگاه $S = \varnothing$) و فرض کنیم a_n تعداد زیرمجموعه‌هایی از S را نشان دهد که شامل هیچ دو عدد صحیح متوالی نیستند. رابطه‌ای بازگشتی برای محاسبهٔ a_n بیابید و آن را حل کنید.

به‌ازای $0 \leqslant n \leqslant 4$ داریم $a_0 = 1$، $a_1 = 2$، $a_2 = 3$، $a_3 = 5$ و $a_4 = 8$. [مثلاً $a_3 = 5$ به این دلیل که زیرمجموعه‌هایی از $S = \{1, 2, 3\}$ که شامل هیچ دو عدد صحیح متوالی نیستند عبارت‌اند از $\varnothing$، $\{1\}$، $\{2\}$، $\{3\}$ و $\{1, 3\}$ (و زیر مجموعهٔ دیگری با این ویژگی وجود ندارد).] این پنج جملهٔ نخست یادآور دنبالهٔ فیبوناچی هستند. ولی اگر ادامه دهیم آیا اوضاع عوض می‌شود؟

فرض کنیم $n \geqslant 2$ و $S = \{1, 2, 3, \dots, n-2, n-1, n\}$. اگر بنا باشد که $A \subseteq S$ در a_n به حساب آید، دو حالت ممکن است روی دهد:

الف) $n \in A$: اگر این وضع روی دهد، $(n-1) \notin A$ و $A - \{n\}$ در a_{n-2} به حساب خواهد آمد.

ب) $n \notin A$: در این حالت A در a_{n-1} به حساب خواهد آمد.

این دو حالت فراگیر و مانع جمع‌اند؛ پس نتیجه می‌گیریم که $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$، که در آن $n \geqslant 2$ و $a_0 = 1$، $a_1 = 2$، رابطهٔ بازگشتی مطلوب برای این مسأله است. اکنون می‌توانیم این رابطه را نسبت به a_n حل کنیم، ولی اگر توجه کنیم که $a_n = F_{n+2}$، $n \geqslant 0$، در این صورت نتیجهٔ مثال ۹.۱۰ مستلزم این است که

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right], \qquad n \geqslant 0$$

اینک رابطهٔ مشابهی را که مربوط به یکی از کاربردهای علم کامپیوتر است بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۱.۱۰ در بسیاری از زبانهای برنامه‌نویسی عبارتهای حسابی مجاز بدون پرانتز عبارتهایی هستند که از رقمهای ۰، ۱، ۲، ...، ۹ و نمادهای اعمال دوتایی +، *، / تشکیل شده باشند. مثلاً ۴ + ۳ و ۵ * ۳ + ۲ عبارتهای حسابی مجازند؛ ۹* + ۸ عبارت مجازی نیست. در اینجا ۱۷ = ۵ * ۳ + ۲، زیرا سلسله مراتبی برای اعمال دوتایی وجود دارد: ضرب و تقسیم قبل از جمع انجام می‌گیرند. عملهای همتراز به‌همان ترتیبی که در عبارت ظاهر می‌شوند انجام می‌گیرند و ترتیب را از چپ به راست در نظر می‌گیریم.

به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، فرض کنیم a_n تعداد این عبارتهای حسابی (مجاز) باشد که از n نماد تشکیل شده‌اند. در این صورت $a_1 = 10$، زیرا عبارتهای حسابی یک نمادی همان ۱۰ رقم هستند. پس از آن داریم $a_2 = 100$. این عدد از شمارش عبارتهای ۰۰، ۰۱، ...، ۰۹، ۱۰، ۱۱، ...، ۹۹ حاصل شده است. (نیازی به نوشتن علامت

بعلاوه در طرف چپ عدد نیست.) برای به‌دست آوردن رابطهٔ بازگشتی مربوط به a_n به‌ازای $n \geqslant 3$، دو حالت را در نظر می‌گیریم.

۱) اگر x عبارتی حسابی متشکل از $n-1$ نماد باشد، آخرین نماد باید یک رقم باشد. اگر رقم دیگری در سمت راست x بگذاریم، $10a_{n-1}$ عبارت حسابی n نمادی به‌دست می‌آوریم که در آنها دو نماد آخر رقم هستند.

۲) اکنون فرض کنیم y عبارتی متشکل از $n-2$ نماد باشد. برای آنکه عبارتی n نمادی (که در حالت ۱ شمرده نشده است) به‌دست آوریم، یکی از ۲۹ عبارت دو نمادی $+1$، ...، $+9$، $+0$، $*1$، ...، $*9$، $*0$، $/1$، ...، $/9$ را به سمت راست y ملحق می‌کنیم.

با توجه به این دو حالت داریم $a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2}$، که در آن $n \geqslant 3$، $a_1 = 10$ و $a_2 = 100$. ریشه‌های مشخصه عبارت‌اند از $5 \pm 3\sqrt{6}$ و جواب مسأله عبارت است از $(5/(3\sqrt{6}))[(5+3\sqrt{6})^n - (5-3\sqrt{6})^n]$ به‌ازای $n \geqslant 1$. (این نتیجه را به‌دست آورید.)

راهی دیگر (و شاید آسانتر) برای حل این مساله این است که با استفاده از رابطهٔ بازگشتی $a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2}$، با $a_2 = 100$ و $a_1 = 10$، مقداری را برای a_0 محاسبه کنیم. ملاحظه می‌کنیم که $a_0 = (a_2 - 10a_1)/29 = 0$. جواب رابطهٔ بازگشتی

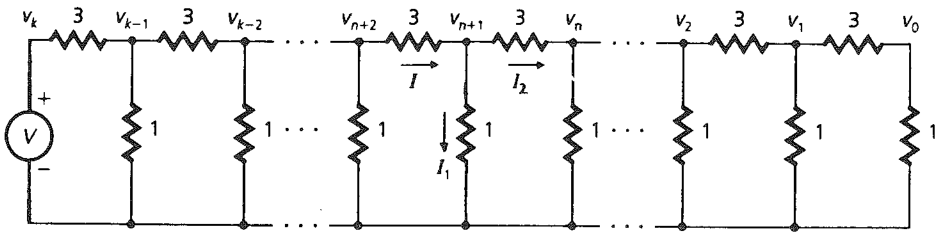
$$a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2},\ n \geqslant 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 10$$

عبارت است از

$$a_n = \left(\frac{5}{(3\sqrt{6})}\right)[(5+3\sqrt{6})^n - (5-3\sqrt{6})^n], \qquad n \geqslant 0$$

اکنون کاربردی از این مطالب را در فیزیک مطرح می‌کنیم.

مثال ۱۲.۱۰ شبکهٔ خطی شکل ۴.۱۰ را در نظر می‌گیریم، که در آن k مقاومت یک اهمی و k مقاومت سه اهمی با سیم به مولدی وصل شده‌اند که ولتاژ ثابت V را تولید می‌کند. فرمولی برای v_n، $0 \leqslant n \leqslant k$، ولتاژ در هر نقطهٔ انشعاب برحسب n بیابید. (v_n افت ولتاژ در مقاومت یک اهمی زیر همان نقطهٔ انشعاب نیز هست.)



شکل ۴.۱۰

می‌دانیم $v_k = V$، یعنی همان ولتاژ تولید شده به‌وسیلهٔ مولد. برای یافتن رابطه‌ای بازگشتی، اصول زیر را به‌کار می‌بریم.

۱) قانون کیرشهف: در هر نقطهٔ انشعاب، مجموع جریانهایی که به آن نقطهٔ انشعاب وارد می‌شوند برابر است با مجموع جریانهایی که از آن نقطه خارج می‌شوند.

۲) قانون اهم: اگر افت ولتاژ در یک مقاومت R اهمی $V_2 - V_1$ باشد، آنگاه جریان در آن مقاومت $\frac{(V_2 - V_1)}{R}$ است.

جریان در نقطهٔ انشعاب v_{n+1} را در نظر می‌گیریم. بنابر قانون کیرشهف، $I = I_1 + I_2$ بنابر قانون اهم، $I = (v_{n+2} - v_{n+1})/3$، $I_1 = v_{n+1}/1$، و $I_2 = (v_{n+1} - v_n)/3$. در نتیجه،

$$\frac{v_{n+2} - v_{n+1}}{3} = \frac{v_{n+1}}{1} + \frac{v_{n+1} - v_n}{3}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant k - 2$$

یا $v_{n+2} - 5v_{n+1} + v_n = 0$

فرض کنیم $v_n = cr^n$، $c, r \neq 0$ و $0 \leqslant n \leqslant k$. معادلهٔ مشخصهٔ $r^2 - 5r + 1 = 0$ معادلهٔ مشخصه است که ریشه‌های آن عبارت‌اند از $a = \frac{(5 + \sqrt{21})}{2}$ و $b = \frac{(5 - \sqrt{21})}{2}$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $v_n = c_1 a^n + c_2 b^n$.

اکنون مقدار v_0 هر چه باشد، بنابر دو قانون یاد شده داریم $v_0/1 = (v_1 - v_0)/3$ یا $v_1 = 4v_0$. بنابراین، $v_0 = c_1 + c_2$ و $4v_0 = v_1 = c_1 a + c_2 b$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $c_1 = v_0 \frac{(b-4)}{(b-a)}$، و $c_2 = v_0 \frac{(a-4)}{(a-b)}$ و

$$v_n = v_0 \left[\frac{(b-4)}{(b-a)} a^n + \frac{(a-4)}{(a-b)} b^n\right]$$

چون

$$V = v_k = v_0 \left[\frac{(b-4)a^k - (a-4)b^k}{(b-a)}\right]$$

می‌بینیم که $v_0 = (b-a)V/[(b-4)a^k - (a-4)b^k]$ و از اینجا حاصل می‌شود

$$v_n = V \left[\frac{(b-4)a^n - (a-4)b^n}{(b-4)a^k - (a-4)b^k}\right]$$

رابطهٔ بازگشتی مثال بعدی را از دو راه می‌یابیم. در نخستین قسمت خواهیم دید که چگونه متغیرهای کمکی می‌توانند یاری‌دهنده باشند.

مثال ۱۳.۱۰ مطلوب است تعیین رابطهٔ بازگشتی برای تعداد دنباله‌های دو نمادی به طول n که دو ۰ متوالی ندارند.

الف) به‌ازای $n \geqslant 1$ فرض کنیم a_n تعداد این نوع دنباله‌های به طول n باشد. فرض کنیم $a_n^{(0)}$ تعداد دنباله‌هایی باشد که به ۰ و $a_n^{(1)}$ تعداد دنباله‌هایی باشد که به ۱ ختم می‌شوند. در این صورت $a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)}$.

با توجه به اینکه $a_1 = 2$ و با در نظرگرفتن دنبالهٔ دلخواه x به طول $n - 1$ $(n - 1 > 0)$، که در آن x شامل دو ۰ متوالی نیست، رابطه‌ای بازگشتی برای a_n، $n \geqslant 1$، به‌دست می‌آوریم. اگر x به ۱ ختم شود، در این صورت می‌توانیم یک ۰ یا یک ۱ به آن ملحق کنیم و به این ترتیب $2a_{n-1}^{(1)}$ تا از دنباله‌های حساب شده در a_n را به‌دست می‌آوریم. اگر دنبالهٔ x به ۰ ختم شود، در این صورت فقط ۱ را می‌توانیم به آن ملحق کنیم و به این ترتیب $a_{n-1}^{(0)}$ تا از دنباله‌های حساب شده در a_n به‌دست می‌آید. چون این دو حالت حاوی همهٔ

امکانات هستند و اشتراکی نیز ندارند، خواهیم داشت

$$a_n = ۲ \cdot a_{n-۱}^{(۱)} + ۱ \cdot a_{n-۱}^{(۰)}$$

مکان nام فقط می‌تواند ۱ باشد.   مکان nام می‌تواند ۰ یا ۱ باشد.

اگر دنبالهٔ دلخواه y را که در $a_{n-۲}$ به حساب آمده است در نظر بگیریم، می‌بینیم که دنبالهٔ $y۱$ در $a_{n-۱}^{(۱)}$ به حساب آمده است. به‌همین ترتیب، اگر دنبالهٔ $z۱$ در $a_{n-۱}^{(۱)}$ به حساب آمده باشد، در این صورت z در $a_{n-۲}$ به حساب آمده است. در نتیجه، $a_{n-۲} = a_{n-۱}^{(۱)}$ و

$$a_n = a_{n-۱}^{(۱)} + [a_{n-۱}^{(۱)} + a_{n-۱}^{(۰)}] = a_{n-۱}^{(۱)} + a_{n-۱} = a_{n-۱} + a_{n-۲}$$

بنابراین، رابطهٔ بازگشتی برای این مسأله عبارت است از $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$، که در آن $n \geqslant ۳$، $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۳$. (جزئیات حل را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.)

ب) اکنون راه دوم را ارائه می‌کنیم. اگر $n \geqslant ۱$ و a_n تعداد دنباله‌های دو نمادی باشد که حاوی دو ۰ متوالی نیستند، در این صورت $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۳$. اینک به‌ازای $n \geqslant ۳$ دنباله‌هایی دو نمادی را در نظر می‌گیریم که a_n تعداد آنها را نشان می‌دهد. برای این دنباله‌ها دو امکان پیش می‌آید:

(حالت ۱: نماد nام ۱ است) در اینجا می‌بینیم که $n - ۱$ نماد قبلی دنباله‌ای دو نمادی تشکیل می‌دهند که دو ۰ متوالی ندارد. تعداد این نوع دنباله‌ها $a_{n-۱}$ است.

(حالت ۲: نماد nام ۰ است) در اینجا هر یک از دنباله‌ها در حقیقت به ۱۰ ختم می‌شود و $n - ۲$ نماد نخست دنباله‌ای دو نمادی به‌دست می‌دهند که دو ۰ متوالی ندارد. در این حالت تعداد این نوع دنباله‌ها $a_{n-۲}$ است. چون این دو حالت همهٔ حالتهای ممکن را در برمی‌گیرند و هیچ دنبالهٔ مشترکی نیز ندارند، می‌توانیم بنویسیم $a_۱ = ۲$، $a_۲ = ۳$ و

$$a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}, \qquad n \geqslant ۳$$

و این همان رابطه‌ای است که در قسمت (الف) یافتیم.

در هر دو قسمت (الف) و (ب) می‌توانیم با استفاده از رابطهٔ بازگشتی و $a_۱ = ۲$، $a_۲ = ۳$، مقدار $a_۰$ را بیابیم. ملاحظه می‌کنیم که $a_۰ = a_۲ - a_۱ = ۳ - ۲ = ۱$. اکنون می‌توانیم رابطهٔ بازگشتی $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۲$ و

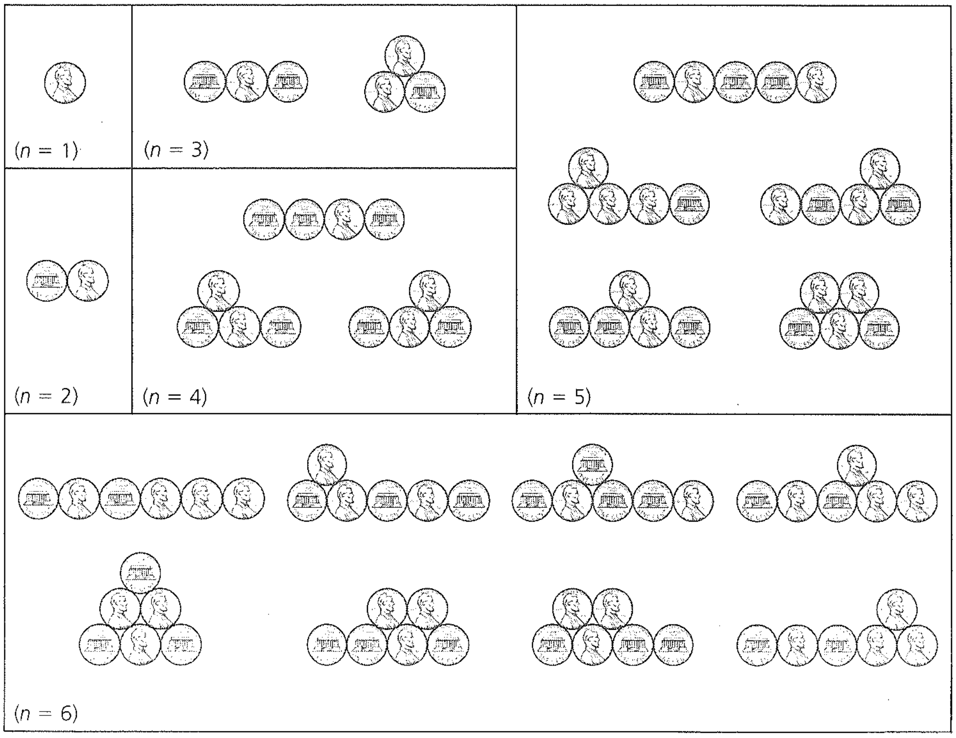
$$a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}, \qquad n \geqslant ۲$$

را حل کنیم.

قبل از ادامهٔ بحث می‌خواهیم مطمئن شویم خواننده این نکته را دریافته است که چرا برای یافتن روابط بازگشتی به استدلالی کلی نیاز داریم. وقتی قضیه‌ای را اثبات می‌کنیم نتایجی کلی را از تعدادی کم (یا حتی، تعدادی زیاد) از موارد خاص استنتاج نمی‌کنیم. در اینجا نیز وضع همین‌طور است. مثال زیر کمک می‌کند تا این نکته را درک کنیم.

مثال ۱۴.۱۰ کار را با n سکهٔ یکسان آغاز می‌کنیم و فرض کنیم a_n تعداد طرقی باشد که می‌توانیم این سکه‌ها را کنار هم در ردیفهایی چنان مرتب کنیم که هر سکه در ردیفی بالاتر با دو سکهٔ زیر خود در ردیف پایین در تماس باشد. (در این ترتیبها توجهی به این امر نداریم که روی سکه به‌طرف بالاست یا پشت آن.) در شکل ۵۰۱۰ همهٔ ترتیبهای ممکن به‌ازای $1 \leqslant n \leqslant 6$ را داریم. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8$$



شکل ۵.۱۰

بنابراین، این نتایج ممکن است این فکر را القا کنند که، به‌طور کلی، $a_n = F_n$، که F_n عدد nام در دنبالهٔ فیبوناچی است. متأسفانه، این فکر گمراه‌کننده است زیرا می‌بینیم که، مثلاً،

$$a_7 = 12 \neq 13 = F_7,\ a_8 = 18 \neq 21 = F_8,\ a_9 = 26 \neq 34 = F_9$$

(ترتیبهای این مثال را اف. سی. اولوک[1] در مرجع [۲] مورد مطالعه قرار داده است.)

آخرین مثال برای حالت (الف) نشان می‌دهد چگونه نتایج مربوط به رابطه‌های بازگشتی مرتبهٔ دوم را می‌توان به رابطه‌های بازگشتی مرتبه‌های بالاتر تعمیم داد.

1. F.C. Auluck

مثال ۱۵.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_\circ = \circ$، $a_1 = 1$، $a_2 = 2$ و

$$2a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n, \qquad n \geqslant \circ$$

را حل کنید.

بافرض $a_n = cr^n$ به‌ازای $c, r \neq \circ$ و $n \geqslant \circ$، معادلهٔ مشخصهٔ $(r+1)(r-1)(2r-1) = \circ = 2r^3 - r^2 - 2r + 1$ را به‌دست می‌آوریم. ریشه‌های مشخصه عبارت‌اند از $\frac{1}{2}$، ۱ و ۱−. بنابراین، جواب عبارت است از

$$a_n = c_1(1)^n + c_2(-1)^n + c_3(1/2)^n = c_1 + c_2(-1)^n + c_3(1/2)^n$$

[جوابهای ۱، $(-1)^n$ و $(1/2)^n$ را مستقل خطی می‌نامیم زیرا امکان ندارد که بتوانیم یکی از آنها را به‌صورت ترکیبی خطی از دوتای دیگر بیان کنیم[1].] از $a_\circ = \circ$، $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ نتیجه می‌گیریم که $c_1 = 5/2$، $c_2 = 1/6$ و $c_3 = -8/3$.

حالت (ب): (ریشه‌های مختلط)

پیش از پرداختن به حالت مربوط به ریشه‌های مختلط، قضیهٔ دوموآور را یادآوری می‌کنیم:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \qquad n \geqslant \circ$$

[این همان قسمت (ب) از تمرین ۸ در بند ۴.۱ (در جلد اول) است.]

اگر $z = x + iy \in \mathbb{C}$، $z \neq \circ$، می‌توانیم بنویسیم $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\tan\theta = (y/x)$ به‌ازای $x \neq \circ$. اگر $x = \circ$، در این صورت به‌ازای $y > \circ$ داریم

$$z = yi = \sin(\pi/2) = y(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$$

و به‌ازای $y < \circ$ داریم

$$z = yi = |y| i\sin(3\pi/2) = |y|(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$$

بنابر قضیهٔ دوموآور، در همهٔ حالتها به‌ازای $n \geqslant \circ$ داریم $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

مثال ۱۶.۱۰ مطلوب است تعیین $(1 + \sqrt{3}i)^{10}$.

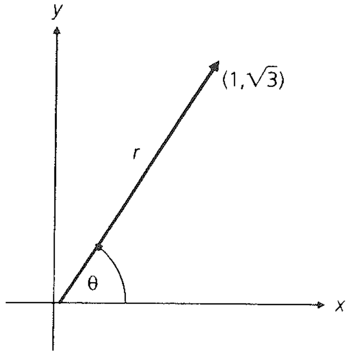
شکل ۶.۱۰ روشی هندسی را برای نمایش عدد مختلط $1 + \sqrt{3}i$ با نقطهٔ $(1, \sqrt{3})$ در صفحهٔ xy نشان می‌دهد. در اینجا $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

بنابراین $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$ و

$$(1 + \sqrt{3}i)^{10} = 2^{10}(\cos(10\pi/3) + i\sin(10\pi/3)) = 2^{10}(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3))$$
$$= 2^{10}((-1/2) - (\sqrt{3}/2)i) = (-2^9)(1 + \sqrt{3}i)$$

این نتایج را در مثالهای بعدی به کار خواهیم گرفت.

۱. این مفهوم را طور دیگری نیز می‌توانیم بیان کنیم. جوابهای ۱، $(-1)^n$ و $(-1/2)^n$ مستقل خطی‌اند، زیرا اگر k_1، k_2 و k_3 عددهای حقیقی باشند و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $k_1(1) + k_2(-1)^n + k_3(-1/2)^n = \circ$، آنگاه $k_1 = k_2 = k_3 = \circ$.



شکل ۶.۱۰

مثال ۱۷.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n = ۲(a_{n-۱} - a_{n-۲})$ را، که در آن $n \geqslant ۲$، $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۲$، حل کنید.

با فرض $a_n = cr^n$، که در آن $c, r \neq ۰$، معادلهٔ مشخصهٔ $r^۲ - ۲r + ۲ = ۰$ را به‌دست می‌آوریم که ریشه‌های آن عبارت‌اند از $۱ \pm i$. در نتیجه، جواب عمومی به‌صورت $c_۱(۱+i)^n + c_۲(۱-i)^n$ است، که در آن $c_۱$ و $c_۲$ اعداد مختلط دلخواهی هستند. [مانند حالت (الف)، دو جواب مستقل خطی داریم: $(۱+i)^n$ و $(۱-i)^n$.]

$$۱ + i = \sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$$

و

$$۱ - i = \sqrt{۲}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{۴}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{۴}\right)\right) = \sqrt{۲}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} a_n &= c_۱(\sqrt{۲})^n\left(\cos\frac{n\pi}{۴} + i\sin\frac{n\pi}{۴}\right) + c_۲(\sqrt{۲})^n\left(\cos\frac{n\pi}{۴} - i\sin\frac{n\pi}{۴}\right) \\ &= (\sqrt{۲})^n\left(k_۱\cos\frac{n\pi}{۴} + k_۲\sin\frac{n\pi}{۴}\right) \end{aligned}$$

که در آن $k_۱ = c_۱ + c_۲$ و $k_۲ = (c_۱ - c_۲)i$.

$$\begin{aligned} ۱ &= a_۰ = [k_۱\cos ۰ + k_۲ \sin ۰] = k_۱ \\ ۲ &= a_۱ = \sqrt{۲}\left[۱\cdot\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) + k_۲\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right] \end{aligned}$$

از برابری اخیر حاصل می‌شود $۱ + k_۲ = ۲$ یا $k_۲ = ۱$.

جواب متناظر با شرایط آغازی مفروض عبارت است از $a_n = (\sqrt{۲})^n \cdot [\cos(n\pi/۴) + \sin(n\pi/۴)]$، $n \geqslant ۰$. [یادداشت: این جواب شامل هیچ عدد مختلطی نیست. در اینجا نکتهٔ کوچکی هست که ممکن است موجب ناخشنودی خواننده شود. چطور شد که با اعداد مختلط $c_۱$ و $c_۲$ شروع کردیم ولی کار را با اعداد حقیقی $k_۱ = c_۱ + c_۲$ و $k_۲ = (c_۱ - c_۲)i$ به پایان رساندیم؟ این وضعیت به این دلیل روی داد که $c_۱$ و $c_۲$ مزدوج مختلط یکدیگرند.]

اکنون به بررسی کاربردی در جبر خطی می‌پردازیم.

مثال ۱۸.۱۰ به‌ازای $b \in \mathbf{R}^+$، دترمینان[۱] $n \times n$ زیر را، که با D_n نشان داده می‌شود، در نظر می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix}
b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & b & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b & b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b & b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b & b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & \cdots & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & b & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & b & b & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b & b & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b & b
\end{vmatrix}$$

مقدار D_n را به‌صورت تابعی از n بیابید.

فرض کنیم a_n، $n \geqslant 1$، مقدار دترمینان D_n را نشان دهد. در این صورت

$$a_1 = |b| = b \quad \text{و} \quad a_2 = \begin{vmatrix} b & b \\ b & b \end{vmatrix} = 0$$

اگر D_n را برحسب سطر اول بسط دهیم خواهیم داشت

$$D_n = \underbrace{b\begin{vmatrix}
b & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b & b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b & b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & \cdots & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & b & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & b & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b & b
\end{vmatrix}}_{(\text{این } D_{n-1} \text{ است})}
-b\begin{vmatrix}
b & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b & b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b & b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & \cdots & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & b & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & b & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b & b
\end{vmatrix}$$

وقتی دترمینان دوم را برحسب ستون اول بسط می‌دهیم، می‌بینیم که

$$D_n = bD_{n-1} - (b)(b)D_{n-2} = bD_{n-1} - b^2 D_{n-2}$$

این نتیجه، رابطهٔ بازگشتی $a_n = ba_{n-1} - b^2 a_{n-2}$ به‌ازای $n \geqslant 3$، $a_1 = b$ و $a_2 = 0$، را به‌دست می‌دهد. اگر قرار دهیم $a_n = cr^n$ به‌ازای $c, r \neq 0$ و $n \geqslant 1$، معادلهٔ مشخصه دارای ریشه‌های $b[(1/2) \pm i\sqrt{3}/2]$ خواهد بود.

---

۱. بسط دترمینانها را در پیوست ۲ مورد بحث قرار داده‌ایم.

بنابراین،

$$\begin{aligned}
a_n &= c_1\left[b\left(\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right]^n + c_2\left[b\left(\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right]^n\\
&= b^n\left[c_1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n + c_2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n\right]\\
&= b^n\left[k_1\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+k_2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$b = a_1 = b\left[k_1\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+k_2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \implies 1 = k_1\left(\frac{1}{2}\right)+k_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ k_1+\sqrt{3}k_2 = 2$$

$$0 = a_2 = b^2\left[k_1\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+k_2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \implies 0 = (k_1)\left(\frac{-1}{2}\right)+k_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$k_1 = \sqrt{3}k_2$$

بنابراین، $k_1 = 1$، $k_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و مقدار D_n عبارت است از

$$b^n\left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]$$

اکنون می‌پردازیم به حالت ریشه‌های چندگانه.

حالت (پ): (ریشه‌های حقیقی تکراری)

مثال ۱۹.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ را، که در آن $n \geqslant 0$، $a_0 = 1$ و $a_1 = 3$ حل کنید.

مانند دو حالت دیگر، با فرض $c, r \neq 0$ و $n \geqslant 0$ قرار می‌دهیم $a_n = cr^n$. دراین صورت، $r^2 - 4r + 4 = 0$ معادلهٔ مشخصه است و هر دو ریشهٔ مشخصه عبارت‌اند از $r = 2$. (پس $r = 2$ را «یک ریشهٔ دوگانه» می‌نامیم.) متأسفانه، در حال حاضر دو جواب مستقل خطی در اختیار نداریم: 2^n و 2^n آشکارا مضرب یکدیگرند. به یک جواب (مستقل) دیگر نیاز داریم. $n(2^n)$ را آزمایش می‌کنیم.

اگر $a_n = n(2^n)$ را در رابطهٔ مفروض بگذاریم حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}
4a_{n+1} - 4a_n &= 4(n+1)2^{n+1} - 4n2^n = 2(n+1)2^{n+2} - n2^{n+2} = [2n+2-n]2^{n+2}\\
&= (n+2)2^{n+2} = a_{n+2}
\end{aligned}$$

بنابراین، $n(2^n)$ جواب مستقل دوم است. (این جواب مستقل از جواب نخست است زیرا اگر k ثابت دلخواهی باشد برابری $n2^n = k2^n$ به‌ازای هر $n \geqslant 0$ امکان‌پذیر نیست.)

جواب عمومی به‌صورت $a_n = c_1(2^n) + c_2n(2^n)$ است. با توجه به $a_0 = 1, a_1 = 3$ می‌بینیم که $a_n = 2^n + (1/2)n(2^n) = 2^n + n(2^{n-1})$، $n \geqslant 0$.

به‌طور کلی، اگر $C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \cdots + C_{n-k} a_{n-k} = 0$ که در آن $C_n (\neq 0)$، C_{n-1}، $\cdots$، $C_{n-k} (\neq 0)$ ثابتهای حقیقی‌اند و اگر r ریشهٔ مشخصهٔ m گانه‌ای، $2 \leqslant m \leqslant k$، باشد، در این صورت قسمتی از جواب عمومی که شامل ریشهٔ r است به‌صورت

$$A_0 r^n + A_1 n r^n + A_2 n^2 r^n + \cdots + A_{m-1} n^{m-1} r^n$$
$$= (A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \cdots + A_{m-1} n^{m-1}) r^n$$

است، که در آن A_0، A_1، A_2، $\cdots$، A_{m-1} ثابتهایی دلخواه‌اند.

آخرین مثال این بند حاوی کمی حساب احتمالات است.

مثال ۲۰.۱۰ اگر موردی از سرخجه در مدرسه‌ای مشاهده شده باشد، فرض کنیم p_n احتمال این باشد که حداقل یک مورد سرخجه در nامین هفتهٔ پس از مشاهدهٔ نخستین مورد گزارش شود. آماری که از مدارس جمع‌آوری شده است نشان می‌دهد که $p_n = p_{n-1} - (0/25) p_{n-2}$، $n \geqslant 2$. چون $p_0 = 0$ و $p_1 = 1$، اگر نخستین مورد (از شیوع تازه) روز دوشنبه، اول مارس ۱۹۹۳ مشاهده شده باشد، در چه زمانی برای نخستین بار احتمال وقوع مورد جدیدی از بیماری برای نخستین بار به کمتر از ۰/۰۱ کاهش می‌یابد؟

با فرض $p_n = cr^n$ به‌ازای $c, r \neq 0$، معادلهٔ مشخصهٔ رابطهٔ بازگشتی بالا $r^2 - r + (1/4) = 0 = (r - (1/2))^2$ است. جواب عمومی این رابطه به‌صورت $p_n = (c_1 + c_2 n)(1/2)^n$، $n \geqslant 0$، است. به‌ازای $p_0 = 0$ و $p_1 = 1$، به‌دست می‌آوریم $c_1 = 0$ و $c_2 = 2$ و بنابراین، $p_n = n 2^{-n+1}$، $n \geqslant 0$.

نخستین عدد صحیح n که به‌ازای آن $p_n < 0/01$، عدد ۱۲ است. بنابراین، قبل از ۱۶ مه ۱۹۹۳ احتمال مشاهدهٔ مورد جدید کمتر از ۰/۰۱ نبوده است.

تمرینات ۲.۱۰

۱. رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید. (هیچ جواب نهایی نباید حاوی عددی مختلط باشد.)

الف) $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}$، $n \geqslant 2$ و $a_0 = 1$، $a_1 = 3$

ب) $2a_{n+2} - 11a_{n+1} + 5a_n = 0$، $n \geqslant 0$ و $a_0 = 2$، $a_1 = -8$

پ) $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$، $n \geqslant 1$ و $a_0 = 7$، $a_1 = 3$

ت) $a_{n+2} + a_n = 0$، $n \geqslant 0$ و $a_0 = 0$، $a_1 = 3$

ث) $a_{n+2} + 4a_n = 0$، $n \geqslant 0$ و $a_0 = a_1 = 1$

ج) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$، $n \geqslant 2$ و $a_0 = 5$، $a_1 = 12$

چ) $a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$، $n \geqslant 2$ و $a_0 = 1$، $a_1 = 3$

۲. الف) درستی جوابهای نهایی را در مثالهای ۱۱۰۱۰ و ۱۹۰۱۰ تحقیق کنید.

ب) رابطهٔ بازگشتی مثال ۱۳۰۱۰ را حل کنید.

۳. اگر $a_0 = 0$، $a_1 = 1$، $a_2 = 4$ و $a_3 = 37$ در رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$، که در آن $n \geqslant 0$ و b و c ثابت‌اند، صدق کنند این رابطه را برحسب a_n حل کنید.

۴. مطلوب است تعیین و حل رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد طرق پارک کردن موتورسیکلتها و اتومبیلهای سواری

در ردیفی متشکل از n محل پارک درصورتی که هر موتورسیکلت به یک محل و هر اتومبیل سواری به دو محل پارک نیاز داشته باشد. (همهٔ موتورسیکلتها ظاهری یکسان دارند؛ همهٔ اتومبیلها نیز ظاهری یکسان دارند. ضمناً می‌خواهیم که هر n محل پارک مورداستفاده قرار گیرند.)

۵. در تمرین ۱۴ از بند ۲۰۴ (جلد اول) آموختیم که $F_۰ + F_۱ + F_۲ + \cdots + F_n = \sum_{i=۰}^{n} F_i = F_{n+۲} - ۱$. این یکی از ویژگیهای گوناگون اعداد فیبوناچی است که فرانسوا لوکا[1] (۱۸۴۲ – ۱۸۹۱)، ریاضیدان فرانسوی، تعداد بسیاری از آنها را کشف کرد. گرچه ما این نتیجه را با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کردیم، می‌بینیم که می‌توان با جمع کردن $n + ۱$ معادلهٔ

$$\begin{aligned} F_۰ &= F_۲ - F_۱ \\ F_۱ &= F_۳ - F_۲ \\ \cdots \quad &\cdots \quad \cdots \\ F_{n-۱} &= F_{n+۱} - F_n \\ F_n &= F_{n+۲} - F_{n+۱} \end{aligned}$$

این فرمول را به آسانی به‌دست آورد. برای هر یک از مجموعهای زیر فرمولی به‌دست آورید و سپس نتیجه را با استقرای ریاضی ثابت کنید.

الف) $F_۱ + F_۳ + F_۵ + \cdots + F_{۲n-۱}$، $n \in \mathbf{Z}^+$

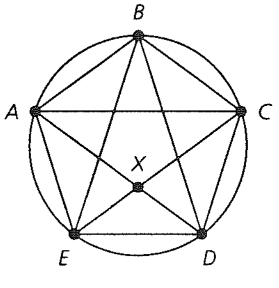
ب) $F_۰ + F_۲ + F_۴ + \cdots + F_{۲n}$، $n \in \mathbf{Z}^+$

۶. الف) ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+۱}}{F_n} = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

(این حد به نسبت طلایی مشهور شده است و غالباً آن را با α نشان می‌دهند.)

ب) پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ را محاط در دایره، همان‌طور که در شکل ۷۰۱۰ نشان داده شده است، در نظر بگیرید.



شکل ۷.۱۰

یک) با استفاده از قاعدهٔ سینوسها و فرمول دو برابر زاویه برای سینوس نشان دهید $\frac{AC}{AX} = ۲\cos ۳۶^\circ$.

دو) با توجه به اینکه $\cos ۱۸^\circ = \sin ۷۲^\circ = ۴ \sin ۱۸^\circ \cos ۱۸^\circ (۱ - ۲\sin^۲ ۱۸^\circ)$ (چرا؟)، نشان

1. François Lucas

دهید $\sin ۱۸^\circ$ ریشه‌ای از معادلهٔ چند جمله‌ای $۸x^۳ - ۴x + ۱ = ۰$ است و از آنجا نتیجه بگیرید که $\sin ۱۸^\circ = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}$

پ) تحقیق کنید $\frac{AC}{AX} = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$

۷. فرض کنید به‌ازای $n \geqslant ۰$، a_n تعدادی طرقی باشد که دنباله‌ای از ۱ها و ۲ها مجموعی برابر با n داشته باشد. مثلاً $a_۳ = ۳$ زیرا (۱) ۱, ۱, ۱؛ (۲) ۱, ۲؛ و (۳) ۲, ۱ مجموعی برابر با ۳ دارند. مطلوب است تعیین و حل رابطه‌ای بازگشتی برای a_n.

۸. ثابت کنید که به‌ازای $n \in \mathbf{N}$، الف) $\sum_{r=۰}^{۵} F_{n+r} = ۴F_{n+۴}$؛ و ب) $\sum_{r=۰}^{۹} F_{n+r} = ۱۱F_{n+۶}$.

۹. n قرص قرمز، سفید، سبز، و آبی در اختیار داریم. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد طرق چیدن این قرصها روی هم به‌طوری‌که هیچ دو قرص آبی روی هم قرار نگیرند، تعیین کرده و سپس آن را حل کنید.

۱۰. تعدادی قرص رنگی به k ($k \geqslant ۲$) رنگ مختلف، از جمله رنگ آبی، در اختیار داریم. مطلوب است تعیین رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد طرق چیدن n تا از این قرصها روی هم به‌طوری‌که هیچ دو قرص آبی روی هم قرار نگیرند.

۱۱. الفبای Σ از چهار نویسهٔ عددی ۱، ۲، ۳، و ۴، و هفت نویسهٔ الفبایی a، b، c، d، e، f، و g تشکیل شده است. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد واژه‌های به طول n (در Σ^*) به‌طوری‌که هیچ دو نویسهٔ الفبایی (یکسان یا متمایز) کنار هم قرار نگیرند، تعیین کرده و سپس آن را حل کنید.

۱۲. الفبای Σ از هفت نویسهٔ عددی و k نویسهٔ الفبایی تشکیل شده است. به ازای $n \geqslant ۰$، a_n تعداد رشته‌های به طول n (در Σ^*) را نشان می‌دهد که شامل هیچ دو نویسهٔ الفبایی (یکسان یا متمایز) کنار هم نیست. اگر $a_{n+۲} = ۷a_{n+۱} + ۶۳a_n$، $n \geqslant ۰$، مقدار k چیست؟

۱۳. رابطهٔ بازگشتی $a_{n+۲} = (a_{n+۱})(a_n)$، $n \geqslant ۰$، را با توجه به $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۲$، حل کنید.

۱۴. فرض کنید به‌ازای $n \geqslant ۱$، a_n تعداد طرق نوشتن n را به‌صورت مجموع مرتبی از اعداد صحیح مثبت نشان دهد که در آن هر جمعوند حداقل ۲ است. (مثلاً $a_۵ = ۳$ زیرا می‌توانیم ۵ را با ۵، ۳ + ۲ و ۲ + ۳ نمایش دهیم.) مطلوب است تعیین و حل رابطه‌ای بازگشتی برای a_n.

۱۵. ذره‌ای به‌طور افقی به طرف راست حرکت می‌کند. به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، مسافتی که این ذره در ثانیه $(n + ۱)$اُم می‌پیماید دو برابر مسافتی است که در ثانیهٔ nام می‌پیماید. اگر x_n، $n \geqslant ۰$، جای این ذره را در آغاز ثانیهٔ $(n + ۱)$ام نشان دهد، مطلوب است تعیین و حل رابطه‌ای بازگشتی برای x_n با شرایط $x_۰ = ۱$ و $x_۱ = ۵$.

۱۶. به‌ازای $n \geqslant ۱$، فرض کنید D_n دترمینان $n \times n$ زیر باشد:

$$\begin{vmatrix}
۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\
۱ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\
۰ & ۱ & ۲ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\
۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & ۲ & ۱ \\
۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۱ & ۲
\end{vmatrix}$$

مطلوب است تعیین و حل رابطه‌ای بازگشتی برای مقدار D_n.

۱۷. رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 4a_n^2 = 0$ را، که در آن $n \geqslant 0$ و $a_0 = 4$ و $a_1 = 13$، حل کنید.

۱۸. مطلوب است تعیین ثابتهای b و c درصورتی‌که $a_n = c_1 + c_2(7^n)$، $n \geqslant 0$، جواب عمومی رابطهٔ $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$، $n \geqslant 0$، باشد.

۱۹. ثابت کنید هر دو عدد فیبوناچی متوالی نسبت به هم اول‌اند.

۲۰. برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی ابداع کنید) که تعیین کند عدد صحیح نامنفی مفروضی عدد فیبوناچی است یا نه.

۳.۱۰ رابطه‌های بازگشتی ناهمگن

اینک به رابطه‌های بازگشتی

$$a_n + C_{n-1}a_{n-1} = f(n), \qquad n \geqslant 1 \tag{1}$$

$$a_n + C_{n-1}a_{n-1} + C_{n-2}a_{n-2} = f(n), \qquad n \geqslant 2 \tag{2}$$

می‌پردازیم، با این فرض که C_{n-1} و C_{n-2} ثابت بوده، در معادلهٔ (۱) داشته باشیم $C_{n-1} \neq 0$، $C_{n-2} \neq 0$ و $f(n)$ متحد با 0 نباشد. گرچه روشی کلی برای حل همهٔ رابطه‌های ناهمگن در دست نیست، وقتی تابع $f(n)$ صورت مشخصی داشته باشد فن موفقیت‌آمیزی برای حل خواهیم یافت.

کار را با حالت خاصی از معادلهٔ (۱)، یعنی وقتی $C_{n-1} = -1$، آغاز می‌کنیم. برای رابطهٔ ناهمگن $a_n - a_{n-1} = f(n)$ داریم

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + f(1) \\
a_2 &= a_1 + f(2) = a_0 + f(1) + f(2) \\
a_3 &= a_2 + f(3) = a_0 + f(1) + f(2) + f(3) \\
&\ \vdots \\
a_n &= a_0 + f(1) + \cdots + f(n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} f(i)
\end{aligned}$$

این نوع رابطه را می‌توانیم برحسب $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ حل کنیم، در صورتی که بتوانیم با توجه به کارهای قبلی فرمول مجموعیابی مناسبی برای آن بیابیم.

مثال ۲۱.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n - a_{n-1} = 3n^2$ را، که در آن $n \geqslant 1$ و $a_0 = 7$، حل کنید.

در اینجا $f(n) = 3n^2$. بنابراین، جواب عمومی عبارت است از

$$a_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} f(i) = 7 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 = 7 + \frac{1}{2}(n)(n+1)(2n+1)$$

وقتی فرمولی برای مجموعیابی در دست نداریم، روش زیر در مورد معادلهٔ (۱) برای توابع $f(n)$ خاصی، بدون توجه به مقدار $C_{n-1}(\neq 0)$، کارساز است. این روش در مورد رابطهٔ ناهمگن مرتبهٔ دوم (۲) نیز به کار می‌آید،

البته باز هم برای توابع $f(n)$ خاصی. این روش که روش ضرایب نامعین نام دارد متکی بر رابطهٔ همگن وابسته است که از گذاشتن ۰ به‌جای $f(n)$ حاصل می‌شود.

برای هر یک از معادلات (۱) یا (۲)، فرض کنیم $a_n^{(h)}$ جواب عمومی رابطهٔ همگن وابسته را نشان دهد و فرض کنیم $a_n^{(p)}$ جوابی برای رابطهٔ ناهمگن مفروض باشد. جملهٔ $a_n^{(p)}$ را جواب خصوصی می‌نامیم. در این صورت $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ جواب عمومی رابطهٔ مفروض است. برای به‌دست آوردن $a_n^{(p)}$ با استفاده از شکل $f(n)$ شکلی را برای $a_n^{(p)}$ حدس می‌زنیم.

مثال ۲۲.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n)$ را، که در آن $n \geqslant 1$ و $a_0 = 2$، حل کنید.

جواب رابطهٔ همگن وابسته عبارت است از $a_n^{(h)} = c(3^n)$. چون $f(n) = 5(7^n)$، در جستجوی جوابی خصوصی مانند $a_n^{(p)}$ به‌صورت $A(7^n)$ خواهیم بود. چون $a_n^{(p)}$ بناست جوابی برای رابطهٔ ناهمگن مفروض باشد، $a_n^{(p)} = A(7^n)$ را در رابطهٔ مفروض می‌گذاریم و می‌بینیم که $A(7^n) - 3A(7^{n-1}) = 5(7^n)$، $n \geqslant 1$: اگر دو طرف را بر 7^{n-1} تقسیم کنیم می‌بینیم که $7A - 3A = 5(7)$، پس $A = 35/4$ و $a_n^{(p)} = (35/4)7^n = (5/4)7^{n+1}$، $n \geqslant 0$. جواب عمومی عبارت است از $a_n = c(3^n) + (5/4)7^{n+1}$. با توجه به $2 = a_0 = c + (5/4)(7)$، داریم $c = -27/4$ و $a_n = (5/4)(7^{n+1}) - (1/4)(3^{n+3})$، $n \geqslant 0$.

مثال ۲۳.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n - 3a_{n-1} = 5(3^n)$ را، که در آن $n \geqslant 1$ و $a_0 = 2$، حل کنید.

مانند مثال ۲۲.۱۰، $a_n^{(h)} = c(3^n)$، ولی در اینجا $a_n^{(h)}$ و $f(n)$ مستقل خطی نیستند. در نتیجه، جواب خصوصی $a_n^{(p)}$ را به‌صورت $Bn(3^n)$ در نظر می‌گیریم. (اگر $a_n^{(p)} = B(3^n)$ را در رابطهٔ مفروض بگذاریم چه روی می‌دهد؟)

پس از گذاشتن $a_n^{(p)} = Bn3^n$ در رابطهٔ مفروض می‌بینیم که $Bn(3^n) - 3B(n-1)(3^{n-1}) = 5(3^n)$، یا $Bn - B(n-1) = 5$؛ پس $B = 5$.

بنابراین، $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (c + 5n)3^n$، $n \geqslant 0$. با توجه به $a_0 = 2$، جواب عمومی $a_n = (2 + 5n)(3^n)$ است.

آنچه را در دو مثال قبلی آموختیم به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم.

رابطهٔ مرتبهٔ اول ناهمگن $a_n + C_{n-1}a_{n-1} = kr^n$ را، که در آن k ثابت است و $n \in \mathbf{Z}^+$، در نظر می‌گیریم. اگر r^n جوابی از رابطهٔ همگن وابسته، یعنی $a_n + C_{n-1}a_{n-1} = 0$ نباشد، در این صورت $a_n^{(p)} = Ar^n$، که A ثابت است. وقتی r^n جوابی از رابطهٔ همگن وابسته است، به‌ازای ثابتی مانند B، $a_n^{(p)} = Bnr^n$.

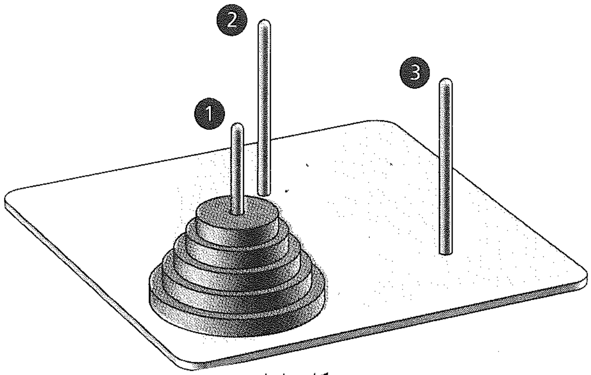
اکنون رابطهٔ مرتبهٔ دوم ناهمگن $a_n + C_{n-1}a_{n-1} + C_{n-2}a_{n-2} = kr^n$ را، که در آن k ثابت است، در نظر می‌گیریم. در اینجا می‌بینیم که

الف) اگر r^n جوابی از رابطهٔ همگن وابسته نباشد، $a_n^{(p)} = Ar^n$، که در آن A ثابت است؛

ب) اگر $a_n^{(h)} = c_1r^n + c_2r_1^n$، $r_1 \neq r$، در این صورت $a_n^{(p)} = Bnr^n$، که در آن B ثابت است؛ و

پ) وقتی $a_n^{(h)} = (c_1 + c_2n)r^n$، به‌ازای ثابتی مانند C، $a_n^{(p)} = Cn^2r^n$.

مثال ۲۴.۱۰ برجهای هانوی. n قرص گرد (با قطرهای متفاوت) راکه هر یک از آنها سوراخی در مرکز دارد در نظر می‌گیریم. این قرصها را می‌توانیم روی هر یک از میله‌های نشان داده شده در شکل ۸۰۱۰ بچینیم. در این شکل، $n = ۵$ و قرصها روی میلهٔ ۱ چنان چیده شده‌اند که هیچ قرصی روی قرص کوچکتر از خود قرار نگرفته است. هدف ما انتقال این قرصها یکی پس از دیگری است به‌طوری‌که در پایان، همین ترکیب قرصها را روی میلهٔ ۳ داشته باشیم. هر یک از میله‌های ۱، ۲، و ۳ را می‌توانیم به‌عنوان مکان موقت هر یک از قرصها به‌کار بگیریم، ولی هرگز مجاز نیستیم که قرصی را روی قرص کوچکتری بگذاریم. حداقل تعداد حرکتهای لازم برای n قرص چند است؟



شکل ۸.۱۰

به‌ازای $n \geqslant ۰$، فرض کنیم a_n حداقل تعداد حرکتهایی باشد که n قرص را به‌صورتی‌که توصیف کردیم از میلهٔ ۱ به میله ۳ انتقال می‌دهد. در این صورت به‌ازای $n + ۱$ قرص به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) n قرص بالایی را مطابق با دستورات داده شده از میلهٔ ۱ به میلهٔ ۲ منتقل می‌کنیم. این عمل در a_n مرحله انجام می‌شود.

ب) بزرگترین قرص را از میلهٔ ۱ به میلهٔ ۳ منتقل می‌کنیم. این یک مرحله می‌شود.

پ) سرانجام، n قرص روی میلهٔ ۲ را با رعایت دستورات مشخص شده به میلهٔ ۳ که بزرگترین قرص را قبلاً آنجا گذاشته‌ایم، منتقل می‌کنیم. این عمل به a_n حرکت دیگر نیاز دارد.

اکنون رابطهٔ $a_{n+۱} = ۲a_n + ۱$ را، که در آن $n \geqslant ۰$ و $a_۰ = ۰$، به‌دست می‌آوریم.

برای $a_{n+۱} - ۲a_n = ۱$ داریم $a_n^{(h)} = c(۲^n)$. چون $f(n) = ۱$ جوابی برای $a_{n+۱} - ۲a_n = ۰$ نیست، قرار می‌دهیم $a_n^{(p)} = A(۱^n) = A$ و از رابطهٔ مفروض می‌بینیم که $A = ۲A + ۱$؛ پس $A = -۱$ و $a_n = c(۲^n) - ۱$.
با توجه به $a_۰ = ۰ = c - ۱$، نتیجه می‌گیریم که $c = ۱$ و $a_n = ۲^n - ۱$، $n \geqslant ۰$.

مثال بعدی از ریاضیات برای امور مالی گرفته شده است.

مثال ۲۵.۱۰ شخصی مبلغ S تومان وام می‌گیرد و قرار بر این است که این وام را در مدت T دورهٔ زمانی مسترد کند. اگر نرخ بهرهٔ این وام برای هر دورهٔ زمانی i باشد، مبلغ (ثابت) P که این شخص باید در پایان هر دوره بپردازد چقدر است؟

فرض کنیم a_n مبلغ بدهی را در پایان دورهٔ nام (یعنی پس از پرداخت nام) نشان دهد. در این صورت در پایان دورهٔ $(n+۱)$ام، مبلغی که این شخص هنوز بدهکار است برابر است با

(مبلغی که در پایان دورهٔ nام بدهکار بود) a_n + (بهره‌ای که در طول دورهٔ $(n+۱)$ام به‌بدهی تعلق گرفته‌است) ia_n
− (مبلغی که در پایان دورهٔ $(n+۱)$ام پرداخته است) P

از اینجا رابطهٔ بازگشتی زیر حاصل می‌شود:

$$a_{n+۱} = a_n + ia_n - P,\quad ۰ \leqslant n \leqslant T-۱,\ a_۰ = S,\ \ a_T = ۰$$

برای این رابطه $a_n^{(h)} = c(۱+i)^n$، درحالی‌که $a_n^{(p)} = A$، زیرا هیچ ثابتی واز جمله P، جواب رابطهٔ همگن وابسته نیست. با توجه به $a_n^{(p)} = A$ می‌بینیم که $A-(۱+i)A = -P$. پس $A = P/i$. از $a_۰ = S$ به‌دست می‌آوریم.

$$a_n = \left(S - \frac{P}{i}\right)(۱+i)^n + \left(\frac{P}{i}\right),\quad ۰ \leqslant n \leqslant T$$

چون $۰ = a_T = \left(S - \frac{P}{i}\right)(۱+i)^T + \left(\frac{P}{i}\right)$، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{P}{i} = \left(\frac{P}{i} - S\right)(۱+i)^T \quad و \quad P = (Si)[۱-(۱+i)^{-T}]^{-۱}$$

اکنون به مسئله‌ای از تحلیل الگوریتمها می‌پردازیم.

مثال ۲۶.۱۰ به‌ازای $n \geqslant ۱$ فرض کنیم S مجموعه‌ای متشکل از ۲^n عدد حقیقی باشد.

روش زیر را برای تعیین عنصرهای ماکسیمم و مینیمم S در پیش می‌گیریم. می‌خواهیم تعداد مقایسه‌هایی را که در طول اجرای این رویه بین عنصرهای S انجام می‌گیرد تعیین کنیم.

اگر a_n تعداد مقایسه‌های لازم را نشان دهد، در این صورت $a_۱ = ۱$. وقتی $n = ۲$، $|S| = ۲^۲ = ۴$، پس، $S = \{x_۱, x_۲, y_۱, y_۲\} = S_۱ \cup S_۲$، که در آن $S_۱ = \{x_۱, x_۲\}$ و $S_۲ = \{y_۱, y_۲\}$. چون $a_۱ = ۱$، برای تعیین عنصرهای ماکسیمم و مینیمم در هر یک از دو مجموعهٔ $S_۱$ و $S_۲$ به یک مقایسه نیاز داریم. با مقایسهٔ عنصرهای مینیمم $S_۱$ و $S_۲$ و سپس عنصرهای ماکسیمم آنها، عنصرهای ماکسیمم و مینیمم S را می‌یابیم و می‌بینیم که $a_۲ = ۴ = ۲a_۱ + ۲$. به‌طورکلی، اگر $|S| = ۲^{n+۱}$، می‌نویسیم $S = S_۱ \cup S_۲$، که در آن $|S_۱| = |S_۲| = ۲^n$. برای تعیین عنصرهای ماکسیمم و مینیمم در هر یک از دو مجموعهٔ $S_۱$ و $S_۲$ به a_n مقایسه نیاز داریم. برای مقایسه کردن عنصرهای ماکسیمم (مینیمم) $S_۱$ و $S_۲$، یک مقایسهٔ دیگر لازم است؛ در نتیجه، $a_{n+۱} = ۲a_n + ۲$، $n \geqslant ۱$.

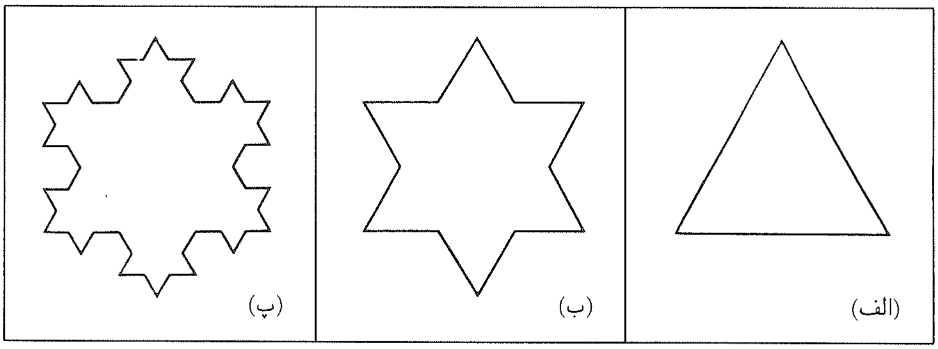
در اینجا $a_n^{(h)} = c(۲^n)$، $a_n^{(p)} = A$، و A ثابت است. اگر $a_n^{(p)}$ را در رابطهٔ بالا بگذاریم می‌بینیم که $A = ۲A + ۲$ یا $A = -۲$. بنابراین، $a_n = c۲^n - ۲$ و با توجه به $a_۱ = ۱ = ۲c - ۲$، داریم $c = ۳/۲$. بنابراین، $a_n = (۳/۲)(۲^n) - ۲$.

توجه! وجود این روش، که به $(۳/۲)(۲^n) - ۲$ مقایسه نیاز دارد، این امکان را نفی نمی‌کند که بتوانیم از طریق روش بسیار هوشمندانهٔ دیگری که مستلزم تعداد کمتری مقایسه باشد به نتایج دلخواه دست یابیم.

مثال ۲۷.۱۰ در ۱۹۰۴ هلگه فون کوخ[1] (۱۸۷۰ – ۱۹۲۴) ریاضیدان سوئدی، خم جالبی ساخت که امروزه به خم «دانه برفی» کوخ معروف است. ترسیم این خم، همان‌طور که در قسمت (الف) شکل ۹.۱۰ نشان داده شده است، با یک مثلث متساوی الاضلاع آغاز می‌شود. طول هر ضلع این مثلث ۱، محیط آن ۳ و مساحت آن $\sqrt{۳}/۴$ است. (یادآوری می‌کنیم که اگر طول ضلع مثلث متساوی الاضلاعی s باشد، آنگاه محیط آن $۳s$ و مساحت آن $s^۲\sqrt{۳}/۴$ است.) سپس با کنارگذاشتن ثلث میانی هر ضلع (از مثلث متساوی‌الاضلاع اصلی) و چسباندن یک مثلث متساوی‌الاضلاع جدید به طول ضلع ۱/۳ به آن، این مثلث به ستارهٔ شکل ۹.۱۰ (ب) تبدیل می‌شود. پس وقتی که از قسمت (الف) شکل به قسمت (ب) می‌رسیم، هر ضلع به طول ۱ به چهار ضلع به طول ۱/۳ تبدیل می‌شود و یک دوازده ضلعی با مساحتی برابر با $(\sqrt{۳}/۴) + (۳)(\sqrt{۳}/۴)(۱/۳)^۲ = \sqrt{۳}/۳$ به‌دست می‌آوریم. با ادامهٔ این فرایند، یعنی با کنارگذاشتن ثلث میانی هر یک از ۱۲ ضلع ستاره و چسباندن یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱/۹ (یعنی $(۱/۳)^۲$) به آن، شکل قسمت (ب) را به شکل قسمت (پ) تبدیل می‌کنیم. اکنون [در شکل ۹.۱۰ (پ)] یک $(۳)۴^۲$ ضلعی داریم که مساحتی برابر با

$$\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right) + (۴)(۳)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)\left[\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲\right]^۲ = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۲۷}$$

دارد.



شکل ۹.۱۰

به‌ازای $n \geqslant ۰$، فرض کنیم a_n مساحت چند ضلعی P_n را نشان دهد که پس از اِعمال n تبدیل از نوع توصیف شده در بالا به مثلث متساوی‌الاضلاع اصلی حاصل شده است [تبدیل نخست از $P_۰$ در شکل ۹.۱۰ (الف) به $P_۱$ در شکل ۹.۱۰ (ب) و تبدیل دوم از $P_۱$ در شکل ۹.۱۰ (ب) به $P_۲$ در شکل ۹.۱۰ (پ).] وقتی‌که از P_n (با $۴^n(۳)$ ضلع) به $P_{n+۱}$ (با $۴^{n+۱}(۳)$ ضلع) می‌رسیم می‌بینیم که

$$a_{n+۱} = a_n + (۴^n(۳))\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۳^{n+۱}}\right)^۲ = a_n + \left(\frac{۱}{۴\sqrt{۳}}\right)\left(\frac{۴}{۹}\right)^n$$

زیرا هنگام تبدیل کردن P_n به $P_{n+۱}$ ثلث میانی هر یک از $۴^n(۳)$ ضلع P_n را کنار می‌گذاریم و مثلث

1. Helge von Koch

متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع $(1/3^{n+1})$ به آن می‌چسبانیم.

قسمت همگن جواب این رابطهٔ بازگشتی ناهمگن مرتبهٔ اول $a_n^{(h)} = A(1)^n = A$ است (که از رابطهٔ بازگشتی همگن وابسته، یعنی $a_{n+1} = a_n$، حاصل می‌شود). چون $(4/9)^n$ جوابی برای رابطهٔ همگن وابسته نیست، قسمت خصوصی جواب عبارت است از $a_n^{(p)} = B(4/9)^n$، که در آن B ثابت است. اگر این را در رابطهٔ بازگشتی

$$a_{n+1} = a_n + \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

بگذاریم می‌بینیم که

$$B\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} = B\left(\frac{4}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

بنابراین،

$$B = \left(\frac{-9}{5}\right)\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right) \quad \text{و} \quad B\left(\frac{4}{9}\right) = B + \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)$$

در نتیجه،

$$a_n = A + \left(\frac{-9}{5}\right)\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n = A - \left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \quad , n \geqslant 0$$

چون $\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right) - A = {}^{-1}\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right) - A = a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = a_0 = A - \left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^{-1} = A - \left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{9}{20\sqrt{3}}\right) = \frac{15+9}{20\sqrt{3}} = \frac{24}{20\sqrt{3}} = \frac{6}{5\sqrt{3}}$$

و

$$a_n = \left(\frac{6}{5\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)\left[6 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] \quad , n \geqslant 0$$

می‌بینیم که $(4/9)^{n-1}$ با بزرگ شدن n به صفر میل می‌کند و a_n به مقدار متناهی $6/(5\sqrt{3})$ نزدیک می‌شود. این مقدار را همچنین می‌توانیم با ادامهٔ محاسباتی که قبل از معرفی رابطهٔ بازگشتی داشتیم به‌دست آوریم. بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که این مساحت حدی، با استفاده از مجموع یک سری هندسی که در قسمت (ب) از مثال ۹ . ۵ دیدیم، برابر است با

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(3)\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(4)(3)\left(\frac{1}{3^2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(4^2)(3)\left(\frac{1}{3^3}\right)^2 + \cdots \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(3)\sum_{n=0}^{\infty} 4^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)\left[\frac{1}{(1-4/9)}\right] = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{6}{5\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

در هر یک از دو مثال بعدی با یک رابطهٔ دوم سر و کار داریم.

مثال ۲۸.۱۰ رابطهٔ بازگشتی

$$a_{n+۲} - ۴a_{n+۱} + ۳a_n = -۲۰۰\,,\ n \geqslant ۰, a_۰ = ۳۰۰۰, a_۱ = ۳۳۰۰$$

را حل کنید. در اینجا $a_n^{(h)} = c_۱(۳^n) + c_۲(۱^n) = c_۱(۳^n) + c_۲$. چون $f(n) = -۲۰۰ = -۲۰۰(۱^n)$ جوابی برای رابطهٔ همگن وابسته است، پس به‌ازای ثابتی مانند A، $a_n^{(p)} = An$. در نتیجه،

$$A(n+۲) = -۴A(n+۱) + ۳An = -۲۰۰$$

پس $۲A = -۲۰۰$ و در نتیجه، $A = ۱۰۰$.

بنابر این، $a_n = c_۱(۳^n) + c_۲ + ۱۰۰n$. با توجه به $a_۰ = ۳۰۰۰$ و $a_۱ = ۳۳۰۰$، داریم $a_n = ۱۰۰(۳^n) + ۲۹۰۰ + ۱۰۰n$، $n \geqslant ۰$.

در مثال بعدی فرصت دیگری برای بررسی تابع پیچیدگی زمانی الگوریتم به‌دست می‌آید.

مثال ۲۹.۱۰ در شکل ۱۰۰۱۰ قطعه برنامهٔ پاسکالی داریم که می‌توانیم آن را برای محاسبهٔ nامین عدد فیبوناچی، یعنی F_n، $n \geqslant ۰$، به‌کار گیریم. این برنامه (یا الگوریتم) را به سبب وجود دو خط پایانی تابع Fib (که سایه دارند) بازگشتی می‌نامیم. (در مثال ۷۰۰۵ از بند ۸۰۵ (جلد اول) برنامه‌ای تکراری برای محاسبهٔ F_n به‌ازای $n \in \mathrm{N}$ داشتیم.) تابع پیچیدگی زمانی f را برای این برنامه به‌ازای $n \geqslant ۰$ با

تعداد جمعهای انجام گرفته در محاسبهٔ F_n = $f(n) = a_n$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $f(۰) = a_۰ = ۰$، $f(۱) = a_۱ = ۰$ و از خط

```
Fib := Fib(n-1) + Fib(n-2)        (*)
```

در برنامه، رابطهٔ بازگشتی ناهمگن

$$a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} + ۱, \quad n \geqslant ۲$$

را به‌دست می‌آوریم، که در آن جمعوند ۱ به‌سبب وجود جمع در رابطهٔ (*) وارد شده است. در اینجا می‌بینیم که $a_n^{(h)} = c_۱\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n + c_۲\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n$ و $a_n^{(p)} = A$، که در آن A ثابت است. پس از گذاشتن $a_n^{(p)}$ در رابطهٔ بازگشتی ناهمگن مفروض می‌بینیم که

$$A = A + A + ۱$$

پس $A = -۱$ و $a_n = c_۱\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n + c_۲\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n - ۱$

چون $a_0 = 0$ و $a_1 = 0$، نتیجه می‌گیریم که $-1 = c_1 + c_2$ یا $c_1 + c_2 = 1$ و

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \text{ یا } 0=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-1$$

از این معادلات حاصل می‌شود $c_1 = (1+\sqrt{5})/(2\sqrt{5})$ و $c_2 = (\sqrt{5}-1)/(2\sqrt{5})$. در نتیجه،

$$f(n)=a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n-1$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left[\frac{1+\sqrt{5})}{2}\right]^{n+1}-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left[\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right]^{n+1}-1$$

```
Program FibNum2(input,output);
Var
    n: integer;

Function Fib(n: integer): integer;

Begin
    If n=0 then
           Fib := 0;
    If n=1 then
           Fib := 1;
    If n>=2 then
           Fib := Fib(n-1)+Fib(n-2)
End;

Begin
    Writeln('Provide the nonnegative integer n.');
    Readln(n);
    Writeln('The Fibonacci number for subscript n= ',n:0);
    Write(' is ', Fib(n):0, '.')
End.
```

شکل ۱۰.۱۰

می‌بینیم که $[(1-\sqrt{5})/2]^{n+1}$ با بزرگ شدن n به 0 نزدیک می‌شود زیرا $1 > \left|(1-\sqrt{5})/2\right|$.

در نتیجه، $f(n) \doteq (1/\sqrt{5})(1+\sqrt{5}/2)^{n+1} = (1+\sqrt{5}/(2\sqrt{5}))(1+\sqrt{5}/2)^n$ و می‌توانیم بنویسیم $f \in \mathcal{O}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. این نتیجه می‌گوید که رهیافتی که برای محاسبهٔ F_n به‌کار گرفتیم پیچیدگی نمایی دارد و در مقایسه با رهیافتی که در مثال ۵۰۰۷ در بند ۵۰۸ (جلد اول) دیدیم بسیار ناموثر است.

اکنون فنونی را که در مثالهای ۲۲۰۱۰ تا ۲۹۰۱۰ برای حل روابط مورد بحث قرار دادیم خلاصه می‌کنیم و آنها را تعمیم می‌دهیم.

رابطهٔ بازگشتی ناهمگن خطی (با ضرایب ثابت) $C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \cdots + C_{n-k} a_{n-k} = f(n)$، که در آن $C_n, C_{n-k} \neq 0$، مفروض است. فرض کنیم $a_n^{(h)}$ قسمت همگن جواب a_n باشد.

۱) اگر $f(n)$ مضرب ثابتی از یکی از صورتهای موجود در نخستین ستون جدول ۲۰۱۰ باشد و جوابی برای رابطهٔ همگن وابسته نباشد، در این صورت $a_n^{(p)}$ به صورتی است که در ستون دوم جدول ۲۰۱۰ نشان داده شده است. (در اینجا A، B، A_0، A_1، A_2، $\cdots$، A_{t-1} و A_t ثابتهایی هستند که پس از گذاشتن $a_n^{(p)}$ در رابطهٔ مفروض تعیین می‌شوند؛ t، r و α نیز ثابت‌اند.)

۲) وقتی $f(n)$ برابر باشد با مجموع مضربهای ثابت جمله‌هایی نظیر آنهایی که در نخستین ستون جدول قرار دارند و هیچ‌یک از این جمله‌ها جوابی برای رابطهٔ همگن وابسته نباشد، در این صورت $a_n^{(p)}$ مجموع جمله‌های متناظر در ستون مربوط به $a_n^{(p)}$ است. مثلاً، اگر $f(n) = n^2 + 3\sin 2n$ و اگر هیچ جمعوندی در $f(n)$ جوابی برای رابطهٔ همگن وابسته نباشد، در این صورت $a_n^{(p)} = (A_2 n^2 + A_1 n + A_0) + (A \sin 2n + B \cos 2n)$.

جدول ۲.۱۰

	$a_n^{(p)}$
c, ثابت	A, ثابت
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in \mathbf{Z}^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in \mathbf{R}$	Ar^n
$\sin \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$\cos \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$n^t r^n$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin \alpha n$	$Ar^n \sin \alpha n + Br^n \cos \alpha n$
$r^n \cos \alpha n$	$Ar^n \sin \alpha n + Br^n \cos \alpha n$

۳) اگر جمعوندی از $f(n)$ مانند $f_1(n)$ مضرب ثابتی از یک جواب رابطهٔ همگن وابسته باشد، کار ظریفتر و پیچیده‌تر می‌شود. مثلاً وقتی که $f(n)$ حاوی جمعوندهایی نظیر cr^n یا $(c_1 + c_2 n) r^n$، و r یک ریشهٔ مشخصه باشد، چنین وضعیتی روی می‌دهد. اگر $f_1(n)$ باعث بروز این مشکل شود، جواب خصوصی $a_1^{(p)}$ متناظر با $f_1(n)$ را در کوچکترین توانی از n، مثلاً n^s، که هیچ جمعوندی از $n^s f_1(n)$ جوابی برای رابطهٔ همگن وابسته نباشد ضرب می‌کنیم. در این صورت، $n^s a_{n_1}^{(p)}$ قسمت متناظر در $a_n^{(p)}$ خواهد بود.

برای به کارگیری بعضی از نکاتی که در ملاحظات قبلی دربارهٔ جوابهای خصوصی روابط بازگشتی ناهمگن بیان کردیم، در مثال بعدی کاربردی را می‌بینیم که بیش از یک راه حل دارد.

مثال ۳۰.۱۰ به‌ازای $n \geqslant 2$، فرض کنیم در مجلسی n نفر حضور دارند و هر یک از این افراد (دقیقاً یک‌بار) با هر یک از افراد دیگر دست‌می‌دهد (و هیچ‌کس با خودش دست نمی‌دهد). اگر a_n تعداد کل دست‌دادنها باشد،

در این صورت $a_2 = 1$ و

$$a_{n+1} = a_n + n\,, \quad n \geqslant 2 \tag{3}$$

زیرا وقتی شخص $(n+1)$ام وارد می‌شود، با هر یک از n شخص دیگری که قبلاً وارد شده‌اند دست می‌دهد.

بنابر جدول ۲۰۱۰ می‌توانیم تصور کنیم که جواب خصوصی معادلهٔ (۳) برابر است با $A_1 n + A_0$، که در آن A_0 و A_1 ثابت‌اند. ولی در اینجا رابطهٔ همگن وابسته $a_{n+1} = a_n$ یا $a_{n+1} - a_n = 0$ است و در نتیجه، $a_n^{(h)} = c(1)^n = c$، که در آن c ثابت دلخواهی را نشان می‌دهد. بنابراین، جمعوند A_0 (در $A_1 n + A_0$) جوابی برای رابطهٔ همگن وابسته است. در نتیجه، سومین ملاحظه‌ای که در بالا ذکر کردیم می‌گوید که باید $A_1 n + A_0$ را در کوچکترین توانی از n که به‌ازای آن دیگر جمعوند ثابتی نداشته باشیم ضرب کنیم. این کار با ضرب کردن $A_1 n + A_0$ در n^1 انجام می‌گیرد و بنابراین، می‌بینیم که

$$a_n^{(p)} = A_1 n^2 + A_0 n$$

وقتی این نتیجه را در معادلهٔ (۳) بگذاریم ملاحظه می‌کنیم که

$$A_1(n+1)^2 + A_0(n+1) = A_1 n^2 + A_0 n + n$$

یا

$$A_1 n^2 + (2A_1 + A_0)n + (A_1 + A_0) = A_1 n^2 + (A_0 + 1)n$$

با مقایسهٔ ضرایب توانهای مشابه n می‌بینیم که

$$(n^2):\ \ A_1 = A_1;$$
$$(n):\ \ 2A_1 + A_0 = A_0 + 1;$$
$$(n^0):\ \ A_1 + A_0 = 0$$

در نتیجه، $A_1 = 1/2,\ A_0 = -1/2$؛ پس

$a_n^{(p)} = (1/2)n^2 + (-1/2)n$ و $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c + (1/2)(n)(n-1)$

چون $a_2 = 1$، از $1 = a_2 = c + (1/2)(2)(1)$ نتیجه می‌گیریم که $c = 0$ و به‌ازای $n \geqslant 2$

$$a_n = (1/2)(n)(n-1)$$

این نتیجه را به این ترتیب نیز می‌توانیم به‌دست آوریم که n نفر را در اتاقی در نظر بگیریم و هر دست دادن ممکن را متناظر با گزینشی ۲تایی از این مجموعهٔ n عنصری تلقی کنیم. تعداد این گزینشها برابر با $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = (1/2)(n)(n-1)$ است. [یا می‌توانیم این n نفر را به‌عنوان رأسهای گرافی غیر سودار (و بدون طوقه) تلقی کنیم، که در آن هر یال متناظر با یک دست دادن است. در این صورت پاسخ مطلوب برابر است با تعداد یالهای گراف کامل K_n و می‌دانیم که تعداد این یالها $\binom{n}{2} = (1/2)(n)(n-1)$ است.]

آخرین مثال این بند نیز نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم نتایج جدول ۳.۱۰ را به‌کار گیریم.

مثال ۳۱.۱۰

الف) رابطهٔ بازگشتی ناهمگن

$$a_{n+2} - 10a_{n+1} + 21a_n = f(n), \quad n \geqslant 0$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا قسمت همگن جواب عبارت است از

$$a_n^{(h)} = c_1(3^n) + c_2(7^n)$$

که در آن c_1 و c_2 دو ثابت دلخواه‌اند.

در جدول ۳.۱۰ صورت جواب خصوصی را به‌ازای انتخابهای معینی برای $f(n)$ فهرست کرده‌ایم. در اینجا ۱۱ ثابت A_i، به‌ازای $0 \leqslant i \leqslant 10$، ثابتهای خاصی هستند که مقدار آنها پس از گذاشتن $a_n^{(p)}$ در رابطهٔ بازگشتی ناهمگن مفروض تعیین می‌شود.

جدول ۳.۱۰

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
5	A_0
$3n^2 - 2$	$A_3n^2 + A_2n + A_1$
$7(11^n)$	$A_4(11^n)$
$31(r^n), r \neq 3, 7$	$A_5(r^n)$
$6(3^n)$	A_6n3^n
$2(3^n) - 8(9^n)$	$A_7n3^n + A_8(9^n)$
$4(3^n) + 3(7^n)$	$A_9n3^n + A_{10}n7^n$

ب) قسمت همگن جواب برای

$$a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = f(n), \quad n \geqslant 2$$

عبارت است از

$$a_n^{(h)} = c_1(-2)^n + c_2n(-2)^n$$

که در آن c_1 و c_2 دو ثابت دلخواه را نشان می‌دهند. در نتیجه،

۱) اگر $f(n) = 5(-2)^n$، آنگاه $a_n^{(p)} = An^2(-2)^n$؛

۲) اگر $f(n) = 7n(-2)^n$، آنگاه $a_n^{(p)} = Bn^3(-2)^n$؛ ولی،

۳) اگر $f(n) = -11n^2(-2)^n$، آنگاه $a_n^{(p)} = Cn^4(-2)^n$.

(در اینجا A، B، و C پس از گذاشتن $a_n^{(p)}$ در رابطهٔ بازگشتی ناهمگن مفروض تعیین می‌شوند.)

پ) وقتی رابطهٔ بازگشتی ناهمگن

$$a_{n+2} + a_n = f(n), \quad n \geqslant 0$$

را بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که به‌ازای ثابتهای دلخواه c_1 و c_2 داریم $a_n^{(h)} = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
بنابراین، نتیجه می‌گیریم که اگر

$$f(n) = 5\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 7\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

در این صورت،

$$a_n^{(p)} = A\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + C\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + D\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

(چهار ثابت A، B، C، و D را می‌توان با گذاشتن $a_n^{(p)}$ در رابطهٔ بازگشتی ناهمگن مفروض محاسبه کرد.)

تمرینات ۳.۱۰

هر یک از رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید.

۱. الف) $a_{n+1} - a_n = 2n + 3$، $n \geqslant 0$، $a_0 = 1$

ب) $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n$، $n \geqslant 0$، $a_0 = 3$

پ) $a_{n+1} - 2a_n = 5$، $n \geqslant 0$، $a_0 = 1$

ت) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$، $n \geqslant 0$، $a_0 = 1$

۲. با استفاده از رابطه‌ای بازگشتی فرمولی برای $\sum_{i=0}^{n} i^2$ بیابید.

۳. الف) فرض کنید n خط در صفحه چنان رسم شده‌اند که هر خط همهٔ خطهای دیگر را قطع می‌کند ولی هیچ سه خطی در یک نقطه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. فرض کنید a_n به‌ازای $n \geqslant 0$ تعداد ناحیه‌هایی در صفحه باشد که این n خط پدید می‌آورند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و سپس آن را حل کنید.

ب) برای وضعیت قسمت (الف)، فرض کنید b_n تعداد ناحیه‌های بیکران حاصل باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای b_n بیابید و سپس آن را حل کنید.

۴. شخصی در نخستین روز سال نو حساب پس‌اندازی به مبلغ ۱۰۰۰ تومان با بهرهٔ ۶٪ که ماه به ماه واریز می‌شود افتتاح می‌کند. این شخص در آغاز هر ماه ۲۰۰ تومان به حساب پس‌انداز خود می‌افزاید. اگر این کار چهار سال ادامه یابد (و به این ترتیب ۴۷ تا ۲۰۰ تومان به حساب افزوده شود)، ارزش این حساب پس‌انداز دقیقاً چهار سال پس از افتتاح آن چقدر است؟

۵. رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید.

الف) $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n$، $n \geqslant 0$، $a_0 = 0$، $a_1 = 1$

ب) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 7$، $n \geqslant 0$، $a_0 = 1$، $a_1 = 2$

پ) $a_{n+2} - a_n = \sin(n\pi/2)$، $n \geqslant 0$، $a_0 = 1$، $a_1 = 1$

۶. رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n) + 7(3^n)$ را، که در آن $n \geqslant 0$، $a_0 = 1$ و $a_1 = 4$، حل کنید.

۷. رابطهٔ بازگشتی $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 3 + 5n$، $n \geqslant 0$، را حل کنید.

۸. مطلوب است تعیین تعداد دنباله‌های n رقمی مرکب از ارقام ۰، ۱، ۲، و ۳ که در آنها هرگز رقم ۳ سمت راست ۰ قرار نمی‌گیرد.

۹. شخصی از بانکی ۲۵۰۰ تومان با بهرهٔ ۱۲٪، که ماه به ماه حساب می‌شود، وام می‌گیرد. اگر بنا باشد این شخص وام خود را در مدت دو سال بازپرداخت کند، ماهی چقدر باید بپردازد؟

۱۰. جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_2 a_n = b_3 n + b_4$، $n \geqslant 0$، که در آن، به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، b_i ثابت است، عبارت است از $c_1 2^n + c_2 3^n + n - 7$. b_i را به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$ بیابید.

۱۱. رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید.

الف) $a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 6a_n^2 = 7n$، $n \geqslant 0$، $a_0 = a_1 = 1$

ب) $a_n + na_{n-1} = n!$، $n \geqslant 1$، $a_0 = 1$

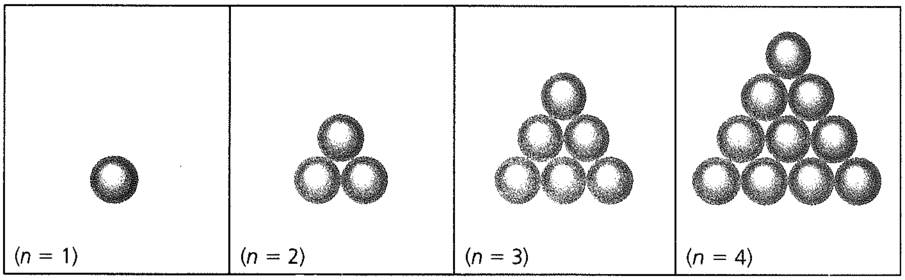
پ) $a_n^2 - 2a_{n-1} = 0$، $n \geqslant 1$، $a_0 = 2$ (فرض کنید $b_n = \log_2 a_n$، $n \geqslant 0$)

۱۲. الف) به‌ازای $n \geqslant 1$، nامین عدد مثلثی، t_n، با $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ تعریف می‌شود. اگر به‌ازای هر $n \geqslant 1$ قرار دهیم $s_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$، یعنی s_n مجموع نخستین n عدد مثلثی باشد، رابطه‌ای بازگشتی برای s_n بیابید و سپس آن را حل کنید.

ب) شخصی در یک آزمایشگاه شیمی آلی، ساختاری بلورین را که از ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ لایهٔ اتمی مثلثی تشکیل شده است سنتز می‌کند. لایهٔ نخست این ساختار یک اتم دارد، لایهٔ دوم سه اتم دارد، لایهٔ سوم شش اتم دارد و، به‌طورکلی، لایهٔ nام دارای $1 + 2 + \cdots + n = t_n$ اتم است. (می‌توان چنین تصور کرد که هر لایه، جز آخرین لایه، روی فضاهای خالی موجود بین اتمهای مجاور در لایهٔ بعدی قرار داده شده است. شکل ۱۱.۱۰ را ببینید.)

یک) در هر یک از این ساختارهای بلورین چند اتم وجود دارد؟

دو) چند تا از اتمها (اکیداً) بین لایه‌های ۱۰۰۰۰۰ام و ۱۰۰۰۰۰۰ام قرار گرفته‌اند؟



شکل ۱۱.۱۰

۱۳. مطلوب است نوشتن برنامه‌ای کامپیوتری (یا ابداع الگوریتمی) برای حل مسألهٔ برجهای هانوی به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$. این برنامه باید مراحل لازم برای انتقال n قرص مفروض را از میلهٔ ۱ به میلهٔ ۳، با توجه به محدودیتهای مشخص شده در مثال ۲۴.۱۰، به‌دست دهد.

۴.۱۰ روش توابع مولد

اکنون برای همهٔ حالتهای گوناگونی که برای رابطه‌های بازگشتی خطی ناهمگن در نظرگرفتیم از توابع مولد یاری می‌گیریم. با این فن هم جواب همگن و هم جواب خصوصی a_n به‌دست می‌آید و شرایط آغازی مفروض نیز منظور می‌شود. علاوه بر آن، با این روش توانایی انجام کارهای بیشتری را نیز خواهیم داشت.

مثال ۳۲،۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n - 3a_{n-1} = n$، $n \geqslant 1$، $a_0 = 1$، را حل کنید.
این رابطه مجموعه‌ای نامتناهی از معادلات را نمایش می‌دهد:

$$\begin{array}{ll}(n=1) & a_1 - 3a_0 = 1\\ (n=2) & a_2 - 3a_1 = 2\\ (n=3) & a_3 - 3a_2 = 3\\ \vdots & \vdots \quad \vdots\end{array}$$

اگر معادلهٔ نخست را در x، معادلهٔ دوم را در x^2، معادلهٔ سوم را در x^3 و غیره، ضرب کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\begin{array}{ll}(n=1) & a_1x^1 - 3a_0x^1 = 1x^1\\ (n=2) & a_2x^2 - 3a_1x^2 = 2x^2\\ (n=3) & a_3x^3 - 3a_2x^3 = 3x^3\\ \vdots & \vdots \quad \vdots\end{array}$$

اگر این مجموعه معادلات را با هم جمع کنیم، می‌بینیم که

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \qquad (1)$$

می‌خواهیم a_n را برحسب n بیابیم. برای انجام این کار، فرض می‌کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تابع مولد (معمولی) برای دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، $\cdots$ باشد. در این صورت معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(f(x) - a_0) - 3x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \left(= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n\right) \qquad (2)$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ ، طرف چپ معادلهٔ (۲) می‌شود

$$(f(x) - 1) - 3xf(x)$$

برای اینکه بتوانیم پیش برویم به تابع مولد دنبالهٔ ۰، ۱، ۲، ۳، $\cdots$ نیاز داریم. با توجه به قسمت (پ) از مثال ۹٫۵ می‌بینیم که

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

در نتیجه، $\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$ و $(f(x) - 1) - 3xf(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$، بنابراین،

$$f(x) = \frac{1}{(1-3x)} + \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

با استفاده از روش تجزیه به کسرهای جزئی، می‌بینیم که

$$\frac{x}{(1-x)^2(1-3x)}=\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{(1-3x)}$$

یا

$$x=A(1-x)(1-3x)+B(1-3x)+C(1-x)^2$$

با تخصیص مقادیر زیر به x به‌دست می‌آوریم

$$\begin{array}{lll}(x=1) & : 1=B(-2), & B=-\frac{1}{2}\\ \left(x=\frac{1}{3}\right) & : \frac{1}{3}=C\left(\frac{2}{3}\right)^2, & C=\frac{3}{4}\\ (x=0) & : 0=A+B+C, & A=-(B+C)=-\frac{1}{4}\end{array}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{1-3x}+\frac{(\frac{-1}{4})}{(1-x)}+\frac{(\frac{-1}{2})}{(1-x)^2}+\frac{(\frac{3}{4})}{(1-3x)}\\&=\frac{(\frac{7}{4})}{(1-3x)}+\frac{(\frac{-1}{4})}{(1-x)}+\frac{(\frac{-1}{2})}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

با تعیین ضریب x^n در هر یک از این سه جمعوند، a_n را می‌یابیم.

الف)
$$\begin{aligned}\frac{(\frac{7}{4})}{(1-3x)}&=\left(\frac{7}{4}\right)\left[\frac{1}{(1-3x)}\right]\\&=\left(\frac{7}{4}\right)\left[1+(3x)+(3x)^2+(3x)^3+\cdots\right]\end{aligned}$$

و ضریب x^n برابر با $\left(\frac{7}{4}\right)3^n$ است.

ب) $\frac{(\frac{-1}{4})}{(1-x)}=(\frac{-1}{4})[1+x+x^2+\cdots]$ و در اینجا ضریب x^n برابر $(-\frac{1}{4})$ است.

پ)
$$\begin{aligned}\frac{(-\frac{1}{2})}{(1-x)^2}&=(-1/2)(1-x)^{-2}\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\binom{-2}{0}+\binom{-2}{1}(-x)+\binom{-2}{2}(-x)^2+\binom{-2}{3}(-x)^3+\cdots\right]\end{aligned}$$

و ضریب x^n عبارت است از

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\binom{-2}{n}(-1)^n=\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^n\binom{2+n-1}{n}(-1^n)=\left(-\frac{1}{2}\right)(n+1)$$

بنابراین، $a_n=(7/4)3^n-(1/2)n-(3/4)$ ، $n\geqslant 0$. (توجه داشته باشید که در اینجا نظر خاصی به $a_n^{(p)}$ نداریم. ضمناً با استفاده از فنون بند ۳۰۱۰ نیز همین جواب حاصل می‌شود.)

در مثال بعدی آنچه را که در مثال ۱۰ · ۳۲ آموختیم به یک رابطهٔ مرتبهٔ دوم تعمیم می‌دهیم. این بار جواب را در قالب فهرستی از دستورالعملها ارائه می‌کنیم که برای به‌کار بردن روش تابع مولد می‌توان از آن پیروی کرد.

مثال ۳۳.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_۰ = ۳$، $a_۱ = ۷$ و

$$a_{n+۲} - ۵a_{n+۱} + ۶a_n = ۲ \,, \quad n \geqslant ۰$$

را در نظر می‌گیریم.

۱) نخست این رابطه را در $x^{n+۲}$ ضرب می‌کنیم زیرا $n + ۲$ بزرگترین اندیس است. در نتیجه،

$$a_{n+۲}x^{n+۲} - ۵a_{n+۱}x^{n+۲} + ۶a_n x^{n+۲} = ۲x^{n+۲}$$

۲) سپس همهٔ معادلات حاصل از مرحلهٔ (۱) را با هم جمع می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_{n+۲}x^{n+۲} - ۸\sum_{n=۰}^{\infty} a_{n+۱}x^{n+۲} + ۶\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+۲} - ۲\sum_{n=۰}^{\infty} x^{n+۲}$$

۳) برای آنکه اندیس a با توان متناظر x جور باشد، معادلهٔ مرحلهٔ (۲) را به‌صورت

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_{n+۲}x^{n+۲} - ۵x\sum_{n=۰}^{\infty} a_{n+۱}x^{n+۱} + ۶x^۲\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n = ۲x^۲\sum_{n=۰}^{\infty} x^n$$

می‌نویسیم. در اینجا نیز سری توانی طرف راست معادله را به‌صورتی می‌نویسیم که بتوانیم آنچه را در بند ۲ از فصل ۹ آموختیم به کار گیریم.

۴) فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ تابع مولد برای جواب موردنظر باشد. اکنون معادلهٔ مرحلهٔ (۳) به‌صورت

$$(f(x) - a_۰ - a_۱x) - ۵x(f(x) - a_۰) + ۶x^۲f(x) = \frac{۲x^۲}{۱ - x}$$

یا

$$(f(x) - ۳ - ۷x) - ۵x(f(x) - ۳) + ۶x^۲f(x) = \frac{۲x^۲}{۱ - x}$$

درمی‌آید.

۵) پس از حل این معادله نسبت به $f(x)$، داریم

$$(۱ - ۵x + ۶x^۲)f(x) = ۳ - ۸x + \frac{۲x^۲}{۱ - x}$$

و از آنجا نتیجه می‌گیریم که

$$f(x) = \frac{۳ - ۸x}{(۱ - ۵x + ۶x^۲)} + \frac{۲x^۲}{(۱ - ۵x + ۶x^۲)(۱ - x)}$$

$$= \frac{(۳ - ۸x)(۱ - x) + ۲x^۲}{(۱ - x)(۱ - ۲x)(۱ - ۳x)} = \frac{۱۰x^۲ - ۱۱x + ۳}{(۱ - x)(۱ - ۲x)(۱ - ۳x)}$$

با استفاده از تجزیه به کسرهای جزئی می‌بینیم که

$$f(x) = \frac{۲}{۱ - ۳x} + \frac{۱}{۱ - x} = ۲\sum_{n=۰}^{\infty}(۳x)^n + \sum_{n=۰}^{\infty} x^n$$

در نتیجه، $a_n = ۲(۳^n) + ۱$، $n \geqslant ۰$.

مثال دیگری را در نظر می‌گیریم، که نتیجه‌ای آشنا دارد.

مثال ۳۴.۱۰ فرض کنیم $n \in \mathbf{N}$. به‌ازای $r \geqslant ۰$، فرض کنیم (تعداد طرقی که می‌توانیم، با مجاز بودن تکرار، r شئ را از مجموعه‌ای متشکل از n شیء متمایز برگزینیم) $= a(n, r)$

به‌ازای $n \geqslant ۱$، فرض کنیم $\{b_۱, b_۲, \cdots, b_n\}$ مجموعهٔ این اشیا باشد و شیء $b_۱$ را در نظر می‌گیریم. دقیقاً دو وضعیت ممکن است روی دهد.

الف) شیء $b_۱$ هرگز برگزیده نشود. بنابراین، r شئ از مجموعهٔ $\{b_۲, \cdots, b_n\}$ برگزیده می‌شوند. این کار را به $a(n - ۱, r)$ طریق می‌توان انجام داد.

ب) شیء $b_۱$ حداقل یک بار برگزیده شود. در این صورت باید $(r - ۱)$ شیء را از $\{b_۱, b_۲, \cdots b_n\}$ برگزینیم، و در این گزینش باز هم می‌توانیم $b_۱$ را برگزینیم. $a(n, r - ۱)$ طریق برای انجام این کار وجود دارد.

در این صورت، $a(n, r) = a(n - ۱, r) + a(n, r - ۱)$، زیرا این دو حالت همهٔ امکانات را دربردارند و مانع جمع‌اند.

فرض کنیم $f_n = \sum_{r=۰}^{\infty} a(n, r)x^r$ تابع مولد برای دنبالهٔ $a(n, ۰)$، $a(n, ۱)$، $a(n, ۲)$، $\cdots$ باشد. [در اینجا $f(n)$ خلاصه‌نویسی برای $f_n(x)$ است.] از $a(n, r) = a(n - ۱, r) + a(n, r - ۱)$، که در آن $n \geqslant ۱$ و $r \geqslant ۱$، نتیجه می‌گیریم که $a(n, r)x^r = a(n - ۱, r)x^r + a(n, r - ۱)x^r$ و

$$\sum_{r=۱}^{\infty} a(n, r)x^r = \sum_{r=۱}^{\infty} a(n - ۱, r)x^r + \sum_{r=۱}^{\infty} a(n, r - ۱)x^r$$

با توجه به اینکه به‌ازای $n \geqslant ۰$، $a(n, ۰) = ۱$ و به‌ازای $r > ۰$، $a(۰, r) = ۰$، می‌نویسیم

$$f_n - a(n, ۰) = f_{n-۱} - a(n - ۱, ۰) + x\sum_{r=۱}^{\infty} a(n, r - ۱)x^{r-۱}$$

بنابراین، $f_n - ۱ = f_{n-۱} - ۱ + xf_n$. پس $f_n - xf_n = f_{n-۱}$ یا $f_n = f_{n-۱}/(۱ - x)$.

مثلاً اگر $n = ۵$، در این صورت

$$f_۵ = \frac{f_۴}{(۱ - x)} = \frac{۱}{(۱ - x)} \times \frac{f_۳}{(۱ - x)} = \frac{f_۳}{(۱ - x)^۲} = \frac{f_۲}{(۱ - x)^۳} = \frac{f_۱}{(۱ - x)^۴}$$
$$= \frac{f_۰}{(۱ - x)^۵} = \frac{۱}{(۱ - x)^۵}$$

زیرا $f_۰ = a(۰,۰) + a(۰,۱)x + a(۰,۲)x^۲ + \cdots = ۱ + ۰ + ۰ + \cdots$.

به‌طورکلی، $f_n = \frac{۱}{(۱-x)^n} = (۱-x)^{-n}$ و بنابراین، $a(n,r)$ ضریب x^r در $(۱-x)^{-n}$ است که برابر است با $\binom{-n}{r}(-۱)^r = \binom{n+r-۱}{r}$.

[در اینجا رابطه‌ای بازگشتی برای $a(n,r)$ را مورد بررسی قرار دادیم که تابعی گسسته از دو متغیر (صحیح) $n, r \geqslant ۰$ است.]

آخرین مثال این بند نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم با استفاده از تابع مولد دستگاهی از رابطه‌های بازگشتی را حل کنیم.

مثال ۱۰ ۳۵ این مثال الگویی تقریبی برای انتشار نوترونهای با انرژی بالا و پایین، وقتی‌که این نوترونها به هسته‌های ماده‌ای شکافتنی (مانند اورانیم) برخورد می‌کنند و جذب می‌شوند، به‌دست می‌دهد. در اینجا با راکتور سریعی سر و کار داریم که در آن هیچ مهارگری (مانند آب) وجود ندارد. (در عمل، همهٔ نوترونها انرژی نسبتاً بالا دارند و فقط دو سطح انرژی وجود ندارد. طیف پیوسته‌ای از سطوح انرژی وجود دارد و نوترونهایی را که در انتهای بالایی طیف قرار دارند نوترونهای با انرژی بالا می‌نامند. نوترونهای با انرژی بالاتر بیشتر از نوترونهای با انرژی پایینتر تمایل به تولید نوترونهای جدید دارند.)

راکتور را در لحظهٔ ۰ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم یک نوترون با انرژی بالا به دستگاه تزریق شود. از آن پس در هر بازهٔ زمانی (به طول تقریبی ۱ میکروثانیه یا $۱۰^{-۶}$ ثانیه) پیشامدهای زیر روی می‌دهند.

الف) وقتی یک نوترون با انرژی بالا و یک هسته (از مادهٔ شکافتنی) برهم‌کنش می‌کنند، (یک میکروثانیه بعد) با جذب شدن نوترون، دو نوترون جدید با انرژی بالا و یک نوترون جدید با انرژی پایین حاصل می‌شود.

ب) در برهم‌کنشهایی که حاوی یک نوترون با انرژی پایین هستند، در هر سطح انرژی فقط یک نوترون تولید می‌شود.

با این فرض که همهٔ نوترونهای آزاد یک میکروثانیه پس از پیدایش با هسته‌ها برخورد کنند، دو تابع زیر از متغیر n را بیابید:

$a_n =$ (تعداد نوترونهای با انرژی بالا در راکتور پس از n میکروثانیه، $n \geqslant ۰$)

$b_n =$ (تعداد نوترونهای با انرژی پایین در راکتور پس از n میکروثانیه، $n \geqslant ۰$)

در اینجا $a_۰ = ۱$، $b_۰ = ۰$ و دستگاه رابطه‌های بازگشتی زیر را داریم:

$$a_{n+۱} = ۲a_n + b_n \qquad (۳)$$

$$b_{n+۱} = a_n + b_n \qquad (۴)$$

فرض‌کنیم $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ و $g(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n$ به ترتیب، توابع مولد دنباله‌های $\{a_n \mid n \geqslant ۰\}$ و $\{b_n | n \geqslant ۰\}$ باشند.

وقتی $n \geqslant 0$، از معادلات (۳) و (۴) می‌بینیم که

$$a_{n+1}x^{n+1} = 2a_n x^{n+1} + b_n x^{n+1} \qquad (3')$$

$$b_{n+1}x^{n+1} = a_n x^{n+1} + b_n x^{n+1} \qquad (4')$$

اگر در (′۳) عمل مجموعیابی را به‌ازای $n \geqslant 0$ انجام دهیم خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad (3'')$$

به‌طور مشابهی، از (′۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad (4'')$$

اگر توابع مولد را وارد کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$f(x) - a_0 = 2xf(x) + xg(x) \qquad (3'')$$

$$g(x) - b_0 = xf(x) + xg(x) \qquad (4'')$$

و این دستگاه معادلاتی است که توابع مولد را به هم مربوط می‌سازد. پس از حل این دستگاه می‌بینیم که

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-3x+1} = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{\gamma - x}\right) + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{\delta - x}\right)$$

و

$$g(x) = \frac{x}{x^2-3x+1} = \left(\frac{-5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{\gamma - x}\right) + \left(\frac{-5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{\delta - x}\right)$$

که در آن

$$\gamma = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \;,\quad \delta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

در نتیجه،

$$a_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

و

$$b_n = \left(\frac{-5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{-5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \;,\quad n \geqslant 0$$

تمرینات ۴.۱۰

۱. با روش توابع مولد رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید.

الف) $a_{n+1}-a_n=3^n$، $n\geqslant 0$، $a_0=1$

ب) $a_{n+1}-a_n=n^2$، $n\geqslant 0$، $a_0=1$

پ) $a_n-3a_{n-1}=5^{n-1}$، $n\geqslant 1$، $a_0=1$

ت) $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$، $n\geqslant 0$، $a_0=1$ و $a_1=6$

ث) $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2^n$، $n\geqslant 0$، $a_0=1$، $a_1=2$

۲. برای n شئ متمایز فرض کنید $a(n,r)$ تعداد طرقی را نشان دهد که می‌توانیم r شئ، $0\leqslant r\leqslant n$، از این n شئ را بدون تکرار برگزینیم. در اینجا وقتی $r>n$، $a(n,r)=0$. با استفاده از رابطهٔ بازگشتی $a(n,r)=a(n-1,r-1)+a(n-1,r)$، که در آن $n\geqslant 1$ و $r\geqslant 1$، نشان دهید $f(x)=(1+x)^n$ دنبالهٔ $a(n,r)$، $r\geqslant 0$ را تولید می‌کند.

۳. دستگاههای رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید.

الف)
$$\begin{aligned} a_{n+1}&=-2a_n-4b_n\\ b_{n+1}&=4a_n+6b_n\\ n\geqslant 0&,a_0=1,b_0=0\end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} a_{n+1}&=2a_n-b_n+2\\ b_{n+1}&=-a_n+2b_n-1\\ n\geqslant 0&,a_0=0,b_0=1\end{aligned}$$

۵.۱۰ نوع خاصی از رابطه‌های بازگشتی غیرخطی (اختیاری)

تا اینجا مطالعهٔ رابطه‌های بازگشتی را به بررسی رابطه‌های خطی با ضرایب ثابت محدود کردیم. باز هم قصد نداریم که رابطه‌های بازگشتی غیرخطی و رابطه‌های با ضرایب متغیر را به‌طورکلی مطالعه کنیم. در اینجا فقط به رابطهٔ غیرخطی خاصی می‌پردازیم که می‌توان روش توابع مولد را دربارهٔ آن به‌کار گرفت.

این روش را دربارهٔ مسأله‌ای شمارشی مربوط به ساختار داده‌ها به‌کار می‌گیریم. قبل از انجام این کار، ملاحظه می‌کنیم که اگر $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ تابع مولد برای دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، $\cdots$ باشد، در این صورت $[f(x)]^2$ دنبالهٔ

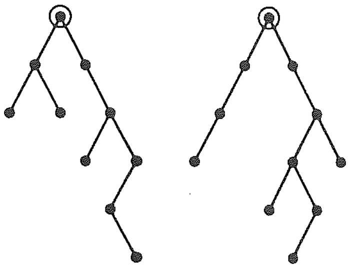
$$a_0a_0,\,a_0a_1+a_1a_0,\,a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0,\,\cdots,\,a_0a_n+a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\cdots+a_{n-1}a_1+a_na_0,\,\cdots$$

یعنی پیچش دنبالهٔ a_0،a_1، a_2، $\cdots$ با خود این دنباله را تولید می‌کند.

مثال ۳۶.۱۰ در بند ۱۰۵ نمودار درختی را معرفی کردیم. به‌طورکلی، درخت گراف غیرسودار همبندی است که هیچ طوقه یا دوری ندارد. در اینجا درختهای دودویی ریشه‌دار را بررسی می‌کنیم.

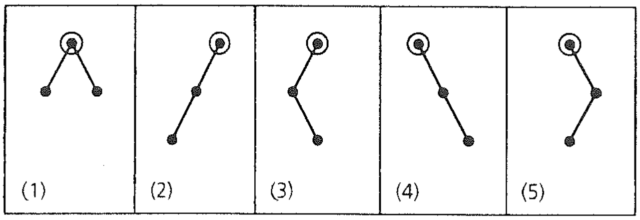
در شکل ۱۲۰۱۰ دو تا از این درختها را می‌بینیم، که در آنها رأس محصور در دایرهٔ کوچک ریشه را نشان می‌دهد. این درختها را دودویی می‌نامیم زیرا از هر رأس حداکثر دو یال که در اینجا شاخه نامیده می‌شوند) پایین می‌آید (در حقیقت هر درخت ریشه‌دارگرافی سودار است).

به‌ویژه، این درختهای دودویی ریشه‌دار مرتب هستند، به این معنی که شاخه‌ای را که از یک رأس در طرف چپ خارج می‌شود و شاخه‌ای را که از همان رأس در طرف راست خارج می‌شود دو شاخهٔ متفاوت تلقی می‌کنیم.



شکل ۱۲.۱۰

در شکل ۱۳۰۱۰ پنج درخت دودویی ریشه‌دار مرتب را که می‌توان با سه رأس ساخت نشان داده‌ایم. (اگر به‌ترتیب توجه نداشته باشیم، چهار درخت ریشه‌دار آخر ساختارهای یکسان دارند.)



شکل ۱۳.۱۰

هدف ما در اینجا شمردن تعداد درختهای دودویی مرتب ریشه‌داری است که n رأس، $n \geqslant 0$، دارند. این تعداد را با b_n نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم که مقادیر b_i را به‌ازای $0 \leqslant i \leqslant n$ می‌دانیم. برای محاسبهٔ b_{n+1} رأسی را به‌عنوان ریشه برمی‌گزینیم و، همان‌طورکه در شکل ۱۴۰۱۰ نشان داده شده است، ملاحظه می‌کنیم که ساختارهای پایین آمده از چپ و راست این ریشه، درختهای (دودویی مرتب ریشه‌دار) کوچکتری هستند که تعداد کل رأسهای آنها n است. این درختهای کوچکتر را زیردرخت درخت مفروض می‌نامیم. بین همهٔ زیردرختهای ممکن زیر درخت تهی نیز هست، که البته یکی بیشتر نیست (یعنی $b_0 = 1$).

اکنون ببینیم چگونه این n رأس می‌توانند در دو زیردرخت تقسیم شوند.

۱) ۰ رأس در چپ و n رأس در راست. روی هم $b_0 b_n$ زیر ساختار حاصل می‌شود که باید آنها را در b_{n+1} به‌حساب آوریم.

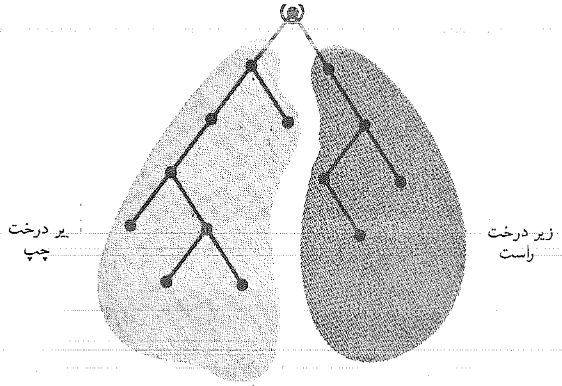
۲) ۱ رأس در چپ و $n-1$ رأس در راست. در این صورت $b_1 b_{n-1}$ درخت دودویی مرتب ریشه‌دار با $n+1$ رأس حاصل می‌شود.

....

$(i+1)$ i رأس در چپ و $n-i$ رأس در راست. $b_i b_{n-i}$ زیر ساختار حاصل می‌شود که باید آنها را در b_{n+1} به‌حساب آوریم.

....

$(n+1)$ n رأس در چپ و صفر رأس در راست. در این صورت $b_n b_0$ درخت حاصل می‌شود.



شکل ۱۴.۱۰

بنابراین، به‌ازای هر $n \geqslant 0$،

$$b_{n+1} = b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + b_2 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_1 + b_n b_0$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + \cdots + b_{n-1} b_1 + b_n b_0) x^{n+1} \qquad (1)$$

اکنون فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ تابع مولد برای دنبالهٔ b_0، b_1، b_2، $\cdots$ باشد. معادلهٔ (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$(f(x) - b_0) = x \sum_{n=0}^{\infty} (b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + \cdots + b_n b_0) x^n = x[f(x)]^2$$

این برابری ما را به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر (برحسب $f(x)$) هدایت می‌کند:

$$x[f(x)]^2 - f(x) + 1 = 0$$

بنابراین،

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

ولی $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} = \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}(-4x) + \binom{1/2}{2}(-4x)^2 + \cdots$، که در آن ضرب x^n، $n \geqslant 1$، برابر است با

$$\begin{aligned}
\binom{1/2}{n}(-4)^n &= \frac{(\frac{1}{2})((\frac{1}{2})-1)((\frac{1}{2})-2)\cdots((\frac{1}{2})-n+1)}{n!}(-4)^n \\
&= (-1)^{n-1}\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots((2n-3)/2)}{n!}(-4)^n \\
&= \frac{(-1)2^n(1)(3)\cdots(2n-3)}{n!} \\
&= \frac{(-1)2^n(n!)(1)(3)\cdots(2n-3)(2n-1)}{(n!)(n!)(2n-1)} \\
&= \frac{(-1)(2)(4)\cdots(2n)(1)(3)\cdots(2n-1)}{(2n-1)(n!)(n!)} = \frac{(-1)}{(2n-1)}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

در $f(x)$ رادیکال با علامت منفی را برمی‌گزینیم، در حقیقت، اگر غیر از این عمل کنیم مقادیری منفی برای b_nها خواهیم داشت. در این صورت

$$f(x) = \frac{۱}{۲x}\left[۱ - \left[۱ - \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)}\binom{۲n}{n}x^n\right]\right]$$

و b_n، ضریب x^n در $f(x)$، برابر است با نصف ضریب $x^{n+۱}$ در

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)}\binom{۲n}{n}x^n$$

بنابراین،

$$b_n = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲(n+۱)-۱}\right]\binom{۲(n+۱)}{n+۱} = \frac{(۲n)!}{(n+۱)!(n!)} = \frac{۱}{(n+۱)}\binom{۲n}{n}$$

اعداد b_n را به افتخار اوژن کاتالان[1] (۱۸۱۴ – ۱۸۹۴)، ریاضیدان بلژیکی، که این اعداد را برای تعیین تعداد طرق پرانتزگذاری عبارت $x_۱x_۲x_۳\cdots x_n$ به کار گرفت، اعداد کاتالان می‌نامند. نخستین ۱۱ عدد کاتالان عبارت‌اند از $b_۰ = ۱$، $b_۱ = ۱$، $b_۲ = ۲$، $b_۳ = ۵$، $b_۴ = ۱۴$، $b_۵ = ۴۲$، $b_۶ = ۱۳۲$، $b_۶ = ۱۳۲$، $b_۷ = ۴۲۹$، $b_۸ = ۱۴۳۰$، $b_۹ = ۴۸۶۲$ و $b_{۱۰} = ۱۶۷۹۶$.

اکنون کاربرد دیگری از اعداد کاتالان را می‌بینیم. این کاربرد بر مثالی که توسط شیمون ایون[2] عرضه شد استوار است. (صفحهٔ ۸۶ از مرجع [۵] را ببینید.)

مثال ۳۷.۱۰ ساختار داده‌های مهم دیگری که در علم کامپیوتر بررسی می‌شود پشته نام دارد. این ساختار امکان ذخیره‌سازی داده‌ها را با شرایط زیر فراهم می‌آورد.

۱) درج داده‌ها فقط در یک انتهای ساختار صورت می‌گیرد. این انتها را بالای پشته می‌نامیم و فرایند درج داده‌ها را روال پوش (push) می‌نامیم.

۲) حذف داده‌ها از پشته (وقتی‌که پشته خالی نباشد) نیز از بالای پشته انجام می‌شود. فرایند حذف‌کردن داده‌ها را روال پاپ (pop) می‌نامیم.

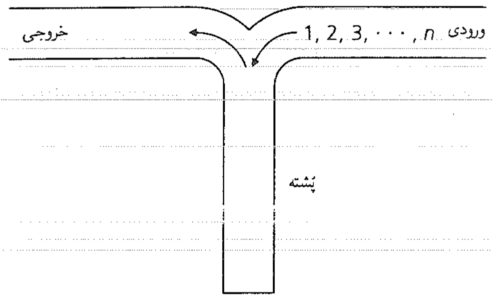
چون آخرین قلم دادهٔ درج شده در این ساختار اولین قلم داده‌ای است که می‌توان از ساختار بیرون کشید، پشته را اغلب ساختار «آخرین ورودی، اولین خروجی» (LIFO)[3] می‌نامند.

الگوهای شهودی برای این ساختار داده‌ها بشقابهایی است که پس از شستن روی هم قرار می‌گیرند یا سینیهایی که در رستوران روی هم قرار داده می‌شوند. در هر یک از این موارد، هر ورودی جدید (بشقاب شسته شده یا سینی) را تنها می‌توان در بالای پشته قرار داد و هر بشقاب یا سینی را تنها از بالای پشته می‌توان برداشت.

---

1. Eugene Catalan 2. Shimon Even 3. Last-In-First-Out

در اینجا این ساختار داده را همراه با روالهای پوش و پاپ، برای تعیین جایگشتهای فهرست (مرتب) ۱، ۲، ۳، $\cdots$، n، به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، به‌کار می‌بریم. شکل ۱۰ ۱۵۰ نشان می‌دهد که چگونه هر عدد صحیح از ورودی ۱، ۲، ۳،$\cdots$، n باید به‌ترتیب مفروض در پشته درج شود. اما در هر لحظه از زمان تنها می‌توانیم عددی را که در بالای پشته (اگر پشته خالی نباشد) قرار دارد بیرون بکشیم. در عین‌حال، هر بار که عددی را بیرون می‌کشیم، دیگر نمی‌توانیم آن‌را به بالای پشته یا به ورودی سمت چپ برای درج مجدد در پشته بازگردانیم. این فرایند آن‌قدر ادامه می‌یابد تا هیچ درایه‌ای در پشته باقی نماند. در این‌صورت، دنبالهٔ مرتب عناصری که از پشته بیرون کشیده می‌شوند جایگشتی از ۱، ۲، ۳، $\cdots$، n است.



شکل ۱۵.۱۰

اگر $n = 1$، فهرست ورودی فقط شامل عدد صحیح ۱ است. ۱ را در بالای پشته (که خالی است) درج می‌کنیم و سپس آن‌را بیرون می‌کشیم. به این‌ترتیب، تنها یک جایگشت، که همان ۱ است، به‌دست می‌آوریم.

برای $n = 2$، دو جایگشت ممکن برای ۱ و ۲ وجود دارد و با استفاده از پشته می‌توانیم هر دوی آنها را به‌دست آوریم.

۱) برای به‌دست آوردن ۱ و ۲ ابتدا ۱ را در بالای پشته (که خالی است) قرار می‌دهیم و سپس آن‌را بیرون می‌کشیم. سپس ۲ را در بالای پشته (که خالی است) قرار می‌دهیم و بعد آن‌را بیرون می‌کشیم.

۲) برای به‌دست آوردن جایگشت ۲، ۱ ابتدا ۱ را در بالای پشته (که خالی است) قرار می‌دهیم و بعد ۲ را در بالای پشته (که دیگر خالی نیست) قرار می‌دهیم. سپس ابتدا ۲ را از بالای پشته بیرون می‌کشیم و بعد ۱ را بیرون می‌کشیم و به این‌ترتیب، جایگشت ۲، ۱ را به‌دست می‌آوریم.

در حالت $n = 3$ می‌بینیم که تنها پنج جایگشت از $6 = 3!$ جایگشت ۱، ۲، ۳ را می‌توانیم به‌دست آوریم. مثلاً برای به‌دست آوردن جایگشت ۲، ۳، ۱ باید مراحل زیر را طی کنیم:

- ۱ را در بالای پشته (خالی) قرار می‌دهیم.
- ۲ را در بالای پشته (بالای ۱) قرار می‌دهیم.
- ۲ را از پشته بیرون می‌کشیم.
- ۳ را در بالای پشته (بالای ۱) قرار می‌دهیم.
- ۳ را از پشته بیرون می‌کشیم.
- ۱ را از پشته بیرون می‌کشیم، و پشته خالی می‌شود.

دلیل اینکه نمی‌توانیم هر شش جایگشت ۱، ۲، ۳ را به‌دست آوریم این است که جایگشت ۳، ۱، ۲ را نمی‌توانیم با پشته تولید کنیم. برای اینکه ۳ در موضع نخست جایگشت قرار گیرد، باید ابتدا ۱ را در بالای پشته قرار دهیم و

سپس ۲ را (بالای ۱) و ۳ را (بالای ۲) در بالای پشته قرار دهیم. پس از بیرون کشیدن ۳ از بالای پشته، ۳ نخستین عدد جایگشت خواهد بود. اما بعد از آن، تا وقتی‌که ۲ را از پشته بیرون نکشیم نمی‌توانیم ۱ را بیرون بکشیم و به‌همین دلیل، نمی‌توانیم جایگشت ۳، ۱، ۲ را تولید کنیم.

وقتی $n = ۴$، ۱۴ تا از جایگشتهای فهرست مرتب ۱، ۲، ۳، ۴ را می‌توانیم با روش پشته تولید کنیم. این ۱۴ جایگشت را در ۴ ستون جدول ۴.۱۰ نوشته‌ایم. در هر ستون این جدول جایگشتهایی را نوشته‌ایم که در آنها ۱ در موضع مشخصی از جایگشت قرار دارد.

جدول ۴.۱۰

۱, ۲, ۳, ۴	۲, ۱, ۳, ۴	۲, ۳, ۱, ۴	۲, ۳, ۴, ۱
۱, ۲, ۴, ۳	۲, ۱, ۴, ۳	۳, ۲, ۱, ۴	۲, ۴, ۳, ۱
۱, ۳, ۲, ۴			۳, ۲, ۴, ۱
۱, ۳, ۴, ۲			۳, ۴, ۲, ۱
۱, ۴, ۳, ۲			۴, ۳, ۲, ۱

۱) در پنج جایگشت ۱ در موضع نخست قرار دارد، زیرا پس از قرار دادن ۱ در پشته و بیرون کشیدن آن از پشته، عددهای ۲، ۳، ۴ را به پنج راه می‌توان با استفاده از پشته جایگشت داد.

۲) وقتی‌که ۱ در موضع دوم قرار دارد، ۲ باید در موضع نخست باشد. این به دلیل آن است که ابتدا ۱ و سپس ۲ را در پشته قرار می‌دهیم و بعد به‌ترتیب، ۲ و ۱ را از پشته بیرون می‌کشیم. در ستون دوم دو جایگشت وجود دارد، چون ۳ و ۴ را به دو راه می‌توان در پشته جایگشت داد.

۳) در ستون ۳، ۱ در موضع سوم قرار دارد. ملاحظه می‌کنیم که فقط ۲ و ۳ می‌توانند پیش از ۱ قرارگیرند و این دو را در پشته به دو طریق می‌توان جایگشت داد (در حالی‌که ۱ در پایین پشته قرار دارد). سپس ۱ را بیرون می‌کشیم و پس از آن، ۴ را در پشته (که خالی است) قرار می‌دهیم و بیرون می‌کشیم.

۴) در آخرین ستون ۵ جایگشت داریم: پس از قرار دادن ۱ در بالای پشته (که خالی است) با استفاده از پشته می‌توانیم ۵ جایگشت را برای ۲، ۳، ۴ تولید کنیم (در حالی‌که ۱ در پایین پشته قرار دارد). سپس ۱ را بیرون می‌کشیم و جایگشتها را کامل می‌کنیم.

براساس این ملاحظات، فرض کنیم a_i به‌ازای $۱ \leqslant i \leqslant ۴$ تعداد جایگشتهایی از عددهای صحیح ۱، ۲، ۳، …، i (یا هر فهرستی از i عدد صحیح متوالی) باشد که می‌توان با استفاده از پشته تولید کرد. همچنین تعریف می‌کنیم $a_۰ = ۱$، چون تنها یک جایگشت هیچ چیز را می‌توان با پشته تولید کرد. در این‌صورت،

$$a_۴ = a_۰ a_۳ + a_۱ a_۲ + a_۲ a_۱ + a_۳ a_۰$$

که در آن

الف) هر جمعوند $a_j a_k$ در $j + k = ۳$ صدق می‌کند.

ب) اندیس j نشان می‌دهد که در جایگشت مورد نظر j عدد صحیح سمت چپ ۱ قرار دارند؛ به‌ویژه، برای $j \geqslant ۱$، اینها عددهای صحیح ۲ تا $j + ۱$ هستند.

پ) اندیس k نشان می‌دهد که در جایگشت مورد نظر k عدد صحیح سمت راست ۱ قرار دارند؛ برای $k \geqslant ۱$ اینها عددهای صحیح $(k - ۱) - ۴$ تا ۴ هستند.

اکنون می‌توان این مسألهٔ جایگشت را به هر $n \in \mathbb{N}$ تعمیم داد، به‌طوری‌که

$$a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1 + a_n a_0$$

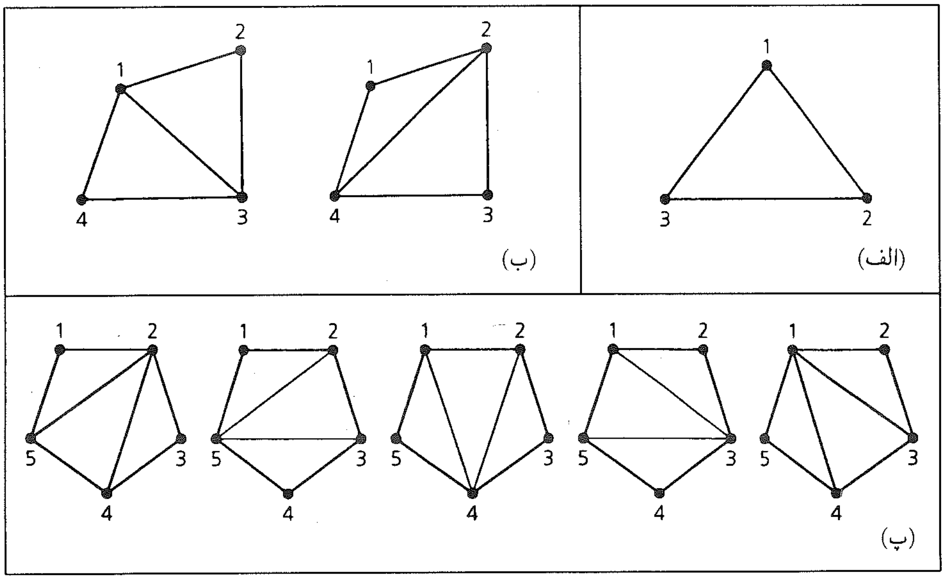
و $a_0 = 1$. از مثال قبلی می‌دانیم که

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

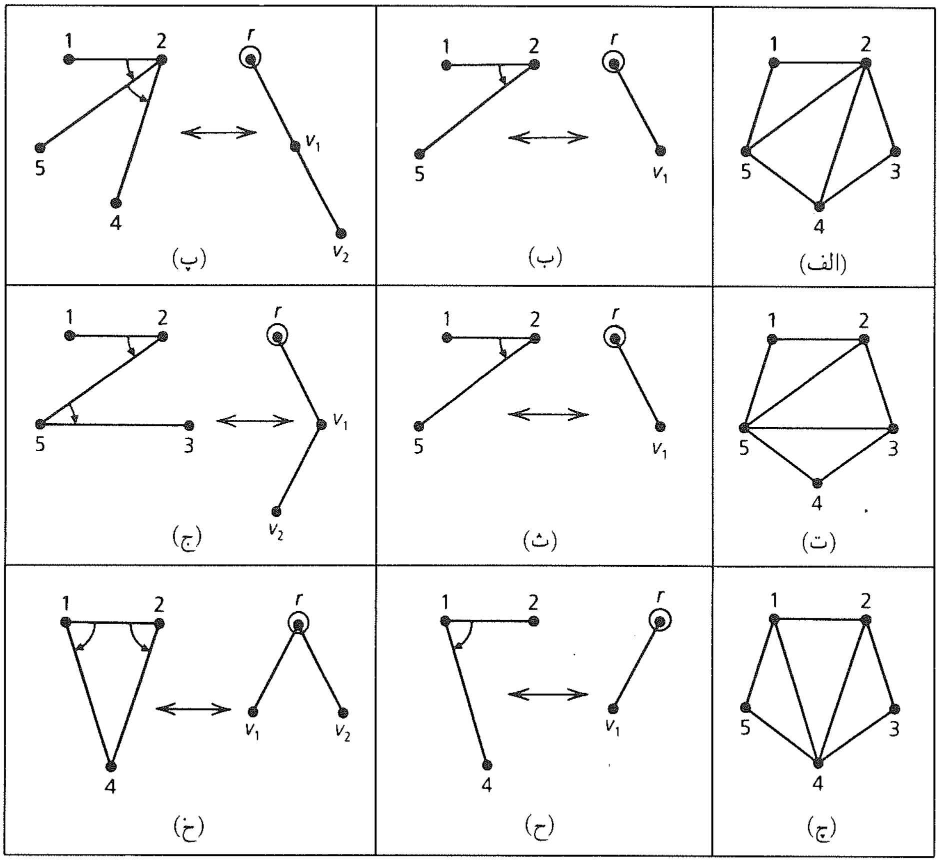
این بند را با مثال دیگری که در آن اعداد کاتالان ظاهر می‌شوند ادامه می‌دهیم. به‌لحاظ تاریخی، این دنبالهٔ اعداد نخستین بار چنین کشف شد.

مثال ۳۸.۱۰ در این مثال با مسأله‌ای سروکار داریم که نخستین بار لئونهارت اویلر آن‌را مطرح کرد. در این مسأله چندضلعی محدب مفروضی با n ($n \geqslant 3$) ضلع بررسی می‌شود. چندضلعی محدب دارای این ویژگی است که به‌ازای هر دو نقطهٔ P_1 و P_2 درون چندضلعی، پاره‌خطی که P_1 و P_2 را به‌هم وصل می‌کند نیز درون چندضلعی قرار دارد. با مفروض بودن یک n ضلعی محدب، اویلر می‌خواست تعداد طرق مثلث‌بندی درون چندضلعی (یعنی تقسیم کردن درون چندضلعی به تعدادی مثلث) را با استفاده از قطرهای غیرمتقاطع بیابد. ما این عدد را با t_n نشان می‌دهیم.

در قسمتهای (الف) و (ب) از شکل ۱۶.۱۰ یک مثلث و دو چهارضلعی نشان داده شده‌اند و ملاحظه می‌کنیم که چهارضلعیها مثلث‌بندی شده‌اند. قسمت (پ) از این شکل هر پنج طریق ممکن برای مثلث‌بندی پنج‌ضلعی محدب را با استفاده از قطرهای غیرمتقاطع نشان می‌دهد. (در هر مورد دو قطر غیرمتقاطع داریم.)



شکل ۱۶.۱۰



شکل ۱۰.۱۷

در نتیجه، داریم $t_3 = 1$، $t_4 = 2$ و $t_5 = 5$؛ پس به‌نظر می‌رسد در موقعیتی قرار گرفته‌ایم که بار دیگر اعداد کاتالان پیش می‌آیند. ولی این‌بار رابطه‌ای بازگشتی را به‌کار نخواهیم برد. در عوض، تناظری یک‌به‌یک بین مجموعهٔ مثلث‌بندیهای چندضلعی محدب که می‌خواهیم تعداد آنها را بشمریم و مجموعهٔ درختهای دودویی مرتب ریشه‌دار، که تعداد آنها را در مثال ۱۰ · ۳۶ شمردیم، برقرار خواهیم کرد.

در حالت $n = 5$، پنج‌ضلعی محدب مثلث‌بندی شده را در قسمت (الف) از شکل ۱۰ · ۱۷ در نظر می‌گیریم. ریشهٔ r از یک درخت دودویی مرتب ریشه‌دار را به ضلعی از این پنج‌ضلعی که دو انتهای آن ۱ و ۲ نام دارند، نسبت می‌دهیم؛ این ضلع را ضلع $\{1, 2\}$ می‌نامیم. اکنون ضلع $\{1, 2\}$ را دوران می‌دهیم تا در امتداد قطر $\{2, 5\}$ قرار گیرد، و این قطر نخستین (و تنها) قطری است که می‌توانیم با دوران ضلع $\{1, 2\}$ به آن برسیم. این دوران خلاف حرکت عقربه‌های ساعت را می‌توانیم در درخت دودویی مرتب ریشه‌دار با رسم یالی از ریشهٔ r به رأس v_1، که در طرف راست ریشه قرار دارد، نشان دهیم. رأس v_1 متناظر با قطر $\{2, 5\}$ در پنج‌ضلعی است و نتیجهٔ این دوران در شکل ۱۰ · ۱۷ (ب) نشان داده شده است. با ادامهٔ این‌کار، دوران خلاف حرکت عقربه‌های ساعت قطر $\{2, 5\}$ و قرارگرفتن آن در امتداد قطر $\{2, 4\}$ متناظر است با یال $\{v_1, v_2\}$ در درخت دودویی مرتب

ریشه‌دار قسمت (پ) از شکل در اینجا رأس v_2 متناظر با قطر $\{۲,۴\}$ است.

موقعیت نشان داده شده در قسمتهای (ت) و (ث) از شکل ۱۰۰۱۷ یک‌بار دیگر تناظر بین

۱) ضلع $\{۱,۲\}$ از پنج‌ضلعی و ریشهٔ r؛

۲) قطر $\{۲,۵\}$ و رأس v_1 در طرف راست ریشهٔ r؛ و

۳) دوران خلاف حرکت عقربه‌های ساعت $\{۱,۲\}$ برای قرارگرفتن در امتداد $\{۲,۵\}$ و یال $\{r, v_1\}$ از درخت را آشکار می‌سازد.

ولی وقتی قطر $\{۲,۵\}$ را دوران می‌دهیم تا در امتداد قطر $\{۳,۵\}$ قرارگیرد، همان‌طورکه در شکل ۱۰۰۱۷ (ج) نشان داده شده است، دورانی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به‌دست می‌آوریم. دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت متناظر است با یال $\{v_1, v_2\}$ از درخت، که به‌گونه‌ای سودار شده است که رأس v_2 در طرف چپ رأس v_1 است.

سرانجام، برای پنج‌ضلعی مثلث‌بندی شده در قسمت (چ) از شکل ۱۰۰۱۷ دو انتخاب برای دوران نخست داریم. وقتی ضلع $\{۱,۲\}$ از پنج‌ضلعی را دوران می‌دهیم دو امکان پیش می‌آید: (۱) دورانی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، همان‌طورکه در شکل ۱۰۰۱۷ (ح) نشان داده شده است، برای قرارگرفتن در امتداد قطر $\{۱,۴\}$؛ یا (۲) دورانی در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت برای قرارگرفتن در امتداد قطر $\{۲,۴\}$. در اینجا نخست دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت را به‌کار می‌بریم و نتیجه‌ای را که در قسمت (ح) از شکل ۱۰۰۱۷ نشان داده شده است به‌دست می‌آوریم. سپس ضلع $\{۱,۲\}$ از پنج‌ضلعی را دوران می‌دهیم تا در امتداد قطر $\{۲,۴\}$ قرارگیرد، که دورانی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است؛ در شکل ۱۰۰۱۷ (خ) این دوران و درخت دودویی مرتب ریشه‌دار متناظر را می‌بینیم.

از این بحث آموختیم که به‌ازای هر مثلث‌بندی پنج‌ضلعی محدب درخت دودویی مرتب ریشه‌داری را به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که

۱) ضلع $\{۱,۲\}$ از پنج‌ضلعی متناظر است با ریشهٔ r از درخت؛

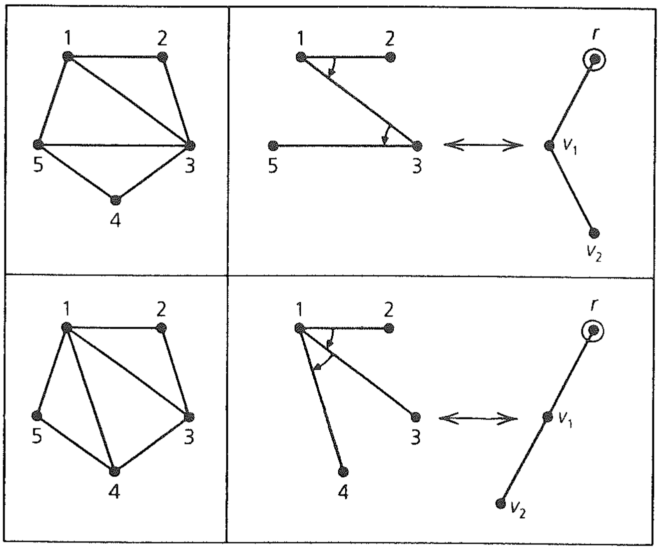
۲) هر یک از قطرهای غیرمتقاطع متناظر است با رأسی از درخت؛

۳) هر دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت که ضلع $\{۱,۲\}$ را در امتداد قطری قرار دهد، یا قطری را در امتداد قطر دیگری قرار دهد، متناظر است با یالی از درخت که رأس پایینی آن در طرف چپ رأس بالایی آن است؛ و

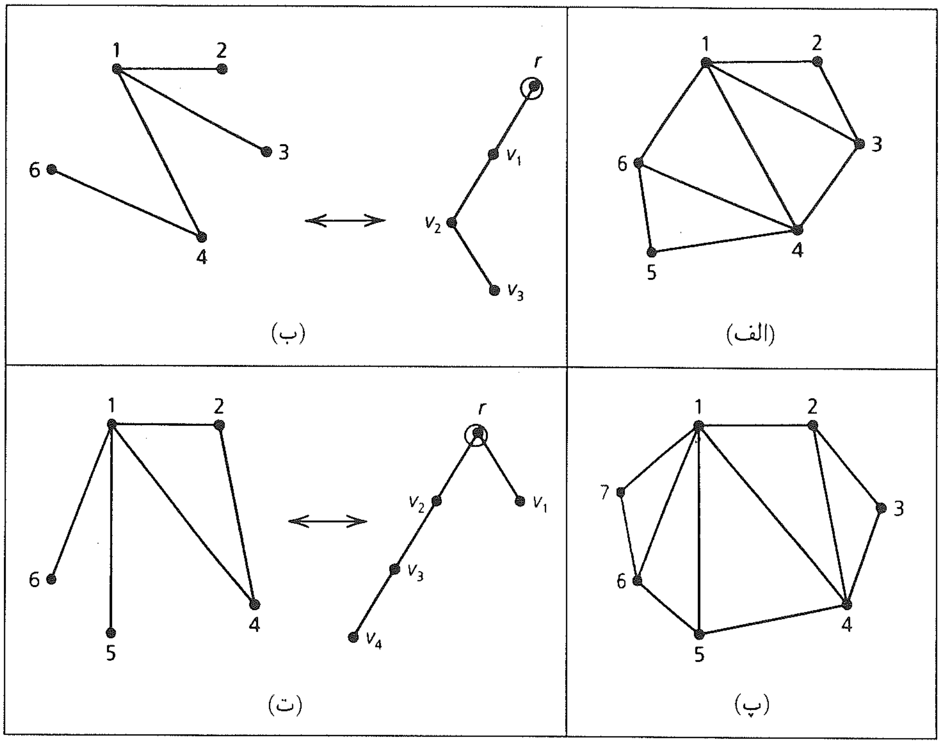
۴) دورانی در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت که ضلع $\{۱,۲\}$ را در امتداد قطری قرار دهد، یا قطری را در امتداد قطر دیگری قرار دهد، متناظر است با یالی از درخت که این‌بار رأس پایینی آن در طرف راست رأس بالایی آن است.

اگر این ایده‌ها را دنبال کنیم دو مثلث‌بندی دیگر پنج‌ضلعی را با درختهای دودویی مرتب ریشه‌دار متناظر در شکل ۱۰۰۱۸ می‌یابیم. در قسمتهای (الف) و (ب) از شکل ۱۰۰۱۹ این نوع تناظر برای یکی از ۱۴ مثلث‌بندی یک شش‌ضلعی محدب نشان‌داده شده است. قسمتهای (پ) و (ت) از شکل ۱۰۰۱۹ نشان می‌دهند که چگونه یکی از ۴۲ مثلث‌بندی یک هفت‌ضلعی محدب با یک درخت دودویی مرتب ریشه‌دار پنج‌رأسی متناظر است.

این بحث را به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم و آن‌را تعمیم می‌دهیم: هر $n + ۲$ ضلعی محدب را می‌توان با $n - ۱$ قطر غیرمتقاطع به b_n طریق، که در آن b_n عدد کاتالان nام است، مثلث بندی کرد.



شکل ۱۰.۱۸



شکل ۱۰.۱۹

آخرین مثال این بند قابل مقایسه با مثال ۱۴.۱۰ است. یک‌بار دیگر درمی‌یابیم که باید ازکوشش کردن برای حصول نتیجه‌ای کلی بدون ارائه استدلالی کلی، حتی اگر چند حالت خاص این فکر را القا کنند، اجتناب کرد.

مثال ۳۹.۱۰ کار را با n شیء متمایز آغاز می‌کنیم و، به‌ازای $n \geqslant 1$، آنها را بین حداکثر n ظرف یکسان توزیع می‌کنیم، ولی اجازه نمی‌دهیم که در ظرفی بیشتر از سه شیء قرارگیرد و به این نکته هم اهمیت نمی‌دهیم که اشیای درون هر ظرف چگونه مرتب می‌شوند. فرض می‌کنیم a_n تعداد این توزیعها باشد و از شکل ۲۰.۱۰ می‌بینیم که

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 5,\ a_4 = 14$$

به نظر می‌رسد که با توجه به این پنج جملهٔ نخست، دنبالهٔ اعداد کاتالان را خواهیم داشت. متأسفانه، این‌طور نیست و ملاحظه می‌کنیم که

$$a_5 = 46 \neq 42 \qquad \text{(عدد ششم کاتالان)}$$

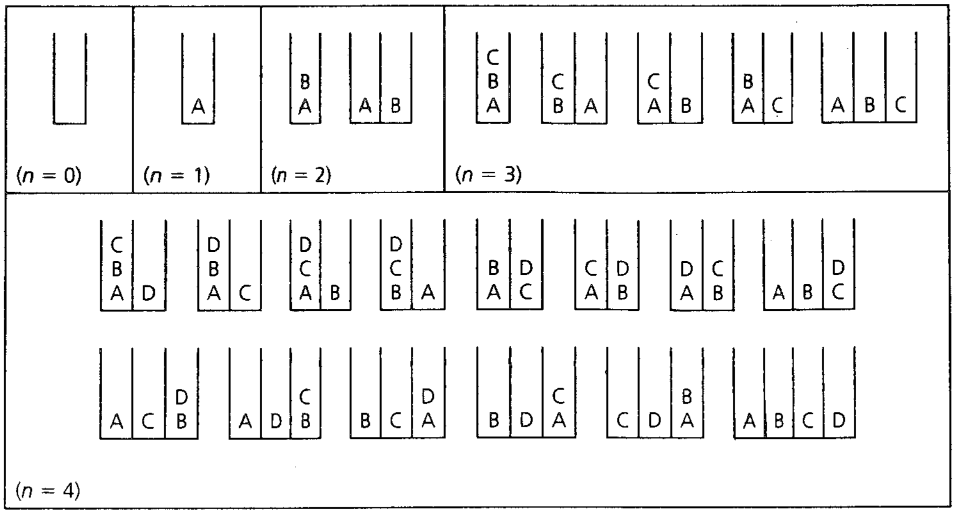
$$a_6 = 166 \neq 132 \qquad \text{(عدد هفتم کاتالان)}$$

و

$$a_7 = 652 \neq 429 \qquad \text{(عدد هشتم کاتالان)}$$

(این توزیعها توسط اف. ال. میکسا[1]، ال. موزر[2] و ام. وایمن[3] در مرجع [۲۰] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند.)

مثالهای دیگری متضمن اعداد کاتالان را می‌توان در مراجع این فصل یافت.



شکل ۲۰.۱۰

1. F.L.Miksa 2. L.Moser 3. M.Wyman

تمرینات ۵.۱۰

۱. برای درختهای دودویی مرتب ریشه‌دار در مثال ۳۶۰۱۰ ، $b_۴$ را محاسبه کنید و همهٔ این ساختارهای چهاررأسی را رسم کنید.

۲. تحقیق کنید به‌ازای هر $n \geqslant ۰$،

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲n+۱}\right)\binom{۲n+۲}{n+۱} = \left(\frac{۱}{n+۱}\right)\binom{۲n}{n}$$

۳. نشان دهید به‌ازای هر $n \geqslant ۲$، $\binom{۲n-۱}{n} - \binom{۲n-۱}{n-۲} = \frac{۱}{(n+۱)}\binom{۲n}{n}$.

۴. کدام‌یک از جایگشتهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ را که در زیر می‌آیند می‌توان با استفاده از پشته (مثال ۳۷۰۱۰) به‌دست آورد؟

الف) ۴، ۲، ۳، ۱، ۵، ۶، ۷، ۸ ب) ۵، ۴، ۳، ۶، ۲، ۱، ۸، ۷

پ) ۴، ۵، ۳، ۲، ۱، ۸، ۶، ۷ ت) ۳، ۴، ۲، ۱، ۷، ۶، ۸، ۵

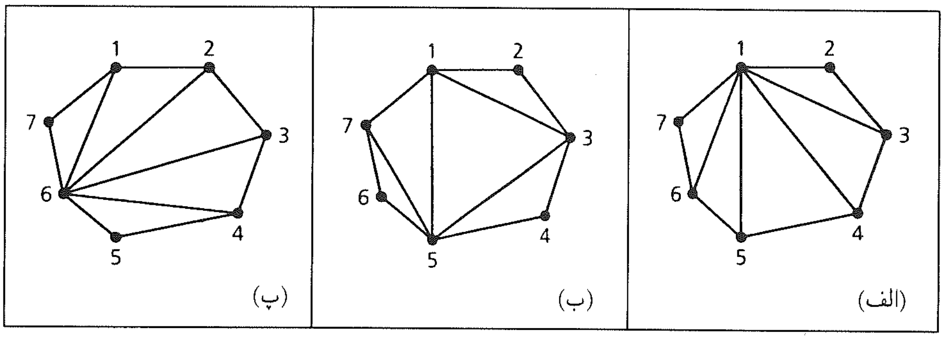
۵. فرض کنید که جایگشتهایی از اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ را با استفاده از پشته (مثال ۳۷۰۱۰) تولید کرده‌ایم. (الف) چند جایگشت حاصل می‌شود؟ (ب) در چندتا از جایگشتها ۱ در موضع ۴ و ۵ در موضع ۸ است؟ (پ) در چندتا از جایگشتها ۱ در موضع ۶ است؟ (ت) چند از جایگشتها با ۳۲۱ آغاز می‌شوند؟

۶. به‌ازای n ضلعی محدبی ($n \geqslant ۳$)، فرض کنید (مانند مثال ۳۸۰۱۰) t_n تعداد طرق مثلث‌بندی درون این n ضلعی را با استفاده از رسم قطرهای غیرمتقاطع نشان دهد.

الف) تعریف کنید $t_۲ = ۱$. تحقیق کنید $t_{n+۱} = t_۲t_n + t_۳t_{n-۱} + \cdots + t_{n-۱}t_۳ + t_nt_۲$.

ب) t_n را به‌صورت تابعی از n بیان کنید.

۷. برای هر یک از مثلث‌بندیهای (هفت‌ضلعی محدب) نشان داده شده در شکل ۲۱۰۱۰ درخت دودویی مرتب ریشه‌دار متناظر را بیابید.



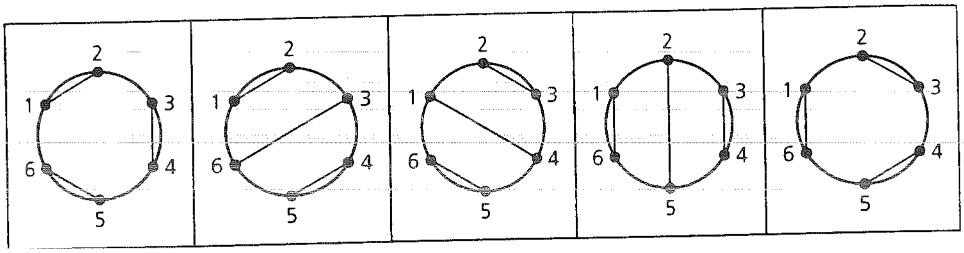
شکل ۲۱.۱۰

۸. به‌ازای $n \geqslant ۰$، $b_n = \left(\frac{۱}{n+۱}\right)\binom{۲n}{n}$ عدد کاتالان nام است.

الف) نشان دهید به‌ازای هر $n \geqslant ۰$، $b_{n+۱} = \frac{۲(۲n+۱)}{(n+۲)}b_n$.

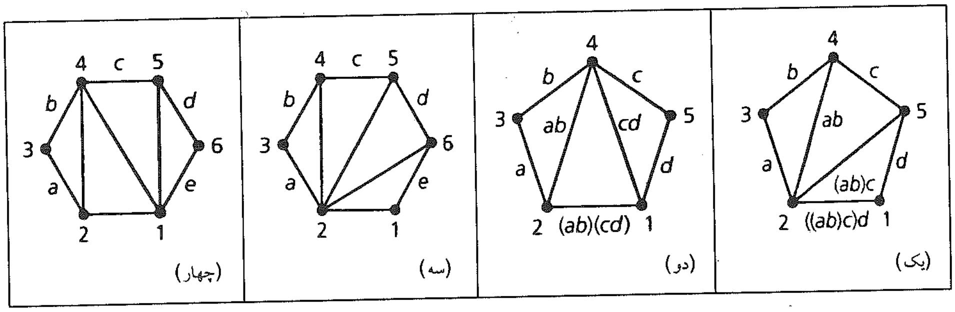
ب) با استفاده از قسمت (الف) برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی ابداع کنید) که ۱۵ عدد نخست کاتالان را محاسبه کند.

۹. به‌ازای $n \geqslant 0$، $2n$ نقطه روی دایره‌ای چنان انتخاب می‌کنیم که فاصله‌های هر دو نقطهٔ متوالی یکسان باشد و این نقاط را متوالیاً ۱، ۲، ۳، ...، $2n$ می‌نامیم. فرض کنید a_n تعداد طرقی باشد که می‌توان این $2n$ نقطه را چنان دوبه‌دو جفت کرد که هیچ دو وتری از n وتر حاصل یکدیگر را قطع نکنند. (حالت $n = 3$ در شکل ۱۰٫۲۲ نشان داده شده است.) رابطه‌ای بازگشتی برای a_n، $n \geqslant 0$، بیابید و سپس آن را حل کنید.



شکل ۱۰٫۲۲

۱۰. در شکل ۱۰٫۲۳ دوتا از پنج مثلث‌بندی درون یک پنج‌ضلعی محدب را با استفاده از قطرهای غیرمتقاطع می‌بینید. در اینجا چهارتا از اضلاع را با حروف a، b، c، d و همچنین هر پنج رأس را نامگذاری کرده‌ایم. در قسمت (یک) با استفاده از نامهای اضلاع a و b قطر واصل بین رأسهای ۲ و ۴ را ab نامیده‌ایم. دلیل این‌کار این است که این قطر (که ab نام دارد)، همراه با اضلاع a و b، یکی از مثلثهای درونی متعلق به این مثلث‌بندی پنج ضلعی محدب مفروض را به‌دست می‌دهد. سپس قطر ab و ضلع c نام $(ab)c$ را به قطر واصل بین ۲ و ۵ می‌دهند و اضلاع ab، c و $(ab)c$ مثلث درونی دیگری از این مثلث‌بندی را در اختیار ما می‌گذارند. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، نام ضلع پایینی که واصل بین رأسهای ۱ و ۲ است $((ab)c)d$ خواهد بود [این یکی از پنج طریق پرانتزگذاری برای حصول سه حاصل‌ضرب (برای هر دو عدد یکی) لازم در محاسبهٔ $abcd$ است]. مثلث‌بندی قسمت (دو) در شکل متناظر است با حاصل‌ضرب پرانتزگذاری شدهٔ $(ab)(cd)$.



شکل ۱۰٫۲۳

الف) حاصل‌ضرب پرانتزگذاری شدهٔ a، b، c، و d را برای سه مثلث‌بندی دیگر این پنج‌ضلعی محدب تعیین کنید.

ب) حاصل‌ضرب پرانتزگذاری شده برای هر یک از شش‌ضلعیهای مثلث‌بندی شده در قسمتهای

(سه) و (چهار) شکل ۱۰۰۲۳ را بیابید.

[از قسمت (الف) می‌آموزیم که پنج طریق برای درج پرانتز در عبارت $abcd$ وجود دارد. قسمت (ب) دو طریق از ۱۴ طریق درج پرانتز در عبارت $abcde$ را نشان می‌دهد. به‌طور کلی، $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ طریق برای پرانتزگذاری عبارت $x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}x_nx_{n+1}$ وجود دارد. هنگام حل این مسأله بود که اوژن کاتالان دنباله‌ای را که اکنون به‌نام اوست کشف کرد.]

۶.۱۰ الگوریتمهای تفرقه‌بینداز و تسخیرکن (اختیاری)[1]

یکی از مهمترین و کاربردیترین انواع الگوریتمهای مؤثر بر رهیافت تفرقه‌بینداز و تسخیرکن متکی است. در اینجا، استراتژی کلی عبارت است از حل مسألهٔ مفروضی با اندازهٔ n ($n \in \mathbf{Z}^+$) با استفاده از

۱) حل مستقیم مسأله به‌ازای مقدار کوچکی از n (این عمل شرطی آغازی را برای رابطهٔ بازگشتی پایانی به‌دست می‌دهد).

۲) تقسیم مسألهٔ کلی دارای اندازهٔ n به a مسألهٔ کوچکتر هم‌نوع و (تقریباً) هم‌اندازه، یعنی دارای اندازهٔ $\lceil n/b \rceil$ یا $\lfloor n/b \rfloor$[2]، که در آن $a,b \in \mathbf{Z}^+$ و $1 \leqslant a < n$ و $1 \leqslant b < n$.

سپس این a مسألهٔ کوچکتر را حل می‌کنیم و جوابهای آنها را برای ساختن جوابی برای مسألهٔ اصلی که دارای اندازهٔ n است به‌کار می‌گیریم. در این بحث مخصوصاً به حالتهایی علاقه‌مندیم که n توانی از b باشد و $b = 2$.

ما الگوریتمهای تفرقه‌بینداز و تسخیرکنی را مطالعه خواهیم کرد که در آنها

۱) زمان حل برای مسألهٔ آغازی که دارای اندازهٔ $n = 1$ است برابر با ثابت $c \geqslant 0$ است و

۲) زمان تقسیم مسألهٔ مفروض که دارای اندازهٔ n است به a مسألهٔ (مشابه) کوچکتر، همراه با زمان ترکیب جوابهای این مسائل کوچکتر برای به‌دست آوردن جوابی از مسألهٔ مفروض، برابر با $h(n)$، یعنی تابعی از n است.

در اینجا در واقع به تابع $f(n)$، یعنی تابع پیچیدگی زمانی برای این الگوریتمها توجه خواهیم داشت. در نتیجه، به‌جای استفاده از نماد اندیس‌دار a_n که در بندهای قبلی این فصل به‌کار گرفتیم، نماد $f(n)$ را به‌کار خواهیم برد. شرایطی که پیشتر بیان کردیم ما را به رابطهٔ بازگشتی زیر هدایت می‌کنند.

$$f(1) = c$$

و

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + h(n)\,,\quad n = b^k\,,\ k \geqslant 1$$

ملاحظه می‌کنیم که قلمرو تعریف f مجموعهٔ $\{1, b, b^2, b^3, \cdots\} = \{b^i | i \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{Z}^+$ است.

در نخستین نتیجه‌ای که به‌دست می‌آوریم، جواب این رابطهٔ بازگشتی را در حالتی‌که $h(n)$ برابر با ثابت c است می‌یابیم.

---

۱. می‌توان مطالب این بند را بدون از دست رفتن پیوستگی متن درس، کنار گذاشت. در بند ۱۲۰۳ (جلد سوم) این مطالب را برای تعیین تابع پیچیدگی زمانی الگوریتم ادغام به‌کار خواهیم گرفت. با وجود این، در همانجا نتیجهٔ مطلوب را برای حالت خاصی از الگوریتم ادغام با روش دیگری، که از مطالب این بند استفاده نمی‌کند، به‌دست خواهیم آورد.

۲. یادآوری می‌کنیم که به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$، $\lceil x \rceil$ مقدار گردشدهٔ اضافی x و $\lfloor x \rfloor$ مقدار گردشدهٔ نقصانی x یا بزرگترین عدد صحیح موجود در x را نشان می‌دهند. به‌عبارت دیگر،

الف) به‌ازای هر $x \in \mathbf{Z}$، $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$

ب) به‌ازای هر $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$، (عدد صحیح بلافاصله در طرف چپ x)$= \lfloor x \rfloor$

پ) به‌ازای هر $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$، (عدد صحیح بلافاصله در طرف راست x)$= \lceil x \rceil$

قضیهٔ ۱۰.۱ فرض کنیم $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$، که در آن $b \geqslant ۲$، و فرض کنیم $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$. اگر $f(۱) = c$ و به‌ازای $n = b^k$ و $k \geqslant ۱$، $f(n) = af(n/b) + c$، آنگاه به‌ازای هر $n = ۱, b, b^۲, b^۳, \cdots$

۱) $f(n) = c(\log_b n + ۱)$، درصورتی‌که $a = ۱$

۲) $f(n) = \dfrac{c(an^{\log_b a} - ۱)}{a - ۱}$، درصورتی‌که $a \geqslant ۲$

اثبات: به‌ازای $k \geqslant ۱$ و $n = b^k$، دستگاه متشکل از k معادلهٔ زیر را می‌نویسیم. [با شروع از معادلهٔ دوم هر یک از این معادلات را از معادلهٔ بلافاصله قبل از آن به این ترتیب به‌دست می‌آوریم که (یک) در هر معادلهٔ قبلی $\frac{n}{b}$ را به‌جای n می‌گذاریم و (دو) معادلهٔ حاصل از (یک) را در a ضرب می‌کنیم.]

$$
\begin{aligned}
f(n) &= af(n/b) + c \\
af(n/b) &= a^۲ f(n/b^۲) + ac \\
a^۲ f(n/b^۲) &= a^۳ f(n/b^۳) + a^۲ c \\
a^۳ f(n/b^۳) &= a^۴ f(n/b^۴) + a^۳ c \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\
a^{k-۲} f(n/b^{k-۲}) &= a^{k-۱} f(n/b^{k-۱}) + a^{k-۲} c \\
a^{k-۱} f(n/b^{k-۱}) &= a^{k} f(n/b^{k}) + a^{k-۱} c
\end{aligned}
$$

می‌بینیم که در این مجموعه از معادلات هر یک از جمله‌های $af(n/b)$، $a^۲ f(n/b^۲)$، $a^۳ f(n/b^۳)$، $\ldots$، $a^{k-۱} f(n/b^{k-۱})$ یک‌بار به‌عنوان جمعوند در طرف چپ و یک‌بار به‌عنوان جمعوند در طرف راست حضور دارند. بنابراین، اگر این k معادله را با هم جمع کنیم و این جمعوندهای مشترک را حذف کنیم به‌دست می‌آوریم

$$f(n) = a^k f\left(\frac{n}{b^k}\right) + [c + ac + a^۲ c + \cdots + a^{k-۱} c]$$

چون $n = b^k$ و $f(۱) = c$، داریم

$$
\begin{aligned}
f(n) &= a^k f(۱) + c[۱ + a + a^۲ + \cdots + a^{k-۱}] \\
&= c[۱ + a + a^۲ + \cdots + a^{k-۱} + a^k]
\end{aligned}
$$

۱) اگر $a = ۱$، در این‌صورت $f(n) = c(k + ۱)$. ولی از $n = b^k$ نتیجه می‌شود $\log_b n = k$. بنابراین، به‌ازای $n \in \{b^i | i \in \mathbf{N}\}$، $f(n) = c(\log_b n + ۱)$.

۲) وقتی $a \geqslant ۲$، با توجه به اتحاد ۴ در جدول ۹.۲ داریم $f(n) = \dfrac{c(۱ - a^{k+۱})}{۱ - a} = \dfrac{c(a^{k+۱} - ۱)}{a - ۱}$. ولی از $n = b^k$ نتیجه می‌شود $\log_b n = k$. بنابراین،

$$a^k = a^{\log_b n} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b n} = \left(b^{\log_b n}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}$$

و

$$f(n) = \frac{c(an^{\log_b a} - ۱)}{(a - ۱)}, \quad n \in \{b^i | i \in \mathbf{N}\}$$

مثال ۴۰.۱۰
الف) فرض کنیم $f:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$، که در آن

$$f(1)=3$$

و

$$f(n)=f\left(\frac{n}{2}\right)+3\,,\quad n=2^k\,,\ k\in\mathbf{Z}^+$$

پس بنابر قسمت ۱ از قضیه ۱۰۰۱۰، با فرض $c=3$، $b=2$ و $a=1$، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $n\in\{1,2,4,8,16,\cdots\}$، $f(n)=3(\log_2 n+1)$.
ب) فرض کنیم $g:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$، که در آن

$$g(1)=7$$

و

$$g(n)=4g\left(\frac{n}{3}\right)+7\,,\quad n=3^k\,,\ k\in\mathbf{Z}^+$$

در این‌صورت با فرض $c=7$، $b=3$ و $a=4$، قسمت ۲ از قضیهٔ ۱۰۰۱۰ مستلزم این است که به‌ازای $n\in\{1,3,9,27,81,\cdots\}$، $g(n)=(7/3)(4n^{\log_3 4}-1)$.

با در نظر گرفتن قضیهٔ ۱۰۰۱۰، متأسفانه باید اذعان کنیم که گرچه به‌ازای $n\in\{1,b,b^2,\cdots\}$ اطلاعاتی دربارهٔ f داریم، ولی دربارهٔ مقدار f به‌ازای اعداد صحیح متعلق به $\mathbf{Z}^+-\{1,b,b^2,\cdots\}$ نمی‌توانیم چیزی بگوییم. بنابراین، در حال حاضر قادر نیستیم با f به‌عنوان یک تابع پیچیدگی زمانی برخورد کنیم. برای رفع این مشکل، تعریف ۲۳۰۵ (در جلد اول) را، که در آن برای نخستین‌بار ایدهٔ غلبهٔ توابع را معرفی کردیم، تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۰ فرض کنیم $f,g:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$ و فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbf{Z}^+$ باشد. می‌گوییم g روی S غالب بر f است (یا f روی S مغلوب g است) هرگاه ثابتهای $m\in\mathbf{R}^+$ و $k\in\mathbf{Z}^+$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $n\in S$ و $n\geqslant k$، $|f(n)|\leqslant m|g(n)|$.
با این شرایط می‌گوییم روی S، $f\in O(g)$.

مثال ۴۱.۱۰ فرض کنیم $f:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(n)=n \qquad n\in\{1,3,5,7,\cdots\}=S_1 \qquad \text{به‌ازای}$$
$$f(n)=n^2 \qquad n\in\{2,4,6,8,\cdots\}=S_2 \qquad \text{به‌ازای}$$

در این صورت روی S_1، $f\in O(n)$ و روی S_2، $f\in O(n^2)$. ولی، نمی‌توانیم حکم کنیم که $f\in O(n)$.

مثال ۴۲.۱۰ از مثال ۴۰۰۱۰ و با توجه به تعریف ۱۰۱۰ نتیجه می‌گیریم که
الف) روی $\{2^k|k\in\mathbf{N}\}$، $f\in O(\log_2 n)$
ب) روی $\{3^k|k\in\mathbf{N}\}$، $g\in O(n^{\log_3 4})$

اکنون با استفاده از تعریف ۱۰۱۰ فرعهای زیر را برای قضیهٔ ۱۰۱۰ بیان می‌کنیم. فرع نخست تعمیم نتایج خاصی است که در مثال ۴۲۰۱۰ عرضه کردیم.

فرع ۱.۱۰ فرض کنیم $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$، که در آن $b \geqslant ۲$، و فرض کنیم $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$. اگر

$$f(۱) = c$$

و

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + c\,,\quad n = b^k\ ,\ k \geqslant ۱$$

آنگاه

۱) به‌ازای $a = ۱$، $f \in O(\log_b n)$ روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$، و

۲) به‌ازای $a \geqslant ۲$، $f \in O(n^{\log_b a})$ روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$

اثبات: این اثبات را به‌عنوان تمرین برای خواننده می‌گذاریم.

در فرع دوم علامتهای برابری در قضیهٔ ۱۰۱۰ را به نابرابری تبدیل می‌کنیم. در نتیجه، حوزهٔ مقادیر f باید از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}^+ \cup \{۰\}$ محدود شود.

فرع ۲.۱۰ به‌ازای $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$، به‌طوری‌که $b \geqslant ۲$ فرض کنیم $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+ \cup \{۰\}$. اگر

$$f(۱) \leqslant c$$

و

$$f(n) \leqslant af\left(\frac{n}{b}\right) + c\,,\quad n = b^k\ ,\ k \geqslant ۱$$

در این‌صورت به‌ازای هر $n = ۱, b, b^۲, b^۳, \cdots$

۱) به‌ازای $a = ۱$، $f \in O(\log_b n)$ و

۲) به‌ازای $a \geqslant ۲$، $f \in O(n^{\log_b a})$

برهان: تابع $g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+ \cup \{۰\}$ را، که در آن

$$g(۱) = c$$

و

$$g(n) = ag\left(\frac{n}{b}\right) + c\,,\quad n \in \{۱, b, b^۲, \cdots\}$$

در نظر می‌گیریم. بنابر فرع ۱۰۱۰،

به‌ازای $a = ۱$، روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$ داریم $g \in O(\log_b n)$

به‌ازای $a \geqslant ۲$، روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$ داریم $g \in O(n^{\log_b a})$

ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر $n \in \{۱, b, b^۲, \cdots\}$، $f(n) \leqslant g(n)$. برای اثبات این ادعا، استقرا روی k را، که در آن $n = b^k$، به‌کار می‌بریم. اگر $k = ۰$، در این‌صورت $n = b^۰ = ۱$ و $f(۱) \leqslant c = g(۱)$. بنابراین، نتیجه در

این حالت نخست درست است. با این فرض که این نتیجه به‌ازای $t \in \mathbf{N}$ درست باشد، به‌ازای $n = b^t$ خواهیم داشت $f(n) = f(b^t) \leqslant g(b^t) = g(n)$. در این‌صورت، به‌ازای $k = t + ۱$ و $n = b^k = b^{t+۱}$ می‌بینیم که

$$f(n) = f(b^{t+۱}) \leqslant af\left(\frac{b^{t+۱}}{b}\right) + c = af(b^t) + c \leqslant ag(b^t) + c = g(b^{t+۱}) = g(n)$$

بنابراین، از اصل استقرای ریاضی نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n = \{۱, b, b^۲, \cdots\}$، $f(n) \leqslant g(n)$. در نتیجه، روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$ داریم $f \in O(g)$ و با توجه به مطالبی که از قبل دربارهٔ g می‌دانیم، اثبات فرع تمام است.

تا اینجا مطالعهٔ ما دربارهٔ الگوریتمهای تفرقه‌بینداز و تسخیرکن اساساً مطالعه‌ای نظری بود. وقت آن رسیده است که مثالی عرضه کنیم که در آن بتوان این ایده‌ها را به‌کار برد. نتیجهٔ زیر یکی از مثالهای قبلی را تأیید می‌کند.

مثال ۴۳.۱۰ به‌ازای $n = ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, \cdots$، فرض کنیم $f(n)$ تعداد مقایسه‌های لازم برای یافتن عنصرهای ماکسیمم و مینیمم در مجموعه‌ای مانند $S \subset \mathbf{R}$، به‌طوری‌که $|S| = n$، باشد و فرض کنیم روش مثال ۲۶۰۱۰ را به‌کار گیریم.

اگر $n = ۱$، در این‌صورت عنصرهای ماکسیمم و مینیمم یکی هستند. بنابراین، هیچ مقایسه‌ای لازم نیست و $f(۱) = ۰$.

اگر $n > ۱$، در این‌صورت به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{Z}^+$ داریم $n = ۲^k$ و S را به‌صورت $S_۱ \cup S_۲$، که در آن $|S_۱| = |S_۲| = n/۲ = ۲^{k-۱}$، افراز (تقسیم) می‌کنیم. به‌ازای هر $i = ۱, ۲$، برای یافتن عنصر ماکسیمم و عنصر مینیمم S_i به $f(n/۲)$ مقایسه نیاز داریم. به‌ازای هر $i = ۱, ۲$، فرض کنیم M_i ماکسیمم و m_i مینیمم S_i را نشان دهد. به‌ازای $n \geqslant ۴$، با در دست داشتن $m_۱$، $M_۱$، $m_۲$، و $M_۲$، برای تعیین عنصرهای مینیمم و ماکسیمم S، $m_۱$ را با $m_۲$ و $M_۱$ را با $M_۲$ مقایسه می‌کنیم. بنابراین،

$$f(n) = ۲f\left(\frac{n}{۲}\right) + ۱ \quad \text{، } n = ۲ \text{ اگر}$$

و

$$f(n) = ۲f\left(\frac{n}{۲}\right) + ۲ \quad \text{، } n = ۴, ۸, ۱۶, \cdots \text{ اگر}$$

متأسفانه، این نتایج مفروضات قضیهٔ ۱۰۰۱۰ را به‌دست نمی‌دهند. ولی، اگر معادلات را به نابرابری برگردانیم، یعنی

$$f(۱) \leqslant ۲$$
$$f(n) \leqslant ۲f\left(\frac{n}{۲}\right) + ۲, \quad n = ۲^k, \ k \geqslant ۱$$

در این‌صورت، بنابر فرع ۲۰۱۰، تابع پیچیدگی زمانی، یعنی $f(n)$، که با تعداد مقایسه‌های انجام‌گرفته در این روش بازگشتی اندازه‌گیری می‌شود، به‌ازای هر $n = ۱, ۲, ۴, ۸, \cdots$ در $f \in O(n^{\log_۲ ۲}) = O(n)$ صدق می‌کند.

می‌توانیم ارتباط موجود بین این مثال و مثال ۲۶۰۱۰ را باز هم بیشتر بررسی کنیم. از آن نتیجهٔ قبلی می‌دانیم که اگر $|S| = n = ۲^k$، $k \geqslant ۱$، در این‌صورت تعداد مقایسه‌های لازم (در روش مفروض) برای یافتن عنصرهای ماکسیمم و مینیمم در S، یعنی $f(n)$، برابر است با $(۳/۲)(۲^k) - ۲$. (یادداشت: به‌جای متغیر n در مثال ۲۶۰۱۰ متغیر k را گذاشته‌ایم.)

چون $m = 2^k$، می‌بینیم که اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$f(1) = 0$$
$$f(n) = f(2^k) = \left(\frac{3}{2}\right)(2^k) - 2 = \left(\frac{3}{2}\right) n - 2 \,, \quad n = 2, 4, 8, 16, \cdots$$

بنابراین، به‌ازای $n \in \{2^k | k \in \mathbf{N}\}$، $f \in O(n)$، یعنی درست همان چیزی که قبلاً با استفاده از فرع ۲۰۱۰ به‌دست آورده بودیم.

همهٔ نتایج به‌دست آمده متکی بر فرض $n = b^k$، به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{N}$، هستند. بنابراین، طبیعتاً این پرسش مطرح می‌شود که اگر n مجاز به اختیارکردن هر عدد صحیح مثبت باشد آیا می‌توانیم نتیجه‌ای سودمند به‌دست آوریم؟ برای پاسخ دادن به این پرسش، ایدهٔ زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳.۱۰ می‌گوییم تابع $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ به‌طور یکنوا افزایشی است هرگاه به‌ازای هر $m, n \in \mathbf{Z}^+$،

$$m < n \Rightarrow f(m) \leqslant f(n)$$

این تعریف به ما امکان می‌دهد که با شرایط معینی، نتایج قبلی را به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ بررسی کنیم.

قضیهٔ ۲.۱۰ فرض کنیم $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ به‌طور یکنوا افزایشی باشد و فرض کنیم $g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$. به‌ازای $b \in \mathbf{Z}^+$ و $b \geqslant 2$، فرض کنیم به‌ازای هر $n \in S = \{b^k | k \in \mathbf{N}\}$، $f \in O(g)$. با این شرایط،

الف) اگر $g \in O(\log n)$، آنگاه $f \in O(\log n)$.

ب) اگر $g \in O(n \log n)$، آنگاه $f \in O(n \log n)$.

پ) به‌ازای $r \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$، اگر $g \in O(n^r)$، آنگاه $f \in O(n^r)$.

برهان: قسمتهای (الف) و (پ) را ثابت می‌کنیم و قسمت (ب) را برای تمرینات این بند نگاه می‌داریم. قبل از شروع اثبات، باید توجه داشته باشیم که پایهٔ لگاریتمهای موجود در قسمتهای (الف) و (ب) می‌تواند هر عدد حقیقی و مثبت و بزرگتر از ۱ باشد.

الف) چون روی S داریم $f \in O(g)$ و $g \in O(\log n)$، حداقل داریم $f \in O(\log n)$ روی S. بنابراین، با توجه به تعریف ۱۰۱۰، ثابتهای $n \in \mathbf{Z}^+$ و $s \in \mathbf{Z}^+$ وجود دارند به‌طوری‌که به‌ازای هر $n \in S$ و $n \geqslant s$، داریم $f(n) = |f(n)| \leqslant m|\log n| = m \log n$. باید ثابتهایی مانند $M \in \mathbf{R}^+$ و $s_1 \in \mathbf{Z}^+$ چنان بیابیم که نه فقط به‌ازای عنصرهای $n \in S$، بلکه به‌ازای هر $n \geqslant s_1$، $f(n) \leqslant M \log n$.

فرض کنیم $t \in \mathbf{Z}^+$ به‌طوری‌که $s < b^k < t \leqslant b^{k+1}$ (و $\log s \geqslant 1$). چون f مثبت و به‌طور یکنوا افزایشی است،

$$\begin{aligned} f(t) \leqslant f(b^{k+1}) &\leqslant m \log(b^{k+1}) \\ &= m[\log(b^k) + \log b] \\ &= m \log(b^k) + m \log b \end{aligned}$$

$$< m\log(b^k) + m\log b\log(b^k)$$
$$= m(1+\log b)\log(b^k)$$
$$< m(1+\log b)\log t$$

بنابراین، با فرض $M = m(1+\log b)$ و $s_1 = b^k + 1$، می‌بینیم که به‌ازای هر $t \in \mathbf{Z}^+$، اگر $t \geqslant s_1$ آنگاه $f(t) < M\log t$. بنابراین، $f(t) < M\log t$ و $f \in O(\log n)$.

پ) با توجه به شرایط این قسمت از قضیه، ثابتهای $m \in \mathbf{R}^+$ و $s \in \mathbf{Z}^+$ وجود دارند به‌طوری‌که به‌ازای هر $n \in S$ که در $n \geqslant s$ صدق کند، $f(n) \leqslant m(n^r)$. اگر $t \in \mathbf{Z}^+$ و $s < b^k < t \leqslant b^{k+1}$، در این‌صورت،

$$f(t) \leqslant f(b^{k+1}) \leqslant m(b^{k+1})^r = m[b^{(k+1)}r]$$
$$= mb^r(b^k)^r$$
$$< mb^r t^r$$

با فرض $M = mb^r$ و $s_1 = b^k + 1$، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $t \in \mathbf{Z}^+$، اگر $t \geqslant s_1$، آنگاه $f(t) < Mt^r$ و $f \in O(n^r)$.

اکنون نتیجهٔ قضیهٔ ۲۰۱۰ را برای تعیین $f(n)$، یعنی تابع پیچیدگی زمانی الگوریتم جستجویی به‌نام جستجوی دودویی به‌کار می‌گیریم.

در مثال ۷۱۰۵ (جلد اول) الگوریتمی را تحلیل کردیم که بین آرایه‌ای از اعداد صحیح مانند $A[1]$، $A[2]$، $A[3]$، $\cdots$، $A[n]$ در جستجوی عدد صحیح خاصی به‌نام Key بود. در آنجا درایه‌های این آرایه به‌ترتیب خاصی قرار نداشتند و در نتیجه، مقدار Key را فقط با مقادیر عنصرهای آرایهٔ $A[1]$، $A[2]$، $A[3]$، $\cdots$، $A[n]$ مقایسه می‌کردیم. ولی اگر بدانیم که $A[1] < A[2] < A[3] < \cdots < A[n]$ در این‌صورت این روش خیلی مؤثر نیست. (مثلاً برای یافتن شمارهٔ تلفن شخص خاصی هیچ‌کس دفترچهٔ تلفن را اسم به‌اسم با شروع از صفحهٔ ۱ مورد جستجو قرار نمی‌دهد. برای تسریع فرایند جستجو، ترتیب الفبایی نامهای خانوادگی به‌کار گرفته می‌شود.) مثال خاصی را بررسی می‌کنیم.

مثال ۴۴.۱۰ آرایهٔ $A[1]$، $A[2]$، $A[3]$، $\cdots$، $A[7]$ را، که در آن $A[1] = 2$، $A[2] = 4$، $A[3] = 5$، $A[4] = 7$، $A[5] = 10$، $A[6] = 17$ و $A[7] = 20$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\text{Key} = 9$. این آرایه را به‌صورت زیر مورد جستجو قرار می‌دهیم:

۱) Key را با درایه‌ای که در مرکز این آرایه است مقایسه می‌کنیم؛ در اینجا این درایه $A[4] = 7$ است. چون $\text{Key} > A[4]$، توجه خود را به عنصرهای زیر آرایهٔ $A[5]$، $A[6]$، $A[7]$ متمرکز می‌کنیم.

۲) اکنون Key را با عنصر مرکزی، یعنی با $A[6]$، مقایسه می‌کنیم. چون $A[6] = 17 > 9 = \text{Key}$، توجه خود را به زیر آرایه‌ای (از $A[5]$، $A[6]$ و $A[7]$) معطوف می‌کنیم که از عنصرهای کوچکتر از $A[6]$ تشکیل شده است. در اینجا فقط عنصر $A[5]$ این ویژگی را دارد.

۳) پس از مقایسهٔ Key با $A[5]$، می‌بینیم که $\text{Key} \neq A[5]$ و بنابراین، Key در آرایهٔ مفروض $A[1]$، $A[2]$، $A[3]$، $\cdots$، $A[7]$ حضور ندارد.

با توجه به نتایج حاصل از مثال ۲۴۰۱۰، ملاحظات زیر را برای یک آرایهٔ (مرتب) کلی از اعداد صحیح (یا اعداد حقیقی) ارائه می‌کنیم. فرض کنیم $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، $\cdots$، $A[n]$ آرایهٔ مفروض را نشان دهد و فرض کنیم Key عددی صحیح یا عددی حقیقی را نشان دهد که در جستجوی آن هستیم. برخلاف آرایه‌ای که در مثال ۷۱۰۵ (جلد اول) داشتیم، در اینجا

$$A[۱] < A[۲] < A[۳] < \cdots < A[n]$$

۱) نخست مقدار Key را با درایه‌ای از این آرایه که در مرکز یا نزدیک مرکز قرار دارد مقایسه می‌کنیم. این درایه $A\left[\frac{(n+۱)}{۲}\right]$ است درصورتی‌که n فرد باشد و $A\left[\frac{n}{۲}\right]$ است درصورتی‌که n زوج باشد.

خواه n زوج باشد خواه فرد، عنصری از این آرایه که دارای اندیس $m = \left\lfloor \frac{(n+۱)}{۲} \right\rfloor$ است، عنصری است که در مرکز یا نزدیک مرکز قرار دارد. توجه داریم که در حال حاضر ۱ کوچکترین و n بزرگترین اندیس در این آرایه است.

۲) اگر Key همان $A[m]$ باشد، کار تمام است. اگر این‌طور نباشد، در این‌صورت

الف) اگر Key بزرگتر از $A[m]$ باشد، زیردرایهٔ $A[m+۱]$، $A[m+۲]$، $\cdots$، $A[n]$ را (با همین فرایند تقسیم) مورد جستجو قرار می‌دهیم.

ب) اگر Key کوچکتر از $A[m]$ باشد، در این‌صورت فرایند تقسیم را برای جستجو در زیرآرایهٔ $A[۱]$، $A[۲]$، $\cdots$، $A[m-۱]$ به‌کار می‌بریم.

ملاحظات بالا را برای نوشتن قطعه برنامهٔ پاسکال شکل ۲۴۰۱۰ به‌کارگرفته‌ایم. در اینجا ورودی از آرایه‌ای مانند $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، $\cdots$، $A[n]$ متشکل از اعداد صحیح یا اعداد حقیقی، تشکیل شده است که به‌صورت افزایشی مرتب شده‌اند. این آرایه و مقدار عدد صحیح n، همراه با مقدار متغیر Key، قبلاً در برنامه داده شده‌اند. اگر عنصرهای این آرایه اعدادی صحیح (اعدادی حقیقی) باشند، در این‌صورت Key باید عددی صحیح (عددی حقیقی) باشد. متغیرهای lower و upper متغیرهایی صحیح‌اند که برای ذخیره کردن حدود پایینی و بالایی زیروندهای موجود در آرایه یا زیرآرایهٔ مورد جستجو به‌کار می‌روند. متغیر صحیح center زیروند عنصری از آرایه (یا زیرآرایه) را که در

```
Begin

  flag := false;
  lower := 1;
  upper := n;

  While (lower <= upper) and (flag = false) do
   Begin
    center := (lower+upper) Div 2;
    If Key = A[center] then
      flag := true
    Else
      If Key < A[center] then
        upper := center-1    {The lower subarray is searched.}
      Else lower := center+1    {The upper subarray is searched.}
   End;

  If flag = false then
   Writeln('The value ', Key, ' is not present in the array.')
  Else Writeln('The value ', Key,' is located in entry ', center,'.')

End.
```

شکل ۲۴.۱۰

مرکز، یا نزدیک مرکز، آرایه (یا زیرآرایه) قرار دارد ذخیره می‌کند. به‌طورکلی، $\text{center} = \left\lfloor \frac{(\text{lower} + \text{upper})}{۲} \right\rfloor$. سرانجام، به متغیر بولی flag ارزش دروغ نسبت داده می‌شود (درصورتی‌که Key یافت نشود) یا ارزش راست (درصورتی‌که Key یافت شود).

می‌خواهیم پیچیدگی زمانی (بدترین حالت) را برای الگوریتم پیاده‌سازی شده در شکل ۲۴۰۱۰ اندازه بگیریم. در اینجا $f(n)$ تعداد ماکسیمم مقایسه‌های لازم (بین Key و $A[\text{center}]$) را برای تعیین اینکه آیا عدد مفروض Key در آرایهٔ مرتب $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، $\cdots$، $A[n]$ حضور دارد یا نه، نشان می‌دهد.

- به‌ازای $n = ۱$، Key با $A[۱]$ مقایسه می‌شود و $f(۱) = ۱$.
- وقتی $n = ۲$، در بدترین حالت Key با $A[۱]$ و سپس با $A[۲]$ مقایسه می‌شود؛ بنابراین، $f(۲) = ۲$.
- در حالت $n = ۳$، $f(۳) = ۲$ (در بدترین حالت).
- وقتی $n = ۴$، بدترین حالت هنگامی روی می‌دهد که Key نخست با $A[۲]$ مقایسه شود و سپس جستجوی دودویی از $A[۳]$ و $A[۴]$ به‌عمل آید. جستجوی $A[۳]$ و $A[۴]$ (در بدترین حالت) مستلزم $f(۲)$ مقایسه است. بنابراین، $f(۴) = ۱ + f(۲) = ۳$.

تا اینجا می‌بینیم که $f(۱) \leqslant f(۲) \leqslant f(۳) \leqslant f(۴)$ و حدس می‌زنیم که f تابعی به‌طور یکنوا افزایشی است. برای تحقیق این امر، اصل استقرای قوی را به‌کار می‌گیریم. فرض کنیم به‌ازای هر $i, j \in \{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$،

$$i < j \Rightarrow f(i) \leqslant f(j)$$

اکنون عدد صحیح $n + ۱$ را در نظر می‌گیریم. دو حالت را باید بررسی کنیم.

۱) $n + ۱$ فرد است: در این‌صورت می‌نویسیم $n = ۲k$ و $n + ۱ = ۲k + ۱$، که در آن $k \in \mathbb{Z}^+$. در بدترین حالت، $f(n + ۱) = f(۲k + ۱) = ۱ + f(k)$، که در آن ۱ مقایسهٔ Key با $A[k + ۱]$ را نشان می‌دهد و $f(k)$ تعداد (ماکسیمم) مقایسه‌های لازم در جستجوی دودویی برای زیرآرایهٔ $A[۱]$، $A[۲]$، $\cdots$، $A[k]$ یا زیرآرایهٔ $A[k + ۲]$، $A[k + ۳]$، $\cdots$، $A[۲k + ۱]$ است.

ولی $f(n) = f(۲k) = ۱ + \max\{f(k - ۱), f(k)\}$. چون $k - ۱, k < n$، بنابر فرض استقرا داریم $f(k - ۱) \leqslant f(k)$، و بنابراین،

$$f(n) = ۱ + f(k) = f(n + ۱)$$

۲) $n + ۱$ زوج است: این‌بار داریم $n + ۱ = ۲r$، که در آن $r \in \mathbb{Z}^+$ و در بدترین حالت، بنابر فرض استقرا، $f(n + ۱) = ۱ + \max\{f(r - ۱), f(r)\} = ۱ + f(r)$؛ بنابراین،

$$f(n) = f(۲r - ۱) = ۱ + f(r - ۱) \leqslant ۱ + f(r) = f(n + ۱)$$

در نتیجه، تابع f به‌طور یکنوا افزایشی است.

اکنون زمان آن فرارسیده است که با استفاده از تابع $f(n)$، پیچیدگی زمانی بدترین حالت را برای این الگوریتم جستجوی دودویی تعیین کنیم. چون

$$f(۱) = ۱$$

و

$$f(n) = f\left(\frac{n}{۲}\right) + ۱, \quad n = ۲^k, \ k \geqslant ۱$$

از قضیهٔ ۱۰۱۰ (با فرض $a=۲$ ،$b=۲$ و $c=۱$) نتیجه می‌گیریم که

$$f(n)=\log_۲ n+۱ \text{ و به‌ازای } n\in\{۱,۲,۴,۸,\cdots\}\text{، } f\in O(\log_۲ n)$$

ولی چون f به‌طور یکنوا افزایشی است، از قضیهٔ ۲۰۱۰ نتیجه می‌گیریم که $f\in O(\log_۲ n)$ (به‌ازای $n\in \mathbf{Z}^+$). در نتیجه، جستجوی دودویی یک الگوریتم $O(\log_۲ n)$ است، در حالی‌که الگوریتم جستجوی مثال ۷۱۰۵ (جلد اول) یک الگوریتم $O(n)$ است. بنابراین، به‌تدریج که مقدار n افزایش می‌یابد، جستجوی دودویی الگوریتمی مؤثرتر است، البته درصورتی‌که شرط اضافی مرتب بودن آرایه را مدنظر داشته باشیم.

در این بند چند ایدهٔ اساسی در مطالعهٔ الگوریتمهای تفرقه‌بینداز و تسخیرکن را معرفی کردیم. همچنین، مطالبی را که نخستین‌بار در بندهای ۷۰۵ و ۸۰۵ (جلد اول) دربارهٔ پیچیدگی محاسباتی و تحلیل الگوریتمها معرفی کردیم، تعمیم دادیم.

تمرینات این بند حاوی تعمیمهایی از نتایجی است که در این بند به‌دست آمدند. برای خواننده‌ای که می‌خواهد مطالعات بیشتری دربارهٔ این موضوع داشته باشد مراجع این فصل هم یاری‌دهنده هستند و هم جالب.

تمرینات ۶.۱۰

۱. در هر یک از موارد زیر داریم $f:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$. $f(n)$ را نسبت به مجموعهٔ مفروض S بیابید و روی S صورت «Oی بزرگ» مناسب برای f را تعیین کنید.

الف)
$$f(۱)=۵$$
$$f(n)=۴f\left(\frac{n}{۳}\right)+۵\ ,\ n=۳,۹,۲۷,\cdots$$
$$S=\{۳^i|i\in\mathbf{N}\}$$

ب)
$$f(۱)=۷$$
$$f(n)=f\left(\frac{n}{۵}\right)+۷\ ,\ n=۵,۲۵,۱۲۵,\cdots$$
$$S=\{۵^i|i\in\mathbf{N}\}$$

۲. فرض کنیم $a,b,c\in\mathbf{Z}^+$، که در آن $b\geqslant ۲$ و فرض کنیم $d\in\mathbf{N}$. ثابت کنید جواب رابطهٔ بازگشتی

$$f(۱)=d$$
$$f(n)=af\left(\frac{n}{b}\right)+c\ ,\ n=b^k\ ,\ k\geqslant ۱$$

در دو مورد زیر صدق می‌کند:

الف) اگر $a=۱$، به‌ازای $n=b^k$ ،$k\in\mathbf{N}$، $f(n)=d+c\log_b n$.

ب) اگر $a\geqslant ۲$، به‌ازای $n=b^k$ ،$k\in\mathbf{N}$، $f(n)=dn^{\log_b a}+\left(\frac{c}{a-۱}\right)[n^{\log_b a}-۱]$.

۳. در قسمتهای (الف) و (ب) از تمرین ۲، صورتهای «Oی بزرگ» مناسب برای f را روی $\{b^k|k\in\mathbf{N}\}$ تعیین کنید.

۴. در هر یک از موارد زیر داریم $f: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$. $f(n)$ را نسبت به مجموعهٔ مفروض S بیابید و روی S صورت «Oی بزرگ» مناسب برای f را تعیین کنید.

الف)
$$f(۱) = ۰$$
$$f(n) = ۲f\left(\frac{n}{۵}\right) + ۳\,,\ n = ۵, ۲۵, ۱۲۵, \cdots$$
$$S = \{۵^i | i \in \mathbf{N}\}$$

ب)
$$f(۱) = ۱$$
$$f(n) = f\left(\frac{n}{۲}\right) + ۲\,,\ n = ۲, ۴, ۸, \cdots$$
$$S = \{۲^i | i \in \mathbf{N}\}$$

۵. یک مسابقهٔ دوره‌ای تنیس با شرکت n بازیکن، که در آن $n = ۲^k$، $k \in \mathbf{Z}^+$، برگزار می‌شود. در دور اول $\frac{n}{۲}$ مسابقه برگزار می‌شود و $\frac{n}{۲}$ نفر برنده می‌شوند به دور دوم صعود می‌کنند. در این دور $\frac{n}{۴}$ مسابقه برگزار می‌شود. این فرایند تنصیف تا تعیین برندهٔ نهایی ادامه می‌یابد.

الف) به‌ازای $n = ۲^k$، $k \in \mathbf{Z}^+$، فرض کنیم $f(n)$ تعداد کل بازیهای انجام گرفته در این مسابقهٔ دوره‌ای باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای $f(n)$ به‌صورت

$$f(۱) = d$$
$$f(n) = af\left(\frac{n}{۲}\right) + c\,,\quad n = ۲, ۴, ۸, \cdots$$

که در آن a، c و d ثابت‌اند، بیابید و سپس آن‌را حل کنید.

ب) نشان دهید پاسخ قسمت (الف) جواب رابطهٔ بازگشتی زیر نیز هست:

$$f(۱) = d$$
$$f(n) = f\left(\frac{n}{۲}\right) + \left(\frac{n}{۲}\right)\,,\quad n = ۲, ۴, ۸, \cdots$$

۶. اثبات فرع ۱۰۱۰ و قسمت (ب) از قضیهٔ ۲۰۱۰ را کامل کنید.

۷. تابع پیچیدگی زمانی بهترین حالت برای جستجوی دودویی چیست؟

۸. الف) روش ارائه شده در مثال ۳۴۰۱۰ را به‌صورت زیر تغییر دهید: به‌ازای هر $S \subset \mathbf{R}$، که در آن $|S| = n$، S را به‌صورت $S = S_۱ \cup S_۲$ چنان افراز کنید که اگر n زوج باشد، $|S_۱| = |S_۲|$ و اگر n فرد باشد، $|S_۱| = ۱ + |S_۲|$. نشان دهید اگر $f(n)$ تعداد مقایسه‌های لازم (در این روش) برای یافتن عنصرهای ماکسیمم و مینیمم S باشد، آنگاه f تابعی به‌طور یکنوا افزایشی است.

ب) صورت «Oی بزرگ» مناسب برای تابع f در قسمت (الف) کدام است؟

۹. در فرع ۲۰۱۰ با مسألهٔ یافتن صورت «Oی بزرگ» مناسب برای تابع $f: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+ \cup \{۰\}$ مواجه بودیم، که در آن

$$f(۱) \leqslant c\,,\quad c \in \mathbf{Z}^+$$
$$f(n) \leqslant af\left(\frac{n}{b}\right) + c\,,\quad a, b \in \mathbf{Z}^+\,,\ b \geqslant ۲\,,\ n = b^k\,,\ k \in \mathbf{Z}^+$$

در اینجا ثابت c در دومین نابرابری، به‌عنوان زمان لازم برای تقسیم مسألهٔ مفروض با اندازهٔ n به a مسألهٔ (مشابه) کوچکتر با اندازهٔ $\frac{n}{b}$ و ترکیب a جواب این مسائل کوچکتر برای حصول جوابی برای مسألهٔ اصلی که دارای اندازهٔ n است تعبیر می‌شود. اکنون موقعیتی را بررسی خواهیم کرد که دیگر این زمان مقداری ثابت نیست بلکه وابسته به n است.

الف) فرض کنیم $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$، که در آن $b \geqslant ۲$. فرض کنیم $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+ \cup \{۰\}$ تابعی به‌طور یکنوا افزایشی باشد و

$$f(۱) \leqslant c$$
$$f(n) \leqslant af\left(\frac{n}{b}\right) + cn\,, \quad n = b^k\,,\ k \in \mathbf{Z}^+$$

با استفاده از استدلالی مشابه آنچه در قضیه ۱۰۰۱ (برای برابریها) ارائه شد، نشان دهید به‌ازای هر $n = a, b, b^۲, b^۳, \cdots$

$$f(n) \leqslant cn \sum_{i=۰}^{k} \left(\frac{a}{b}\right)^i$$

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) نشان دهید به‌ازای $a = b$ داریم $f \in O(n \log n)$. (در اینجا مبنای تابع log هر عدد حقیقی دلخواه بزرگتر از ۱ می‌تواند باشد.)

پ) اگر $a \neq b$، نشان دهید قسمت (الف) مستلزم

$$f(n) \leqslant \left(\frac{c}{a-b}\right)(a^{k+۱} - b^{k+۱})$$

است.

ت) با توجه به قسمت (پ) ثابت کنید (یک) به‌ازای $a < b$؛ $f \in O(n)$ و (دو) به‌ازای $a > b$، $f \in O(n^{\log_b a})$. [یادداشت: در هریک از قسمتهای (ب) و (ت) صورت «Oی بزرگ» برای f روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$، صورت «$O$ی بزرگ» برای f روی $\mathbf{Z}^+$ نیز هست.]

۷.۱۰ خلاصه و مروری تاریخی

در این فصل با روابط بازگشتی به‌عنوان ابزار دیگری برای حل مسائل ترکیباتی آشنا شدیم. در این نوع مسائل موقعیت مفروضی را تحلیل و سپس نتیجه، یعنی a_n، را برحسب نتایج مربوط به بعضی از اعداد صحیح نامنفی کوچکتر بیان می‌کنیم. به محض تعیین رابطهٔ بازگشتی، می‌توانیم آن‌را نسبت به هر a_n (در محدودهٔ معقول) حل کنیم. اگر به کامپیوتر دسترسی داشته باشیم، چنین روابطی بسیار ارزشمندند، به‌ویژه وقتی‌که نتوانیم آنها را صریحاً حل کنیم.

به لحاظ تاریخی مطالعهٔ روابط بازگشتی با رابطهٔ فیبوناچی $F_{n+۲} = F_{n+۱} + F_n$، $n \geqslant ۰$، $F_۰ = ۰$ و $F_۱ = ۱$ آغاز شد که لئوناردو پیزایی (حدود ۱۱۷۵ − ۱۲۵۰) آن‌را در ۱۲۰۲ ارائه کرد. او در اثر خود به‌نام رسالهٔ حساب[1]، مسألهٔ مربوط به تعداد جفت خرگوشهایی را مطالعه کرد که در طول یک‌سال متولد می‌شوند، درصورتی‌که زاد و ولد با یک جفت خرگوش که در پایان هر ماه جفت دیگری تولید می‌کنند آغاز شود. هر جفت

1. *Liber Abaci*

لئوناردو فیبوناچی (حدود ۱۱۷۵ — ۱۲۵۰)

جدید نیز زاد و ولد را یک ماه پس از تولد آغاز می‌کند و فرض می‌کنیم که در طول سال هیچ خرگوشی نمی‌میرد.

بنابراین، درپایان ماه اول دو جفت خرگوش موجود است؛ بعد از دو ماه سه جفت هست؛ بعد از سه‌ماه پنج جفت هست و غیره. [همان‌طورکه در خلاصه و مرور تاریخی فصل ۹ متذکر شدیم، آبراهام دوموآور (۱۶۶۷ — ۱۷۵۴) این نتیجه را در سال ۱۷۱۸ با روش توابع مولد به‌دست آورد.] همین دنباله درکارهای یوهان کپلر[1] (۱۵۷۱ — ۱۶۳۰) ریاضیدان آلمانی، نیز ظاهر می‌شود. او این دنباله را در مطالعات خود دربارهٔ نحوهٔ مرتب‌شدن برگهای یک گیاه یا یک گل حول ساقهٔ خود به‌کار گرفت. در ۱۸۴۴ گابریل لامه[2] (۱۷۹۵ — ۱۸۷۰) ریاضیدان فرانسوی، این دنباله را در تحلیل مؤثر بودن الگوریتم اقلیدسی به‌کار برد. بعداً، فرانسوا ادوار آناتول لوکاس[3] (۱۸۴۲ — ۱۸۹۱) که معمای برجهای هانوی را به زبان عامه‌فهم ارائه کرد، ویژگیهای بسیاری از این دنباله را ثابت نمود و نخستین کسی بود که این دنباله را دنبالهٔ فیبوناچی نامید.

مجموعه‌ای مقدماتی از مثالهایی دربارهٔ اعداد فیبوناچی و ویژگیهای آنها درکتاب تی. اچ. گارلند[4] [۹] آورده شده است. مطالب بیشتری در این زمینه را می‌توان ازکتابهای وی. ای. هوگات[5] [۱۳] و اس. وایدا[6] [۲۷] فراگرفت. مقالهٔ نوشتهٔ آر. وی. ژان[7] [۱۵] مندرج در $UMAP$ کاربردهای بسیاری از این دنباله را به‌دست می‌دهد. فصل ۸ ازکتاب آر. هانسبرگر[8] [۱۴] حاوی گزارش جالبی از اعداد فیبوناچی و دنبالهٔ وابسته به آن، به‌نام اعداد لوکاس، است. کتاب آر. ال. گراهام، دی. ای. کنوت، و اُ. پاتاشنیک [۱۱] نیز حاوی مثالها و ویژگیهای بسیاری دربارهٔ اعداد فیبوناچی و اعداد کاتالان است. می‌توان مثالهای نقض بیشتری دربارهٔ اعداد فیبوناچی وکاتالان، نظیر آنهایی که، به‌ترتیب، در مثالهای ۱۰ ۰ ۱۴ و ۱۰ ۰ ۳۹ آورده شدند، در مقالهٔ نوشتهٔ آر. کی. گای[9] [۱۲] یافت.

می‌توان مطالبی را مشابه آنچه در این فصل ارائه شد در فصل ۳ ازکتاب سی. ال. لیو [۱۹] یافت. برای کسب اطلاعات نظری بیشتری دربارهٔ روابط بازگشتی خطی با ضرایب ثابت، فصل ۹ ازکتاب ان. فینیزیو[10] و

---

1. Johannes Kepler 2. Gabriel Lamé 3. Franşois Édouard Anatole Lucas 4. T. H. Garland 5. V. E. Hoggatt 6. S. Vajda 7. R. V. Jean 8. R. Hansberger 9. R. K. Guy 10. N. Finizio

جی. لاداس[1] [۷] را ببینید. این کتاب حاوی کاربردی در نظریهٔ اپتیک است که در این کاربرد با استفاده از رابطه‌ای بازگشتی مسیر شعاعی نورانی که از تعدادی عدسیهای نازک متساوی‌الفاصله عبور می‌کند، تعیین می‌شود.

کاربردهایی در نظریه احتمال دربارهٔ پیشامدهای بازگشتی، رفتارهای تصادفی و مسائل مربوط به ورشکستگی را می‌توان در فصلهای ۱۳ و ۱۴ از کتاب کلاسیک دابلیو. فلر[2] [۶] یافت. کتاب دی. شربرت[3] [۲۳] معادلات تفاضلی را معرفی می‌کند و حاوی کاربردی در اقتصاد موسوم به قضیهٔ تار عنکبوت است. کتاب اس. گلدبرگ[4] [۱۰] بیشتر حاوی کاربردهایی در علوم اجتماعی است.

فنون بازگشتی برای تولید جایگشتها، ترکیبها و افرازهای اعداد صحیح در فصل ۳ از کتاب آر. ا. بروآلدی[5] [۳] و فصل ۵ از کتاب ای. اس. پیج[6] و ال. بی. ویلسون[7] [۲۱] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. الگوریتمی که در بند ۱۰۱۰ برای جایگشتهای $\{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$ ارائه شد نخستین‌بار درکتاب اچ. دی. اشتاینهاوس[8] [۲۵] آورده شد و اغلب آن‌را الگوریتم ترتیب نشان مجاور می‌نامند. بعدها، اچ. اف. تروتر[9] [۲۶] و اس. ام. جانسون[10] [۱۶] مستقلاً این نتیجه را مجدداً کشف کردند. روشهای ذخیره‌سازی مؤثر برای جایگشتها و ساختارهای ترکیبیاتی دیگر درکتاب دی. ای. کنوث [۱۷] مفصلاً مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند. اثر ای. ام. راینگولد، جی. نیورگلت و ان. دیو [۲۲] نیز حاوی این نوع الگوریتمها و پیاده‌سازی کامپیوتری آنهاست.

کسانی‌که از آشنایی با درختهای دودویی مرتب ریشه‌دار در بند ۵۰۱۰ لذت برده‌اند، فصل ۳ از کتاب ا. وی. اهو، جی. ای. هاپکرافت و جی. دی. آلمن [۱] باید برایشان جالب باشد. پایه و اساس مثال مربوط به پشته‌ها در صفحهٔ ۸۶ ازکتاب اس. ایون [۵] آورده شده است. مقالهٔ ام. گاردنر[11] [۸] حاوی مثالهای بسیار دیگری است که در آنها اعداد کاتالان مطرح می‌شوند. ملاحظات محاسباتی در تعیین اعداد کاتالان در مقالهٔ دی. ام. کمبل[12] [۴] مورد بررسی قرار گرفته‌اند؛ فصل ۹ از کتاب آر. هانسبرگ [۱۴] دربارهٔ پیوند موجود بین این اعداد واصل انعکاس [که در تمرین تکمیلی ۳۴ از فصل ۱ (جلد اول) آورده شد] بحث می‌کند.

سرانجام، مطالبی که دربارهٔ الگوریتمهای تفرقه‌بینداز و تسخیرکن در بند ۶۰۱۰ ارائه کردیم از نحوهٔ ارائهٔ دی. اف. استانات و دی. اف. مک‌آلیستر در بند ۳۰۵ از [۲۴] الگوبرداری شده است. فصل ۱۰ ازکتاب ا. وی. اهو، جی. ای. هاپکرافت، و جی. دی. آلمن [۱] اطلاعات بیشتری دربارهٔ این موضوع به‌دست می‌دهد. کاربردی از این روش در الگوریتمی برای ضرب ماتریسها در فصل ۱۰ ازکتاب سی. ال. لیو [۱۸] آمده است.

مراجع

1. Aho, Alfred V., Hopcroft, John E., and Ullman, Jeffrey D. *Data Structures and Algorithms.* Reading, Mass.: Addison-Wesley. 1983.
2. Auluck, F. C. "On Some New Types of Partitions Associated with Generalized Ferrers Graphs." *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 47 (1951): pp. 679-685.

1. G. Ladas 2. W. Feller 3. D. Sherbert 4. S. Goldberg 5. R. A. Brualdi 6. E. S. Page 7. L. B. Wilson 8. H. D. Steinhous 9. H. F. Trotter 10. S. M. Jahnson 11. M. Gardner 12. D. M. Campbell

3. Brualdi, Richard A. *Introductory Combinatorics.* New York: Elsevier North-Holland, 1977.
4. Campbell, Douglas M. "The Computation of Catalan Numbers." *Mathematics Magazine 57*, no. 4 (September 1984): pp. 195-208.
5. Even, Shimon. *Graph Algorithms.* Rockville, Md.: Computer Science Press, 1979.
6. Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, 3rd ed. New York: Wiley, 1968.
7. Finizio, N., and Ladas, G. *An Introduction to Differential Equations (with Difference Equations, Fourier Series and Partial Differential Equations).* Belmont, Calif.: Wadsworth Publishing Company, 1982.
8. Gardner, Martin. "Mathematical Games, Catalan Numbers: An Integer Sequence that Materialize in Unexpected Places." *Scientific American* 234, no. 6 (June 1976): pp. 120-125.
9. Garland, Trudi Hammel. *Fascinating Fibonaccis.* Palo Alto, Calif.: Dale Seymour Publications, 1987.
10. Goldberg, Samuel. *Introduction to Difference Equations (with Illustrative Examples from Economics, Psychology, and Sociology).* New York: Wiley, 1958
11. Graham, Ronald Lewis, Knuth, Donald Ervin, and Patashnik, Oren. *Concrete Mathematics.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1989.
12. Guy, Richard K. "The Second Strong Law of Small Numbers." *Mathematics Magazine* 63, no. 1, (February 1990): pp. 3-20.
13. Hoggatt, Verner E., Jr. *Fibonacci and Lucas Numbers.* Boston, Mass.: Houghton Mifflin, 1969.
14. Honsberger, Ross. *Mathematical Gems III* (The Dolciani Mathematical Expositions, Number Nine). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1985.
15. Jean, Roger V. "The Fibonacci Sequence." *The UMAP Journal* 5, no. 1 (1984): pp. 23-47.
16. Johnson, Selmer M. "Generation of Permutations by Adjacent Transposition." *Mathematics of Computation* 17 (1963): pp. 282-285.
17. Knuth, Donald E. *The Art of Computer Programming / Volume 3 Sorting and Searching.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973.
18. Liu, C. L. *Elements of Discrete Mathematics*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1985.
19. Liu, C. L. *Introduction to Combinatorial Mathematics*, New York: McGraw-Hill, 1968.

20. Miksa, F. L., Moser, L., and Wyman, M. "Restricted Partitions of Finite Sets." *Canadian Mathematics Bulletin* 1 (1958): pp. 87-96.

21. Page, E. S., and Wilson, L. B. *An Introduction to Computational Combinatorics.* Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

22. Reingold, E. M., Nievergelt, J., and Deo, N. *Combinatorial Algorithms: Theory and Practice.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.

23. Sherbert, Donald R. *Difference Equations with Applications*, UMAP Module 322. Cambridge, Mass.: Birkhauser Boston, 1980.

24. Stanat, Donald F., and McAllister, David F. *Discrete Mathematics in Computer Science.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.

25. Steinhaus, Hugo D. *One Hundred Problems in Elementary Mathematics.* New York: Basic Books, 1964.

26. Trotter, H. F. "ACM Algorithm 115-Permutations," *Communications of the ACM* 5 (1962): pp. 434-435.

27. Vajda S. *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section.* New York: Halsted Press (adivision of John Wiley & Sons), 1989.

تمرینات تکمیلی

۱. به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ و $n \geqslant k+۱ \geqslant ۱$ فرمول بازگشتی

$$\binom{n}{k+۱} = \left(\frac{n-k}{k+۱}\right)\binom{n}{k}$$

را برای ضرایب دوجمله‌ای به‌طور جبری ثابت کنید.

۲. الف) به‌ازای $n \geqslant ۰$، فرض کنیم B_n تعداد افرازهای $\{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$ را نشان دهد. برای افرازهای $\varnothing$ قرار می‌دهیم $B_۰ = ۱$. تحقیق کنید به‌ازای هر $n \geqslant ۰$

$$B_{n+۱} = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{n-i} B_i = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} B_i$$

[اعداد B_i، $i \geqslant ۰$، را به افتخار اریک تمپل بل[1] (۱۸۸۳ – ۱۹۶۰) اعداد بل می‌نامند.]

ب) چه ارتباطی بین اعداد بل و اعداد استرلینگ نوع دوم وجود دارد؟

۳. فرض کنیم $n, k \in \mathbf{Z}^+$ و فرض کنیم $p(n, k)$ تعداد افرازهای n به دقیقاً k جمعوند (صحیح مثبت) باشد. ثابت کنید $p(n, k) = p(n-۱, k-۱) + p(n-k, k)$.

۴. به‌ازای $n \geqslant ۱$، فرض کنیم a_n تعداد راههای نوشتن n را به‌صورت مجموع مرتبی از اعداد صحیح مثبت فرد نشان دهد. (مثلاً $a_۴ = ۳$ زیرا $۴ = ۳ + ۱ = ۱ + ۳ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$.) رابطه‌ای بازگشتی برای

1. Eric Temple Bell

a_n بیابید و سپس آن‌را حل کنید.

۵. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$.

الف) $A^۲$، $A^۳$ و $A^۴$ را محاسبه کنید.

ب) فرمولی کلی برای A^n، $n \in \mathbf{Z}^+$، حدس بزنید و سپس حدس خود را با استقرای ریاضی ثابت کنید.

۶. فرض کنیم $\alpha = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ و $\beta = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$.

الف) تحقیق کنید $\alpha^۲ = \alpha + ۱$ و $\beta^۲ = \beta + ۱$.

ب) نشان دهید به‌ازای $k \geqslant ۰$، $F_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}$، که در آن $\{F_k | k \geqslant ۰\}$ دنبالهٔ اعداد فیبوناچی است.
[این فرمول را نخستین‌بار ژاک‌فیلیپ ماری‌بینه[1] (۱۷۸۶ − ۱۸۵۶) در سال ۱۸۴۳ منتشر کرد و اغلب آن‌را صورت بینهٔ نمایش اعداد فیبوناچی می‌نامند.]

پ) ثابت کنید به‌ازای هر $n \geqslant ۰$، $\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{۲n}$.

ت) نشان دهید $\alpha^۳ = ۱ + ۲\alpha$ و $\beta^۳ = ۱ + ۲\beta$.

ث) ثابت کنید به‌ازای هر $n \geqslant ۰$، $\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} ۲^k F_k = F_{۳n}$.

۷. الف) به‌ازای $\alpha = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$، تحقیق کنید $\alpha + ۲ = \alpha^۲ + ۱$ و $(۲ + \alpha)^۲ = ۵\alpha^۲$.

ب) نشان دهید به‌ازای $\beta = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$، $\beta + ۲ = \beta^۲ + ۱$ و $(۲ + \beta)^۲ = ۵\beta^۲$.

پ) اگر $n, m \in \mathbf{N}$ ثابت کنید $\sum_{k=۰}^{۲n} \binom{۲n}{k} F_{۲k+m} = ۵^n F_{۲n+m}$.

۸. الف) به‌ازای $\alpha = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ و $\beta = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$، $\alpha\beta$ چقدر است؟

ب) تحقیق کنید $\frac{۱}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha}{\alpha + ۲}$ و $\frac{۱}{\beta - \alpha} = \frac{\beta}{\beta + ۲}$.

پ) اگر $n \in \mathbf{N}$، ثابت کنید $\sum_{k=۰}^{۲n+۱} \binom{۲n+۱}{k} F_k^۲ = ۵^n F_{۲n+۱}$.

۹. به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ فرض کنیم F_n عدد فیبوناچی nام را نشان دهد و تعریف می‌کنیم

$$c_n = F_۱ F_n + F_۲ F_{n-۱} + F_۳ F_{n-۲} + \cdots + F_{n-۱} F_۲ + F_n F_۱ = \sum_{i=۰}^{n} F_i F_{n+۱-i}$$

در این‌صورت $c_۱ = F_۱ F_۱ = ۱$ و $c_۲ = F_۱ F_۲ + F_۲ F_۱ = ۲$. نشان دهید به‌ازای $n \geqslant ۳$، $c_n = c_{n-۱} + c_{n-۲} + F_n$.

۱۰. به‌ازای $n \geqslant ۰$، فرض کنیم $m = \lfloor \frac{n + ۱}{۲} \rfloor$. ثابت کنید $F_{n+۲} = \sum_{k=۰}^{m} \binom{n-k+۱}{k}$. (مثالهای ۱۰.۹ و ۱۰.۱۰ را ببینید.)

۱۱. به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، d_n تعداد پریشهای $\{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$ را، که در بند ۳.۸ دربارهٔ آنها بحث کردیم، نشان می‌دهد.

---

1. Jacques Philippe Marie Binet

الف) اگر $n > ۲$، نشان دهید d_n در رابطهٔ بازگشتی

$$d_n = (n-۱)(d_{n-۱} + d_{n-۲}), \quad d_۲ = ۱, \ d_۱ = ۰$$

صدق می‌کند.

ب) چگونه $d_۰$ را تعریف کنیم تا نتیجهٔ قسمت (الف) به‌ازای هر $n \geqslant ۲$ معتبر باشد؟

پ) نتیجهٔ قسمت (الف) را به‌صورت $d_n - nd_{n-۱} = -[d_{n-۱} - (n-۱)d_{n-۲}]$ بازنویسی می‌کنیم. چگونه می‌توان $d_n - nd_{n-۱}$ را برحسب $d_{n-۲}$ و $d_{n-۳}$ بیان کرد؟

ت) نشان دهید $d_n - nd_{n-۱} = (-۱)^n$.

ث) فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{d_n x^n}{n!}$. پس از ضرب دو طرف معادلهٔ قسمت (ت) در $\frac{x^n}{n!}$ و جمع کردن به‌ازای $n \geqslant ۲$، تحقیق کنید $f(x) = \frac{e^{-x}}{۱-x}$. بنابراین،

$$d_n = n!\left[۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{(-۱)^n}{n!}\right]$$

۱۲. به‌ازای $n \geqslant ۰$، n بیضی در صفحه چنان رسم کنید که هر بیضی هر یک از بیضیهای دیگر را دقیقاً در دو نقطه قطع کند و هیچ سه بیضی نقاط تلاقی مشترک نداشته باشند. اگر a_n تعداد ناحیه‌های حاصل در صفحه را نشان دهد، رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و سپس آن‌را حل کنید.

۱۳. به‌ازای $n \geqslant ۰$، سکه‌ای را $۲n$ بار پرتاب می‌کنیم.

الف) اگر a_n تعداد دنباله‌هایی مرکب از $۲n$ پرتاب باشد که در آنها n رو و n پشت هست، a_n را برحسب n بیابید.

ب) ثابتهای r، s و t را چنان بیابید که $(r+sx)^t = f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$.

پ) فرض کنیم b_n تعداد دنباله‌هایی مرکب از $۲n$ پرتاب باشد که در آنها، فقط پس از آنکه هر $۲n$ پرتاب انجام گرفت، تعداد روها و پشتها برای نخستین‌بار برابر شوند. (مثلاً اگر $n = ۳$، $HHHTTT$ و $HHTHTT$ در b_n به‌حساب می‌آیند، ولی $HTHHTT$ و $HHTTHT$ به‌حساب نمی‌آیند.) تعریف می‌کنیم $b_۰ = ۰$. نشان دهید به‌ازای هر $n \geqslant ۱$،

$$a_n = a_۰ b_n + a_۱ b_{n-۱} + \cdots + a_{n-۱} b_۱ + a_n b_۰$$

ت) فرض‌کنیم $g(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n$. نشان‌دهید $g(x) = ۱ - \frac{۱}{f(x)}$ و‌سپس b_n، $n \geqslant ۱$، را‌به‌دست‌آورید.

۱۴. الف) در یک بازی احتمال برد هر یک از دو بازیکن $\frac{۱}{۲}$ است. هرگز حالت تساوی پیش نمی‌آید، و بازیها مستقل از یکدیگرند، به این معنی که هر تعداد بازی که دو بازیکن انجام دهند، باز احتمال برد هر یک از آنها در بازی بعدی $\frac{۱}{۲}$ است. بعد از هر بازی، بازنده ۲۵ تومان به برنده می‌دهد. اگر بازیکن A با ۲۰۰ تومان و بازیکن B با ۲۵۰ تومان بازی را آغاز کنند و اگر بازی را تا زمانی ادامه دهند که یکی از آنها همهٔ پول خود را ببازد، احتمال اینکه بازیکن A دست خالی بلند شود چقدر است؟

ب) با این فرض که بازیکن B به قدری خسته باشد که احتمال برد او در هر بازی فقط $\frac{۱}{۴}$ باشد، به قسمت (الف) پاسخ دهید.

۱۵. الف) به چند طریق می‌توان

یک) $\{۱, ۲, ۳\}$ را به سه زیرمجموعه با اندازهٔ ۱،

دو) $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ را به سه زیرمجموعه با اندازهٔ ۲،

سه) $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ را به سه زیرمجموعه با اندازهٔ ۳ افراز کرد؟

ب) به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ فرض کنیم $f(n, ۳)$ تعداد طرق افراز $\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۳n - ۱, ۳n\}$ به سه زیرمجموعهٔ با اندازهٔ n باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای $f(n, ۳)$ بیابید و با استقرای ریاضی فرمولی برای $f(n, ۳)$ ثابت کنید.

پ) k را در $\mathbf{Z}^+$ ثابت می‌گیریم. به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، فرض کنیم $f(n, k)$ تعداد طرق افراز $\{۱, ۲, ۳, \cdots, kn - ۱, kn\}$ به k زیرمجموعه با اندازهٔ k باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای $f(n, k)$ بیابید و با استقرای ریاضی فرمولی برای $f(n, k)$ ثابت کنید.

۱۶. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند به‌طوری‌که $|A| = m \geqslant n = |B|$ و فرض کنیم $a(m, n)$ تعداد توابع پوشای موجود از A در B را نشان دهد. ثابت کنید

$$a(m, ۱) = ۱$$

$$a(m, n) = n^m - \sum_{i=۱}^{n-۱} \binom{n}{i} a(m, i)\,, \quad m \geqslant n > ۱$$

۱۷. به‌ازای $n, m \in \mathbf{Z}^+$، فرض کنیم $f(n, m)$ تعداد افرازهایی از n باشد که در آنها جمعوندها دنباله‌ای افزایشی از اعداد صحیح مثبت تشکیل می‌دهند و هیچ جمعوندی نیز از m بیشتر نیست. مثلاً اگر $n = ۴$ و $m = ۲$، می‌بینیم که $f(۴, ۲) = ۳$، زیرا در اینجا سه افراز

$$۴ = ۲ + ۲\,, \quad ۴ = ۲ + ۱ + ۱\,, \quad ۴ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

را داریم.

الف) تحقیق کنید به‌ازای هر $n, m \in \mathbf{Z}^+$،

$$f(n, m) = f(n - m, m) + f(n, m - ۱)$$

ب) برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی ابداع کنید) که به‌ازای هر $n, m \in \mathbf{Z}^+$، $f(n, m)$ را محاسبه کند.

پ) برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی ابداع کنید) که $p(n)$، یعنی تعداد افرازهای هر عدد صحیح مثبت n، را محاسبه کند.

۱۸. وقتی ارقام یکان اعداد فیبوناچی F_n، $n \geqslant ۰$، را بررسی می‌کنیم می‌بینیم که این ارقام دنباله‌ای تشکیل می‌دهند که بعد از هر ۶۰ جمله از نو تکرار می‌شود. [این نکته را نخستین بار ژوزف لویی لاگرانژ (۱۷۳۶ – ۱۸۱۳) ثابت کرد.] برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی ابداع کنید) که دنبالهٔ متشکل از این ۶۰ رقم را محاسبه کند.

فصل ۶
زبانها: ماشینهای متناهی‌الحالت

بند ۱.۶، صفحهٔ ۴۳۰

۱. الف) ۱۲۵؛۲۵ ب) ۳۹۰۶

۳. ۱۲

۵. ۷۸۰

۷. الف) $\{00, 11, 000, 111, 0000, 1111\}$ ب) $\{0, 1\}$

پ) $\Sigma^* - \{\lambda, 00, 11, 000, 111, 0000, 1111\}$ ت) $\{0, 1, 00, 11\}$

ث) $\{00, 01, 10, 11\} = \{w | \|w\| = 2\}$ ج) Σ^*

چ) $\Sigma^* - \{0, 1, 00, 11\} = \{\lambda, 01, 10\} \cup \{w | \|w\| \geqslant 3\}$

ح) $\Sigma^* - \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 111, 0000, 1111\}$

خ) $\Sigma^* - \{\lambda, 0, 1, 00, 11, 000, 111, 0000, 1111\}$

۹. الف) از $x \in AC$ نتیجه‌می‌شود که $x = ac$،که درآن $a \in A$ و $c \in C$. پس $x \in BD$، زیرا $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$.

ب) اگر $A\varnothing \neq \varnothing$، فرض‌کنیم $x \in A\varnothing$. از $x \in A\varnothing$ نتیجه می‌شود که $x = yz$،که در آن $y \in A$ و $z \in \varnothing$. ولی $z \in \varnothing$ غیرممکن است. بنابراین، $A\varnothing = \varnothing$. [به‌طور مشابهی، $\varnothing A = \varnothing$.]

۱۱. فقط به یک طریق این وضع پیش می‌آید و آن وقتی است که $A = \{\lambda\}$.

۱۳. الف) A^* متشکل از همهٔ رشته‌های x با طول زوج است به‌طوری‌که اگر $x \neq \lambda$، در این صورت، x با ۰ شروع می‌شود و به ۱ ختم می‌شود، و نمادهای (۱، ۰) یک در میان قرار دارند.

ب) در این حالت A^* دقیقاً شامل آن رشته‌هایی است که از $3n$ تا ۰، $n \in \mathbf{N}$، تشکیل شده‌اند.

پ) در اینجا $x \in A^*$ اگر (و فقط اگر)

(یک) x رشته‌ای از n تا ۰، $n \in \mathbf{N}$، باشد؛ یا،

(دو) x رشته‌ای‌باشدکه با ۰ شروع و ختم‌می‌شود، و دارای حداقل یک ۱ است و بین هر دو ۱ حداقل دو ۰ دارد.

۱۵. فرض کنیم Σ یک الفبا باشد و $\varnothing \neq A \subseteq \Sigma^*$. اگر $|A| = 1$ و $x \in A$، در این صورت، $xx = x$ زیرا $A^2 = A$. ولی

$$\|xx\| = 2\|x\| = \|x\| \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = \lambda$$

اگر $|A| > 1$، فرض کنیم $x \in A$ به‌طوری‌که $\|x\| > 0$ و $\|x\|$ مینیمال باشد. در این صورت از $x \in A^2$ نتیجه می‌گیریم که $x = yz$ به‌ازای $y, z \in A$. چون $\|x\| = \|y\| + \|z\|$، اگر $\|y\|, \|z\| > 0$، در این صورت یکی از دو رشتهٔ y و z (که متعلق به A هستند) طولی کمتر از $\|x\|$ دارد. در نتیجه، یکی از دو مقدار $\|y\|$ یا $\|z\|$ برابر با ۰ است؛ پس $\lambda \in A$.

۱۷. اگر $A = A^{2}$، در این صورت بنابر اصل استقرای ریاضی نتیجه می‌گیریم که $A = A^n$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$.
بنابراین، $A = A^+$. با توجه به تمرین ۱۵، $\lambda \in A \Longrightarrow A = A^{2}$. در نتیجه، $A = A^*$.

۱۹. بنابر تعریف ۱۱.۰۶، $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$، و چون این امکان هست که $a_1 b_1 = a_2 b_2$ درحالی‌که $a_1, a_2 \in A$، $a_1 \neq a_2$، و $b_1, b_2 \in B$، $b_1 \neq b_2$، نتیجه می‌گیریم که $|AB| \leqslant |A \times B| = |A||B|$.

۲۱. $x \in A \quad (\cup_{i \in I} B_i)$ یعنی $x = ab$ به‌ازای $a \in A$ و $b \in \cup_{i \in I} B_i$، و این یعنی $i \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $x = ab$ به‌ازای $a \in A$ و $b \in B_i$، و این یعنی $x \in AB_i$ به‌ازای یک $i \in I$ و این نیز یعنی $x \in \cup_{i \in I} AB_i$.

۲۳. الف) واژه‌های ۰۰۱ و ۰۱۱ طول برابر با ۳ دارند و در A قرار دارند. واژه‌های ۰۰۰۱۱ و ۰۰۱۱۱ طول برابر با ۵ دارند و در A قرار دارند.

ب) از مرحلهٔ (۱) می‌دانیم که $۱ \in A$. اگر مرحلهٔ (۲) را سه بار به کار ببریم، به‌دست می‌آوریم

(یک) $۱ \in A \Longrightarrow ۰۱۱ \in A$؛

(دو) $۰۱۱ \in A \Longrightarrow ۰۰۱۱۱ \in A$؛ و

(سه) $۰۰۱۱۱ \in A \Longrightarrow ۰۰۰۱۱۱۱ \in A$.

پ) اگر ۰۰۰۰۱۱۱۱ در A باشد، در این صورت با توجه به مرحلهٔ (۲) می‌بینیم که این واژه باید از ۰۰۰۱۱۱ (متعلق به A) پدید آمده باشد. به همین ترتیب،

(۰۱ در A است) $\Longrightarrow$ (۰۰۱۱ در A است) $\Longrightarrow$ (۰۰۰۱۱۱ در A است)

ولی، در A هیچ واژه‌ای با طول ۲ وجود ندارد؛ در حقیقت، در A هیچ واژه‌ای با طول زوج وجود ندارد.

۲۵. الف)

مراحل	دلایل
۱) ( ) در A است.	قسمت (۱) در تعریف بازگشتی
۲) (( )) در A است.	مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲- دو) در تعریف
۳) ( )(( )) در A است.	مراحل (۱) و (۲) و قسمت (۲- یک) در تعریف

ب)

مراحل	دلایل
۱) ( ) در A است.	قسمت (۱) در تعریف بازگشتی
۲) (( )) در A است.	مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲- دو) در تعریف
۳) ( )(( )) در A است.	مراحل (۱) و (۲) و قسمت (۲- یک) در تعریف
۴) ( )( )(( )) در A است.	مراحل (۱) و (۳) و قسمت (۲- یک) در تعریف

۲۷. (۱) $\lambda \in A$ و $s \in A$ به‌ازای هر $s \in \Sigma$؛ و

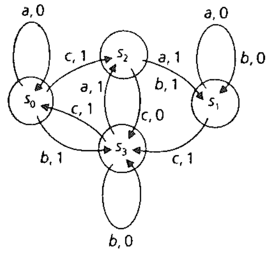
(۲) به‌ازای هر $x \in A$ و $s \in \Sigma$، رشتهٔ sxs نیز در A است.

[هیچ رشتهٔ دیگری از Σ^* در A قرار ندارد.]

بند ۲.۶، صفحهٔ ٤۳۸

۱. الف) ۰۰۱۰۱۰۱؛ s_1 ب) ۰۰۰۰۰۰۰۰؛ s_1 پ) ۰۰۱۰۰۰۰۰۰۰؛ s_0

۳. الف) ۰۱۰۱۱۰   ب)



۵. الف) ۰۰۰۰۱۰۱۰؛ s_2 ب) (s_1) ۱۰۰۰۰۰؛ s_2 پ)

(s_2) ۰۰۰۰۰۰۰؛ s_2

(s_3) ۱۱۰۰۱۰؛ s_2

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_0	s_1	۰	۰
s_1	s_1	s_2	۱	۱
s_2	s_2	s_2	۰	۰
s_3	s_0	s_3	۰	۱
s_4	s_2	s_3	۰	۱

ت) s_1 ث) $x = ۱۰۱$ (یکتا)

۷. الف) (یک) ۱۵ (دو) $۳^{۱۵}$ (سه) $۲^{۱۵}$ ب) $۶^{۱۵}$

۹. الف)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_4	s_1	۰	۰
s_1	s_3	s_2	۰	۰
s_2	s_3	s_2	۰	۱
s_3	s_3	s_3	۰	۰
s_4	s_5	s_3	۰	۰
s_5	s_5	s_3	۱	۰

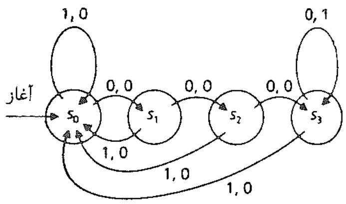
ب) فقط دو امکان وجود دارد: $x = ۱۱۱۱$ یا $x = ۰۰۰۰$.

پ) $A = \{۱۱۱\}\{۱\}^* \cup \{۰۰۰\}\{۰\}^*$

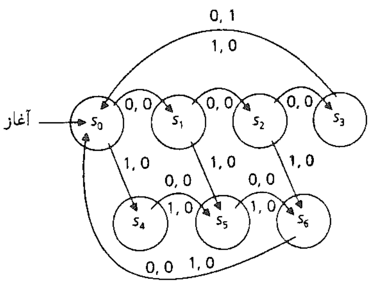
ت) در اینجا $A = \{۱۱۱۱۱\}\{۱\}^* \cup \{۰۰۰۰۰\}\{۰\}^*$.

بند ۶.۳، صفحهٔ ۴۴۸

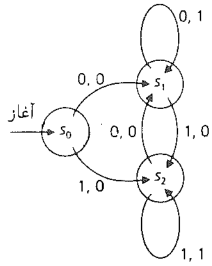
۱. الف)



ب)



۳.



۵. ب) (یک) ۰۱۱ (دو) ۰۱۰۱ (سه) ۰۰۰۰۱

پ) این ماشین یک ۰ و به دنبال آن نخستین $n-1$ نماد از n نماد رشتهٔ ورودی x را خارج می‌کند. بنابراین، ماشین تأخیری یک واحدی است.

ت) این ماشین همان وظایف ماشین شکل ۱۳۰۶ را انجام می‌دهد (ولی فقط دو حالت دارد).

۷. ب) حالتهای گذار s_2 و s_3 هستند. تنها حالت چاهکی s_4 است. مجموعهٔ $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ حالتهای یک زیرماشین را به‌دست می‌دهد، $\{s_0, s_1\}$ و $\{s_4\}$ زیر ماشینهای قویاً همبند هستند.

پ) حالتهای‌گذار s_0 و s_1 هستند. حالت s_4 حالت چاهکی است. $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$، $\{s_4\}$، و $\{s_2, s_3, s_5\}$ (همراه با تحدید متناظر تابع مفروض ν) سه زیر ماشین هستند. زیرماشینهای قویاً همبند عبارت‌اند از $\{s_4\}$ و $\{s_2, s_3, s_5\}$.

تمرینات تکمیلی، صفحهٔ ۴۵۲

۱. الف) راست ب) راست پ) راست ت) دروغ
ث) راست ج) راست چ) راست ح) راست

۳. فرض کنیم $x \in \Sigma$ و $A = \{x\}$. در این صورت $A^2 = \{xx\}$ و $(A^2)^* = \{\lambda, x^2, x^4, \cdots\}$، $A^* = \{\lambda, x, x^2, x^3, \cdots\}$ و $(A^*)^2 = A^*$؛ بنابراین، $(A^2)^* \neq (A^*)^2$.

۵. $\mathcal{O}_{02} = \{1, 00\}^*\{0\}$

$\mathcal{O}_{22} = \{0\}\{1, 00\}^*\{0\}$

$\mathcal{O}_{11} = \varnothing$

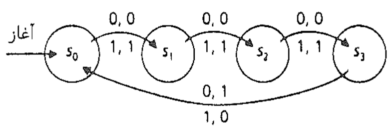
$\mathcal{O}_{00} = \{1, 00\}^* - \{\lambda\}$

$\mathcal{O}_{10} = \{1\}\{1, 00\}^* \cup \{10\}\{1, 00\}^*$

۷. الف) بنابر اصل لانهٔ کبوتر نخستین حالتی مانند s وجود دارد که دوبار با آن مواجه می‌شویم. فرض کنیم y رشتهٔ خروجی حاصل از نخستین برخورد با s باشد، تا زمانی‌که برای دومین بار به این حالت برسیم. در این صورت از آن نقطه به بعد خروجی $yyy\ldots$ است.

ب) n پ) n

۹.



۱۱. فرض کنیم بتوان چنین ماشینی ساخت و فرض کنیم تعداد حالتهای آن n، $n \in \mathbf{Z}^+$، باشد. به‌ازای رشتهٔ ورودی $۰^n ۱^{n+۱}$، می‌خواهیم خروجی $۰^{۲n} ۱$ باشد. ولی، به‌تدریج که ۱ های این رشتهٔ ورودی پردازش می‌شوند، از تابع ν حالتهای $s_۱$، $s_۲$، $\cdots$، s_n، $s_{n+۱}$ را به دست می‌آوریم. در نتیجه، بنابر اصل لانهٔ کبوتر، دو حالت s_i و s_j وجود دارند به‌طوری که $i < j$ ولی $s_i = s_j$. بنابراین، اگر $j - i$ تا ۱ را به‌ازای حالتهای $s_{i+۱}$، $s_{i+۲}$، $\cdots$، s_j کنار بگذاریم، می‌بینیم که این ماشین دنبالهٔ $۰^n ۱^{n+۱-(j-i)}$ را، که در آن $n + ۱ - (j - i) \leqslant n$، شناسایی می‌کند، درحالی‌که $۰^n ۱^{n+۱-(j-i)} \notin A$.

۱۳. الف)

ω		ν		
۱	۰	۱	۰	
۱	۱	$(s_۱, s_۳)$	$(s_۰, s_۴)$	$(s_۰, s_۳)$
۱	۰	$(s_۱, s_۴)$	$(s_۰, s_۳)$	$(s_۰, s_۴)$
۱	۱	$(s_۲, s_۳)$	$(s_۱, s_۳)$	$(s_۱, s_۳)$
۱	۱	$(s_۲, s_۴)$	$(s_۱, s_۴)$	$(s_۱, s_۴)$
۱	۱	$(s_۰, s_۴)$	$(s_۲, s_۳)$	$(s_۲, s_۳)$
۰	۱	$(s_۰, s_۳)$	$(s_۲, s_۴)$	$(s_۲, s_۴)$

ب) $\omega((s_۰, s_۳), ۱۱۰۱) = ۱۱۱۱$؛ $M_۱$ در حالت $s_۰$، و $M_۲$ در حالت $s_۴$ است.

فصل ۷
روابط: دومین برخورد

بند ۱.۷، صفحهٔ ۴۶۳

۱. الف) $\{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴), (۱, ۲), (۲, ۱), (۲, ۳), (۳, ۲)\}$

ب) $\{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴), (۱, ۲)\}$ پ) $\{(۱, ۱), (۲, ۲), (۱, ۲), (۲, ۱)\}$

۳. الف) توابع $f_۱, f_۲, f_۳ \in \mathcal{F}$ را با ضابطه‌های $f_۱(n) = n + ۱$، $f_۲(n) = ۵n$، و $f_۳(n) = ۴n + \frac{۱}{n}$ در نظر می‌گیریم.

ب) توابع $g_۱, g_۲, g_۳ \in \mathcal{F}$ را با ضابطه‌های $g_۱(n) = ۳$، $g_۲(n) = \frac{۱}{n}$، و $g_۳(n) = \sin n$ در نظر می‌گیریم.

۵. الف) بازتابی، پاد متقارن، ترایا ب) ترایا

پ) بازتابی، متقارن، ترایا ت) متقارن

ث) (زوج) بازتابی، متقارن، ترایا؛ (فرد) ترایا ج) (زوج) بازتابی، متقارن، ترایا؛ (فرد) ترایا

چ) متقارن ح) بازتابی، متقارن

خ) بازتابی، ترایا د) بازتابی، متقارن، ترایا

۷. الف) به‌ازای هر $x \in A$، $(x, x) \in \mathcal{R}_۱$ و $(x, x) \in \mathcal{R}_۱ \cap \mathcal{R}_۲$؛ بنابراین، $\mathcal{R}_۱ \cap \mathcal{R}_۲$ بازتابی است.

ب) $(x, y) \in \mathcal{R}_۱ \cap \mathcal{R}_۲ \Longrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}_۱, \mathcal{R}_۲ \Longrightarrow (y, x) \in R_۱, R_۲ \Longrightarrow (y, x) \in \mathcal{R}_۱ \cap \mathcal{R}_۲$ (یک) و $\mathcal{R}_۱ \cap \mathcal{R}_۲$ متقارن است.

(دو) $(x,y),(y,x)\in\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2 \Longrightarrow (x,y),(y,x)\in\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2$. چون $\mathcal{R}_1$ (یا $\mathcal{R}_2$) پادمتقارن است، $x=y$، و $\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2$ پادمتقارن است.

(سه) $$(x,y),(y,z)\in\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2 \Longrightarrow (x,y),(y,z)\in\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2 \Longrightarrow (x,z)\in\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2 \Longrightarrow (x,z)\in\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2$$

پس $\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2$ تراباست.

۹. الف) راست ب) دروغ: فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$ و $\mathcal{R}=\{(۱,۲),(۲,۱)\}$.

پ) (یک) بازتابی: راست

(دو) متقارن: دروغ. فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$، $\mathcal{R}_1=\{(۱,۱)\}$، و $\mathcal{R}_2=\{(۱,۱),(۱,۲)\}$.

(سه) پاد متقارن و ترایا: دروغ. فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$، $\mathcal{R}_1=\{(۱,۲)\}$، و $\mathcal{R}_2=\{(۱,۲),(۲,۱)\}$.

ت) (یک) بازتابی: دروغ. فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$، $\mathcal{R}_1=\{(۱,۱)\}$، و $\mathcal{R}_2=\{(۱,۱),(۲,۲)\}$.

(دو) متقارن: دروغ. فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$، $\mathcal{R}_1=\{(۱,۲)\}$، و $\mathcal{R}_2=\{(۱,۲),(۲,۱)\}$.

(سه) پاد متقارن: راست

(چهار) ترایا: دروغ. فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$، $\mathcal{R}_1=\{(۱,۲),(۲,۱)\}$، و

$$\mathcal{R}_2=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}$$

ث). راست.

۱۱. الف) $\binom{۲+۲-۱}{۲}\binom{۲+۲-۱}{۲}=\binom{۳}{۲}\binom{۳}{۲}=۹$ ب) ۱۸

پ) $\binom{۴+۲-۱}{۲}\binom{۲+۲-۱}{۲}=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}=۳۰$ ت) ۶۰

ث) ۸۱ ج) ۹۷۲

۱۳. ممکن است عنصری مانند $a\in A$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $b\in A$، نه (a,b) متعلق به $\mathcal{R}$ باشد نه (b,a).

۱۵. $r-n$ عبارت است از تعداد آن عنصرهایی از $\mathcal{R}$ مانند (a,b) به‌طوری که $a\neq b$. چون $\mathcal{R}$ متقارن است، $r-n$ زوج است.

بند ۲.۷، صفحهٔ ۴۷۶

۱. $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}=\{(۱,۳),(۱,۴)\}$؛ $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۴)\}$؛ $\mathcal{R}^۲=\mathcal{R}^۳=\{(۱,۴),(۲,۴),(۴,۴)\}$؛ $\mathcal{S}^۲=\mathcal{S}^۳=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴)\}$

۳. $(a,d)\in(\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2)\circ\mathcal{R}_3 \Longrightarrow (a,c)\in\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2,(c,d)\in\mathcal{R}_3,c\in C \Longrightarrow (a,b)\in\mathcal{R}_1,(b,c)\in\mathcal{R}_2,$
$(c,d)\in\mathcal{R}_3,b\in B,c\in C \Longrightarrow (a,b)\in\mathcal{R}_1(b,d)\in\mathcal{R}_2\circ\mathcal{R}_3 \Longrightarrow (a,d)\in\mathcal{R}_1\circ(\mathcal{R}_2\circ\mathcal{R}_3)$
پس $(\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2)\circ\mathcal{R}_3\subseteq\mathcal{R}_1\circ(\mathcal{R}_2\circ\mathcal{R}_3)$.

۵. از اصل لانهٔ کبوتر حاصل می‌شود. در اینجا کبوترها عبارت‌اند از $۲^{n^۲}+۱$ عدد صحیح موجود بین ۰ و $۲^{n^۲}$ به انضمام خود اینها، و لانه‌های کبوترها عبارت‌اند از $۲^{n^۲}$ رابطهٔ موجود روی A.

۷. $۲^{۲۱}$

۹. درایهٔ سطر iام و ستون jام ماتریس $M(\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2)$ را در نظر می‌گیریم. اگر این درایه ۱ باشد، در این صورت عنصری مانند $b_k\in B$، $۱\leqslant k\leqslant n$، هست به‌طوری‌که $(a_i,b_k)\in\mathcal{R}_1$ و $(b_k,c_j)\in\mathcal{R}_2$. در نتیجه، درایهٔ سطر iام و ستون kام $M(\mathcal{R}_1)$، ۱ است و درایهٔ سطر kام و ستون jام $M(\mathcal{R}_2)$ نیز ۱ است. بنابراین، یک ۱ در

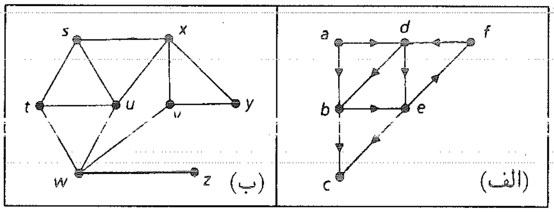
سطر iام و ستون jام حاصل‌ضرب $M(\mathcal{R}_1)\cdot M(\mathcal{R}_2)$ هست.

اگر درایهٔ سطر iام و ستون jام $M(\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_2)$، ۰ باشد، در این صورت به‌ازای هر b_k، $1 \leqslant k \leqslant n$، یا $(a_i, b_k) \notin \mathcal{R}_1$ یا $(b_k, c_j) \notin \mathcal{R}_2$. معنی این سخن آن است که در ماتریسهای $M(\mathcal{R}_1)$ و $M(\mathcal{R}_2)$، اگر درایهٔ سطر iام و ستون kام $M(\mathcal{R})_1$، ۱ باشد، در این صورت درایهٔ سطر kام و ستون jام $M(\mathcal{R}_2)$، ۰ است. بنابراین، درایهٔ سطر iام و ستون jام $M(\mathcal{R}_1)\cdot M(\mathcal{R}_2)$ ، ۰ است.

۱۱. ت) فرض کنیم s_{xy} درایهٔ سطر (x) و ستون (y) از M باشد. در این صورت s_{yx} در سطر (x) و ستون (y) از M^{tr} ظاهر می‌شود.

$$M \cap M^{\text{tr}} \leqslant I_n \iff (s_{xy} = s_{yx} = 1 \Longrightarrow x = y) \iff (\mathcal{R}\ \text{پادمتقارن است})$$

۱۳.



۱۵. (یک) $\mathcal{R} = \{(a,b),(b,a),(a,e),(e,a),(b,c),(c,b),(b,d),(d,b),(b,e),(e,b),$
$(d,e),(e,d),(d,f),(f,d)\}$

$$M(\mathcal{R}) = \begin{array}{c} \\ (a)\\(b)\\(c)\\(d)\\(e)\\(f) \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc}(a)&(b)&(c)&(d)&(e)&(f)\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0&1&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&1\\ 1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}\end{array}$$

برای قسمتهای (دو) و (چهار) سطرها و ستونهای ماتریس رابطه‌ای همانند قسمت (یک) اندیسگذاری می‌شوند.

(دو) $\mathcal{R} = \{(a,b),(b,e),(d,b),(d,c),(e,f)\}$

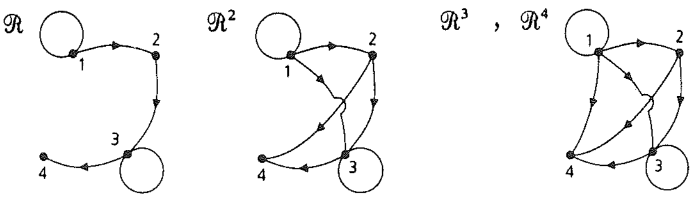
$$M(\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

(چهار) $\mathcal{R} = \{(b,a),(b,c),(c,b),(b,e),(c,d),(e,d)\}$

$$M(\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۷. به‌ازای هر $v \in V$، اگر سطر v در M و ستون v در M شامل فقط ۰ باشند، در این صورت v رأسی تنها در گراف سودار G است.

۱۹.



۲۱. الف) $۲^{۲۵}$ ب) $۲^{۱۵}$

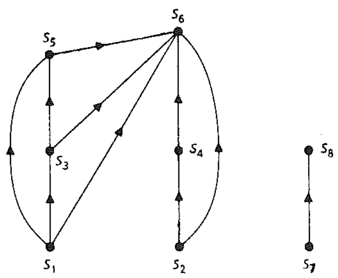
۲۳. الف)

$$\mathcal{R}_۲ : \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \mathcal{R}_۱ : \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

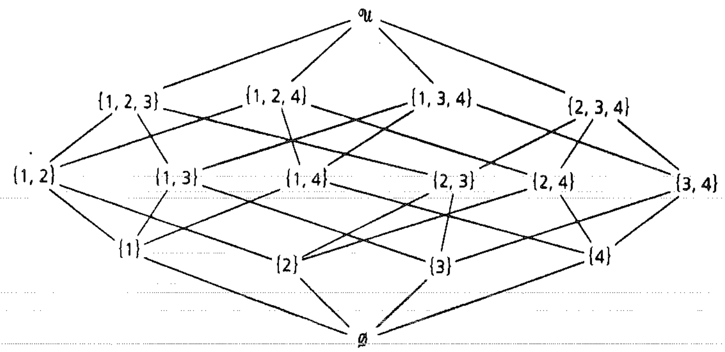
ب) اگر $\mathcal{R}$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ متناهی A باشد، عنصرهای A را چنان فهرست می‌کنیم که عنصرهای واقع در حجرهٔ یکسانی از افراز (بند ۴۰۷ را ببینید) مجاور باشند. در این صورت ماتریس رابطه‌ای حاصل حاوی بلوکهای مربعی متشکل از ۱ در امتداد قطر اصلی (از گوشهٔ چپ بالا تا گوشهٔ راست پایین) است.

۲۵.

$(s_۱)$ a := ۱;
$(s_۲)$ b := ۲;
$(s_۳)$ a := a + ۳;
$(s_۴)$ c := b;
$(s_۵)$ a := ۲ * a − ۱;
$(s_۶)$ b := a * c;
$(s_۷)$ c := ۷;
$(s_۸)$ d := c + ۲;



.۱



۳. بهازای هر $a \in A$ و $b \in B$ داریم $a\mathcal{R}_۱ a$ و $b\mathcal{R}_۲ b$؛ بنابراین، $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است.

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d),(c,d)\mathcal{R}(a,b) \Longrightarrow (b\mathcal{R}_۲ d, d\mathcal{R}_۲ b) \text{ و } (a\mathcal{R}_۱ c, c\mathcal{R}_۱ a) \Longrightarrow a=c, b=d$$
$$\Longrightarrow (a,b)=(c,d)$$

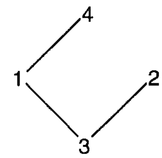
از این رو، $\mathcal{R}$ پادمتقارن است.

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d),(c,d)\mathcal{R}(e,f) \Longrightarrow (b\mathcal{R}_۲ d, d\mathcal{R}_۲ f) \text{ و } (a\mathcal{R}_۱ c, c\mathcal{R}_۱ e) \Longrightarrow a\mathcal{R}_۱ e, b\mathcal{R}_۲ f$$
$$\Longrightarrow (a,b)\mathcal{R}(e,f)$$

این نشان می‌دهد که $\mathcal{R}$ ترایاست.

۵. $\varnothing < \{۱\} < \{۲\} < \{۳\} < \{۱,۲\} < \{۱,۳\} < \{۲,۳\} < \{۱,۲,۳\}$
(البته راههای دیگری نیز هست.)

۷. الف)



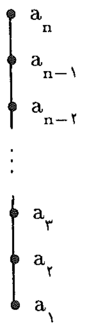
ب) $۴ < ۱ < ۲ < ۳$ یا $۴ < ۲ < ۱ < ۳$ پ) ۲

۱۱. فرض کنیم x و y هر دو کوچکترین کران بالا باشند. در این صورت $x\mathcal{R}y$، چون y یک کران بالا و x یک کوچکترین کران بالاست. به‌طور مشابهی، $y\mathcal{R}x$. چون $\mathcal{R}$ پادمتقارن است پس $x = y$. (اثبات برای glb نیز به‌طور مشابهی انجام می‌گیرد.)

۱۳. فرض کنیم $\mathcal{U} = \{۱, ۲\}$، $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$، و $\mathcal{R}$ رابطهٔ شمول باشد. در این صورت $(A, \mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب است ولی تماماً مرتب نیست. فرض کنیم $B = \{\varnothing, \{۱\}\}$. آنگاه $(B \times B) \cap \mathcal{R}$ ترتیبی تام است.

۱۵. $n + \binom{n}{۲}$

۱۷. الف) هر n عنصر A در امتداد خطی قائم مرتب شده‌اند. درواقع، اگر $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ به‌طوری‌که $a_۱ \mathcal{R} a_۲ \mathcal{R} a_۳ \mathcal{R} \ldots \mathcal{R} a_n$، در این صورت می‌توان نمودار را به‌صورت زیر رسم کرد:



ب) $n!$

۱۹.

	lub	glb		lub	glb
الف)	$\{۱,۲\}$	$\varnothing$	ب)	$\{۱,۲,۳\}$	$\varnothing$
پ)	$\{۱,۲\}$	$\varnothing$	ت)	$\{۱,۲,۳\}$	$\{۱\}$
ث)	$\{۱,۲,۳\}$	$\varnothing$	ج)	$\{۱,۲,۳\}$	$\varnothing$

۲۱. به‌ازای هر $a \in \mathbf{Z}$ داریم $a\mathcal{R}a$ زیرا $a - a = ۰$، که یک عدد صحیح نامنفی است. بنابراین، $\mathcal{R}$ بازتابی است. اگر $a, b, c \in \mathbf{Z}$ به‌طوری‌که $a\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}c$، در این صورت

$$a - b = ۲m, \quad m \in \mathbf{N} \text{ به‌ازای عددی مانند }$$

$$b - c = ۲n, \quad n \in \mathbf{N} \text{ به‌ازای عددی مانند }$$

در نتیجه، $a - c = (a - b) + (b - c) = ۲(m + n)$، که در آن $m + n \in \mathbf{N}$. بنابراین، $a\mathcal{R}c$ و $\mathcal{R}$ متعدی است. سرانجام، فرض کنیم که به‌ازای $a, b \in \mathbf{Z}$ داشته باشیم $a\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}a$. در این صورت، $a - b$، $b - a$ دو عدد صحیح نامنفی‌اند. چون این امر فقط وقتی روی می‌دهد که $a - b = b - a = ۰$، می‌بینیم که

$$[a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a] \Longrightarrow a = b$$

از این‌رو، $\mathcal{R}$ پادمتقارن است.

در نتیجه، رابطهٔ $\mathcal{R}$ ترتیبی جزئی برای $\mathbf{Z}$ است. ولی این ترتیب جزئی ترتیبی تام نیست. مثلاً $۲, ۳ \in \mathbf{Z}$ ولی نه $۲\mathcal{R}۳$ را داریم نه $۳\mathcal{R}۲$ را، زیرا نه -۱ یک عدد صحیح زوج نامنفی است و نه ۱.

۲۳. الف) ۲ ب) ۱۰

۲۵. ب و پ) کوچکترین عنصر (و تنها عنصر مینیمال) عنصر $(۰, ۰)$ است. عنصر $(۲, ۲)$ بزرگترین عنصر (و تنها عنصر ماکسیمال) است.

ت) $(۰,۰)\mathcal{R}(۰,۱)\mathcal{R}(۰,۲)\mathcal{R}(۱,۰)\mathcal{R}(۱,۱)\mathcal{R}(۱,۲)\mathcal{R}(۲,۰)\mathcal{R}(۲,۱)\mathcal{R}(۲,۲)$

۲۷. الف) دروغ. فرض کنیم $\mathcal{U} = \{۱, ۲\}$، $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$، و $\mathcal{R}$ رابطهٔ شمول باشد. در این صورت $(A, \mathcal{R})$ یک مشبکه است، که در آن به‌ازای هر $S, T \in A$، داریم $\text{lub}\{S, T\} = S \cup T$، $\text{glb}\{S, T\} = S \cap T$. ولی، $\{۱\}$ و $\{۲\}$ با یکدیگر در رابطه نیستند؛ پس $(A, \mathcal{R})$ ترتیبی تام نیست.

۲۹. الف) a ب) a پ) c ت) e ث) z ج) e چ) v

$(A, \mathcal{R})$ یک مشبکه است که z بزرگترین عنصر (و تنها عنصر ماکسیمال) آن و a کوچکترین عنصر (و تنها عنصر مینیمال)،آن است.

بند ۷.٤، صفحهٔ ٤۹۸

۱. الف) گردایهٔ $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ افرازی برای A به‌دست می‌دهد.

ب) گرچه $A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup A_۴$، ولی $A_۱ \cap A_۲ \neq \varnothing$، از این‌رو، گردایهٔ $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، $A_۴$ افرازی برای A به‌دست نمی‌دهد.

پ) گردایهٔ $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ افرازی برای A هست.

۳. $\mathcal{R} = \{(۱,۱), (۱,۲), (۲,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۳,۴), (۴,۳), (۴,۴), (۵,۵)\}$

۵. $\mathcal{R}$ ترایا نیست، زیرا $۱\mathcal{R}۲$ و $۲\mathcal{R}۳$ ولی $۱\not\mathcal{R}۳$.

۷. الف) به‌ازای هر $(x, y) \in A$، $(x,y)\mathcal{R}(x,y) \Longleftarrow x+y=y+x$.

$$(x_۱, y_۱)\mathcal{R}(x_۲, y_۲) \Longrightarrow x_۱ + y_۱ = x_۲ + y_۲ \Longrightarrow x_۲ + y_۲ = x_۱ + y_۱ \Longrightarrow (x_۲, y_۲)\mathcal{R}(x_۱, y_۱)$$

$$(x_۱, y_۱)\mathcal{R}(x_۲, y_۲), (x_۲, y_۲)\mathcal{R}(x_۳, y_۳) \Longrightarrow x_۱ + y_۱ = x_۲ + y_۲, x_۲ + y_۲ = x_۳ + y_۳$$
$$\Longrightarrow x_۱ + y_۱ = x_۳ + y_۳ \Longrightarrow (x_۱, y_۱)\mathcal{R}(x_۳, y_۳)$$

چون $\mathcal{R}$ بازتابی، متقارن، و ترایاست، پس رابطه‌ای هم‌ارزی است.

ب) $[(۱,۳)] = \{(۱,۳), (۲,۲), (۳,۱)\}$؛ $[(۲,۴)] = \{(۱,۵), (۲,۴), (۳,۳), (۴,۲), (۵,۱)\}$؛ $[(۱,۱)] = \{(۱,۱)\}$.

پ)

$$\begin{aligned} A =&\{(۱,۱)\} \cup \{(۱,۲), (۲,۱)\} \cup \{(۱,۳), (۲,۲), (۳,۱)\} \cup \{(۱,۴), (۲,۳), (۳,۲), (۴,۱)\} \cup \\ &\{(۱,۵), (۲,۴), (۳,۳), (۴,۲), (۵,۱)\} \cup \{(۲,۵), (۳,۴), (۴,۳), (۵,۲)\} \cup \\ &\{(۳,۵), (۴,۴), (۵,۳)\} \cup \{(۴,۵), (۵,۴)\} \cup \{(۵,۵)\} \end{aligned}$$

۹. الف) به‌ازای هر $(a, b) \in A$ داریم $ab = ab$؛ بنابراین، $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است. برای اثبات اینکه $\mathcal{R}$ متقارن است فرض کنیم که $(a,b), (c,d) \in A$ و $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$. در این صورت

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Longrightarrow ad = bc \Longrightarrow cb = da \Longrightarrow (c,d)\mathcal{R}(a,b)$$

پس $\mathcal{R}$ متقارن است. سرانجام، فرض کنیم $(a,b), (c,d), (e,f) \in A$ چنان باشند که $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ و $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$. در این صورت $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Longrightarrow ad = bc$ و $(c,d)\mathcal{R}(e,f) \Longrightarrow cf = de$؛ بنابراین، $adf = bcf = bde$ و چون $d \neq ۰$، پس $af = be$. ولی $(a,b)\mathcal{R}(e,f) \Longleftarrow af = be$. در نتیجه، $\mathcal{R}$ ترایاست. از آنچه گذشت نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{R}$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است.

ب) $[(۲,۱۴)] = \{(۲,۱۴)\}$

$[(-۳,-۹)] = \{(-۳,-۹), (-۱,-۳), (۴,۱۲)\}$

$[(۴,۸)] = \{(-۲,-۴), (۱,۲), (۳,۶), (۴,۸)\}$

پ) در این افراز پنج حجره وجود دارد. در حقیقت،

$$A = [(-۴, -۲۰)] \cup [(-۳, -۹)] \cup [(-۲, -۴)] \cup [(-۱, -۱۱)] \cup [(۲, ۱۴)]$$

۱۱. الف) به‌ازای هر $X \subseteq A$ داریم $B \cap X = B \cap X$؛ بنابراین، $X\mathcal{R}X$ و $\mathcal{R}$، بازتابی است. اگر $X, Y \subseteq A$، در این صورت

$$X\mathcal{R}Y \Longrightarrow X \cap B = Y \cap B \Longrightarrow Y \cap B = X \cap B \Longrightarrow Y\mathcal{R}X$$

از این‌رو، $\mathcal{R}$ متقارن است. و سرانجام، اگر $W, X, Y \subseteq A$ مقید به $W\mathcal{R}X$ و $X\mathcal{R}Y$ باشند، در این صورت $W \cap B = X \cap B$ و $X \cap B = Y \cap B$. بنابراین، $W \cap B = Y \cap B$. پس $W\mathcal{R}Y$ و $\mathcal{R}$ ترایاست. در نتیجه، $\mathcal{R}$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی $\mathcal{P}(A)$ است.

ب) $\{\{\varnothing, \{۳\}\} \cup \{\{۱\}, \{۱, ۳\}\} \cup \{\{۲\}, \{۲, ۳\}\} \cup \{\{۱, ۲\}, \{۱, ۲, ۳\}\}$

پ) $[X] = \{\{۱, ۳\}, \{۱, ۳, ۴\}, \{۱, ۳, ۵\}, \{۱, ۳, ۴, ۵\}\}$

ت) ۸ ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد (برای هر زیرمجموعهٔ B یک رده وجود دارد).

۱۳. الف) $(\frac{۱}{۲})\binom{۶}{۳}$ ب) $۴\binom{۶}{۳}$ پ) $۲\binom{۶}{۴}$

ت) $(\frac{۱}{۲})\binom{۶}{۳} + ۴\binom{۶}{۳} + ۲\binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۶}$

۱۵. ۳۰۰

۱۷. فرض کنیم $\{A_i\}_{i \in I}$ افرازی برای مجموعهٔ A باشد. $\mathcal{R}$ را روی A با $x\mathcal{R}y$ تعریف می‌کنیم، درصورتی‌که به‌ازای عنصری مانند $i \in I$ داشته باشیم $x, y \in A_i$. به‌ازای هر $x \in A$، به‌ازای اندیسی مانند $i \in I$ داریم $x \in A_i$. پس $x\mathcal{R}x$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است. از $x\mathcal{R}y$ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای اندیسی مانند $i \in I$ داریم $x, y \in A_i$، یعنی به‌ازای اندیسی مانند $i \in I$ داریم $y, x \in A_i$ و در نتیجه، $y\mathcal{R}x$. پس $\mathcal{R}$ متقارن است. اگر $x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}z$، آنگاه اندیسهای $i, j \in I$ وجود دارند به‌طوری‌که $x, y \in A_i$ و $y, z \in A_j$. چون $A_i \cap A_j$ شامل y است، بنابر قضیهٔ ۶.۷ (پ) داریم $A_i = A_j$؛ بنابراین، $i = j$. پس $x, z \in A_i$. در نتیجه، $x\mathcal{R}z$ و $\mathcal{R}$ ترایاست.

بند ۵.۷ ، صفحهٔ ۵۰۶

۱. الف) $s_۲$ و $s_۵$ هم‌ارزند. ب) $s_۲$ و $s_۵$ هم‌ارزند.

پ) $s_۲$ و $s_۷$ هم‌ارزند؛ $s_۳$ و $s_۴$ هم‌ارزند.

۳. الف) $s_۱$ و $s_۷$ هم‌ارزند؛ $s_۴$، $s_۵$ هم‌ارزند.

ب) (یک) ۰۰۰۰

(دو) ۰

(سه) ۰۰

$M:$	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
$s_۱$	$s_۴$	$s_۱$	۱	۰
$s_۲$	$s_۱$	$s_۲$	۱	۰
$s_۳$	$s_۶$	$s_۱$	۱	۰
$s_۴$	$s_۳$	$s_۴$	۰	۰
$s_۶$	$s_۲$	$s_۱$	۱	۰

۱. الف) دروغ. فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$، $I=\{۱,۲\}$، $\mathcal{R}_۱=\{(۱,۱)\}$، و $\mathcal{R}_۲=\{(۲,۲)\}$. در این صورت، $\bigcup_{i\in I}\mathcal{R}_i$ بازتابی است، ولی هیچ‌یک از دو رابطهٔ $\mathcal{R}_۱$ و $\mathcal{R}_۲$ بازتابی نیست. ولی، برعکس، اگر به‌ازای هر $i\in I$ (حتی، به‌ازای حداقل یک $i\in I$) $\mathcal{R}_i$ بازتابی باشد، آنگاه $\bigcup_{i\in I}\mathcal{R}_i$ بازتابی است.

۳. از $(a,c)\in\mathcal{R}_۲\circ\mathcal{R}_۱$ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای عنصری مانند $b\in A$، $(a,b)\in\mathcal{R}_۲$ و $(b,c)\in\mathcal{R}_۱$. چون $\mathcal{R}_۱$ و $\mathcal{R}_۲$ متقارن‌اند، پس $(b,a)\in\mathcal{R}_۲$ و $(c,b)\in\mathcal{R}_۱$. بنابراین، $(c,a)\in\mathcal{R}_۱\circ\mathcal{R}_۲\subseteq\mathcal{R}_۲\circ\mathcal{R}_۱$. از $(c,a)\in\mathcal{R}_۲\circ\mathcal{R}_۱$ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای عنصری مانند $d\in A$، $(c,d)\in\mathcal{R}_۲$ و $(d,a)\in\mathcal{R}_۱$. بنابر تقارن، $(d,c)\in\mathcal{R}_۲$ و $(a,d)\in\mathcal{R}_۱$، و $(a,c)\in\mathcal{R}_۱\circ\mathcal{R}_۲$. بنابراین، $\mathcal{R}_۲\circ\mathcal{R}_۱\subseteq\mathcal{R}_۱\circ\mathcal{R}_۲$ و نتیجه حاصل است.

۵.
$$(c,a)\in(\mathcal{R}_۱\circ\mathcal{R}_۲)^c \iff (a,c)\in\mathcal{R}_۱\circ\mathcal{R}_۲ \iff (a,b)\in\mathcal{R}_۱,(b,c)\in\mathcal{R}_۲(b\in B)$$
$$\iff (b,a)\in\mathcal{R}_۱^c,(c,b)\in\mathcal{R}_۲^c(b\in B)\iff (c,a)\in\mathcal{R}_۲^c\circ\mathcal{R}_۱^c$$

۷. فرض کنیم $\mathcal{U}=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، $A=\mathcal{P}(\mathcal{U})-\{\mathcal{U},\varnothing\}$. A نسبت به رابطهٔ شمول مجموعه‌ای جزئاً مرتب است که دارای پنج عنصر مینیمال $\{x\}$، $۱\leqslant x\leqslant ۵$، است ولی کوچکترین عنصر ندارد. همچنین، A پنج عنصر ماکسیمال دارد، که عبارت‌اند از هر پنج زیر مجموعهٔ ۴ عنصری $\mathcal{U}$، ولی بزرگترین عنصر ندارد.

۹. $n=۱۰$.

۱۱. الف) به‌ازای هر $f\in\mathcal{F}$، $|f(n)|\leqslant ۱|f(n)|$ به‌ازای هر $n\geqslant ۱$؛ بنابراین، $f\mathcal{R}f$ و f بازتابی است. اکنون اگر $f,g\in\mathcal{F}$، در این صورت

$$f\mathcal{R}g\Longrightarrow(f\in O(g),g\in O(f))\Longrightarrow(g\in O(f),f\in O(g))\Longrightarrow g\mathcal{R}f$$

از این‌رو، $\mathcal{R}$ متقارن است. سرانجام، فرض کنیم $f,g,h\in\mathcal{F}$ مقید به $f\mathcal{R}g$، $g\mathcal{R}f$، $g\mathcal{R}h$، و $h\mathcal{R}g$ باشند. در این صورت اعدادی مانند $m_۱,m_۲\in\mathbf{R}^+$ و $k_۱,k_۲\in\mathbf{Z}^+$ وجود دارند به‌طوری‌که $|f(n)|\leqslant m_۱|g(n)|$ به‌ازای هر $n\geqslant k_۱$، و $|g(n)|\leqslant m_۲h(n)$ به‌ازای هر $n\geqslant k_۲$. در نتیجه، به‌ازای هر $n\geqslant\max\{k_۱,k_۲\}$ داریم $|f(n)|\leqslant m_۱|g(n)|\leqslant m_۱m_۲|h(n)|$؛ بنابراین، $f\in O(h)$. به‌طور مشابهی می‌بینیم که $h\in O(f)$. در نتیجه، $f\mathcal{R}h$، و $\mathcal{R}$ تراپاست.

ب) به‌ازای هر $f\in\mathcal{F}$، f مغلوب خودش است؛ بنابراین، $[f]\mathcal{S}[f]$ و $\mathcal{S}$ بازتابی است. اکنون اگر $[g],[h]\in\mathcal{F}'$ مقید به $[g]\mathcal{S}[h]$ و $[h]\mathcal{S}[g]$ باشند، در این صورت، همان‌طورکه در قسمت (الف) دیدیم، $g\mathcal{R}h$، و $[g]=[h]$. در نتیجه، $\mathcal{S}$ پادمتقارن است. سرانجام، اگر $[f],[g],[h]\in\mathcal{F}'$ مقید به $[f]\mathcal{S}[g]$ و $[g]\mathcal{S}[h]$ باشند، در این صورت f مغلوب g و g مغلوب h است. پس همان‌طورکه در قسمت (الف) دیدیم، f مغلوب h است و $[f]\mathcal{S}[h]$. پس $\mathcal{S}$ تراپاست.

۱۳. الف)

فهرست اندیسگذار		فهرست مجاورت	
۱	۱	۲	۱
۲	۲	۳	۲
۳	۳	۱	۳
۵	۴	۴	۴
۶	۵	۵	۵
۸	۶	۳	۶
		۵	۷

ب)

فهرست اندیسگذار		فهرست مجاورت	
۱	۱	۲	۱
۲	۲	۳	۲
۳	۳	۱	۳
۴	۴	۵	۴
۵	۵	۴	۵
۶	۶		

پ)

فهرست اندیسگذار		فهرست مجاورت	
۱	۱	۲	۱
۲	۲	۳	۲
۳	۳	۱	۳
۶	۴	۴	۴
۷	۵	۵	۵
۸	۶	۱	۶
		۴	۷

۱۵. ب) حجره‌های افراز مؤلفه‌های همبند G هستند.

۱۷. یکی از ترتیبهای ممکن ترتیب ۱۰، ۳، ۸، ۶، ۷، ۹، ۱، ۴، ۵، ۲ است، که در آن برنامهٔ ۱۰ قبل از همه اجرا می‌شود و برنامهٔ ۲ بعد از همه.

۱۹. الف) $|A| = ۲^۵ = ۳۲$.

پ) شش ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد، هر رده برای یکی از وزنهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵. تعداد عنصرهای متعلق به هر ردهٔ هم‌ارزی به‌صورت زیر است:

وزن ۰، $\binom{۵}{۰}$؛ وزن ۱، $\binom{۵}{۱}$؛ وزن ۲، $\binom{۵}{۲}$؛ وزن ۳، $\binom{۵}{۳}$؛ وزن ۴، $\binom{۵}{۴}$؛ و وزن ۵، $\binom{۵}{۵}$.

ت) به‌جای ۵ عدد n، $n \in \mathbf{Z}^+$، را می‌گذاریم. در این صورت $n + ۱$ ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد، هر رده برای یکی از وزنهای ۰، ۱، ۲، ...، n. اگر $۰ \leqslant k \leqslant n$، در این صورت $\binom{n}{k}$ عنصر A در ردهٔ هم‌ارزی متناظر با وزن k وجود دارد.

۲۱. $۴^n - ۲(۳^n) + ۲^n$

۲۳. الف) (یک) $BRARC$؛ (دو) $BRCRF$

$BRARCRF$ زنجیری ماکسیمال است. شش زنجیر ماکسیمال وجود دارد.

ب) در اینجا $۱۱\mathcal{R}۳۸۵$ زنجیری ماکسیمال به طول ۲ است، درحالی‌که $۲\mathcal{R}۶\mathcal{R}۱۲$ زنجیری ماکسیمال به طول ۳ است. طول طولانیترین زنجیر برای این مجموعهٔ جزئاً مرتب ۳ است.

پ) (یک) $\varnothing \subseteq \{۱\} \subseteq \{۱,۲\} \subseteq \{۱,۲,۳\} \subseteq \mathcal{U}$ (دو) $\varnothing \subseteq \{۲\} \subseteq \{۲,۳\} \subseteq \{۱,۲,۳\} \subseteq \mathcal{U}$

$۲۴ = !۴$ زنجیر ماکسیمال وجود دارد.

ت) $n!$

۲۵. فرض کنیم $a_۱\mathcal{R}a_۲\mathcal{R}\ldots\mathcal{R}a_{n-۱}\mathcal{R}a_n$ یک طولانیترین زنجیر (ماکسیمال) در $(A,\mathcal{R})$ باشد. دراین‌صورت a_n عنصری ماکسیمال در $(A,\mathcal{R})$ است و $a_۱\mathcal{R}a_۲\mathcal{R}\ldots\mathcal{R}a_{n-۱}$ زنجیری ماکسیمال در $(B,\mathcal{R}')$ است. بنابراین، طول طولانیترین زنجیر در $(B,\mathcal{R}')$ حداقل $n - ۱$ است. اگر زنجیری مانند $b_۱\mathcal{R}'b_۲\mathcal{R}'\ldots\mathcal{R}'b_n$ به طول n در $(B,\mathcal{R}')$ وجود داشته باشد، در این صورت زنجیری به طول n در $(A,\mathcal{R})$ نیز خواهد بود. در نتیجه، b_n باید عنصری ماکسیمال از $(A,\mathcal{R})$ باشد، و این با $b_n \in B$ در تناقض است.

۲۷. اگر $n = ۱$، در این صورت به‌ازای هر $x, y \in A$، اگر $x \neq y$، آنگاه $x \not\mathcal{R} y$ و $y \not\mathcal{R} x$. بنابراین، $(A,\mathcal{R})$ یک پادزنجیر است، و نتیجهٔ مطلوب حاصل است. اکنون فرض کنیم که نتیجه به‌ازای $n = k \geqslant ۱$ درست باشد، و فرض کنیم $(A,\mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد که در آن طول طولانیترین زنجیر $k + ۱$ است. اگر M مجموعهٔ همهٔ عنصرهای ماکسیمال در $(A,\mathcal{R})$ باشد، در این صورت $M \neq \varnothing$ و M پادزنجیری در $(A,\mathcal{R})$ است. همچنین، بنابر تمرین ۲۵، $(A - M, \mathcal{R}')$، به‌ازای $\mathcal{R}' = ((A-M)\times(A-M))\cap\mathcal{R}$، مجموعه‌ای جزئاً مرتب است که طول طولانیترین زنجیر آن k است. بنابراین، بنابر فرض استقرا، $A - M = C_۱ \cup C_۲ \cup \ldots \cup C_k$، یعنی افرازی مرکب از k پادزنجیر. در نتیجه، $A = C_۱ \cup C_۲ \cup \ldots \cup C_k \cup M$ افرازی مرکب از $k + ۱$ پادزنجیر است.

فصل ۸
اصل شمول و عدم شمول

بند ۱.۸، صفحهٔ ۵۲۸

۱. الف) ۵۳۴ ب) ۴۵۸ پ) ۷۶

۳. ۴۴۶۰۴۰۰

۵. $\binom{۳۷}{۳۱} - \binom{۷}{۱}\binom{۲۷}{۲۱} + \binom{۷}{۲}\binom{۱۷}{۱۱} - \binom{۷}{۳}\binom{۷}{۱}$

۷. $(۱۵!)\left[\binom{۱۴}{۱۰} - \binom{۵}{۱}\binom{۱۰}{۶} + \binom{۵}{۲}\binom{۶}{۲}\right]$

۹. $۲۶! - [۳(۲۳!) + ۲۴!] + (۲۰! + ۲۱!)$

۱۱. $\left[۶^۸ - \binom{۶}{۱}۵^۸ + \binom{۶}{۲}۴^۸ - \binom{۶}{۳}۳^۸ + \binom{۶}{۴}۲^۸ - \binom{۶}{۵}\right]/۶^۸$

۱۳. $\frac{۹!}{[(۳!)^۳]} - ۳\left[\frac{۷!}{[(۳!)^۲]}\right] + ۳\left(\frac{۵!}{۳!}\right) - ۳!$

۱۵. $\frac{۶۵۱}{۷۷۷۶} = ۰{,}۰۸۳۷۲$

۱۷. الف) ۳۲ ب) ۹۶ پ) ۳۲۰۰

۱۹. الف) $۲^{n-۱}$ ب) $۲^{n-۱}(p-۱)$

۲۱. الف) ۱۶۰۰ ب) ۴۳۹۹

۲۳. $\phi(۱۷) = \phi(۳۲) = \phi(۴۸) = ۱۶$

۲۵. اگر ۴ عدد $\phi(n)$ را عاد کند، در این صورت یکی از موارد زیر باید برقرار باشد:

(۱) n بر ۸ بخش‌پذیر است؛

(۲) n بر دو (یا بیشتر از دو) عدد اول فرد متمایز بخش‌پذیر است؛

(۳) n بر عدد فرد اول p (نظیر ۵، ۱۳، و ۱۷) بخش‌پذیر است و ۴ عدد $p - ۱$ را عاد می‌کند؛ یا،

(۴) n بر ۴ (و نه بر ۸) و بر حداقل یک عدد اول فرد بخش‌پذیر است.

۲۷. اگر عدد n بر عدد اولی مانند p بخش‌پذیر باشد، اجرای حلقهٔ while هر پیشامد p را تمیز می‌دهد. حلقهٔ نخست برای $p = ۲$ است، حلقهٔ بعدی برای $p = ۳$ است، و حلقهٔ سوم برای $p > ۳$ است.

وقتی با اعداد اول کار می‌کنیم، به محض گذشتن از $p = ۳$، دیگر بررسی اعداد صحیح زوج به‌عنوان نامزدهای احتمالی برای اعداد اول معنی ندارد.

بند ۲.۸، صفحهٔ ۵۳۴

۱. $E_۰ = ۷۶۸$؛ $E_۱ = ۲۰۵$؛ $E_۲ = ۴۰$؛ $E_۳ = ۱۰$؛ $E_۴ = ۰$؛ $E_۵ = ۱$. $N = ۱۰۲۴ = \sum_{i=۰}^{۵} E_i$

۳. الف) $\left[\frac{۱۴!}{(۲!)^۵}\right] - \binom{۵}{۱}\left[\frac{۱۳!}{(۲!)^۴}\right] + \binom{۵}{۲}\left[\frac{۱۲!}{(۲!)^۳}\right] - \binom{۵}{۳}\left[\frac{۱۱!}{(۲!)^۲}\right] + \binom{۵}{۴}\left[\frac{۱۰!}{۲!}\right] - \binom{۵}{۵}[۹!]$

ب) $E_۲ = \binom{۵}{۲}\left[\frac{۱۲!}{(۲!)^۳}\right] - \binom{۳}{۱}\binom{۵}{۳}\left[\frac{۱۱!}{(۲!)^۲}\right] + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۴}\left[\frac{۱۰!}{۲!}\right] - \binom{۵}{۳}\binom{۵}{۵}[۹!]$

پ) $L_۳ = \binom{۵}{۳}\left[\frac{۱۱!}{(۲!)^۲}\right] - \binom{۳}{۲}\binom{۵}{۴}\left[\frac{۱۰!}{۲!}\right] + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۵}[۹!]$

۵. $E_۲ = ۶۱۳۲$؛ $L_۲ = ۶۱۳۶$

۷. الف) $\left[\sum_{i=۰}^{۳}(-۱)^i\binom{۴}{i}\binom{۵۲-۱۳i}{۱۳}\right]/\binom{۵۲}{۱۳}$

ب) $\left[\sum_{i=۱}^{۳}(-۱)^{i+۱}(i)\binom{۴}{i}\binom{۵۲-۱۳!}{۱۳}\right]/\binom{۵۲}{۱۳}$

پ) $\left[\binom{۴}{۲}\binom{۲۶}{۱۳}-۳\binom{۴}{۳}\binom{۱۳}{۱۳}\right]/\binom{۵۲}{۱۳}$

بند ۳.۸، صفحهٔ ۵۳۶

۱. $۱۰!-\binom{۵}{۱}۹!+\binom{۵}{۲}۸!-\binom{۵}{۳}۷!+\binom{۵}{۴}۶!-\binom{۵}{۵}۵!$

۳. ۴۴

۵. الف) $۷!-d_۷(d_۷\doteq(۷!)e^{-۱})$ ب) $d_{۲۶}\doteq(۲۶!)e^{-۱}$

۷. $n=۱۱$

۹. $(۱۰!)d_{۱۰}\doteq(۱۰!)^۲(e^{-۱})$

۱۱. الف) $(d_{۱۰})^۲\doteq(۱۰!)^۲e^{-۲}$ ب) $\sum_{i=۰}^{۱۰}(-۱)^i\binom{۱۰}{i}[(۱۰-i)!]^۲$

۱۳. به‌ازای هر $n\in\mathbf{Z}^+$، $n!$ تعداد کل جایگشتهای ۱، ۲، ۳، …، n را به‌دست می‌دهد. هر یک از این جایگشتها k عنصر پریشان دارد (یعنی، k عنصر $x_۱$، $x_۲$، …، x_k در $\{۱,۲,۳,\ldots,n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x_۱$ در جای $x_۱$ام نیست، $x_۲$ در جای $x_۲$ام نیست، …، و x_k در جای x_kام نیست) و $n-k$ عنصر ثابت (یعنی، $n-k$ عنصر $y_۱$، $y_۲$، …، y_{n-k} متعلق به $\{۱,۲,۳,\ldots,n\}-\{x_۱,x_۲,\ldots,x_k\}$ چنان هستند که $y_۱$ در جای $y_۱$ و $y_۲$ در جای $y_۲$ام، …، و y_{n-k} در جای y_{n-k}ام است).

$(n-k)$ عنصر ثابت را می‌توان به $\binom{n}{n-k}$ طریق انتخاب کرد، و سپس k عنصر دیگر را می‌توان به d_k طریق مرتب کرد (یعنی، پریشان کرد) بنابراین، $\binom{n}{n-k}d_k=\binom{n}{k}d_k$. جایگشت از ۱، ۲، ۳، …، n هست که هر یک $n-k$ عنصر ثابت (و k عنصر پریشان) دارد. وقتی k از ۰ تا n تغییر می‌کند همهٔ $n!$ جایگشت ۱، ۲، ۳، …، n، با توجه به تعداد k عنصر پریشان خود، شمرده می‌شوند.

در نتیجه،

$$n!=\binom{n}{۰}d_۰+\binom{n}{۱}d_۱+\binom{n}{۲}d_۲+\ldots+\binom{n}{n}d_n=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}d_k$$

۱۵. $\binom{n}{۰}(n-۱)!-\binom{n}{۱}(n-۲)!+\binom{n}{۲}(n-۳)!-\ldots+(-۱)^{n-۱}\binom{n}{n-۱}(۰!)+(-۱)^n\binom{n}{n}$

بندهای ۴.۸ و ۵.۸ ، صفحهٔ ۵۴۴

۳. الف) $$\binom{۸}{۰}+\binom{۸}{۱}۸x+\binom{۸}{۲}(۸\times۷)x^۲+\binom{۸}{۳}(۸\times۷\times۶)x^۳+\binom{۸}{۴}(۸\times۷\times۶\times۵)x^۴$$

$$+\ldots+\binom{۸}{۸}(۸!)x^۸=\sum_{i=۰}^{۸}\binom{۸}{i}P(۸,i)x^i$$

ب) $\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}P(n,i)x^i$

۵. الف) (یک) $(۱+۲x)^۳$ (دو) $۱+۸x+۱۴x^۲+۴x^۳$

(سه) $۱+۹x+۲۵x^۲+۲۱x^۳$ (چهار) $۱+۸x+۱۶x^۲+۷x^۳$

ب) اگر صفحهٔ C متشکل از n پله باشد، و اگر هر پله k بلوک داشته باشد، آنگاه $r(C,x)=(۱+kx)^n$

۷. $۵!-۸(۴!)+۲۱(۳!)-۲۰(۲!)+۶(۱!)=۲۰$

۹. الف) ۲۰ ب) $\frac{3}{10}$

۱۱. $\left(\frac{6!}{2!}\right) - 9\left(\frac{5!}{2!}\right) + 27\left(\frac{4!}{2!}\right) - 31\left(\frac{3!}{2!}\right) + 12 = 63$

تمرینات تکمیلی، صفحهٔ ۵۴۸

۱. ۱۳۴

۳. $\left[\frac{(24!)}{(6!)^4}\right]\left[\binom{19}{16} - \binom{4}{1}\binom{13}{10} + \binom{4}{2}\binom{7}{4}\right]$

۵. $\sum_{i=0}^{7}(-1)^i\binom{8}{i}(8-i)!$

۷. $9! - \binom{5}{1}(2)(8!) + \binom{5}{2}(2^2)(7!) - \binom{5}{3}(2^3)(6!) + \binom{5}{4}(2^4)(5!) - \binom{5}{5}(2^5)(4!)$

۹. فرض کنیم $T = \frac{(13!)}{(2!)^5}$

الف) $\left(\left[\binom{5}{3}(10!)/(2!)^2\right] - \left[\binom{4}{1}\binom{5}{4}(9!)/(2!)\right] + \left[\binom{5}{2}\binom{5}{5}(8!)\right]\right)/T$

ب) $[T - (E_4 + E_5)]/T$، که در آن $E_4 = \left[\binom{5}{1}(9!)/(2!)\right] - \left[\binom{5}{1}\binom{5}{5}(8!)\right]$ و $E_5 = \binom{5}{5}(8!)$

۱۱. الف) $\binom{n-m}{r-m}$

۱۳. الف) اگر n زوج باشد، در این صورت بنابر قضیهٔ بنیادی حساب (قضیهٔ ۱۱۰۴) می‌توانیم بنویسیم $n = 2^k m$، که در آن $k \geqslant 1$ و m عددی فرد است. آنگاه $2n = 2^{k+1}m$ و

$$\begin{aligned}\phi(2n) &= (2^{k+1})(1-(1/2)\phi(m) = 2^k\phi(m) = 2(2^k)(1/2)\phi(m)\\ &= 2[2^k(1-(1/2))\phi(m)] = 2[\phi(2^k m)] = 2\phi(n)\end{aligned}$$

ب) وقتی n فرد است می‌بینیم که $\phi(2n) = (2n)(1-(1/2)\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$، و حاصل‌ضرب روی همهٔ مقسوم‌علیه‌های اول (فرد) n محاسبه شده است. (اگر $n = 1$، در این صورت $\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ برابر با ۱ است.) ولی روشن است که

$$(2n)\left(1-\frac{1}{2}\right)\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \phi(n)$$

فصل ۹
توابع مولد

بند ۱.۹، صفحهٔ ۵۵۲

۱. الف) ضریب x^{20} در $(1 + x + x^2 + \cdots + x^7)^4$

ب) ضریب x^{20} در $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{20})^2(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{20})^2$ یا $(1 + x + x^2 + \cdots)^2(1 + x^2 + x^4 + \cdots)^2$

پ) ضریب x^{30} در $(x^2 + x^3 + x^4)(x^3 + x^4 + \cdots + x^8)^4$

ت) ضریب $x^{۳۰}$ در $(x+x^{۳}+x^{۵}+\cdots+x^{۲۹})(۱+x^{۲}+x^{۴}+\cdots+x^{۳۰})^{۳}(۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{۳۰})$
یا $(x+x^{۳}+x^{۵}+\cdots)(۱+x^{۲}+x^{۴}+\cdots)^{۳}(۱+x+x^{۲}+\cdots)$

۳. الف) ضریب $x^{۱۰}$ در $(۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots)^{۶}$
ب) ضریب x^{r} در $(۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots)^{n}$

۵. جواب برابر است با ضریب $x^{۳۱}$ در تابع مولد

$$(۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots)^{۳}(۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{۱۰})$$

بند ۲.۹، صفحهٔ ۵۶۲

۱. الف) $(۱+x)^{۸}$ ب) $۸(۱+x)^{۷}$ پ) $(۱+x)^{-۱}$
ت) $x^{۳}/(۱-x)$ ث) $۶x^{۳}/(۱+x)$ ج) $(۱-x^{۲})^{-۱}$
چ) $(۱-۲x)^{-۱}$ ح) $x^{۲}/(۱-ax)$

۳. الف) $g(x)=f(x)-a_{۳}x^{۳}+۳x^{۳}=f(x)+(۳-a_{۳})x^{۳}$
ب) $g(x)=f(x)+(۳-a_{۳})x^{۳}+(۷-a_{۷})x^{۷}$
پ) $g(x)=۲f(x)+(۱-۲a_{۱})x+(۳-۲a_{۳})x^{۳}$
ت) $g(x)=۲f(x)+[۵/(۱-x)]+(۱-۲a_{۱}-۵)x+(۳-۲a_{۳}-۵)x^{۳}+(۷-۲a_{۷}-۵)x^{۷}$

۵. الف) $\binom{۲۱}{۷}$ ب) $\binom{n+۶}{۷}$

۷. $\binom{۱۴}{۱۰}-۵\binom{۹}{۵}+\binom{۵}{۲}$

۹. الف) ۰ ب) $\binom{۱۶}{۱۴}-۵\binom{۱۲}{۱۲}$ پ) $\binom{۱۴}{۱۱}+۴\binom{۱۵}{۱۲}+۶\binom{۱۶}{۱۳}+۴\binom{۱۷}{۱۴}+\binom{۱۸}{۱۵}$

۱۱. $\binom{۹۹}{۹۶}-۴\binom{۶۴}{۶۱}+۶\binom{۲۹}{۲۶}$

۱۳. $\left[\binom{۲۹}{۱۸}-\binom{۱۲}{۱}\binom{۲۳}{۱۲}+\binom{۱۲}{۲}\binom{۱۷}{۶}-\binom{۱۲}{۳}\right]/(۶^{۱۲})$

۱۵. $(۱/۸)[۱+(-۱)^{n}]+(۱/۴)\binom{n+۱}{n}+(۱/۲)\binom{n+۲}{n}$

۱۷. $$(۱-x-x^{۲}-x^{۳}-x^{۴}-x^{۵}-x^{۶})^{-۱}=[۱-(x-x^{۲}+\cdots+x^{۶})]^{-۱}$$
$$=۱+\underbrace{(x+x^{۲}+\cdots+x^{۶})}_{\text{یک ریختن}}+\underbrace{(x+x^{۲}+\cdots+x^{۶})^{۲}}_{\text{دو ریختن}}+\underbrace{(x+x^{۲}+\cdots+x^{۶})^{۳}}_{\text{سه ریختن}}+\cdots$$

که در آن ۱ مربوط به حالتی است که تاس را نریخته‌ایم.

۱۹. الف) تفاضلها عبارت‌اند از ۲، ۳، ۲، ۷، و ۰ و حاصل‌جمع آنها ۱۴ است.
ب) $\{۳,۵,۸,۱۵\}$
پ) $\{۱+a,۱+a+b,۱+a+b+c,۱+a+b+c+d\}$

۲۱. $$c_{k}=\sum_{i=۰}^{k}i(k-i)^{۲}=k^{۲}\sum_{k=۰}^{k}i-۲k\sum_{k=۰}^{k}i^{۲}+\sum_{i=۰}^{k}i^{۳}$$
$$=(k^{۲})[k(k+۱)/۲]-۲k[k(k+۱)(۲k+۱)/۶]+[k^{۲}(k+۱)^{۲}/۴]$$
$$=(۱/۱۲)(k^{۲})(k^{۲}-۱)$$

۲۳. الف) $(۱+x+x^{۲}+x^{۳}+x^{۴})(۰+x+۲x^{۲}+۳x^{۳}+\cdots)=\sum_{i=۰}^{\infty}c_{i}x^{i}$ که در آن $c_{۰}=۰$، $c_{۱}=۱$،

$c_2 = 1 + 2 = 3$، $c_3 = 1 + 2 + 3 = 6$، $c_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$، و به‌ازای هر $n \geqslant 5$
$c_n = n + (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + (n - 4) = 5n - 10$.

ب) $(1 + x)^{-2} = \dfrac{1}{(1 + x)^2} = (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)$، تابع مولد برای دنبالهٔ $\binom{-2}{0}, \binom{-2}{1}, \binom{-2}{2}, \binom{-2}{3} \cdots$. بنابراین، پیچش دو دنبالهٔ داده شده عبارت است از $c_0, c_1, c_2, \cdots$، که در آن به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$،

$$c_n = \binom{-2}{n} = (-1)^n \binom{2 + n - 1}{n} = (-1)^n \binom{n + 1}{n} = (-1)^n (n + 1)$$

[این دنباله عبارت است از دنبالهٔ یک در میان مثبت و منفی $1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, \cdots$].

پ) $(1 + x + x^2 + x^3)(0 + x + 2x^2 + 3x^3) = 0 + x + (1 + 2)x^2 + (1 + 2 + 3)x^3$
$+ (1 + 2 + 3)x^4 + (2 + 3)x^5 + 3x^6$

بنابراین، دنبالهٔ ۰، ۱، ۳، ۶، ۶، ۵، ۳، ۰، ۰، ۰، ۰، … پیچش دنباله‌های ۱، ۱، ۱، ۱، ۰، ۰، ۰، … و ۰، ۱، ۲، ۳، ۰، ۰، ۰، … است.

بند ۳.۹، صفحهٔ ۵۶۸

۱. $7;\ 6 + 1;\ 5 + 2;\ 5 + 1 + 1;\ 4 + 3;\ 4 + 2 + 1;\ 4 + 1 + 1 + 1;\ 3 + 3 + 1;\ 3 + 2 + 2;\ 3 + 2 + 1 + 1;$
$3 + 1 + 1 + 1 + 1;\ 2 + 2 + 2 + 1;\ 2 + 2 + 1 + 1 + 1;\ 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1;\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

۳. تعداد آن افرازهایی از ۶ که از ۱، ۲، و ۳ تشکیل شده‌اند برابر با ۷ است.

۵. الف و ب

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2i}} = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots)(1 + x^6 + x^{12} + \cdots) \cdots$$

۷. فرض کنیم $f(x)$ تابع مولد برای تعداد افرازهایی از $n \in \mathbf{Z}^+$ باشد که در آنها هیچ عامل جمعی بیشتر از دو بار ظاهر نمی‌شود. در این صورت

$$f(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^i + x^{2i})$$

فرض کنیم $g(x)$ تابع مولد برای تعداد افرازهایی از n باشد که در آنها هیچ عامل جمعی بر ۳ بخش‌پذیر نیست. در این صورت،

$$g(x) = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^4} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1}{1 - x^7} \cdots$$

ولی

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2)(1 + x^2 + x^4)(1 + x^3 + x^6)(1 + x^4 + x^8) \cdots \\ &= \frac{1 - x^3}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^6}{1 - x^2} \cdot \frac{1 - x^9}{1 - x^3} \cdot \frac{1 - x^{12}}{1 - x^4} \cdots \\ &= \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^4} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1}{1 - x^7} \cdots \Longrightarrow f(x) = g(x) \end{aligned}$$

۹. این نتیجه‌ای است از تناظر یک به یک موجود بین آن نمودارهای فررزکه در آنها عوامل جمع (سطرها) از m تجاوز نمی‌کنند و نمودارهای ترانهش (که آنها نیز نمودار فررز هستند) که دارای m عامل جمع (سطر) هستند.

بند ۹.۴، صفحهٔ ۵۷۳

۱. الف) e^{-x} ب) e^{2x} پ) e^{-ax} ت) e^{a^2x} ث) ae^{a^2x} ج) xe^{2x}

۳. الف) $g(x)=f(x)+[(3-a_3)/3!]x^3$

ب) $g(x)=f(x)+[(-1-a_3)/3!]x^3=e^{5x}-[126x^3/(3!)]$

پ) $g(x)=2f(x)+[2-2a_1]x+[(4-2a_2)/2!]x^2$

۵. الف) $(1+x)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)^2$

ب) $(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)^2$

۷. جواب برابر است با ضریب $\frac{x^{25}}{25!}$ در $\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{10}}{10!}\right)^4$

۹. الف) $(1/2)[3^{20}+1]/(3^{20})$ ب) $(1/4)[3^{20}+3]/(3^{20})$ پ) $(1/2)[3^{20}-1]/(3^{20})$

ت) $(1/2)[3^{20}-1]/(3^{20})$ ث) $(1/2)[3^{20}+1]/(3^{20})$

۱۱. الف) $\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^4$

ب) $\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3\Bigg[(x)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)+\left(\frac{x^2}{2!}\right)\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)$
$+\left(\frac{x^3}{3!}\right)\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)+\left(\frac{x^4}{4!}\right)\left(\frac{x^5}{5!}\right)\Bigg]$

بند ۹.۵، صفحهٔ ۵۷۶

۳. $a_0, a_1-a_0, a_2-a_1, a_3-a_2, \cdots$

۵.
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_i\right)x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i-a_n\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i-a_n\right)x^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\right)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)/(1-x)-f(x)\\ &=[f(x)-f(x)(1-x)]/(1-x)=xf(x)/(1-x)\end{aligned}$$

۷. $f(x)=[e^x/(1-x)]$

تمرینات تکمیلی، صفحهٔ ۵۷۹

۱. الف) $۶/(۱-x)+۱/(۱-x)^۲$ ب) $۱/(۱-ax)$

پ) $۱/[۱-(۱+a)x]$ ت) $۱/(۱-x)+۱/(۱-ax)$

۳. $\left[\binom{۱۵}{۱۲}-\binom{۴}{۱}\binom{۹}{۶}+\binom{۴}{۲}\right]^۲$

۵. فرض کنیم $f(x)$ تابع مولد برای تعداد افرازهایی از $n \in \mathbf{Z}^+$ باشد که در آنها هیچ عامل جمع زوجی تکرار نمی‌شود (یک عامل جمع فرد می‌تواند تکرار شود). در این صورت

$$f(x)=(۱+x+x^۲+x^۳+\cdots)(۱+x^۲)(۱+x^۳+x^۶+x^۹+\cdots)(۱+x^۴)\cdots$$
$$=\frac{۱}{۱-x}\cdot(۱+x^۲)\cdot\frac{۱}{۱-x^۳}\cdot(۱+x^۴)\cdot\frac{۱}{۱-x^۵}\cdots$$

فرض کنیم $g(x)$ تابع مولد برای تعداد افرازهایی از $n \in \mathbf{Z}^+$ باشد که در آنها هیچ عامل جمعی بیشتر از سه بار حضور ندارد. در این صورت

$$\begin{aligned}g(x)&=(۱+x+x^۲+x^۳)(۱+x^۲+x^۴+x^۶)(۱+x^۳+x^۶+x^۹)\cdots\\&=[(۱+x)(۱+x^۲)][(۱+x^۲)(۱+x^۴)][(۱+x^۳)(۱+x^۶)]\cdots\\&=[(۱-x^۲)/(۱-x)](۱+x^۲)[(۱-x^۴)/(۱-x^۲)](۱+x^۴)\cdot\\&\quad[(۱-x^۶)/(۱-x^۳)](۱+x^۶)\cdots\\&=(۱/(۱-x))(۱+x^۲)(۱/(۱-x^۳))(۱+x^۴)(۱/(۱-x^۵))(۱+x^۶)\cdots=f(x)\end{aligned}$$

۷. الف) $۱,۵,(۵)(۷),(۵)(۷)(۹),(۵)(۷)(۹)(۱۱),\cdots$ ب) $a=۴$ ، $b=-\frac{۷}{۴}$

۹. $n(۲^{n-۱})$

۱۱. الف) $\binom{۱۹}{۸}$ ب) $\binom{۱۹}{۸}/\binom{۹}{۴}^۲$

فصل ۱۰
روابط بازگشتی

بند ۱.۱۰، صفحهٔ ۵۸۹

۱. الف) $a_n=۵a_{n-۱}$ ، $n\geqslant ۱$ ، $a_۰=۲$ ب) $a_n=-۳a_{n-۱}$ ، $n\geqslant ۱$ ، $a_۰=۶$

پ) $a_n=(۱/۳)a_{n-۱}$ ، $n\geqslant ۱$ ، $a_۰=۱$ ت) $a_n=(۲/۵)a_{n-۱}$ ، $n\geqslant ۱$ ، $a_۰=۷$

۳. $d=\pm(۳/۷)$

۵. ۱۴۱ ماه

۷. الف) ۱۴۵ ب) ۴۵

۹. الف) ۲۱۳۴۵ ب) ۵۲۱۳۴، ۵۲۱۴۳ پ) ۲۱۳۴۵، ۲۱۳۵۴، ۲۱۵۳۴

بند ۲.۱۰، صفحهٔ ۶۰۲

۱. الف) $n \geqslant ۰$ ، $a_n = (۳/۷)(-۱)^n + (۴/۷)(۶)^n$ ب) $n \geqslant ۰$ ، $a_n = ۴(۱/۲)^n - ۲(۵)^n$

پ) $n \geqslant ۰$ ، $a_n = ۴ + ۳(-۱/۳)^n$ ت) $n \geqslant ۰$ ، $a_n = ۳\sin(n\pi/۲)$

ث) $n \geqslant ۰$ ، $a_n = ۲^n[\cos(n\pi/۲) + (۱/۲)\sin(n\pi/۲)]$

۳. $n \geqslant ۰$ ، $a_n = (۱/۱۰)[۷^n - (-۳)^n]$

۵. الف)

$$F_۱ = F_۲ - F_۰$$
$$F_۳ = F_۴ - F_۲$$
$$F_۵ = F_۶ - F_۴$$
$$\vdots$$
$$F_{۲n-۱} = F_{۲n} - F_{n-۲}$$

حدس: به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $F_۱ + F_۳ + F_۵ + \cdots + F_{۲n-۱} = F_{۲n} - F_۰ = F_{۲n}$.

برهان (با استفاده از استقرای ریاضی): به‌ازای $n = ۱$ داریم $F_۱ = F_۲$ و این درست است زیرا $F_۱ = ۱ = F_۲$. در نتیجه، حکم در این حالت نخست درست است (و این مرحلهٔ پایه را برای اثبات برقرار می‌سازد). اکنون فرض کنیم که نتیجه به‌ازای $n = k$ $(k \geqslant ۱)$ درست باشد، یعنی، فرض کنیم که

$$F_۱ + F_۳ + F_۵ + \cdots + F_{۲k-۱} = F_{۲k}$$

وقتی $n = k + ۱$ می‌بینیم که

$$\begin{aligned} &F_۱ + F_۳ + F_۵ + \cdots + F_{۲k-۱} + F_{۲(k+۱)-۱} \\ &= (F_۱ + F_۳ + F_۵ + \cdots + F_{۲k-۱}) + F_{۲k+۱} = F_{۲k} + F_{۲k+۱} = F_{۲k+۲} = F_{۲(k+۱)} \end{aligned}$$

بنابراین، درستی حکم به‌ازای $n = k$ مستلزم درستی آن به‌ازای $n = k + ۱$ است. پس بنابر استقرای ریاضی نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$

$$F_۱ + F_۳ + F_۵ + \cdots + F_{۲n-۱} = F_{۲n}$$

۷. $n \geqslant ۰$ ، $a_n = \left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)\left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱} - \left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}\right]$

۹. $a_n = \left(\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲\sqrt{۲۱}}\right)\left(\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲}\right)^n - \left(\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲\sqrt{۲۱}}\right)\left(\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}\right)^n$

۱۱. $n \geqslant ۰$ ، $a_n = \left(\frac{۸+۹\sqrt{۲}}{۱۶}\right)(۲+۴\sqrt{۲})^n + \left(\frac{۸-۹\sqrt{۲}}{۱۶}\right)(۲-۴\sqrt{۲})^n$

۱۳. $a_n = ۲^{F_n}$، که در آن به‌ازای هر $n \geqslant ۰$، F_n عدد فیبوناچی nام است.

۱۵. $n \geqslant ۰$ ، $x_n = ۴(۲^n) - ۳$

۱۷. $n \geqslant ۰$ ، $a_n = \sqrt{۵۱(۴^n) - ۳۵}$

۱۹. چون $\gcd(F_1, F_0) = ۱ = \gcd(F_2, F_1)$، فرض کنیم $n \geqslant ۲$. در این صورت،

$$F_3 = F_2 + F_1 (= ۱)$$
$$F_4 = F_3 + F_2$$
$$F_5 = F_4 + F_3$$
$$\vdots$$
$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

اگر ترتیب این معادلات را واژگون کنیم، مراحل گوناگون الگوریتم اقلیدسی برای محاسبهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک F_{n+1} و F_n، $n \geqslant ۲$، را خواهیم داشت. چون آخرین باقیماندهٔ غیرصفر عبارت است از $F_1 = ۱$، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n \geqslant ۲$، $\gcd(F_{n+1}, F_n) = ۱$.

بند ۱۰.۳، صفحهٔ ۶۱۶

۱. الف) $a_n = (n+۱)^۲$، $n \geqslant ۰$ ب) $a_n = ۳ + n(n-۱)^۲$، $n \geqslant ۰$

پ) $a_n = ۶(۲^n) - ۵$، $n \geqslant ۰$ ت) $a_n = ۲^n + n(۲^{n-۱})$، $n \geqslant ۰$

۳. الف) $a_n = a_{n-1} + n$، $n \geqslant ۱$، $a_0 = ۱$ $a_n = ۱ + \left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]$، $n \geqslant ۰$

ب) $b_n = b_{n-1} + ۲$، $n \geqslant ۲$، $b_1 = ۲$ $b_n = ۲n$، $n \geqslant ۱$، $b_0 = ۱$

۵. الف) $a_n = \left(\frac{۳}{۴}\right)(-۱)^n - \left(\frac{۴}{۵}\right)(-۲)^n + \left(\frac{۱}{۲۰}\right)(۳)^n$، $n \geqslant ۰$

ب) $a_n = \left(\frac{۲}{۹}\right)(-۲)^n - \left(\frac{۵}{۶}\right)(n)(-۲)^n + \left(\frac{۷}{۹}\right)$، $n \geqslant ۰$

پ) $a_n = \left(\frac{۵}{۴}\right) - \left(\frac{۱}{۴}\right)(-۱)^n - \left(\frac{۱}{۲}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{۲}\right)$

۷. $a_n = A + Bn + Cn^۲ - \left(\frac{۳}{۴}\right)n^۳ + \left(\frac{۵}{۲۴}\right)n^۴$

۹. ۱۱۷٫۶۸ تومان

۱۱. الف) $a_n = \left[\left(\frac{۳}{۴}\right)(۳)^n - ۵(۲)^n + \left(\frac{۷n}{۲}\right) + \left(\frac{۲۱}{۴}\right)\right]^{۱/۲}$، $n \geqslant ۰$

ب) $a_n = \left(\frac{۱}{۲}\right)[(-۱)^n + ۱]n!$، $n \geqslant ۰$

پ) $a_n = ۲$، $n \geqslant ۰$

بند ۱۰.۴، صفحهٔ ۶۲۴

۱. الف) $a_n = \left(\frac{۱}{۲}\right)[۱ + ۳^n]$، $n \geqslant ۰$ ب) $a_n = ۱ + [n(n-۱)(۲n-۱)]/۶$، $n \geqslant ۰$

پ) $a_n = \left(\frac{۱}{۲}\right)[۳^n + ۵^n]$، $n \geqslant ۰$ ت) $a_n = ۵(۲^n) - ۴$، $n \geqslant ۰$

ث) $a_n = ۲^n$، $n \geqslant ۰$

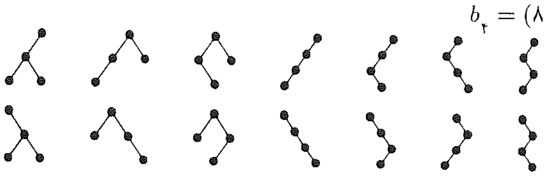
۳. الف) $n \geqslant ۰$ ، $b_n = n(۲^{n+۱})$ ، $a_n = ۲^n(۱ - ۲n)$

ب) $a_n = \left(\frac{-۳}{۴}\right) + \left(\frac{۱}{۲}\right)(n+۱) + \left(\frac{۱}{۴}\right)(۳^n)$

$n \geqslant ۰$ ، $b_n = \left(\frac{۳}{۴}\right) + \left(\frac{۱}{۲}\right)(n+۱) - \left(\frac{۱}{۴}\right)(۳^n)$

بند ۵.۱۰، صفحهٔ ۶۳۵

۱. $b_۴ = (۸!)/[(۵!)(۴!)] = ۱۴$



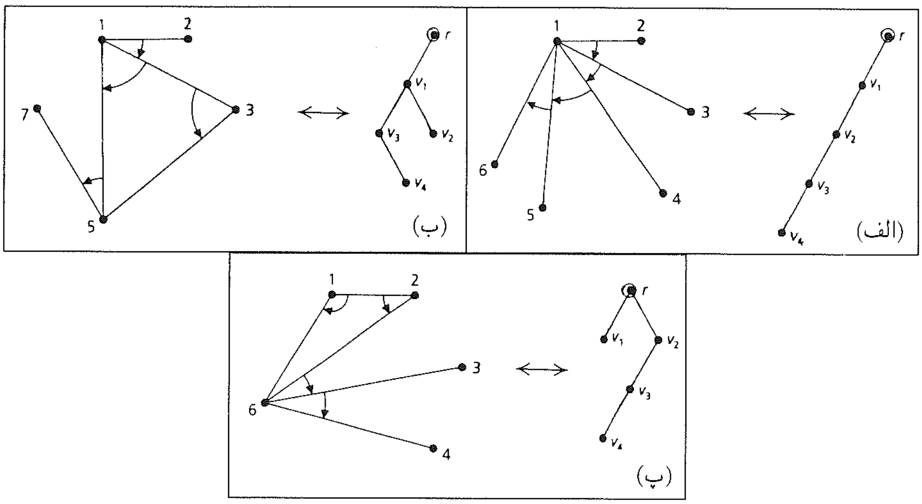
۳.

$$\begin{aligned}
\binom{۲n-۱}{n} - \binom{۲n-۱}{n-۲} &= \left[\frac{(۲n-۱)!}{n!(n-۱)!}\right] - \left[\frac{(۲n-۱)!}{(n-۲)!(n+۱)!}\right] \\
&= \left[\frac{(۲n-۱)!(n+۱)}{(n+۱)!(n-۱)!}\right] - \left[\frac{(۲n-۱)!(n-۱)}{(n-۱)!(n+۱)!}\right] \\
&= \left[\frac{(۲n-۱)!}{(n+۱)!(n-۱)!}\right][(n+۱)-(n-۱)] \\
&= \frac{(۲n-۱)!(۲)}{(n+۱)!(n-۱)!} = \frac{(۲n-۱)!(۲n)}{(n+۱)!n!} = \frac{(۲n)!}{(n+۱)(n!)(n!)} \\
&= \frac{۱}{(n+۱)}\binom{۲n}{n}
\end{aligned}$$

۵. الف) $\left(\frac{۱}{۹}\right)\binom{۱۶}{۸}$ ب) $\left[\left(\frac{۱}{۴}\right)\binom{۶}{۳}\right]^۲$

پ) $\left[\left(\frac{۱}{۳}\right)\binom{۴}{۲}\right]\left[\left(\frac{۱}{۶}\right)\binom{۱۰}{۵}\right]$ ت) $\left(\frac{۱}{۶}\right)\binom{۱۰}{۵}$

۷.



۹. $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + a_2 a_{n-3} + \cdots + a_{n-2} a_1 + a_{n-1} a_0$

چون $a_0 = 1$، $a_1 = 1$، $a_2 = 2$، $a_3 = 5$، می‌بینیم که عدد کاتالان nام $= a_n$

بند ۶.۱۰، صفحهٔ ۶۴۶

۱. الف) $f(n) = \left(\frac{5}{3}\right)\left(4n^{\log 3^4} - 1\right)$ و $f \in O(n^{\log 3^4})$ به‌ازای $n \in \{3^i | i \in \mathbf{N}\}$

ب) $f(n) = 7(\log_5 n + 1)$ و $f \in O(\log_5 n)$ به‌ازای $n \in \{5^i | i \in \mathbf{N}\}$

۳. الف) روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$، $f \in O(\log_b n)$ ب) روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$، $f \in O(n^{\log_b a}$

۵. الف) $f(1) = 0$ $f(n) = 2f(n/2) + 1$

با توجه به تمرین ۲ (ب)، $f(n) = n - 1$

ب) معادلهٔ $f(n) = f(n/2) + (n/2)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید: $n/2$ بازی در دور نخست برگزار می‌شود. در این صورت $n/2$ نفر از بازیکنان باقی می‌مانند، از این‌رو، برای تعیین برندهٔ نهایی به $f(n/2)$ بازی اضافی نیاز داریم.

۷. $O(1)$

۹. الف)

$$f(n) \leqslant af(n/b) + cn$$

$$af(n/b) \leqslant a^2 f(n/b^2) + ac(n/b)$$

$$a^2 f(n/b^2) \leqslant a^3 f(n/b^3) + a^2 c(n/b^2)$$

$$a^3 f(n/b^3) \leqslant a^4 f(n/b^4) + a^3 c(n/b^3)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a^{k-1} f(n/b^{k-1}) \leqslant a^k f(n/b^k) + a^{k-1} c(n/b^{k-1})$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} f(n) &\leqslant a^k f(n/b^k) + cn\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right)^{k-1}\right] \\ &= a^k f(1) + cn\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right)^{k-1}\right] \end{aligned}$$

زیرا $n = b^k$. چون $f(1) \leqslant c$ و $\left(\frac{n}{b^k}\right) = 1$، داریم

$$f(n) \leqslant cn\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right)^{k-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^k\right] = (cn)\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^i$$

پ) به‌ازای $a \neq b$،

$$cn\sum_{i=0}^{k}(a/b)^i = cn\left[\frac{1-(a/b)^{k+1}}{1-(a/b)}\right]$$

$$= (c)(b^k)\left[\frac{۱-(a/b)^{k+۱}}{۱-(a/b)}\right] = c\left[\frac{b^k-(a^{k+۱}/b)}{۱-(a/b)}\right]$$
$$= c\left[\frac{b^{k+۱}-a^{k+۱}}{b-a}\right] = c\left[\frac{a^{k+۱}-b^{k+۱}}{a-b}\right]$$

ت) با توجه به قسمت (پ)،

$$f(n) \leqslant \left(\frac{c}{a-b}\right)\left[a^{k+۱}-b^{k+۱}\right] = \left(\frac{ca}{a-b}\right)a^k - \left(\frac{cb}{a-b}\right)b^k$$

ولی $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$ و $b^k = n$، از این‌رو،

$$f(n) \leqslant \left(\frac{ca}{a-b}\right)n^{\log_b a} - \left(\frac{cb}{a-b}\right)n$$

(یک) اگر $a < b$، آنگاه $\log_b a < ۱$ و $f \in O(n)$ روی $\mathbf{Z}^+$.

(دو) اگر $a > b$، آنگاه $\log_b a > ۱$ و $f \in O(n^{\log_b a})$ روی $\mathbf{Z}^+$.

تمرینات تکمیلی، صفحهٔ ۶۵۲

۱. $\binom{n}{k+۱} = \dfrac{n!}{(k+۱)!(n-k-۱)!} = \dfrac{n-k}{(k+۱)}\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \left(\dfrac{n-k}{k+۱}\right)\binom{n}{k}$

۳. دو حالت پیش می‌آید. حالت ۱ (۱ یکی از عوامل جمع است): $p(n-۱,k-۱)$ طریق برای افراز $n-۱$ به دقیقاً $k-۱$ عامل جمع وجود دارد. حالت ۲ (۱ یکی از عوامل جمع نیست): در اینجا هر یکی از عوامل جمع $s_۱$، $s_۲$، $\dots$، s_k بزرگتر از ۱ است. به‌ازای $۱ \leqslant i \leqslant k$، قرار می‌دهیم $t_i = s_i - ۱ \geqslant ۱$. در این صورت $t_۱$، $t_۲$، $\dots$، t_k افرازی از $n-k$ به دقیقاً k عامل جمع به‌دست می‌دهد. این دو حالت شامل همهٔ حالات هستند و مانع جمع‌اند، از این‌رو، بنابر قاعدهٔ حاصل جمع

$$p(n,k) = p(n-۱,k-۱) + p(n-k,k)$$

۵. الف) $A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_۳ & F_۲ \\ F_۲ & F_۱ \end{bmatrix}$، $A^۳ = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_۴ & F_۳ \\ F_۳ & F_۲ \end{bmatrix}$، $A^۴ = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_۵ & F_۴ \\ F_۴ & F_۳ \end{bmatrix}$

ب) حدس: به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+۱} & F_n \\ F_n & F_{n-۱} \end{bmatrix}$، که در آن F_n عدد فیبوناچی nام را نشان می‌دهد.

برهان: به‌ازای $n = ۱$، $A = A^۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_۲ & F_۱ \\ F_۱ & F_۰ \end{bmatrix}$؛ بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در حالت نخست برقرار است.

فرض کنیم که نتیجه به‌ازای $n = k \geqslant ۱$ درست باشد. یعنی، $A^k = \begin{bmatrix} F_{k+۱} & F_k \\ F_k & F_{k-۱} \end{bmatrix}$.

بهازای $n = k + 1$،

$$A^n = A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

بنابراین، با توجه به اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر بهازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۷. الف) چون $\alpha^2 = \alpha + 1$، نتیجه می‌گیریم که $2 + \alpha = \alpha^2 + 1$ و

$$(2 + \alpha)^2 = 4 + 4\alpha + \alpha^2 = 4(1 + \alpha) + \alpha^2 = 5\alpha^2$$

ب) چون $\beta^2 = \beta + 1$، می‌بینیم که $2 + \beta = \beta^2 + 1$ و

$$(2 + \beta)^2 = 4 + 4\beta + \beta^2 = 4(1 + \beta) + \beta^2 = 5\beta^2$$

پ)

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} F_{2k+m} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left[\frac{a^{2k+m} - \beta^{2k+m}}{\alpha - \beta}\right]$$

$$= (1/(\alpha - \beta)) \left[\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (\alpha^2)^k a^m - \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (\beta^2)^k \beta^m\right]$$

$$= (1/(\alpha - \beta))[\alpha^m (1 + \alpha^2)^{2n} - \beta^m (1 + \beta^2)^{2n}]$$

$$= (1/(\alpha - \beta))[\alpha^m (2 + \alpha)^{2n} - \beta^m (2 + \beta)^{2n}]$$

$$= (1/(\alpha - \beta))[a^m ((2 + \alpha)^2)^n - \beta^m ((2 + \beta)^2)^n]$$

$$= (1/(\alpha - \beta))[\alpha^m (5\alpha^2)^n - \beta^m (5\beta^2) n]$$

$$= 5^n (1/(\alpha - \beta))[a^{2n+m} - \beta^{2n+m}] = 5^n F_{2n+m}$$

۹. می‌بینیم که

$$c_{n-1} + c_{n-2} + F_n = (F_1 F_{n-1} + F_2 F_{n-2} + F_3 F_{n-3} + \cdots + F_{n-2} F_2 + F_{n-1} F_1) +$$
$$(F_1 F_{n-2} + F_2 F_{n-3} + F_3 F_{n-4} + \cdots + F_{n-3} F_2 + F_{n-2} F_1) + F_n = F_1 (F_{n-1} + F_{n-2}) +$$
$$F_2 (F_{n-2} + F_{n-3}) + F_3 (F_{n-3} + F_{n-4}) + \cdots + F_{n-2} (F_2 + F_1) + F_{n-1} F_1 + F_n =$$
$$F_1 F_n + F_2 F_{n-1} + F_3 F_{n-2} + \cdots + F_{n-2} F_3 + F_{n-1} F_2 + F_n F_1$$

زیرا $F_2 = F_1 = 1$. در نتیجه، بهازای $n \geqslant 3$،

$$c_{n-1} + c_{n-2} + F_n = c_n$$

۱۱. الف) به‌ازای هر پریشِ ، ۱ در مکان i، $۲ \leqslant i \leqslant n$، گذاشته می‌شود. دو حالت پیش می‌آید. حالت ۱ (i در مکان ۱ است): در این صورت $n-۲$ عدد صحیح دیگر به $d_{n-۲}$ طریق پریشان می‌شوند. چون $n-۱$ انتخاب برای i هست، پس $(n-۱)d_{n-۲}$ تا از این پریشها داریم. حالت ۲ [i در مکان ۱ (یا مکان i) نیست]: در این صورت ۱ را به‌عنوان مکان طبیعی جدید i در نظر می‌گیریم؛ بنابراین، $n-۱$ عنصر برای پریشان کردن وجود دارد. با توجه به وجود $n-۱$ انتخاب برای i، $(n-۱)d_{n-۱}$ پریش داریم. چون این دو حالت شامل همهٔ حالتها هستند و مانع جمع‌اند، نتیجهٔ موردنظر از قاعدهٔ حاصل‌جمع به‌دست می‌آید.

ب) $d_۰ = ۱$

پ) $d_n - nd_{n-۱} = d_{n-۲} - (n-۲)d_{n-۳}$

۱۳. الف) $a_n = \binom{۲n}{n}$، $n \geqslant ۰$ ب) $r = ۱$، $s = -۴$، $t = -\frac{۱}{۲}$

ت) $b_n = \left(\frac{۱}{۲n-۱}\right)\binom{۲n}{n}$، $n \geqslant ۱$؛ $b_۰ = ۰$

۱۵. الف) (یک) ۱ (دو) $۶!/(۲^۲ \cdot ۳^۲ \cdot ۲!) = ۵!/(۲!)(۳!) = \binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳}$

(سه) $۹!/(۲^۳ \cdot ۳^۳ \cdot ۳!) = [(۸)(۷)/۲][۶!/(۲^۲ \cdot ۳^۲ \cdot ۲!)] = \binom{۸}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳}$

ب) $f(n,۳) = \binom{۳n-۱}{۲} f(n-۱,۳)$، $n \geqslant ۲$، $f(۱,۳) = ۱$

حدس: $f(n,۳) = (۳n)!/(۲^n ۳^n n!)$

برهان (با استفاده از استقرای ریاضی): به‌ازای $n = ۱$، $f(۱,۳) = ۱$ و $۳!/(۲!۳!۱!) = ۱$. بنابراین، در این حالت نخست نتیجهٔ موردنظر درست است و این مرحلهٔ پایه برای اثبات را برقرار می‌سازد.

اکنون به مرحلهٔ استقرایی می‌پردازیم و فرض می‌کنیم که نتیجه به‌ازای $n = t$ ($t \geqslant ۱$) درست باشد، یعنی، $f(t,۳) = (۳t)!/(۲^t ۳^t t!)$. وقتی $n = t+۱$ داریم

$$\begin{aligned} f(t+۱,۳) &= \binom{۳(t+۱)-۱}{۲} f(t,۳) = \binom{۳t+۲}{۲} f(t,۳) \\ &= [(۳t+۲)(۳t+۱)/۲][(۳t)!/(۲^t ۳^t t!)] \\ &= [(۳t+۳)(۳t+۲)(۳t+۱)/(۲ \cdot ۳ \cdot (t+۱))][(۳t)!/(۲^t ۳^t t!)] \\ &= (۳t+۳)!/(۲^{t+۱} ۳^{t+۱} (t+۱)!) = (۳(t+۱))!/(۲^{t+۱} ۳^{t+۱} (t+۱)!) \end{aligned}$$

چون راستی این فرمول به‌ازای $n = t$ مستلزم راستی آن به‌ازای $n = t+۱$ است، بنابر اصل استقرای ریاضی نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$

$$f(n,۳) = (۳n)!/(۲^n ۳^n n!)$$

پ) $f(n,k) = \binom{kn-۱}{k-۱} f(n-۱,k)$، $n \geqslant ۲$، $f(۱,k) = ۱$.

حدس: $f(n,k) = (kn)!/(۲^n ۳^n \cdots k^n n!)$

برهان (با استفاده از استقرای ریاضی): وقتی $n = ۱$، $f(۱,k) = ۱$ و $k!/(۲^۱ ۳^۱ \cdots k^۱ ۱!) = ۱$، از این‌رو، این حالت نخست درست است و مرحلهٔ پایه برای اثبات استقرایی فراهم می‌شود.

فرض کنیم نتیجه به‌ازای $n = t$ $(t \geqslant ۱)$ درست باشد. پس داریم $(kt)!/(۲^t۳^t \cdots k^t t!)$. به‌ازای $n = t + ۱$ می‌بینیم که

$$\begin{aligned} f(t+۱, k) &= \binom{k(t+۱)-۱}{k-۱} f(t,k) = \binom{kt+k-۱}{k-۱} f(t,k) \\ &= [(kt+k-۱)!/(k-۱)!(kt)!][(kt)!/(۲^t۳^t \cdots k^t t!)] \\ &= [(kt+k)!/k(t+۱)(k-۱)!][۱/(۲^t۳^t \cdots k^t t!)] \\ &= (kt+k)!/(۲^{t+۱}۳^{t+۱} \cdots k^{t+۱}(t+۱)!) \\ &= [k(t+۱)]!/(۲^{t+۱}۳^{t+۱} \cdots k^{t+۱}(t+۱)!) \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۱۷. الف) افرازهایی که در $f(n,m)$ به حساب می‌آیند به دو دسته تقسیم می‌شوند:

(۱) افرازهایی که در آنها m یک جمعوند است. اینها در $f(n-m, m)$ به حساب می‌آیند، زیرا m ممکن است بیشتر از یک بار ظاهر شود.

(۲) افرازهایی که در آنها m یک جمعوند نیست. در این صورت، $m - ۱$ بزرگترین جمعوند ممکن است. این افرازها در $f(n, m-۱)$ به حساب می‌آیند.

چون این دو حالت شامل همهٔ حالات هستند و مانع جمع‌اند، نتیجه می‌گیریم که

$$f(n,m) = f(n-m, m) + f(n, m-۱)$$

نمادگذاری

منطق	p، q	گزاره‌ها
	$\neg p$	نقیض(گزارهٔ) p: چنین نیست که p
	$p \wedge q$	ترکیب عطفی p و q: p و q
	$p \vee q$	ترکیب فصلی p و q: p یا q
	$p \rightarrow q$	استلزام : p مستلزم q است
	$p \leftrightarrow q$	ترکیب دو شرطی p و q: p اگر و فقط اگر q
	$p \Rightarrow q$	استلزام منطقی: p به طور منطقی مستلزم q است
	$p \Leftrightarrow q$	هم‌ارزی منطقی: p به طور منطقی هم‌ارز با q است
	$T_\circ$	راستگو
	$F_\circ$	تناقض
	$\forall x$	به ازای هر x (سور عمومی)
	$\exists x$	به ازای حداقل یک x (سور وجودی)
نظریهٔ مجموعه‌ها	$x \in A$	عنصر x عضو مجموعهٔ A است
	$x \notin A$	عنصر x عضو مجموعهٔ A نیست
	$\mathcal{U}$	عالم
	$A \subseteq B$، $B \supseteq A$	A زیرمجموعهٔ B است
	$A \subset B$، $B \supset A$	A زیرمجموعهٔ سرهٔ B است
	$A \nsubseteq B$	A زیرمجموعهٔ B نیست
	$A \not\subset B$	A زیر مجموعهٔ سرهٔ B نیست
	$\|A\|$	عدد اصلی، یا اندازهٔ مجموعهٔ A، یعنی، تعداد عنصرهای A
	$\varnothing = \{\}$	مجموعهٔ تهی، یا مجموعهٔ پوچ
	$\mathcal{P}(A)$	مجموعهٔ توانی A، یعنی گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A
	$A \cap B$	اشتراک مجموعه‌های A و B: $\{x\|x\in A$ و $x\in B\}$
	$A \cup B$	اجتماع مجموعه‌های A و B: $\{x\|x\in A$ یا $x\in B\}$
	$A \triangle B$	تفاضل متقارن A و B: $\{x\|x\in A$ یا $x\in B$، ولی $x\notin A\cap B\}$
	$\overline{A}$	متمم مجموعهٔ A : $\{x\|x\in\mathcal{U}$ و $x\notin A\}$
	$A - B$	متمم(نسبی) مجموعهٔ B در مجموعهٔ A: $\{x\|x\in A$ و $x\notin B\}$
	$\cup_{i\in I} A_i$	$\{x\|x\in A_i$ به ازای حداقل یک $i\in I\}$، که در آن I مجموعه‌ای اندیسگذار است

	$\cap_{i \in I} A_i$	$\{x \mid x \in A_i$، به‌ازای هر $i \in I\}$، که در آن I مجموعه‌ای اندیسگذار است
اعداد	$a \mid b$	به ازای $a, b \in \mathbf{Z}$، $a \neq 0$، عدد a عدد b را عاد می‌کند
	$a \nmid b$	به ازای $a, b \in \mathbf{Z}$، $a \neq 0$، عدد a عدد b را عاد نمی‌کند
	$\gcd(a, b)$	بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد صحیح a و b
	$\mathrm{lcm}(a, b)$	کوچکترین مضرب مشترک اعداد صحیح a و b
	$\phi(n)$	تابع فی‌اویلر به ازای $n \in \mathbf{Z}^+$
	$\lfloor x \rfloor$	بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا برابر با عدد حقیقی x: بزرگترین عدد صحیح واقع در x: مقدار گرد شدهٔ نقصانی x
	$\lceil x \rceil$	کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از یا برابر با عدد حقیقی x: مقدار گرد شدهٔ اضافی x
	$a \equiv b \pmod n$	a همنهشت با b به پیمانهٔ n است.
روابط	$A \times B$	حاصل‌ضرب دکارتی، یا چلیپایی، مجموعه‌های A و B: $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
	$\mathcal{R} \subseteq A \times B$	$\mathcal{R}$ رابطه‌ای از A در B است
	$a\mathcal{R}b$؛ $(a, b) \in \mathcal{R}$	a در رابطه با b است
	$a \not\mathcal{R} b$؛ $(a, b) \notin \mathcal{R}$	a در رابطه با b نیست
	$\mathcal{R}^c$	عکس رابطهٔ $\mathcal{R}$: $(a, b) \in \mathcal{R}$ اگر، و فقط اگر، $(b, a) \in \mathcal{R}^c$
	$\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$	ترکیب روابط $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ و $\mathcal{S} \subseteq B \times C$: $(a, c) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ هرگاه، به ازای bای در B، $(a, b) \in \mathcal{R}$ و $(b, c) \in \mathcal{S}$
	$\mathrm{lub}\{a, b\}$	کوچکترین کران بالای a و b
	$\mathrm{glb}\{a, b\}$	بزرگترین کران پایین a و b
	$[a]$	ردهٔ هم‌ارزی عنصر a (نسبت به رابطهٔ هم‌ارزی $\mathcal{R}$ روی مجموعه‌ای مانند A): $\{x \in A \mid x\mathcal{R}a\}$
توابع	$f : A \to B$	f تابعی از A در B است
	$f(A_1)$	به ازای $f : A \to B$ و $A_1 \subseteq A$، $f(A_1)$ نگارهٔ A_1 تحت f است، یعنی، $\{f(a) \mid a \in A_1\}$
	$f(A)$	به ازای $f : A \to B$، $f(A)$ برد f است
	$f : A \times A \to B$	f عملی دوتایی روی A است
	$f : A \times A \to B (\subseteq A)$	f یک عمل دوتایی بسته روی A است
	$1_A : A \to A$	تابع همانی روی A: $1_A(a) = a$ به ازای هر $a \in A$
	$f\|_{A_1}$	تحدید $f : A \to B$ به $A_1 \subseteq A$
	$g \circ f$	ترکیب توابع $f : A \to B$ و $g : B \to C$: $(g \circ f)a = g(f(a))$ به ازای هر $a \in A$

	f^{-1}	وارون تابع f
	$f^{-1}(B_1)$	پیشنگارهٔ $B_1 \subseteq B$ به ازای $f : A \to B$
	$f \in O(g)$	f «اُی بزرگ» g است؛ f از مرتبهٔ g است
جبر رشته‌ها	Σ	مجموعه‌ای متناهی از نمادها که آن را یک الفبا می‌نامیم
	λ	رشتهٔ تهی
	$\|\|x\|\|$	طول رشتهٔ x
	Σ^n	$\{x_1 x_2 \cdots x_n \| x_i \in \Sigma\}$، $n \in \mathbf{Z}^+$
	Σ^0	$\{\lambda\}$
	Σ^+	$\bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+} \Sigma^n$: مجموعهٔ همهٔ رشته‌های دارای طول مثبت
	Σ^*	$\bigcup_{n\geqslant 0} \sum^n$:مجموعهٔ همهٔ رشته‌های متناهی
	$A \subseteq \Sigma^*$	A یک زبان است
	AB	الحاق زبانهای $A, B \subseteq \Sigma^*$: $\{ab \| a \in A, b \in B\}$
	A^n	$\{a_1 a_2 \cdots a_n \| a_i \in A \subseteq \sum^*\}$، $n \in \mathbf{Z}^+$
	A^0	$\{\lambda\}$
	A^+	$\bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+} A^n$
	A^*	$\bigcup_{n\geqslant 0} A^n$: بست کلینی[1] زبان A
	$M = (S, \mathcal{S}, \mathcal{O}, \nu, \omega)$	یک ماشین متناهی‌الحالت M با حالت داخلی S، الفبای ورودی $\mathcal{I}$، الفبای خروجی $\mathcal{O}$، تابع حالت بعدی $\nu : S \times \mathcal{I} \to S$، و تابع خروجی $\omega : S \times \mathcal{I} \to \mathcal{O}$

مجموعه‌های خاصی از اعداد

$\mathbf{Z}$	مجموعهٔ اعداد صحیح: $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$
$\mathbf{N}$	مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی یا مجموعهٔ اعداد طبیعی: $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
$\mathbf{Z}^+$	مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت: $\{1, 2, 3, \cdots\} = \{x \in \mathbf{Z} \| x > 0\}$
$\mathbf{Q}$	مجموعهٔ اعداد گویا: $\{\frac{a}{b} \| a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}$
$\mathbf{Q}^+$	مجموعهٔ اعداد گویای مثبت
$\mathbf{Q}^*$	مجموعهٔ اعداد گویای غیرصفر
$\mathbf{R}$	مجموعهٔ اعداد حقیقی
$\mathbf{R}^+$	مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت
$\mathbf{R}^*$	مجموعهٔ اعدادحقیقی غیرصفر

1. S.C. Kleene

	$\mathbf{C}$	مجموعهٔ اعداد مختلط: $\{x+yi \mid x,y\in\mathbf{R}, i^2=-1\}$
	$\mathbf{C}^*$	مجموعهٔ اعداد مختلط غیرصفر
	$\mathbf{Z}_n$	$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$، به ازای $n\in\mathbf{Z}^+$
	$[a,b]$	بازهٔ بسته از a تا b: $\{x\in\mathbf{R} \mid a\leqslant x\leqslant b\}$
	(a,b)	بازهٔ باز از a تا b: $\{x\in\mathbf{R} \mid a< x< b\}$
	$[a,b)$	یک بازهٔ نیم‌باز از a تا b: $\{x\in\mathbf{R} \mid a\leqslant x< b\}$
	$(a,b]$	یک بازهٔ نیم‌باز از a تا b: $\{x\in\mathbf{R} \mid a< x\leqslant b\}$
ساختارهای جبری	$(R,+,\cdot)$	R حلقه‌ای با اعمال دوتایی + و · است
	$R[x]$	حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی حلقهٔ R
	$\deg f(x)$	درجهٔ چندجمله‌ای $f(x)$
	$(G,\circ)$	G تحت عمل دوتایی $\circ$ یک گروه است
	S_n	گروه متقارن n نماد
	aH	یک هم‌مجموعهٔ چپ زیرگروه H (در گروه G): $\{ah \mid h\in H\}$
	$(\mathcal{B},+,\cdot,^-,0,1)$	جبر بولی $\mathcal{B}$ با اعمال دوتایی + و ·، عمل یکتایی ‾ و عنصرهای همانی 0 (برای +) و 1 (برای ·)
نظریهٔ گراف	$G=(V,E)$	G گرافی است با مجموعهٔ رئوس V و مجموعهٔ یالهای E
	K_n	گراف کامل روی n رأس
	$\overline{G}$	متمم گراف G
	$\deg(v)$	درجهٔ رأس v (درگرافی غیرسودار مانند G)
	$\mathrm{od}(v)$	درجهٔ خروجی رأس v (درگرافی سودار مانند G)
	$\mathrm{id}(v)$	درجهٔ ورودی رأس v (درگرافی سودار مانند G)
	$\kappa(G)$	تعداد مؤلفه‌های همبند گراف G
	$K_{m,n}$	گراف دو بخشی کامل روی $V=V_1\cup V_2$ که در آن $V_1\cap V_2=\varnothing$، $\lvert V_1\rvert=m$، $\lvert V_2\rvert=n$
	$\beta(G)$	عدد استقلال G
	$\mathcal{X}(G)$	عدد رنگی G
	$P(G,\lambda)$	چندجمله‌ای رنگی G
	$\gamma(G)$	عدد غلبهٔ G
	$L(G)$	گراف یالی گراف G
	$T=(V,E)$	T درختی است با مجموعهٔ رئوس V و مجموعهٔ یالهای E.
	$N=(V,E)$	N یک شبکه (شبکهٔ حمل‌ونقل) با مجموعهٔ رئوس V و مجموعهٔ یالهای E است.

فرمولها

$n!$	n فاکتوریل: $1 = !0$؛ $(1)(2)(3)\cdots(n-1)n = n!$، $n \in \mathbf{Z}^+$
$P(n,r)$	تعداد جایگشتهای n شیئ به طوری که هر بار r تا از آنها در نظر گرفته شود، $0 \leqslant r \leqslant n$. $\left[P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}\right]$
$C(n,r) = \binom{n}{r}$	تعداد ترکیبها یا گزینشهای n شیئ به طوری که هر بار r تا از آنها در نظر گرفته شود، $0 \leqslant r \leqslant n$. $\left[C(n,r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}\right]$
$\binom{n+r-1}{r}$	تعداد ترکیبها یا گزینشهای n شیئ به طوری که هر بار r تا از آنها در نظر گرفته شود و تکرار مجاز باشد ($r \geqslant 0$)
قضیهٔ دو جمله‌ای:	$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}x^ny^0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$

$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$، $n \geqslant r \geqslant 1$

$S(m,n) = \left(\frac{1}{n!}\right)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$، عدد استرلینگ نوع دوم. $S(m,n)$ برابر است با تعداد طرق توزیع m شیئ متمایز بین n ظرف یکسان به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند.

$\binom{-n}{r} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}$، $n, r \in \mathbf{Z}^+$

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$: $f(x)$ تابع مولد (معمولی) برای دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ است.

به ازای $a \in \mathbf{R}$، و $m, n \in \mathbf{Z}^+$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

$$(1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax + \binom{n}{2}a^2x^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^nx^n$$

$$(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + \binom{n}{n}x^{nm}$$

$$\frac{(1-x^{n+1})}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

$$1/(1-x)^n = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2}(-x)^2 + \binom{-n}{3}(-x)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i}(-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$$

$g(x)$ تابع مولد نمایی برای دنبالهٔ $g(x) = a_0 + a_1\left(\frac{x}{1!}\right) + a_2\left(\frac{x^2}{2!}\right) + a_3\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \cdots$:

$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ است.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad \left(\frac{1}{2}\right)(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$F_n, n \geqslant 0$ عدد فیبوناچی nام: $F_0 = 0$، $F_1 = 1$ و

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ به‌ازای هر $n \geqslant 2$

$b_n, n \geqslant 0$ عددکاتالان nام. $b_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)\binom{2n}{n}$

به ازای هر $n \geqslant 0$