راهنمای حل مسائل

ریاضیات گسسته و ترکیباتی

رالف پ. گریمالدی

ترجمهٔ
دکتر محمدعلی رضوانی

ترجمهٔ ویرایش سوم

انتشارات فاطمی

Instructor's Solutions Manual
Discrete and Combinatorial Mathematics
An Applied Introduction, Third Edition
Ralph P. Grimaldi
Addison-Wesley Publishing Company, 1994

راهنمای حل مسائل

ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی

مؤلف: رالف. پ. گریمالدی
مترجم: محمدعلی رضوانی
ویراستار: مهران اخباریفر
ناشر: انتشارات فاطمی
چاپ پنجم، ۱۳۹۳
شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه
قیمت: ۲۷۰۰۰ تومان
شابک ۹ـ۳۲۸ـ۳۱۸ـ۹۶۴
ISBN 964-318-328-9

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید انتشارات فاطمی
ـ مدیر تولید: فرید مصلحی
ـ طراح جلد: زهرا قورچیان
ـ حروفچینی و صفحه‌بندی: زهره امینی
ـ نمونه‌خوانی و صفحه‌آرا: ساقی جهانشاهی قاچار
ـ نظارت بر چاپ: علی محمدپور

چاپ و صحافی: خاشع

نشانی دفتر: میدان فاطمی، خیابان جویبار، خیابان میرهادی،
شمارهٔ ۱۴، کدپستی ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱، تلفن: ۸۸۹۴۵۵۴۵ (۲۰ خط)
نمابر: ۸۸۹۴۴۰۵۱ www.fatemi.ir • info@fatemi.ir
نشانی فروشگاه: تهران، خیابان انقلاب، خیابان دانشگاه، تقاطع شهدای ژاندارمری
تلفن: ۶۶۹۷۳۴۷۸ نمابر: ۶۶۹۷۳۷۱۰

انتشارات فاطمی

Grimaldi, Ralph P.
گریمالدی. رالف
راهنمای حل مسائل ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی/تألیف رالف پ. گریمالدی ؛ ترجمهٔ محمدعلی رضوانی. ــ تهران: فاطمی، ۱۳۸۱.
شش، ۶۰۵ ص.: مصور.
ISBN 964-318-328-9
فیپا.
چاپ پنجم: ۱۳۹۳
۱. ریاضیات. ۲. کامپیوتر ــ ریاضیات. ۳. آنالیز ترکیبی. الف. رضوانی، محمدعلی، ۱۳۲۴ــ ، مترجم. ب. عنوان.
۵۱۰
QA۲۹۸/۲/گ۴ر۹۲
۱۳۸۱
کتابخانهٔ ملی ایران
۸۱-۲۲۵۷۹م

فهرست

به‌نام خدا

پیشگفتار مترجم

تصور نمی‌کنم که برای رسیدن به سطح قابل قبولی از درک ریاضیات (و مقصود از ریاضیات مجموعهٔ مفاهیم اولیه، تعریفها، اصول موضوع، قضیه‌ها، مثالهای نقض و منطق ریاضی است) رهیافتی بهتر از حل مسأله و «بازی با آنها» وجود داشته باشد و همین امر نیز علت اصلی گنجاندن تعدادی تمرین و مسأله در اکثر قریب به اتفاق کتابهای ریاضی (از ابتدایی تا عالی) است.

با توجه به اینکه مدت زیادی نیست که درس ریاضیات گسسته در برنامهٔ درسی دبیرستانها (در دورهٔ پیشدانشگاهی و آن هم در سطحی نسبتاً محدود) و برنامهٔ درسی دانشگاهها (عمدتاً رشته‌های ریاضی، علوم کامپیوتر و فنی- مهندسی) گنجانده شده است، طبیعی است که بسیاری از خوانندگان هنوز با فنون درست حل و طرح مسأله در این شاخهٔ ریاضی دشواری داشته باشند. علاوه‌براین تعداد زیادی متون غیراستاندارد (همراه با مسائلی غیراستاندارد که به‌وفور در آنها یافت می‌شود) منظره را نازیبا ساخته‌اند.

کتاب «ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی» تألیف رالف پ. گریمالدی که ترجمهٔ آن در چهار مجلد در اختیار خوانندگان قرار گرفته است حاوی تقریباً ۱۸۰۰ مسألهٔ متنوع دربارهٔ اجزای گوناگون ریاضیات گسسته (نظیر نظریهٔ اعداد، منطق ریاضی، نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ ماشینهای متناهی‌الحالت، نظریهٔ گراف و درخت، نظریهٔ بهینه‌سازی و تطابق و ...) است. مؤلف، کتاب جداگانه‌ای تحت عنوان «راهنمای حل مسائل» برای راهنمایی خوانندگان تدوین کرده است که ترجمهٔ آن اینک در اختیار علاقه‌مندان قرار می‌گیرد.

مؤلف کتاب «راهنمای حل مسائل» به درستی از ارائهٔ راه‌حل تشریحی و مبسوط مسائل (که معمولاً خسته‌کننده و تنبلی‌آور است) اجتناب کرده است. به نظر نگارندهٔ این سطور، آنچه مدنظر گریمالدی بوده است این است که خواننده را گام به‌گام، با توجه به سطح دشواری مسائل، با فنون حل مسأله آشنا سازد و درست همین جنبهٔ آموزشی است که اهمیت کتاب حاضر را صد چندان می‌کند. خواننده نیز باید با علم به این نکته، بین این کتاب و کتابهای داستان یا رمان تمایز قائل شود و در عوض پس از «کلنجار رفتن» با مسائل و به کار انداختن خلاقیتها و ابتکارهای فردی، کتاب «راهنمای حل مسائل» را به‌عنوان مشاور مورد مشورت قرار دهد.

سخن آخر اینکه بدون تشویق صمیمانه و استقبال گرم مدیر محترم مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی و همچنین، بدون دقت نظر، تیزبینی و حوصلهٔ وافر ویراستار محترم، این اثر با ارزش پنج جلدی در دسترس خوانندهٔ مشتاق پارسی زبان قرار نمی‌گرفت. از آنها و از همهٔ کارکنان و دست‌اندرکاران مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

محمدعلی رضوانی

بهمن ماه ۱۳۸۱

قسمت اول

مبانی ریاضیات گسسته

۱

اصول بنیادی شمارش

بندهای ۱.۱ و ۲.۱

۱. الف) بنابر قاعدهٔ حاصل‌جمع، ۵ + ۸ یعنی ۱۳ امکان برای برندهٔ احتمالی وجود دارد.

ب) چون هشت نامزد از حزب A و پنج نامزد از حزب B حضور دارند، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، ۵ × ۸ یعنی ۴۰ جفت از نامزدهای حزبهای مخالف مقابل هم قرار می‌گیرند.

پ) در قسمت (الف) قاعدهٔ حاصل‌جمع و در قسمت (ب) قاعدهٔ حاصل‌ضرب به‌کار می‌رود.

۲. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب ۵ × ۵ × ۵ × ۵ × ۵ × ۵ یعنی 5^6 پلاک اتومبیل وجود دارد که در آنها دو نماد اول حرف صدا دارند و چهار نماد بعدی از رقمهای زوج تشکیل شده‌اند.

۳. الف) بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، ۲ × ۳ × ۱۲ × ۴ یعنی ۲۸۸ بیوک متمایز می‌توان ساخت.

ب) از این تعداد، ۲ × ۳ × ۱ × ۴ یعنی ۲۴ تا آبی‌اند.

۴. الف) بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، تعداد فهرستهای انتخاباتی برابر است با

$$۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ = P(۱۰, ۴) = ۵۰۴۰$$

ب) (یک) ۷ × ۸ × ۹ × ۳ یعنی ۱۵۱۲ فهرست وجود دارد که در آنها یک پزشک برای ریاست درنظر گرفته شده است.

(دو) در (۵ × ۶ × ۷ × ۳) × ۴ یعنی در ۲۵۲۰ تا از فهرستها فقط یک پزشک وجود دارد.

(سه) در ۴ × ۵ × ۶ × ۷ یعنی در ۸۴۰ تا از فهرستها هیچ پزشکی را برای هیچ‌یک از پستهای چهارگانهٔ هیأت رئیسه درنظر نگرفته‌اند. درنتیجه، در ۸۴۰ − ۵۰۴۰ یعنی در ۴۲۰۰ تا از فهرستها دست‌کم یک پزشک هست.

۵. براساس اطلاعات داده شده به‌وسیلهٔ این دو خانم و بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، می‌بینیم که ۲ × ۱۰ × ۱۰ × ۱ × ۲ × ۲ یعنی ۸۰۰ شمارهٔ اتومبیل مختلف باید بررسی شوند.

۶. الف) در اینجا با جایگشتهای ۸تایی (نخستین ۸ نفری که به خط پایان می‌رسند) از ۳۰ شیئ (دونده‌ها) سروکار داریم. بنابراین، می‌توان جایزه‌ها را به $P(۳۰, ۸)$، یعنی $\frac{۳۰!}{۲۲!}$ طریق اعطا کرد.

ب) دو شرکت‌کنندهٔ موردنظر به ۶ طریق می‌توانند بین سه دوندهٔ نخستی باشند که به خط پایان می‌رسند. به‌ازای هر یک از این ۶ طریق، $P(۲۸,۶)$ طریق برای ۶ نفر دیگر (از ۸ نفر نخست) وجود دارد که به خط پایان برسند. بنابراین، اگر بنا باشد دو شرکت‌کنندهٔ موردنظر بین سه دوندهٔ نخست باشند، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب $P(۲۸,۶) \times ۶$ طریق برای اعطای جایزه‌ها وجود دارد.

۷. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۲^۹$ امکان وجود دارد.

۸. الف) اگر قیدی درکار نباشد، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب !۱۲ طریق برای پردازش برنامه‌ها وجود دارد.

ب) اگر بنا باشد نخست هر چهار برنامهٔ اولویت‌دار پردازش شوند، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب (!۸)(!۴) طریق برای پردازش برنامه‌ها وجود دارد.

پ) اگر نخست هر چهار برنامهٔ دارای اولویت اول و در آخر هر سه برنامهٔ دارای کمترین اولویت پردازش شوند، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب (!۳)(!۵)(!۴) طریق برای پردازش برنامه‌ها وجود دارد.

۹. الف) $۱۶۸ = (۱۲)(۱۴)$.

ب) $۱۸۱۴۴ = (۱۸)(۶)(۱۲)(۱۴)$.

پ) $۷۳۱۵۶۶۰۸ = (۱۲)(۱۴)(۱۲)(۱۴)(۳)(۶)(۱۸)(۸)$.

۱۰. یکی از این ترتیبها، مثلاً ۳ کتاب در یک قفسه و ۱۲ کتاب در قفسهٔ دیگر، را درنظر می‌گیریم. این کار را به !۱۵ طریق می‌توان انجام داد. درحقیقت، برای هر تقسیمبندی این ۱۵ کتاب بین قفسه‌ها (به‌طوری که هیچ قفسه‌ای تهی نباشد) !۱۵ طریق برای چیدن آنها در قفسه‌ها داریم. چون ۱۴ طریق برای تقسیم کتابها بین قفسه‌ها (به‌طوری‌که، هیچ قفسه‌ای تهی نباشد) وجود دارد، تعداد کل راههای چیدن این کتابها در قفسه‌ها، با توجه به قید یاد شده، برابر با (!۱۵)(۱۴) است.

۱۱. الف) چهار جاده از شهر A به شهر B و سه جاده از شهر B به شهر C وجود دارد؛ پس بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۱۲ = ۳ \times ۴$ جاده از A به C وجود دارد که از B می‌گذرند. چون دو جادهٔ مستقیم نیز از A به C داریم، پس به $۱۴ = ۲ + ۱۲$ طریق می‌توان از A به C رفت.

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) و با توجه به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، می‌بینیم که $۱۹۶ = ۱۴ \times ۱۴$ سفر رفت و برگشتی متفاوت (از A به C و سپس بازگشت به A) می‌توان ترتیب داد.

پ) تعداد سفرهای رفت و برگشتی مطلوب برابر با ۱۳×۱۴ یعنی ۱۸۲ است.

۱۲. (۱) a, c, t   (۲) a, t, c   (۳) c, a, t   (۴) c, t, a   (۵) t, a, c   (۶) t, c, a

۱۳. الف) $P(۸,۸) = !۸$ ب) !۷   پ) !۶

۱۴. الف) $P(۷,۲) = \frac{۷!}{(۷-۲)!} = \frac{۷!}{۵!} = ۷ \times ۶ = ۴۲$

ب) $P(۸,۴) = \frac{۸!}{(۸-۴)!} = \frac{۸!}{۴!} = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ = ۱۶۸۰$

پ) $P(۱۰,۷) = \frac{۱۰!}{(۱۰-۷)!} = \frac{۱۰!}{۳!} = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۶۰۴۸۰۰$

ت) $P(۱۲,۳) = \frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!} = \frac{۱۲!}{۹!} = ۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ = ۱۳۲۰$

۱۵. a، b، c و d را باید در جاهایی بگذاریم که در زیر با x مشخص شده‌اند:

$$e\underline{x}e\underline{x}e\underline{x}e\underline{x}e$$

بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، !۴ طریق برای انجام این کار وجود دارد.

۱۶. الف) اگر تکرار مجاز باشد، $۴۰^{۲۵}$ پیام متمایز وجود دارد.

ب) بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب $(۳۰^{۲۳})(۴۰^{۲}) = ۴۰ \times ۳۰ \times ۳۰ \times \ldots \times ۳۰ \times ۳۰ \times ۴۰$ پیام وجود دارد.

۱۷. با استفاده از قاعدهٔ حاصل‌ضرب و قاعدهٔ حاصل‌جمع، تعداد شناسه‌های متمایز برابر است با

$$۲۶ + ۲۶(۳۶) + ۲۶(۳۶)^{۲} + \cdots + ۲۶(۳۶)^{۷} - ۳۶ = (۲۶)\sum_{i=۰}^{۷} ۳۶^{i} - ۳۶$$

۱۸. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب $۵ \times ۵ \times ۴ \times ۶$ یعنی ۶۰۰ طریق وجود دارد.

۱۹. الف) $۷! = ۵۰۴۰$

ب) $۴ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = (۴!)(۳!) = ۱۴۴$

پ) $(۳!)(۵)(۴!) = ۷۲۰$ ت) $(۳!)(۴!)(۲) = ۲۸۸$

۲۰. برای حروف MASSACHUSETTS، $\frac{۱۳!}{۲!۴!۲!}$ یعنی $\left(\frac{۱۳}{۸}\right)(۱۱!)$ ترتیب وجود دارد، در حالی‌که برای حروف PENNSYLVANIA، $\frac{۱۲!}{۳!۲!}$ یعنی !۱۱ ترتیب وجود دارد. بنابراین، ترتیبهای حاصل از حروف MASSACHUSETTS بیش از یک برابرونیم ترتیبهای حاصل از حروف PENNSYLVANIA است.

۲۱. الف) چون سه I وجود دارد، تعداد ترتیبها برابر با $\frac{۸!}{۳!}$ یعنی ۶۷۲۰ است.

ب) در اینجا شش نماد V، S، T، N، G و III را به !۶ یعنی ۷۲۰ طریق مرتب می‌کنیم.

۲۲. روی هم $\frac{۱۵!}{۲!۲!۲!}$ ترتیب برای حروف واژهٔ POLYUNSATURATED وجود دارد. شش حرف صدادار O، U، A، U، A و E در این واژه هست. این شش حرف صدادار را می‌توان به $\frac{۶!}{۲!۲!}$ یعنی ۱۸۰ طریق مرتب کرد، ولی فقط در یکی از اینها ترتیب حضور آنها حفظ شده است. در نتیجه، تعداد ترتیبهایی که در آنها ترتیب حضور حروف صدادار حفظ می‌شود برابر است با $\left(\frac{۱}{۱۸۰}\right)\left(\frac{۱۵!}{۲!۲!۲!}\right) = \left(\frac{۹۱}{۴}\right)(۱۱!)$.

۲۳. الف) $\frac{۱۲!}{۳!۲!۲!۲!}$ ب) $\underset{\text{(AG برای حالت)}}{\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۲!}} + \underset{\text{(GA برای حالت)}}{\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۲!}}$

پ) یکی از حالتهایی را که در آن همهٔ حروف صدادار کنار یکدیگرند درنظر می‌گیریم: OIOOIA، L، C، G، L، C و S. این هفت نماد را می‌توان به $\frac{۷!}{۲!۲!}$ طریق مرتب کرد. چون A، I، O، I، O و O می‌توانند به $\frac{۶!}{۳!۲!}$ طریق مرتب شوند، تعداد ترتیبهایی که در آنها همهٔ حروف صدادار کنار یکدیگرند برابر است با $\left(\frac{۷!}{۲!۲!}\right)\left(\frac{۶!}{۳!۲!}\right)$.

۲۴. حالت ۱: (رقم یکان میلیون ۵ است) $\frac{6!}{2!}$

حالت ۲: (رقم یکان میلیون ۶ است) $\frac{6!}{2!2!}$

حالت ۳: (رقم یکان میلیون ۷ است) $\frac{6!}{2!2!}$

روی‌هم $6! = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6!}{2!}\right)$ یعنی ۷۲۰ تا از این نوع عددهای صحیح مثبت وجود دارد.

۲۵. جواب برابر است با تعداد طرق مرتب کردن ۱۲ شیء، ۴ تا از نوع اول، ۳ تا از نوع دوم، ۲ تا از نوع سوم و ۳ تا از نوع چهارم. تعداد این طرق برابر است با

$$\frac{12!}{4!3!2!3!} = 277200$$

۲۶. $P(n+1,r) = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!} = \frac{n+1}{n+1-r}\cdot\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n+1}{n+1-r}\cdot P(n,r)$

۲۷. الف) $n = 10$ ب) $n = 5$

پ) $\frac{2n!}{(n-2)!} + 50 = \frac{(2n)!}{(2n-2)!} \Longrightarrow 2n(n-1) + 50 = 2n(2n-1)$

$$\Longrightarrow n^2 = 25 \Longrightarrow n = 5$$

۲۸. هر چنین مسیری از $(0,0)$ به $(7,7)$ یا از $(2,7)$ به $(9,14)$ ترتیبی از ۷ تا R و ۷ تا U است. $\frac{14!}{7!7!}$ تا از این نوع مسیرها وجود دارد.

به‌طورکلی، به‌ازای هر دو عدد صحیح نامنفی m و n و به‌ازای هر دو عدد حقیقی a و b، تعداد این نوع مسیرها از (a,b) به $(a+m,b+n)$ برابر است با $\frac{(m+n)!}{m!n!}$.

۲۹. الف) هر مسیر از دو H، یک V و هفت A تشکیل شده است. $\frac{10!}{2!1!7!}$ طریق برای مرتب کردن این ۱۰ حرف وجود دارد و این تعداد مسیرها را به‌دست می‌دهد.

ب) $\frac{10!}{2!1!7!}$

پ) اگر a، b و c سه عدد دلخواه و m، n و p سه عدد صحیح نامنفی باشند، آنگاه تعداد مسیرهای موردنظر از (a,b,c) به $(a+m,b+n,c+p)$ برابر است با $\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$.

۳۰. الف) «حلقهٔ For» ۱۲ بار برای i اجرا می‌شود، درحالی‌که حلقه‌های مربوط به j و k، به ترتیب، $10-5+1=6$ و $15-8+1=8$ بار اجرا می‌شوند. درنتیجه، مقدار counter پس از اجرای این قطعه برنامهٔ پاسکال برابر است با

$$0 + 12(1) + 6(2) + 8(3) = 48$$

ب) در حقیقت با سه وظیفه روبه‌رو هستیم: T_1، T_2 و T_3. هر بار که دستورالعملهای حلقهٔ i انجام می‌گیرند وظیفهٔ T_1 تحقق می‌پذیرد. به‌همین ترتیب، هر تکرار حلقه‌های j و k، به‌ترتیب، به تحقق وظایف T_2 و T_3 منجر می‌شوند. بنابراین، مقدار نهایی متغیر صحیح counter از قاعدهٔ حاصل‌جمع نتیجه می‌شود.

۳۱. (الف) و (ب) بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، حکم Writeln

$$۱۲ \times ۶ \times ۸ = ۵۷۶$$

بار اجرا می‌شود.

۳۲. الف) تعداد جناسهای مقلوب پنج حرفی برابر است با $۱ \times ۱ \times ۲۶ \times ۲۶ \times ۲۶$ یعنی $۲۶^۳$. برای حالت شش حرفی $۱ \times ۱ \times ۱ \times ۲۶ \times ۲۶ \times ۲۶$ یعنی $۲۶^۳$ جناس مقلوب وجود دارد.

ب) اگر هیچ حرفی بیش از دو بار ظاهر نشود، تعداد جناسهای مقلوب پنج حرفی یا شش حرفی برابر است با

$$۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ = ۱۵۶۰۰$$

۳۳. الف) بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹ \times ۹$ یعنی ۱۳۶۰۸۰ عدد صحیح شش رقمی وجود دارد که صدگان هزار آنها صفر نیست و رقم تکراری نیز ندارند.

ب) اگر تکرار ارقام مجاز باشد، ۹×۱۰^۵ تا از این نوع عددهای صحیح شش رقمی وجود دارد.

(یک)(الف) $\underbrace{(۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۱)}_{\text{(برای عددهای صحیحی که یکان آنها ۰ است)}} + \underbrace{(۸ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴)}_{\text{(برای عددهای صحیحی که یکان آنها ۲، ۴، ۶ یا ۸ است)}} = ۶۸۸۰۰$

(ب) اگر تکرار رقمها مجاز باشد، $۵ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۹$ یعنی ۴۵۰۰۰۰ عدد صحیح زوج شش رقمی وجود دارد.

(دو)(الف) $\underbrace{(۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۱)}_{\text{(برای عددهای صحیحی که یکان آنها ۰ است)}} + \underbrace{(۸ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۱)}_{\text{(برای عددهای صحیحی که یکان آنها ۵ است)}} = ۲۸۵۶۰$

(ب) $۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۲ = ۱۸۰۰۰۰$

(سه) این حقیقت را به‌کار می‌بریم که هر عدد صحیح وقتی بر ۴ بخش‌پذیر است که عدد صحیح دو رقمی حاصل از یکان و دهگان آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

(الف) $\underbrace{(۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۶)}_{\text{(دو رقم یکان و دهگان به‌صورت ۰۴، ۰۸، ۲۰، ۴۰، ۶۰ یا ۸۰ هستند)}} + \underbrace{(۷ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۱۶)}_{\text{(دو رقم یکان و دهگان به‌صورت ۱۲، ۱۶، ۲۴، ۲۸، ۳۲، ۳۶، ۴۸، ۵۲، ۵۶، ۶۴، ۶۸، ۷۲، ۷۶، ۸۴، ۹۲ یا ۹۶ هستند)}} = ۳۳۶۰۰$

(ب) $۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۲۵ = ۲۲۵۰۰۰$

۳۴. الف) به‌ازای عددهای صحیح مثبت n و k به‌طوری‌که $n = ۳k$ تعداد طرق مرتب کردن n شئ $x_۱$، $x_۱$، $x_۱$، $x_۲$، $x_۲$، $x_۲$، ...، x_k، x_k، x_k برابر $\frac{n!}{(۳!)^k}$ است. پس $\frac{n!}{(۳!)^k}$ باید عددی صحیح باشد.

ب) اگر n و k دو عدد صحیح مثبت باشند به‌طوری‌که $n = mk$، آنگاه $\frac{n!}{(m!)^k}$ عددی صحیح است.

۳۵. الف) با توجه به وجود دو انتخاب برای هر پرسش، $۲^{۱۰}$ یعنی ۱۰۲۴ طریق برای پاسخ دادن به امتحان وجود دارد.

ب) این بار برای هر پرسش ۳ انتخاب وجود دارد و بنابراین، تعداد طرق پاسخ دادن $۳^{۱۰}$ است.

۳۶.
$$\underset{(\text{بدون ۷})}{\frac{۴!}{۲!}} + \underset{(\text{یک ۷ و یک ۳})}{۴!} + (۲)\underset{(\text{یک۷ و دو۳})}{\left(\frac{۴!}{۲!}\right)} + \underset{(\text{دو ۷ و بدون ۳})}{\frac{۴!}{۲!}} + (۲)\underset{(\text{دو۷ و یک۳})}{\left(\frac{۴!}{۲!}\right)} + \underset{(\text{دو ۷ و دو ۳})}{\frac{۴!}{۲!۲!}}$$

بنابراین، ۱۰۲ تا از این نوع عددهای صحیح چهار رقمی وجود دارد.

۳۷. الف) !۶

ب) فرض کنیم A و B آن دو نفری باشند که اصرار دارند کنار هم بنشینند. دراین صورت تعداد ترتیبهای موردنظر برابر است با

$$\underset{(\text{A در طرف راست B است})}{۵!} + \underset{(\text{B در طرف راست A است})}{۵!} = ۲(۵!)$$

۳۸. الف) A را می‌نشانیم. دو حالت پیش می‌آید. (۱) یک نفر در طرف چپ A و هم ضلع با A وجود دارد. تعداد این نوع ترتیبها !۷ است. (۲) یک نفر در طرف راست A و هم ضلع با A وجود دارد. این !۷ ترتیب دیگر به‌دست می‌دهد. بنابراین، (!۷)۲ امکان وجود دارد.

ب) ۷۲۰۰

پ) ۵۷۶۰

۳۹. الف) $۱۶۵۲۲ = ۱۲۸^۲ + ۱۲۸ + ۱۰$ بلوک؛ ۸۴۵۹۲۶۴ بایت.

ب) $۲۱۱۳۶۷۴ = ۱۲۸^۳ + ۱۲۸^۲ + ۱۲۸ + ۱۰$ بلوک؛ ۱۰۸۲۲۰۱۰۸۸ بایت.

۴۰.

```
Program Factorial (Input, Output);
(*Finds n factorial for an integer n >=0.*)
Var
   I, N,  Factorial: Integer;
Begin
   Writeln ('Input integer n.');
   Read (N);
   Writeln ('The value of n is', N:0);
   If N < 0 Then
      Writeln ('The factorial is not defined for n = ', N:0)
   Else If ((N = 0) Or (N = 1)) Then
   Writeln ('For n = ', N:0, ' the value of n factorial is 1.')
   Else
      Begin
         Factorial := 1;
         For I := 2 To N Do
            Factorial := I*Factorial;
         Writeln ('For n = ', N:0, ' the value of n factorial is ', Factorial:0)
      End;
End.
```

.۴۱

```
Program Permutations (Input, Output);
(* Finds  P(n,r), the number of permutations of n distinct objects taken r at a time,
for n >= r >= 0. *)
Var
    I, N, R, Perm: Integer;
Begin
    Writeln ('Input the values of the integers n and r.');
    Read (N,R);
    Writeln ('The values of n and r are ', N:0,' and ', R:0, ', respectively.');
    If (((N < 0) Or (R < 0)) Or (R > N)) Then
        Writeln ('The value of P(n,r) is not defined for  n = ',
            N:0,' and r =  ', R:0, '.')
    Else If R = 0 Then
        Writeln ('The value of  P(n,0) for n =  ', N:0, ' is 1.')
        Else
            Begin
                Perm := 1;
                    For I := N Downto N-R+1 Do
                        Perm := I*Perm;
                    Writeln ('For n = ', N:0, ' and r = ', R:0, ' the value of  P(n,r) is ',
                        Perm:0)
                End;
End.
```

.۴۲

```
Program  Sum _ of __ fact (output);
Var
        i,j,k,sum: integer;
        factorial: array [0..9] of integer;
Begin
        factorial [0] := 1;

        For i := 1 to 9 do
                factorial [i] :=i * factorial [i−1];

        For i := 1 to 9 do
                For j := 0 to 9 do
                        For k := 0 to 9 do
                                Begin
                                        sum := factorial [i] + factorial [j] + factorial [k];
                                        If (100 * i + 10 * j + k) = sum then
                                                writeln ((100*i + 10 * j + k) : 0)
                                End;
End.
```

پاسخ ۱۴۵ است چون $(۱!) + (۴!) + (۵!) = ۱ + ۲۴ + ۱۲۰ = ۱۴۵$

بند ۳.۱

۱. $\binom{۶}{۲} = \dfrac{۶!}{۲!(۶-۲)!} = \dfrac{۶!}{۲!۴!} = \dfrac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۵$

a b	b c	c e
a c	b d	c f
a d	b e	d e
a e	b f	d f
a f	c d	e f

۲. در اینجا ترتیب نقش ندارد و این دانشجو می‌تواند به $\binom{۱۲}{۵}$ یعنی به ۷۹۲ طریق انتخاب خود را به‌عمل آورد.

۳. الف) $C(۱۰, ۴) = \dfrac{۱۰!}{۴!۶!} = \dfrac{۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴} = ۲۱۰$

ب) $\binom{۱۲}{۷} = \dfrac{۱۲!}{۷!۵!} = \dfrac{۸ \times ۹ \times ۱۰ \times ۱۱ \times ۱۲}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵} = ۷۹۲$

پ) $C(۱۴, ۱۲) = \dfrac{۱۴!}{۱۲!۲!} = \dfrac{۱۳ \times ۱۴}{۱ \times ۲} = ۹۱$

ت) $\binom{۱۵}{۱۰} = \dfrac{۱۵!}{۱۰!۵!} = \dfrac{۱۱ \times ۱۲ \times ۱۳ \times ۱۴ \times ۱۵}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵} = ۳۰۰۳$

۴. الف) $۲^۶ - ۱ = ۶۳$ ب) $\binom{۶}{۳} = ۲۰$ پ) $\binom{۶}{۲} + \binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۶} = ۳۱$

ت) $\binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۶} = ۲۲$

۵. الف) تعداد جایگشتهای ۳تایی برای پنج حرف m، r، a، f و t برابر است با

$$P(۵, ۳) = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = \frac{۵!}{۲!} = ۳ \times ۴ \times ۵ = ۶۰$$

ب) تعداد ترکیبهای ۳تایی برای پنج حرف m، r، a، f و t برابر است با

$$C(۵, ۳) = \frac{۵!}{۳!(۵-۳)!} = \frac{۵!}{۳!۲!} = ۱۰$$

این ترکیبها عبارت‌اند از

a,f,m	a,f,r	a,f,t	a,m,r	a,m,t
a,r,t	f,m,r	f,m,t	f,r,t	m,r,t

۶.
$$\binom{n}{۲} + \binom{n-۱}{۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(n)(n-۱) + \left(\frac{۱}{۲}\right)(n-۱)(n-۲)$$
$$= \left(\frac{۱}{۲}\right)(n-۱)[n + (n-۲)] = \left(\frac{۱}{۲}\right)(n-۱)(۲n-۲) = (n-۱)^۲$$

۷. الف) $\binom{۲۰}{۱۲}$ ب) $\binom{۱۰}{۶}\binom{۱۰}{۶}$

پ) $\underbrace{\binom{۱۰}{۲}\binom{۱۰}{۱۰}}_{(\text{۲ زن})} + \underbrace{\binom{۱۰}{۴}\binom{۱۰}{۸}}_{(\text{۴ زن})} + \cdots + \underbrace{\binom{۱۰}{۱۰}\binom{۱۰}{۲}}_{(\text{۱۰ زن})} = \sum_{i=۱}^{۵} \binom{۱۰}{۲i}\binom{۱۰}{۱۲-۲i}$

ت) $\underbrace{\binom{۱۰}{۷}\binom{۱۰}{۵}}_{\text{(۷ زن)}} + \underbrace{\binom{۱۰}{۸}\binom{۱۰}{۴}}_{\text{(۸ زن)}} + \underbrace{\binom{۱۰}{۹}\binom{۱۰}{۳}}_{\text{(۹ زن)}} + \underbrace{\binom{۱۰}{۱۰}\binom{۱۰}{۲}}_{\text{(۱۰ زن)}} = \sum_{i=۷}^{۱۰}\binom{۱۰}{i}\binom{۱۰}{۱۲-i}$

ث) $\sum_{i=۸}^{۱۰}\binom{۱۰}{i}\binom{۱۰}{۱۲-i}$

۸. الف) $\binom{۴}{۱}\binom{۱۳}{۵}$ ب) $\binom{۴}{۴}\binom{۴۸}{۱}$ پ) $\binom{۱۳}{۱}\binom{۴}{۴}\binom{۴۸}{۱}$ ت) $\binom{۴}{۳}\binom{۴}{۲}$

ث) $\binom{۴}{۳}\binom{۱۲}{۱}\binom{۴}{۲}$ ج) $\binom{۱۳}{۱}\binom{۴}{۳}\binom{۱۲}{۱}\binom{۴}{۲} = ۳۷۴۴$

چ) $\dfrac{\binom{۱۳}{۱}\binom{۴}{۳}\binom{۴۸}{۱}\binom{۴۴}{۱}}{۲}$ (تقسیم بر ۲ از این جهت لازم است که تمایزی در ترتیب انتخاب دو مهرهٔ دیگر وجود ندارد.) نتیجه برابر است با

$$۵۴۹۱۲ = \binom{۱۳}{۱}\binom{۴}{۳}\binom{۴۸}{۲} - ۳۷۴۴ = \binom{۱۳}{۱}\binom{۴}{۳}\binom{۱۲}{۲}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}$$

ح) $\binom{۱۳}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۴۴}{۱}$

۹. الف) $\binom{۸}{۲}$ ب) $\binom{۸}{۴}$ پ) $\binom{۸}{۶}$ ت) $\binom{۸}{۶} + \binom{۸}{۷} + \binom{۸}{۸}$

۱۰. $\binom{۱۲}{۵}$؛ $\binom{۱۰}{۳}$

۱۱. الف) $\binom{۱۰}{۷} = ۱۲۰$ ب) $\binom{۸}{۵} = ۵۶$

پ) $\underbrace{\binom{۶}{۴}\binom{۴}{۳}}_{\text{(چهار تا از شش تای نخست)}} + \underbrace{\binom{۶}{۵}\binom{۴}{۲}}_{\text{(پنج تا از شش تای نخست)}} + \underbrace{\binom{۶}{۶}\binom{۴}{۱}}_{\text{(هر شش تای نخست)}} = (۱۵)(۴) + (۶)(۶) + (۱)(۴) = ۱۰۰$

۱۲. الف) (یک) $(۳)\binom{۶}{۲}$ (دو) $(۳)\left[\binom{۶}{۲} + ۶\right]$

ب) (یک) $(۳)^۲\binom{۶}{۲}$ (دو) $(۳)^۲\left[\binom{۶}{۲} + ۶\right]$

۱۳. الف) سه کتاب اول را می‌توان به $\binom{۱۲}{۳}$ طریق انتخاب کرد. سه‌تای بعدی را به $\binom{۹}{۳}$ طریق، سه‌تای سوم را به $\binom{۶}{۳}$ طریق و سه‌تای چهارم را به $\binom{۳}{۳}$ طریق می‌توان انتخاب کرد. درنتیجه، این ۱۲ کتاب را می‌توان به $\binom{۱۲}{۳}\binom{۹}{۳}\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۳}$ یعنی $\dfrac{۱۲!}{(۳!)^۴}$ طریق توزیع کرد.

ب) $\binom{۱۲}{۴}\binom{۸}{۴}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲} = \dfrac{۱۲!}{(۴!)^۲(۲!)^۲}$

۱۴. الف) $\binom{۷}{۲} = ۲۱$ ب) $۴\binom{۷}{۲} = ۸۴$ پ) $۲\binom{۷}{۳} = ۷۰$

۱۵. حروف M، I، I، I، P، P، I را می‌توان به $\dfrac{۷!}{۴!۲!}$ طریق مرتب کرد. در هر یک از این ترتیبها هشت مکان (یکی در آغاز ترتیب، یکی در پایان و شش تا بین حروف) برای قرار دادن چهار S غیرمتوالی هست. به $\binom{۸}{۴}$ طریق می‌توان چهار تا از این مکانها را انتخاب کرد. بنابراین، تعداد کل این ترتیبها برابر است با $\dfrac{۷!}{۴!۲!} \times \binom{۸}{۴}$.

۱۶. از $\binom{n}{۱۱} = ۱۲۳۷۶$ نتیجه می‌شود که $n = ۱۷$.

۱۷. الف) دو نقطهٔ متمایز یک خط تعیین می‌کنند. با ۱۵ نقطه، که هیچ سه‌تای آنها همخط نباشند، $\binom{۱۵}{۲}$ خط ممکن می‌توان رسم کرد.

ب) $\binom{25}{3}$ مثلث یا صفحه و $\binom{25}{4}$ چهاروجهی وجود دارد.

۱۸. الف)
$$\sum_{i=1}^{6}(i^2+1)=(1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1)+(4^2+1)+(5^2+1)+(6^2+1)$$
$$=2+5+10+17+26+37=97$$

ب)
$$\sum_{j=-2}^{2}(j^3-1)=\left[(-2)^3-1\right]+\left[(-1)^3-1\right]+(0^3-1)+(1^3-1)+(2^3-1)$$
$$=-9-2-1+0+7=-5$$

پ)
$$\sum_{i=0}^{10}\left[1+(-1)^i\right]=2+0+2+0+2+0+2+0+2+0+2=12$$

ت)
$$\sum_{j=0}^{4}(3^j-2^j)=(1-1)+(3-2)+(9-4)+(27-8)+(81-16)$$
$$=0+1+5+19+65=90$$

ث)
$$\sum_{k=2}^{4}(-1)^k=(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4=1-1+1=1$$

ج)
$$\sum_{k=n}^{2n}(-1)^k=\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right]+\left[(-1)^{n+2}+(-1)^{n+3}\right]$$
$$+\cdots+\left[(-1)^{2n-1}+(-1)^{2n}\right]=0+0+\cdots+0=0$$

چ)
$$\sum_{i=1}^{6}i(-1)^i=-1+2-3+4-5+6=3$$

۱۹. الف) $\sum_{i=1}^{17}\frac{1}{i}$ ب) $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$ پ) $\sum_{i=1}^{7}i^2$

ت) $\sum_{j=1}^{7}(-1)^{j-1}j^3=\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}k^3$ ث) $\sum_{i=0}^{n}\frac{i+1}{n+i}$

ج) $\sum_{i=0}^{n}\frac{n+i}{(2i)!}$ چ) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left[\frac{n+i}{(2i)!}\right]$

۲۰. الف) $\frac{10!}{4!3!3!}$ ب) $\binom{10}{8}\times 2^2+\binom{10}{9}\times 2+\binom{10}{10}$

پ)
$$\underset{\text{(چهار ۱، شش ۰)}}{\binom{10}{4}}+\underset{\text{(دو ۱، یک ۲، هفت ۰)}}{\binom{10}{2}\binom{8}{1}}+\underset{\text{(دو ۲، هشت ۰)}}{\binom{10}{2}}$$

۲۱. الف)
$$\underset{\text{(سه ۱، هفت ۰)}}{\binom{10}{3}}+\underset{\text{(دو ۱، یک ۲، هفت ۰)}}{\binom{10}{1}\binom{9}{2}}+\underset{\text{(یک ۳، نه ۰)}}{\binom{10}{1}}=220$$

ب)
$$\binom{10}{4}+\binom{10}{2}+\binom{10}{1}\binom{9}{2}+\binom{10}{1}\binom{9}{1}=705$$

پ) $\sum_{i=0}^{5} \binom{10}{2i} \times 2^{10}$. در حقیقت، تعداد زوجی از مکانها را برای ۰ و ۲ اختیار کنید. به‌ازای هر $0 \le i \le 5$، این عمل به $\binom{10}{2i}$ طریق صورت می‌گیرد. اکنون برای هر یک از این $2i$ مکان دو انتخاب وجود دارد. برای هر یک از $10 - 2i$ مکان باقیمانده نیز دو انتخاب وجود دارد که عبارت‌اند از ۱ و ۳.

۲۲. الف) به $\binom{8}{3}$ طریق می‌توان سه رأس از بین A، B، C، D، E، F، G و H انتخاب کرد. بنابراین، $\binom{8}{3}$ یعنی ۵۶ مثلث محاطی متمایز وجود دارد.

ب) رأس A را درنظر بگیرید. مثلثهای متساوی‌الساقینی که قاعدهٔ آنها روبه‌روی زاویهٔ A است عبارت‌اند از $\triangle$HAB، $\triangle$GAC و $\triangle$FAD. چون به‌ازای هر یک از رأسها سه تا از این مثلثها به‌دست می‌آوریم، ۲۴ مثلث متساوی‌الساقین متمایز وجود دارد.

پ) $\binom{8}{4}$ یعنی ۷۰ چهارضلعی.

ت) ۲ مربع؛ ۴ مستطیل که مربع نیستند.

ث) $\binom{8}{5}$ یعنی ۵۶ پنج ضلعی.

ج) تعداد کل چندضلعیها عبارت است از

$$\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8} = 2^8 - \left[\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}\right]$$
$$= 256 - (1+8+28) = 219$$

۲۳. اگر ضلعهای n ضلعی را هم به‌کار ببریم $\binom{n}{3}$ مثلث وجود دارد. به‌ازای $n \ge 4$، در n تا از این $\binom{n}{3}$ مثلث دو ضلع از n ضلعی و در $n(n-4)$ تا از آنها فقط یک ضلع از n ضلعی به‌کار رفته است. بنابراین، اگر نتوان ضلعهای n ضلعی را به‌کار برد، دراین صورت به‌ازای $n \ge 4$، $\binom{n}{3} - n - n(n-4)$ مثلث وجود دارد.

۲۴. الف) از قاعدهٔ حاصل‌ضرب نتیجه می‌شود که $4 \times 4 \times 6 = 96$ جمله در بسط کامل

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d})(\mathrm{e}+\mathrm{f}+\mathrm{g}+\mathrm{h})(\mathrm{u}+\mathrm{v}+\mathrm{w}+\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z})$$

وجود دارد.

ب) جمله‌های bvx و egu جمعوندهایی از این بسط نیستند.

۲۵. الف) $\binom{12}{9}$

ب) $\binom{12}{9}(2^3)$

پ) فرض کنیم $a = 2x$ و $b = -3y$. بنابر قضیهٔ دو جمله‌ای، ضریب a^9b^3 در بسط $(a+b)^{12}$ برابر است با $\binom{12}{9}$. ولی $\binom{12}{9}a^9b^3 = \binom{12}{9}(2x)^9(-3y)^3 = \binom{12}{9}(2^9)(-3)^3x^9y^3$. بنابراین، ضریب x^9y^3 عبارت است از $\binom{12}{9}(2^9)(-3)^3$.

۲۶. $$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1}}{n_t}$$

$$= \left(\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\right)\left(\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\right)\left(\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\right)\cdots\left(\frac{n_t!}{n_t!0!}\right)$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_t!}$$

۲۷. الف) $\binom{4}{1,1,2} = 12$ ب) $\binom{4}{0,1,1,2} = 12$

پ) $\binom{4}{1,1,2}(2)(-1)(-1)^2 = -24$ ت) $\binom{4}{1,1,2}(-2)(3)^2 = -216$

ث) $\binom{8}{3,2,1,2}(2)^3(-1)^2(3)(-2)^2 = 161280$

۲۸. الف) $\binom{10}{2,2,2,2,2} = \frac{10!}{(2!)^5} = 113400$

ب) $$\binom{12}{2,2,2,2,4}(2)^2(-1)^2(3)^2(1)^2(-2)^4 = \left[\frac{12!}{(2!)^4(4!)}\right](2)^2(3)^2(2)^4$$
$$= 7185024000$$

پ) $$\binom{12}{0,2,2,2,2,4}(1)^2(-2)^2(1)^2(5)^2(3)^4 = \left[\frac{12!}{(0!)(2!)^4(4!)}\right](2)^2(5)^2(3)^4$$
$$= 10103940000$$

۲۹. در هر یک از قسمتهای (الف) تا (ث) به جای متغیرها ۱ بگذارید و نتیجه را محاسبه کنید.

الف) 2^3 ب) 2^{10} پ) 3^{10} ت) 4^5 ث) 4^{10}

۳۰. $$\binom{n}{2} + n = \left[\frac{n(n-1)}{2}\right] + n = \frac{(n^2-n)+2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

۳۱. $$\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} + \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!(n+1)^2 + (2n)!(n)(n+1)}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(2n)!(2n+2)(n+1) + (2n)!(n)(2n+2)}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(2n)!(2n+2)(2n+1)}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$$

۳۲. الف) $$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \frac{2^n}{n!}$$

ب) $$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i n!}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = \frac{1}{n!} \times 0 = 0$$

۳۳. $$n\binom{m+n}{m} = n\frac{(m+n)!}{m!n!} = \frac{(m+n)!}{m!(n-۱)!} = (m+۱)\frac{(m+n)!}{(m+۱)(m!)(n-۱)!}$$
$$= (m+۱)\frac{(m+n)!}{(m+۱)!(n-۱)!} = (m+۱)\binom{m+n}{m+۱}$$

۳۴. این مجموع عبارت است از بسط دو جمله‌ای $(۱+۲)^n = ۳^n$

۳۵. الف) $$۱ = \left[(۱+x)-x\right]^n = (۱+x)^n - \binom{n}{۱}x^۱(۱+x)^{n-۱}$$
$$+\binom{n}{۲}x^۲(۱+x)^{n-۲} - \cdots + (-۱)^n\binom{n}{n}x^n$$

ب) $۱ = \left[(۲+x)-(x+۱)\right]^n$ پ) $۲^n = \left[(۲+x)-x\right]^n$

۳۶. $\sum_{i=۰}^{۵۰}\binom{۵۰}{i}۸^i = (۱+۸)^{۵۰} = ۹^{۵۰} = (۳^۲)^{۵۰} = ۳^{۱۰۰}$. بنابراین، $x = ۳$.

۳۷. الف) $$\sum_{i=۱}^{۳}(a_i - a_{i-۱}) = (a_۱ - a_۰) + (a_۲ - a_۱) + (a_۳ - a_۲) = a_۳ - a_۰$$

ب) $$\sum_{i=۱}^{n}(a_i - a_{i-۱}) = (a_۱ - a_۰) + (a_۲ - a_۱) + (a_۳ - a_۲) + \cdots + (a_{n-۱} - a_{n-۲})$$
$$+ (a_n - a_{n-۱}) = a_n - a_۰$$

پ) $$\sum_{i=۱}^{۱۰۰}\left(\frac{۱}{i+۲} - \frac{۱}{i+۱}\right) = \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۳}\right) + \left(\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۴}\right) + \cdots +$$
$$\left(\frac{۱}{۱۰۱} - \frac{۱}{۱۰۰}\right) + \left(\frac{۱}{۱۰۲} - \frac{۱}{۱۰۱}\right) = \frac{۱}{۱۰۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱-۵۱}{۱۰۲} = \frac{-۵۰}{۱۰۲} = \frac{-۲۵}{۵۱}$$

۳۸. الف) $$\sum_{i=۱}^{۴}\sum_{j=۳}^{۷} ij = \sum_{i=۱}^{۴}\left(\sum_{j=۳}^{۷} ij\right) = \sum_{i=۱}^{۴}(۳i + ۴i + ۵i + ۶i + ۷i)$$
$$= ۲۵\sum_{i=۱}^{۴} i = ۲۵(۱+۲+۳+۴) = ۲۵۰\left(= \sum_{j=۳}^{۷}\sum_{i=۱}^{۴} ij\right)$$

ب) $$\sum_{i=۰}^{۴}\sum_{j=۱}^{۴}(i+j+۱) = \sum_{i=۰}^{۴}\left(\sum_{j=۱}^{۴}(i+j+۱)\right)$$
$$= \sum_{i=۰}^{۴}\left[(i+۱+۱) + (i+۲+۱) + (i+۳+۱) + (i+۴+۱)\right]$$
$$= \sum_{i=۰}^{۴}(۴i+۱۴) = (۰+۱۴) + (۴+۱۴) + (۸+۱۴) + (۱۲+۱۴) + (۱۶+۱۴)$$
$$= ۱۱۰ = ۴\sum_{i=۰}^{۴} i + ۵(۱۴) = ۴\sum_{i=۰}^{۴} i + \sum_{j=۱}^{۴} ۶ = ۲۴$$

پ) $$\sum_{j=۱}^{۴}\sum_{i=۰}^{۳} i = \sum_{j=۱}^{۴}\left(\sum_{i=۰}^{۳} i\right) = \sum_{j=۱}^{۴}(۰+۱+۲+۳)$$
$$= \sum_{j=۱}^{۴} ۶ = ۲۴$$

.۳۹

```
Program Combinations (Input, Output);
(*Finds C(n,r), the number of combinations of n distinct objects taken r at a time,
for n> =r> =0.*)
Var
   I,N,R, Fact1, Fact2, Max, Min, Comb: Integer;
Begin
    Writeln ('Input the values of the integers n and r.');
    Read (N,R);
    Writeln ('The values of n and r are ', N:0, ' and ', R:0, ', respectively.');
    If (((N < 0) or (R < 0)) or (R > N)) then
        Writeln ('The value of C(n,r)is not defined for ',
           'n = '; N:0, ' and r = ', R:0, '.')
    Else if R = 0 then
        Writeln ('The value of C(n,0) for n = ', N:0, ' is 1.')
        Else
            Begin
                Fact1 := 1;
                Fact2 := 1;
                If N - R> = R then
                   Begin
                      Max := N - R;
                      Min := R
                   End
                Else
                   Begin
                      Max := R;
                      Min := N - R
                   End;
                 For I := N downto Max + 1 do
                    Fact1 := I* Fact1;
                 For J := 1 to Min do
                    Fact2 := J* Fact2;
                 Comb := Fact1 div Fact2;
                 Writeln ('For n = ', N:0, ' and r = ',
                      R: 0, ' the value of C(n,r) is ', Comb:0, '.')
            End;
 End.
```

۴۰. الف)

```
Program Selection2 (Input, Output);
(*Finds all selections of size 2 from the objects 1,2,3,4,5, and 6.*)
Var
   I,J: Integer;
Begin
   For I := 1 to 5 do
       For J := I + 1 to 6 do
           Writeln (I:0, '    ', J:0)
End.
```

ب)

```
Program Selection3 (Input, Output);
(* Finds all selections of size 3 from the objects 1,2,3,4,5, and 6. *)
Var
   I,J,K: Integer;
Begin
    For I := 1 to 4 do
        For J := I + 1 to 5 do
            For K := J+1 to 6 do
                Writeln (I:0, '    ', J:0, '    ', K:0)
End.
```

بند ۴.۱

۱. فرض کنیم به‌ازای $1 \leq i \leq 5$، x_iها تعداد سکه‌های دریافتی این پنج کودک باشند.

الف) تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ برابر است با $\binom{14}{10} = \binom{5+10-1}{10}$. در اینجا $n = 5$ و $r = 10$.

ب) اگر به هر کودک یک سکه بدهیم، معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$، $x_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 5$، حاصل می‌شود. $\binom{5+5-1}{5}$ یا $\binom{9}{5}$ طریق برای توزیع پنج سکهٔ باقیمانده وجود دارد.

پ) فرض‌کنیم x_5 تعداد سکه‌های داده شده به بزرگترین کودک باشد. تعداد جوابهای

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

$x_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 4$، $x_5 \geq 2$، برابر است با تعداد جوابهای $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 8$، $y_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 5$، که این هم برابر است با $\binom{12}{8} = \binom{5+8-1}{8}$.

۲. فرض کنیم x_iها، $1 \leq i \leq 5$، تعداد آب‌نباتهای دریافتی این پنج کودک باشند، که در آن x_1 تعداد آب‌نباتهای کوچکترین کودک است.

$x_1 = 1$: $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$. در اینجا $\binom{4+14-1}{14}$ یا $\binom{17}{14}$ توزیع وجود دارد.

$x_۱ = ۲$: $x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۳$. دراینجا تعداد توزیعها $\binom{۴+۱۳-۱}{۱۳}$ یا $\binom{۱۶}{۱۳}$ است. بنابر قاعدهٔ حاصل‌جمع، جواب مطلوب $\binom{۱۷}{۱۴} + \binom{۱۶}{۱۳}$ است.

۳. $\binom{۴+۲۰-۱}{۲۰} = \binom{۲۳}{۲۰}$

۴. الف) $\binom{۳۱}{۱۲}$ ب) $\binom{۳۱+۱۲-۱}{۱۲} = \binom{۴۲}{۱۲}$

پ) ۳۱ طریق برای انتخاب ۱۲ بستنی از یک نوع وجود دارد. بنابراین، $\binom{۴۲}{۱۲} - ۳۱$ طریق برای سفارش ۱۲ بستنی، که حداقل از دو نوع متفاوت باشند، وجود دارد.

۵. الف) $۲^۵$

ب) برای هر یک از n شیءِ متمایز دو انتخاب وجود دارد. اگر یکی از آنها انتخاب نشود، دراین صورت یکی از n شیءِ یکسان را برمی‌گزینیم. بنابراین، ۲^n انتخاب ممکن nتایی وجود دارد.

۶. $\binom{۱۲}{۴,۴,۴}\binom{۲۲}{۱۲}$

۷. الف) $\binom{۴+۳۲-۱}{۳۲} = \binom{۳۵}{۳۲}$ ب) $\binom{۴+۲۸-۱}{۲۸} = \binom{۳۱}{۲۸}$

پ) $\binom{۴+۸-۱}{۸} = \binom{۱۱}{۸}$ ت) ۱

ث) $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۳۲$، $x_i \geq -۲$، $۱ \leq i \leq ۴$. فرض کنیم $y_i = x_i + ۲$، $۱ \leq i \leq ۴$. دراین صورت تعداد جوابهای مسألهٔ مفروض با تعداد جوابهای معادلهٔ $y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۴۰$، $y_i \geq ۰$، $۱ \leq i \leq ۴$، یکی است. این تعداد برابر است با $\binom{۴۳}{۴۰} = \binom{۴+۴۰-۱}{۴۰}$

ج) $\binom{۳۱}{۲۸} - \binom{۶}{۳} = \binom{۴+۲۸-۱}{۲۸} - \binom{۴+۳-۱}{۳}$، که درآن جملهٔ $\binom{۶}{۳}$ تعداد جوابهای مقید به $x_۴ \geq ۲۶$ را به‌دست می‌دهد.

۸. شیرینیهای شکلاتی را می‌توان به $\binom{۷}{۵} = \binom{۳+۵-۱}{۵}$ طریق توزیع کرد. $\binom{۶}{۴} = \binom{۳+۴-۱}{۴}$ طریق برای توزیع شیرینیهای ژله‌دار وجود دارد. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $\binom{۷}{۵}\binom{۶}{۴}$ طریق برای توزیع شیرینیها با شرایط بیان شده وجود دارد.

۹.
$$۲۳۰۲۳۰ = \binom{n + ۲۰ - ۱}{۲۰} = \binom{n + ۱۹}{۲۰} \Longrightarrow n = ۷$$

۱۰. دراینجا می‌خواهیم تعداد جوابهای صحیح $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۰۰$، $x_i \geq ۳$، $۱ \leq i \leq ۶$، را بیابیم. (به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۶$، x_i تعداد دفعاتی راکه وجه i نقطه‌ای می‌نشیند نشان می‌دهد.) این تعداد برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ + y_۶ = ۸۲$، $y_i \geq ۰$، $۱ \leq i \leq ۶$. درنتیجه، جواب عبارت است از $\binom{۸۷}{۸۲} = \binom{۶+۸۲-۱}{۸۲}$.

۱۱. الف) $\binom{۱۴}{۵} = \binom{۱۰+۵-۱}{۵}$

ب) $\binom{۷+۵-۱}{۵} + ۳\binom{۷+۴-۱}{۴} + ۳\binom{۷+۳-۱}{۳} + \binom{۷+۲-۱}{۲} = \binom{۱۱}{۵} + ۳\binom{۱۰}{۴} + ۳\binom{۹}{۳} + \binom{۸}{۲}$

دراین مجموع، جمعوند اول مربوط به حالتی است که هیچ‌یک از رقمهای ۱، ۳ یا ۷ حضور نداشته باشد،

جمعوند دوم مربوط به حالتی است که دقیقاً یکی از رقمهای ۱، ۳ یا ۷ یک‌بار حضور داشته باشد، جمعوند سوم مربوط به حالتی است که دقیقاً دو تا از این رقمها هرکدام یک‌بار حضور یابند و جمعوند چهارم مربوط به حالتی است که هر سه رقم حضور داشته باشند.

۱۲. الف) تعداد جوابهای $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 < ۴۰$، $x_i \geq ۰$، $۱ \leq i \leq ۵$ با تعداد جوابهای

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 \leq ۳۹$$

$x_i \geq ۰$، $۱ \leq i \leq ۵$ یکی است و این برابر است با تعداد جوابهای $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 + x_6 = ۳۹$، $x_i \geq ۰$، $۱ \leq i \leq ۶$. تعداد جوابهای معادلهٔ اخیر $\binom{۴۴}{۳۹} = \binom{۶+۳۹-۱}{۳۹}$ است.

ب) فرض کنیم $y_i = x_i + ۳$، $۱ \leq i \leq ۵$، و نابرابری $y_1 + y_2 + \cdots + y_5 \leq ۵۴$، $y_i \geq ۰$، را درنظر می‌گیریم. مانند روش قسمت (الف) می‌بینیم که $\binom{۵۹}{۵۴} = \binom{۶+۵۴-۱}{۵۴}$ جواب وجود دارد.

۱۳. الف) $\binom{۷}{۲} = \binom{۲+۲-۱}{۲}$

ب) $$\sum_{i=۰}^{۳} \binom{۹-۲i}{۷-۲i} = \underset{\text{(ظرف ۲ هفت گلوله دارد)}}{\binom{۳+۷-۱}{۷}} + \underset{\text{(ظرف ۲ پنج گلوله دارد)}}{\binom{۳+۵-۱}{۵}} + \underset{\text{(ظرف ۲ سه گلوله دارد)}}{\binom{۳+۳-۱}{۳}} + \underset{\text{(ظرف ۲ یک گلوله دارد)}}{\binom{۳+۱-۱}{۱}}$$

۱۴. الف) $\binom{۸}{۲,۲,۱,۰,۱}(۳)^۲(۲)^۲$

ب) هر یک از جمله‌های این بسط به‌صورت $v^a w^b x^c y^d z^e$ است، که در آن a، b، c، d و e پنج عدد صحیح نامنفی با مجموع ۸ هستند. بنابراین، $\binom{۱۲}{۸} = \binom{۵+۸-۱}{۸}$ جمله وجود دارد.

۱۵. یکی از این نوع توزیعها، مثلاً توزیعی را که در هر قفسه شش کتاب می‌گذارد، درنظر بگیرید. !۲۴ طریق برای این رویداد وجود دارد. می‌بینیم که برای هر نوع توزیع دیگر کتابها نیز !۲۴ طریق وجود دارد.

تعداد توزیعها برابر است با تعداد جوابهای صحیح مثبت معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ۲۴$. این تعداد با تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = ۲۰$$

یکی است. [به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۴$، $y_i + ۱ = x_i$.]

بنابراین، $\binom{۲۳}{۲۰} = \binom{۴+۲۰-۱}{۲۰}$ تا از این نوع توزیع کتاب وجود دارد و در نتیجه، این ۲۴ کتاب را می‌توان به $(۲۴!)\binom{۲۳}{۲۰}$ طریق در این چهار قفسه چنان چید که در هر قفسه دست‌کم یک کتاب باشد.

۱۶. برای معادلهٔ (۱)، تعداد جوابهای صحیح نامنفی $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{19} = n - ۱۹$، $w_i \geq ۰$، $۱ \leq i \leq ۱۹$، را لازم داریم. این تعداد برابر است با $\binom{n-۱}{n-۱۹} = \binom{۱۹+(n-۱۹)-۱}{(n-۱۹)}$. تعداد جوابهای صحیح مثبت معادلهٔ (۲) برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_{64} = n - ۶۴$$

این تعداد برابر است با $\binom{n-1}{n-64} = \binom{64+(n-64)-1}{(n-64)}$.

بنابراین، $\binom{n-1}{63} = \binom{n-1}{n-64} = \binom{n-1}{n-19}$ و $63 = 19 - n$. درنتیجه، $n = 82$.

۱۷. الف) $\binom{16}{12} = \binom{5+12-1}{12}$ ب) 5^{12}

۱۸. $\binom{16}{12}\binom{11}{7}\binom{16}{12}\binom{9}{5} = \binom{5+12-1}{12}\binom{5+7-1}{7}\binom{5+12-1}{12}\binom{5+5-1}{5}$

۱۹. الف) $\binom{29}{25}(5)^3$؛ ب) بزرگترین کودک می‌تواند در هر یک از چهار حالت زیر ۲۰ سنت بگیرد:

(یک) (سکهٔ ده سنتی، سکهٔ پنج سنتی، پنج سکهٔ یک پنی): در این صورت سکه‌های دیگر به $4\binom{23}{20} = \binom{4+20-1}{20}(4)$ طریق بین کودکان دیگر توزیع می‌شوند. در این رابطه، عدد ۴ تعداد طرق توزیع سکهٔ بیست و پنج سنتی بین چهار کودک دیگر و عدد $\binom{23}{20}$ تعداد طرق توزیع ۲۰ سکهٔ یک پنی باقیمانده بین آنهاست.

(دو) (سکهٔ ده سنتی، ده سکهٔ یک پنی): در این صورت $4^2\binom{18}{15} = \binom{4+15-1}{15}(4)^2$ طریق برای توزیع سکهٔ پنج سنتی، سکهٔ بیست و پنج سنتی و ۱۵ سکهٔ یک پنی باقیمانده بین چهار کودک دیگر وجود دارد.

(سه) (سکهٔ پنج سنتی، پانزده سکهٔ یک پنی): $\binom{13}{10}(4)^2$ توزیع.

(چهار) (۲۰ سکهٔ یک پنی): $\binom{8}{5}4^3$ توزیع.

اگر بزرگترین کودک ۲۵ سنت بگیرد، پنج حالت پیش می‌آید. بنابراین، تعداد کل طرق توزیع سکه‌ها به‌طوری‌که بزرگترین کودک ۲۰ یا ۲۵ سنت بگیرد عبارت است از

$$\underbrace{\left[4\binom{23}{20} + 4^2\binom{18}{15} + 4^2\binom{13}{10} + 4^3\binom{8}{5}\right]}_{\text{(برای ۲۰ سنت)}} + \underbrace{\left[4^2\binom{28}{25} + 4\binom{18}{15} + 4^2\binom{13}{10} + 4^2\binom{8}{5} + 4^3\right]}_{\text{(برای ۲۵ سنت)}}$$

۲۰. الف) $\binom{8}{6} = \binom{3+6-1}{6}$ جواب برای $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ و $\binom{34}{31} = \binom{4+31-1}{31}$ جواب برای

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 31$$

که در آن به‌ازای هر $1 \leq i \leq 7$، $x_i \geq 0$، وجود دارد. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، این جفت معادلات $\binom{8}{6}\binom{34}{31}$ جواب دارند.

ب) $\binom{34}{31}\binom{5}{3}$

۲۱. در اینجا $r = 4$ حلقهٔ تودرتوی For وجود دارد؛ پس $1 \leq m \leq k \leq j \leq i \leq 20$. اکنون مسأله عبارت است از انتخابهای $r = 4$ تایی از یک گردایهٔ $n = 20$ شیئی به‌طوری‌که تکرار مجاز است. بنابراین، حکم Writeln $\binom{23}{4} = \binom{20+4-1}{4}$ بار اجرا می‌شود.

۲۲. در اینجا $r = 3$ حلقهٔ تودرتوی For وجود دارد و $1 \leq i \leq j \leq k \leq 15$. اکنون مسأله عبارت است از

انتخابهای $r = ۳$ تایی از یک گردایهٔ $n = ۱۵$ شیئی به‌طوری‌که تکرار مجاز است. بنابراین، گزارهٔ

counter := counter + ۱

$\binom{۱۵+۳-۱}{۳} = \binom{۱۷}{۳}$ بار اجرا می‌شود و مقدار نهایی متغیر counter برابر است با $۱۰ + \binom{۱۷}{۳} = ۶۹۰$.

۲۳. قطعهٔ *Begin-End*، $۲۲۰ = \binom{۱۲}{۳} = \binom{۱۰+۳-۱}{۳}$ بار اجرا می‌شود. پس از اجرای این قطعه، مقدار متغیر sum عبارت است از $\sum_{i=۱}^{۲۲۰} i = \frac{۲۲۰ \times ۲۲۱}{۲} = ۲۴۳۱۰$.

۲۴.

$$\binom{n+۲}{۳} = \sum_{i=۱}^{n} \binom{i+۱}{۲} \Longrightarrow \frac{(n+۲)(n+۱)n}{۶} = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}(i+۱)i \Longrightarrow$$

$$\frac{(n+۲)(n+۱)n}{۶} = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n} i^۲ + \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n} i \Longrightarrow \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = \frac{(n+۲)(n+۱)n}{۶} - \frac{(n+۱)n}{۴} \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = n(n+۱)\left[\frac{n+۲}{۳} - \frac{۱}{۲}\right] = n(n+۱)\left[\frac{۲n+۴-۳}{۶}\right] = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

۲۵. الف) قطعه برنامهٔ پاسکال زیر را، که در آن i، j، k، m، n و sum متغیرهایی صحیح‌اند، درنظر می‌گیریم.

```
sum := 0;
For i := 1 to n do
   For j := 1 to i do
       For k :=1 to j do
          For m := 1 to k do
               sum := sum + 1;
```

پس از اجرای این قطعه، مقدار sum برابر است با $\binom{n+۳}{۴}$، یعنی تعداد طرق انتخاب i، j، k و m از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ به‌طوری‌که تکرار مجاز باشد و $۱ \le m \le k \le j \le i \le n$.

به‌ازای هر مقدار i، حلقه‌های For برای j، k و m به $\binom{i+۲}{۳}$ بار اجرای حکم sum := sum + ۱ منجر می‌شوند. درنتیجه، $\sum_{i=۱}^{n}\binom{i+۲}{۳} = \binom{n+۳}{۴}$.

ب) از تمرین ۲۴ می‌دانیم که $\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = \frac{۱}{۶}(n)(n+۱)(۲n+۱)$. این رابطه را در مرحلهٔ ۴ از محاسبات زیر به‌کار می‌بریم.

$$(۱)\ \binom{n+۳}{۴} = \sum_{i=۱}^{n}\binom{i+۲}{۳}$$

$$(۲)\ \left(\frac{۱}{۴!}\right)(n+۳)(n+۲)(n+۱)(n) = \sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۶}\right)(i+۲)(i+۱)(i)$$

$$(۳)\ \left(\frac{۱}{۴}\right)(n+۳)(n+۲)(n+۱)(n) = \sum_{i=۱}^{n}(i^۳ + ۳i^۲ + ۲i)$$

$$(۴)\left(\frac{۱}{۴}\right)(n+۳)(n+۲)(n+۱)(n)=\sum_{i=۱}^{n} i^{۳}+(۳)\left(\frac{۱}{۶}\right)(n)(n+۱)(۲n+۱)$$
$$+(۲)\left(\frac{۱}{۲}\right)(n+۱)(n)$$

$$(۵)\left(\frac{۱}{۴}\right)(n+۱)(n)\big[(n+۳)(n+۲)-۲(۲n+۱)-۴\big]=\sum_{i=۱}^{n} i^{۳}$$

$$(۶)\left(\frac{۱}{۴}\right)(n+۱)(n)\big[n^{۲}+۵n+۶-۴n-۶\big]=\sum_{i=۱}^{n} i^{۳}$$

$$(۷)\left(\frac{۱}{۴}\right)(n+۱)^{۲}n^{۲}=\sum_{i=۱}^{n} i^{۳}$$

۲۶. r انتخاب برای شیء اول وجود دارد. برای شیء دوم $r+۱$ انتخاب وجود دارد، زیرا هنگام گذاشتن این شیٔ در ظرف حاوی شیء اول، می‌توان آن را روی یا زیر شیء اول گذاشت. به همین ترتیب، $r+۲$ انتخاب برای شیء سوم، ...، و $(n-۱)+r$ انتخاب برای شیء nاُم وجود دارد. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب،

$$(r)(r+۱)(r+۲)\cdots(r+n-۱)=P(r+n-۱,r-۱)$$

توزیع وجود دارد.

۲۷. الف) در هر ظرف یک شیٔ بگذارید. دراین صورت $m-n$ شیء یکسان برای گذاشتن در n ظرف متمایز وجود دارد. بنابراین، $\binom{n+(m-n)-۱}{m-n}=\binom{m-۱}{m-n}=\binom{m-۱}{n-۱}$ توزیع به‌دست می‌آید.

ب) در هر ظرف r شیٔ بگذارید. دراین صورت $m-rn$ شیء باقی‌مانده را می‌توان به

$$\binom{n+(m-rn)-۱}{m-rn}=\binom{m-۱+(۱-r)n}{m-rn}=\binom{m-۱+(۱-r)n}{n-۱}$$

طریق بین n ظرف متمایز توزیع کرد.

۲۸.

```
Program Solutions1 (Input, Output);
Var
   X1,X2: Integer;
Begin
   For X1 := 0 to 10 do
      For X2 := 0 to 10 - X1 do
         Writeln ('X1 = ', X1:0, ' X2= ', X2:0, ' X3= ', 10 - X1 - X2:0)
End.
```

.۲۹

```
Program Solutions2 (Input, Output);
Var
   X1, X2, X3: Integer;
Begin
   For X1 := 0 to 15 do
      For X2 := 0 to 15 - X1 do
         For X3 := 0 to 15 -X1 - X2 do
            Writeln (' X1= ', X1:0, 'X2 = ', X2:0, ' X3 = ', X3:0, ' X4 = ',
               15 - X1 - X2 - X3:0)
End.
```

.۳۰ به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۴$ فرض‌کنیم $y_i = x_i + ۲ \geq ۰$. دراین صورت تعداد جوابهای صحیح $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۴$، $x_i \geq -۲$، $۱ \leq i \leq ۴$، برابر است با تعداد جوابهای صحیح $y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۱۲$، $y_i \geq ۰$، $۱ \leq i \leq ۴$.
این مطلب را در برنامهٔ زیر به‌کار می‌بریم.

```
Program Selections3 (Input, Output);
Var
   X1, X2, X3: Integer;
Begin
   For X1 := 0 to 12 do
      For X2 := 0 to 12 - X1 do
         For X3 := 0 to 12 - X1 - X2 do
            Writeln ('X1 = ', X1 - 2:0, 'X2 = ', X2 - 2:0, ' X3 = ', X3 - 2:0,
               ' X4 = ', 12 - X1 - X2 - X3 - 2:0)
End.
```

تمرینات تکمیلی

.۱ $\binom{۴}{۱}\binom{۷}{۲} + \binom{۴}{۲}\binom{۷}{۴} + \binom{۴}{۳}\binom{۷}{۶}$

.۲ الف) $۵^۹$ ب) ۵×۴^۸ پ) ۳×۲^۸

.۳ الف) $\sum_{i=۱}^{۸} ۳۶^i$ ب) $\sum_{i=۱}^{۶} ۳۶^i$ پ) $(۳۶^۳)\sum_{i=۱}^{۸} ۵۱^i$

.۴ الف) $\binom{۲۵}{۲}^۳$

ب) $\binom{۲۵}{۲}^۳ + ۶\binom{۲۵}{۱}\binom{۲۵}{۲}\binom{۲۵}{۳} + ۳\binom{۲۵}{۱}^۲\binom{۲۵}{۴}$

(دو سرود از هر کتاب) (یک سرود از یک کتاب، دو سرود از کتاب دوم و سه سرود از کتاب سوم) (چهار سرود از یک کتاب و یک سرود از هر یک از دو کتاب دیگر)

.۵ الف) $۱۰^{۲۵}$

ب) برای پرچم اول ۱۰ انتخاب وجود دارد. برای پرچم دوم ۱۱ انتخاب وجود دارد: روی نُه دیرکی که پرچم ندارند و روی دیرکی که پرچم اول بر آن نصب شده است بالا یا پایین پرچم اول. ۱۲ انتخاب برای پرچم سوم، ۱۳ انتخاب برای پرچم چهارم، ... و ۳۴ انتخاب برای پرچم آخر (یعنی ۲۵اُم) وجود دارد. بنابراین، تعداد ترتیبهای ممکن $\frac{۳۴!}{۹!}$ است.

پ) !۲۵ طریق برای مرتب کردن پرچمها وجود دارد. اگر بین هر دو پرچم را یک مکان تلقی کنیم، به‌ازای هر ترتیب ۲۴ مکان به‌دست می‌آید. انتخاب ۹ تا از این مکانها، توزیعی از پرچمها را بین ۱۰ دیرک به‌طوری‌که، با توجه به ترتیب، هر دیرک حداقل یک پرچم داشته باشد، به‌دست می‌دهد. بنابراین، $\binom{۲۴}{۹}(۲۵!)$ از این ترتیبها وجود دارد.

۶. الف) هر ۴۵ نقش و هر ۴۶ مکانی را که این نقشها تعیین می‌کنند درنظر می‌گیریم: (۱) یک مکان در طرف چپ نقش اول. (۲) یک مکان بین نقش iاُم و نقش $(i+۱)$اُم، که در آن $۱ \le i \le ۴۴$. (۳) یک مکان در طرف راست نقش ۴۵اُم (یعنی آخرین نقش). برای پاسخ دادن به پرسش مطرح شده باید ۱۵ تا از این ۴۶ مکان را انتخاب کنیم. این را می‌توانیم به $\binom{۴۶}{۱۵}$ طریق انجام دهیم.

ب) روش دیگری برای حل مسأله این است که فرض کنیم به‌ازای هر $۱ \le i \le ۱۵$، x_i تعداد نقشهایی را نشان دهد که در طرف چپ خط iاُم قرار گرفته‌اند. فرض کنیم $x_{۱۶}$ تعداد نقشهای واقع در طرف راست خط ۱۵اُم باشد، دراین صورت جواب مسأله برابر است با تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + \cdots + x_{۱۵} + x_{۱۶} = ۴۵$$

که در آن $x_۱ \ge ۰$، $x_{۱۶} \ge ۰$ و به‌ازای هر $۲ \le i \le ۱۵$، $x_i > ۰$. این تعداد برابر است با تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + \cdots + y_{۱۵} + y_{۱۶} = ۳۱$$

که در آن به‌ازای هر $۱ \le i \le ۱۶$، $y_i \ge ۰$. درنتیجه، جواب مسأله عبارت است از

$$\binom{۱۶+۳۱-۱}{۳۱} = \binom{۴۶}{۳۱} = \binom{۴۶}{۱۵}$$

۷. الف) $C(۱۲,۸)$ ب) $P(۱۲,۸)$

۸. $\binom{n}{r}(۳^{n-r})$

۹. $\frac{۷!}{۲!}$ طریق برای مرتب کردن هفت نماد OE، W، N، N، D، R و G وجود دارد. در هر ترتیب ۶ مکان برای I، به طوری‌که کنار حرف صداداری قرار نگیرد، وجود دارد. بنابراین، تعداد این ترتیبها $\frac{۷!}{۲!} \times ۶$ است. سه حرف صدادار را می‌توان (با توجه به ترتیب) به شش طریق به‌صورت یک جفت و یک حرف تنها درآورد. درنتیجه، تعداد کل ترتیبهای موردنظر $\frac{۷!}{۲!} \times ۶^۲$ است.

۱۰. !۶ هرگاه مایع نخست بتواند هریک از شش مایع مفروض باشد؛ !۵ هرگاه مایع نخست از قبل مشخص شده باشد.

۱۱. الف) دو قطعه وجود دارد که فقط از لحاظ اندازه با قطعهٔ مفروض متفاوت‌اند. چهار تا فقط از لحاظ رنگ، یکی فقط از لحاظ جنس و پنج تا فقط از لحاظ شکل با قطعهٔ مفروض متفاوت‌اند. روی‌هم $12 = 5 + 1 + 4 + 2$ قطعه وجود دارد که دقیقاً از نظر یک ویژگی با قطعهٔ مربعی چوبی قرمز کوچک مفروض متفاوت‌اند.

ب) $6 = \binom{4}{2}$ طریق برای انتخاب دو ویژگی متفاوت وجود دارد. هر یک از این جفتها را باید جداگانه درنظر گرفت.

(یک) جنس، اندازه: $2 = 2 \times 1$ تا از این نوع قطعه‌ها وجود دارد.

(دو) جنس، رنگ: این دو ویژگی $4 = 4 \times 1$ تا از این نوع قطعه‌ها به‌دست می‌دهند.

(سه) جنس، شکل: $5 = 5 \times 1$ تا از این نوع قطعه‌ها برای این دو ویژگی به‌دست می‌آوریم.

(چهار) اندازه، رنگ: در اینجا $8 = 4 \times 2$ قطعه به‌دست می‌آوریم.

(پنج) اندازه، شکل: این دو ویژگی $10 = 5 \times 2$ تا از این نوع قطعه‌ها به ما می‌دهند.

(شش) رنگ، شکل: $20 = 5 \times 4$ تا از این نوع قطعه‌ها برای این دو ویژگی وجود دارد.

روی هم $49 = 20 + 10 + 8 + 5 + 4 + 2$ تا از قطعه‌های متعلق به مجموعهٔ کل قطعه‌ها وجود دارند که دقیقاً از نظر دو ویژگی با قطعهٔ شش ضلعی پلاستیکی آبی بزرگ متفاوت‌اند.

۱۲. چون «R» هجدهمین حرف الفباست، حروف اول و دوم را می‌توان به $136 = \frac{17 \times 16}{2} = \binom{17}{2}$ طریق انتخاب کرد.

یا

چون «R» هجدهمین حرف الفباست، ببینیم وقتی حرف دوم حرف دلخواهی بین «B» و «Q» است چه روی می‌دهد. اگر «Q» حرف دوم باشد ۱۶ حالت ممکن برای حرف اول وجود دارد. اگر «P» حرف دوم باشد ۱۵ انتخاب ممکن وجود دارد. اگر به همین ترتیب به طرف «B»، که در آنجا فقط یک انتخاب (یعنی «A») برای حرف اول وجود دارد، پیش برویم می‌بینیم که تعداد کل انتخابها عبارت است از

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 15 + 16 = \frac{16 \times 17}{2} = 136$$

۱۳. تعداد ترتیبهای خطی این ۱۰ اسب برابر است با $\frac{10!}{4!3!3!}$. هر ترتیب دایره‌ای ۱۰ ترتیب خطی را نشان می‌دهد؛ پس $\frac{10!}{4!3!3!} \times \frac{1}{10}$ طریق برای مرتب کردن اسبها در چرخ‌فلک وجود دارد.

۱۴. الف) $P(16, 12)$ ب) $\binom{12}{2} P(15, 10)$

۱۵. الف) (یک) $\binom{5}{4} + \binom{5}{2}\binom{4}{2} + \binom{4}{4}$

(دو) $\binom{5+4-1}{4} + \binom{5+2-1}{2}\binom{4+2-1}{2} + \binom{4+4-1}{4} = \binom{8}{4} + \binom{6}{2}\binom{5}{2} + \binom{7}{4}$

(سه) $\binom{8}{4} + \binom{6}{2}\binom{5}{2} + \binom{7}{4} - 9$

ب) (یک) $\binom{5}{3}\binom{4}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{3}$ (دو) و (سه) $\binom{5+3-1}{3}\binom{4}{1} + \binom{5}{1}\binom{4+3-1}{3} = \binom{7}{3}\binom{4}{1} + \binom{5}{1}\binom{6}{3}$

۱۶. الف) اگر قیدی درکار نباشد، سرپرست اقامتگاه می‌تواند به $۱۲! = ۴۷۹۰۰۱۶۰۰$ طریق انتخابهای خود را به عمل آورد.

ب) دو دستیار ارشد اولی و دومی را می‌توان به $۳ \times ۴ = ۱۲$ طریق و سپس ۱۰ دستیار دیگر را می‌توان به $۱۰!$ طریق جای داد. درنتیجه، سرپرست اقامتگاه می‌تواند در این حالت یکی از $۱۲(۱۰!) = ۴۳۵۴۵۶۰۰$ انتخاب ممکن را به عمل آورد.

پ) فرض‌کنیم دستیار ارشد سوم در طبقهٔ اول و دستیار ارشد چهارم در طبقهٔ سوم جای گیرند. این را به $۴ \times ۴ \times (۱۰!) = ۵۸۰۶۰۸۰۰$ طریق می‌توان انجام داد. $۳ \times ۲ = ۶$ طریق برای جای دادن این دو نفر در دو طبقهٔ مختلف وجود دارد؛ بنابراین، در این حالت $(۳ \times ۲) \times \left[۴ \times ۴ \times (۱۰!)\right] = ۳۴۸۳۶۴۸۰۰$ امکان داریم.

راه‌حل دیگری برای قسمت (پ) این است که بگوییم با توجه به قسمت (ب)، می‌توان به

$$۳ \times [۱۲(۱۰!)] = ۱۳۰۶۳۶۸۰۰$$

طریق دستیاران ارشد سوم و چهارم را در یک طبقه جای داد و در نتیجه، جواب مطلوب عبارت است از

$$(۱۲!) - [(۳)(۱۲)(۱۰!)] = ۳۴۸۳۶۴۸۰۰$$

ت) در اینجا فقط سه حالت وجود دارد که هر یک از آنها به $۴ \times ۴ \times (۱۰!)$ انتخاب منجر می‌شود. بنابراین، جواب عبارت است از $۳ \times ۴ \times ۴ \times (۱۰!) = ۱۷۴۱۸۲۴۰۰$.

ث) در این قسمت از مسأله باید شش حالت درنظربگیریم. هر حالت به $۴ \times ۴ \times ۴ \times (۹!)$ انتخاب منجر می‌شود. درنتیجه، سرپرست اقامتگاه می‌تواند با توجه به قید یاد شده یکی از $۶ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times (۹!) = ۱۳۹۳۴۵۹۲۰$ انتخاب ممکن را به عمل آورد.

۱۷. الف) برای هر عدد صحیح چهار رقمی با رقمهای صعودی، چهار رقم متمایز داریم که می‌توان آنها را فقط به یک طریق مرتب کرد. این چهار رقم را به $\binom{۹}{۴} = ۱۲۶$ طریق می‌توان انتخاب کرد. همین چهار رقم را می‌توان چنان مرتب کرد که رقمهای عدد چهار رقمی حاصل نزولی باشند.

برای تکمیل راه‌حل مسأله باید تعداد عددهای صحیح چهاررقمی‌ای را به‌دست آوریم که رقم یکان آنها ۰ و رقمهای آنها نزولی است. تعداد چنین عددهایی $\binom{۹}{۳} = ۸۴$ است.

درنتیجه، $۲\binom{۹}{۴} + \binom{۹}{۳} = ۳۴۳$ تا از این نوع عددهای صحیح چهار رقمی وجود دارد.

ب) به‌ازای هر عدد صحیح چهاررقمی با رقمهای غیرنزولی، چهار رقم غیرصفر با مجاز بودن تکرار داریم. این چهار رقم را می‌توان به $\binom{۹+۴-۱}{۴} = \binom{۱۲}{۴}$ طریق انتخاب کرد. همین چهار رقم یک عدد صحیح چهار رقمی با رقمهای غیرصعودی نیز به‌دست می‌دهند. بنابراین، تا اینجا $۲\binom{۱۲}{۴} - ۹$ تا از عددهای صحیح

چهاررقمی مورد نظر را در اختیار داریم. (علت اینکه ۹ تا کم شده است این است که در $\binom{۱۲}{۲}۲$، نه عدد صحیح ۱۱۱۱، ۲۲۲۲، ۳۳۳۳، ...، ۹۹۹۹ را دوبار شمرده‌ایم.)

هنوز عددهای صحیح چهاررقمی با رقمهای غیرصعودی‌ای را که در آنها رقم یکان ۰ است نشمرده‌ایم. $\binom{۱۰+۳-۱}{۳} - ۱ = \binom{۱۲}{۳} - ۱$ تا از این عددهای چهاررقمی وجود دارد. (۱ را از این جهت کم کرده‌ایم که نمی‌خواهیم ۰۰۰۰ به‌حساب آید.)

بنابراین، $[۲\binom{۱۲}{۲} - ۹] + [\binom{۱۲}{۳} - ۱] = [۲\binom{۱۲}{۲} + \binom{۱۲}{۳}] - ۱۰ = ۱۲۰۰$ تا از این نوع عددهای صحیح چهاررقمی وجود دارد.

۱۸. الف) $\frac{۱۳۵}{۲} = \binom{۵}{۲,۱,۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲(-۳)^۲$

ب) هر جملهٔ بسط به‌صورت $x^{n_۱}y^{n_۲}z^{n_۳}$ است، که در آن به‌ازای هر $۱ \le i \le ۳$، n_i عددی صحیح و نامنفی است و $n_۱ + n_۲ + n_۳ = ۵$. درنتیجه، $\binom{۳+۵-۱}{۵} = \binom{۷}{۵}$ جمله وجود دارد.

پ) به‌جای x، y و z، ۱ بگذارید. در این صورت مجموع همهٔ ضرایب این بسط برابر است با

$$\left(\frac{۱}{۲} + ۱ - ۳\right)^۵ = \left(\frac{-۳}{۲}\right)^۵$$

۱۹. الف) نخست شخص A را پشت میز بنشانید. پنج مکان متمایز برای A وجود دارد (مثلاً هریک از مکانهای مشخص شده با A، B، C، D و E در شکل ۱-۱۰ (الف)). سپس نه نفر دیگر را در اطراف A بنشانید. این کار را می‌توان به !۹ طریق انجام داد؛ پس (!۹)۵ طریق برای نشستن این ۱۰ نفر وجود دارد.

ب) سه طریق متمایز برای نشاندن A و B وجود دارد، که در آنها A و B مقابل یکدیگر و در طرف ضلع بزرگتر میز قرار گیرند. در این صورت می‌توان هشت نفر دیگر را به !۸ طریق متفاوت کنار میز نشاند. بنابراین، تعداد کل ترتیبها (!۸)(۳) است.

۲۰. الف) تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۶$ برابر است با $\binom{۸}{۶} = \binom{۳+۶-۱}{۶}$. با توجه به $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۶$ و $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۵$، تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $x_۴ + x_۵ = ۹$ برابر است با $\binom{۱۰}{۹} = \binom{۲+۹-۱}{۹}$. تعداد جوابهای جفت معادلهٔ مفروض $\binom{۸}{۶}\binom{۱۰}{۹}$ است.

ب) فرض کنیم $۰ \le k \le ۶$. تعداد جوابهای $x_۱ + x_۲ + x_۳ = k$ برابر است با $\binom{k+۲}{k} = \binom{۳+k-۱}{k}$. برای حل $x_۴ + x_۵ \le ۱۵ - k$، معادلهٔ $x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۵ - k$ را با فرض $x_۴, x_۵, x_۶ \ge ۰$ درنظر می‌گیریم. تعداد جوابهای این معادله برابر است با $\binom{۱۷-k}{۱۵-k} = \binom{۳+۱۵-k-۱}{۱۵-k}$. تعداد کل جوابها $\sum_{k=۰}^{۶}\binom{k+۲}{k}\binom{۱۷-k}{۱۵-k}$ است.

۲۱. به‌ازای هر $۱ \le i \le ۵$ فرض کنیم x_i تعداد سیبهایی باشد که کودک iاُم گرفته است. تعداد جوابهای $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۲$، $x_i \ge ۰$، $۱ \le i \le ۵$، برابر است با $\binom{۱۶}{۱۲} = \binom{۵+۱۲-۱}{۱۲}$. به چند طریق کودک نخست

می‌تواند ۸ سیب یا بیشتر بگیرد؟ پاسخ عبارت است از تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_{۱}+x_{۲}+\cdots+x_{۵}=۴$، که این هم برابر است با $\binom{۸}{۴}=\binom{۵+۴-۱}{۴}$. برای حالتهایی نیزکه کودکان شمارهٔ ۲، ۳، ۴ و ۵ بیشتر از ۷ سیب بگیرند همین جواب به‌دست می‌آید. بنابراین، $\binom{۸}{۴}۵-\binom{۱۶}{۱۲}$ توزیع وجود دارد که در آنها هیچ کودکی بیشتر از ۷ سیب نمی‌گیرد.

۲۲. الف) A باید دور ۵ و دقیقاً دو تا از چهار دور قبلی را ببرد. این کار به $\binom{۴}{۲}$ طریق صورت می‌گیرد. چون در هر دور هفت حالت ممکن برای امتیازها وجود دارد، تعداد طرق مثبت امتیازها $۷^{۵}\binom{۴}{۲}$ است.

ب) در اینجا A می‌تواند به $\binom{۳}{۲}$ طریق در چهار دور پیروز شود و تعداد طرق ثبت نتایج $۷^{۴}\binom{۳}{۲}$ است. بنابراین، اگر A در چهار یا پنج دور پیروز شود، نتایج را می‌توان به $[\binom{۳}{۲}۷^{۴}+\binom{۴}{۲}۷^{۵}]$ طریق ثبت کرد. چون B هم می‌تواند برنده باشد، جواب نهایی برابر است با $۲[\binom{۳}{۲}۷^{۴}+\binom{۴}{۲}۷^{۵}]$.

۲۳. اگر ردیفی از k تا ۱ در آغاز دنباله باشد، مکان $(k+۱)$اُم با یک ۰ پر می‌شود و $\frac{(n+r-k-۱)!}{(n-k)!(r-۱)!}$ طریق برای مرتب کردن $(n-k)$ تا ۱ و $(r-۱)$ تا ۰ باقیمانده وجود دارد. اگر این k تا ۱ در انتهای دنباله قرارگیرند همین جواب به‌دست می‌آید. در همهٔ حالتهای دیگر، ردیفی از k تا ۱ همراه با یک ۰ در چپ و یک ۰ در طرف راست ردیف وجود دارد. به این ترتیب $(n-k)$ تا ۱ و $(r-۲)$ تا ۰ باقی می‌مانند که می‌توانند به $\frac{(n+r-k-۲)!}{(n-k)!(r-۲)!}$ طریق مرتب شوند. این $n+r-k-۲$ نماد، $n+r-k-۲+۱$ مکان برای دنبالهٔ kتایی از ۱ها همراه با دو ۰ در دو طرف آن به‌دست می‌دهند. بنابراین، روی‌هم

$$\frac{۲(n+r-k-۱)!}{(n-k)!(r-۱)!}+\frac{(n+r-k-۱)!}{(n-k)!(r-۲)!}$$

ترتیب وجود دارد.

۲۴. به $\binom{n}{r}$ طریق می‌توان r شیٔ از n شیٔ را انتخاب کرد. به‌محض انتخاب r شیٔ، می‌توان آنها را به $(r-۱)!$ طریق روی یک دایره مرتب کرد. بنابراین، برای n شیٔ $\binom{n}{r}(r-۱)!$ ترتیب دایره‌ای rتایی وجود دارد.

۲۵. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n،

$$۰=(۱-۱)^{n}=\binom{n}{۰}(۱)^{۰}-\binom{n}{۱}(۱)^{۱}+\binom{n}{۲}(۱)^{۲}-\binom{n}{۳}(۱)^{۳}+\cdots+(-۱)^{n}\binom{n}{n}(۱)^{n}$$

درنتیجه، $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+\cdots=\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+\cdots$

۲۶. الف) $\frac{۷!}{۳!}$ ب) $۵!$ پ) $\binom{۵}{۳}(۴!)$

۲۷. الف) این دانشجو می‌تواند قفسهٔ کتابخانه را به

$$P(۲۰,۱۲)=\frac{۲۰!}{۸!}=(۲۰)(۱۹)(۱۸)\ldots(۱۱)(۱۰)(۹)$$

طریق پرکند.

ب) این دانشجو می‌تواند نه کتاب دیگر را به $\binom{17}{9}$ طریق انتخاب کند. او سپس می‌تواند این نه کتاب و هر سه کتاب دربارهٔ تنیس را به !۱۲ طریق در قفسهٔ کتابخانه مرتب کند. در نتیجه، $(12!)\binom{17}{9}$ تا از ترتیبهای قسمت (الف) حاوی هر سه کتاب دربارهٔ تنیس هستند.

۲۸. پس از اجرای این قطعه برنامهٔ پاسکال، مقدار counter عبارت است از

$$10 + (12-1+1)(r-1+1)(2) + [3+4+\cdots+(s-3+1)](4) + (12-3+1)(6) + (t-7+1)(8) = 10 + (12)(r)(2) + \left[\frac{1}{2}(s-3+1)(s-3+2) - 2 - 1\right](4) + (10)(6) + (t-6)(8) = 22 + 24r + 8t + 2(s-2)(s-1) - 12 = 14 + 24r + 8t + 2s(s-3)$$

۲۹. الف) در تجزیهٔ ۱۷، تعداد ۱ها باید عددی فرد بین ۱ و ۱۷، یا خود ۱۷، باشد. برای $(1+2k)$ تا ۱، که در آن $0 \le k \le 8$، $2k+2$ مکان برای انتخاب با تکرار وجود دارد. اندازهٔ انتخاب برابر است با تعداد ۲ها، که این هم برابر است با $8-k = [17-(2k+1)]\left(\frac{1}{2}\right)$. این انتخاب را می‌توان به $\binom{2k+2+(8-k)-1}{8-k} = \binom{9+k}{8-k}$ طریق انجام داد و بنابراین، جواب عبارت است از $\sum_{k=0}^{8}\binom{9+k}{8-k} = 2584$.

ب) در تجزیهٔ ۱۸، تعداد ۱ها باید زوج باشد: $2k$ به‌ازای $0 \le k \le 9$. اگر $2k$ تا ۱ وجود داشته باشد، $2k+1$ مکان برای $9-k = (18-2k)\left(\frac{1}{2}\right)$ تا ۲، با تکرار، وجود خواهد داشت. این انتخاب را می‌توان به $\binom{2k+1+(9-k)-1}{9-k} = \binom{9+k}{9-k}$ طریق انجام داد و جواب برابر است با $\sum_{k=0}^{9}\binom{9+k}{9-k} = 4181$.

پ) اگر n فرد باشد، فرض کنیم $n = 2k+1$، که در آن $k \ge 0$. تعداد طرق نوشتن n به‌صورت مجموع مرتبی از ۱ها و ۲ها برابر است با $\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1+i}{k-i}$.

اگر n زوج باشد، فرض کنیم $n = 2k$، که در آن $k \ge 1$. در این حالت جواب عبارت است از $\sum_{i=1}^{k}\binom{k+i}{k-i}$.

۳۰. الف) (یک)
$$\underset{(\text{یک ۲})}{1} + \underset{(\text{سه ۲})}{1} + \underset{(\text{پنج ۲})}{1} = 3$$

(دو)
$$\underset{(\text{یک ۲})}{\binom{8}{1}} + \underset{(\text{سه ۲})}{\binom{7}{3}} + \underset{(\text{پنج ۲})}{\binom{6}{5}}$$

ب) (یک)
$$\underset{(\text{بدون ۲})}{1} + \underset{(\text{دو ۲})}{1} + \underset{(\text{چهار ۲})}{1} + \underset{(\text{شش ۲})}{1} = 4$$

(دو)
$$\underset{(\text{بدون ۲})}{\binom{9}{0}} + \underset{(\text{دو ۲})}{\binom{8}{2}} + \underset{(\text{چهار ۲})}{\binom{7}{4}} + \underset{(\text{شش ۲})}{\binom{6}{6}}$$

۳۱. الف) تعداد جوابهای صحیح مثبت معادلهٔ مفروض برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_r = n - r$$

که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le r$ ، $y_i \ge 0$. تعداد این جوابها $\binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r} = \binom{r+(n-r)-1}{n-r}$ است.

ب) روی‌هم $\sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}$ طریق وجود دارد.

۳۲. الف) $5 - 1 = 4$ حرکت افقی و $9 - 2 = 7$ حرکت قائم وجود دارد. ۴ تا H و ۷ تا V را می‌توان به $\frac{11!}{4!7!}$ طریق مرتب کرد.

ب) چون هر حرکت قطری جای یک حرکت افقی و یک حرکت قائم را می‌گیرد، تعداد حرکتهای قطری عددی بین ۰ و ۴ یا خود ۰ و ۴ است. حالتهای ممکن به‌صورت زیرند:

(۰ تا D):	۴ تا H، ۷ تا V:	$\frac{11!}{4!7!}$
(یک D):	۳ تا H، ۶ تا V:	$\frac{10!}{1!3!6!}$
(۲ تا D):	۲ تا H، ۵ تا V:	$\frac{9!}{2!2!5!}$
(۳ تا D):	یک H، ۴ تا V:	$\frac{8!}{3!1!4!}$
(۴ تا D):	۰ تا H، ۳ تا V:	$\frac{7!}{4!0!3!}$

جواب مطلوب برابر است با مجموع این نتایج، یعنی $\sum_{i=0}^{4} \frac{(11-i)!}{i!(4-i)!(7-i)!}$.

۳۳. الف) $\frac{11!}{7!4!}$

ب) $\left(\frac{11!}{7!4!}\right) - \left(\frac{4!}{2!2!}\right)\left(\frac{4!}{3!1!}\right)$

پ)

(برای قسمت الف) $$\left(\frac{11!}{7!4!}\right) + \left(\frac{10!}{6!3!1!}\right) + \left(\frac{9!}{5!2!2!}\right) + \left(\frac{8!}{4!1!3!}\right) + \left(\frac{7!}{3!0!4!}\right)$$

$$\left[\left(\frac{11!}{7!4!}\right) + \left(\frac{10!}{6!3!1!}\right) + \left(\frac{9!}{5!2!2!}\right) + \left(\frac{8!}{4!1!3!}\right) + \left(\frac{7!}{3!0!4!}\right)\right] -$$

(برای قسمت ب) $$\left\{\left[\left(\frac{4!}{2!2!}\right) + \left(\frac{3!}{1!1!1!}\right) + \left(\frac{2!}{2!}\right)\right] \times \left[\left(\frac{4!}{3!1!}\right) + \left(\frac{3!}{2!1!}\right)\right]\right\}$$

۳۴. الف) تعداد مسیرها برابر است با تعداد ترتیبهای سه U و چهار L. این تعداد عبارت است از $35 = \frac{7!}{4!3!}$.

ب) در اینجا باید شش U و یک L را مرتب کنیم و این کار را می‌توان به $7 = \frac{7!}{6!1!}$ طریق انجام داد.

پ) از قسمتهای (الف) و (ب) نتیجه می‌شود که $35 - 7 = 28$ تا از این نوع مسیرها وجود دارد.

ت) برای رفتن از $(1,1)$ به $(8,2)$، ترتیبی متشکل از ۴ تا U و دو تا D لازم است و تعداد این ترتیبها $35 = \binom{7}{3}$ است. از این ۳۵ مسیر، تعداد آنهایی که بر محور x مماس‌اند یا آن‌را قطع می‌کنند برابر است با $21 = \binom{7}{5}$.

بنابراین، فقط ۲۱ − ۳۵ مسیر از این نوع از (۱, ۱) به (۸, ۲) وجود دارد که هرگز بر محور x مماس نیستند و آن را قطع نمی‌کنند.

ث) در اینجا ما مسیرهای خاصی را از (۱, ۱) به (۱۴, ۴) می‌خواهیم که در آنها حرکتها به‌صورت زیرند:

اگر ورقهٔ $(n+1)$اُم به نام دانشجوی اول باشد، $(m,n) \rightarrow (m+1, n+1)$.

اگر ورقهٔ $(n+1)$اُم به نام دانشجوی دوم باشد، $(m,n) \rightarrow (m+1, n-1)$.

این مسیرها همانهایی هستند که هرگز بر محور افقی (یا x) مماس نیستند و آن را قطع نمی‌کنند. به‌طورکلی، در اینجا جفت مرتبی مانند (m,n) بر این امر دلالت دارد که m ورقهٔ رأی‌گیری خوانده شده است و دانشجوی اول n رأی بیشتر دارد. تعداد طرق خواندن ورقه‌های رأی‌گیری با توجه به شرایط قید شده برابر است با

$$\binom{۱۳}{۸} - \binom{۱۳}{۹} = ۱۲۸۷ - ۷۱۵ = ۵۷۲$$

۲

اصول بنیادی منطق

بند ۱.۲

۱. جمله‌های قسمتهای (الف)، (ت)، (ث) و (ح) گزاره‌اند.

۲. گزاره‌های قسمتهای (الف)، (ت) و (ح) گزاره‌های اولیه‌اند.

۳. چون $p \to q$ نادرست است، ارزش راستی p برابر با ۱ و ارزش راستی q برابر با ۰ است. در نتیجه، ارزشهای راستی گزاره‌های مرکب مفروض عبارت‌اند از

الف) ۰ ب) ۰ پ) ۱ ت) ۰

۴. الف) $r \to q$ ب) $q \to p$ پ) $(s \wedge r) \to q$

۵. الف) اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه متساوی‌الساقین است.

ب) اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین نباشد، آنگاه متساوی‌الاضلاع نیست.

پ) مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است اگر و فقط اگر سه زاویهٔ برابر داشته باشد.

ت) مثلث ABC متساوی‌الساقین است ولی متساوی‌الاضلاع نیست.

ث) اگر مثلث ABC سه زاویهٔ برابر داشته باشد، آنگاه متساوی‌الساقین است.

۶. الف) درست (۱) ب) درست (۱)

پ) نادرست (۰) ت) درست (۱)

۷. الف) اگر هر روز تمرین کنید، آنگاه شانس خوبی برای برنده شدن در مسابقهٔ تنیس خواهید داشت.

پ) اگر بهمن مجاز باشد بر موتورسیکلت هومن سوار شود، آنگاه باید کلاه ایمنی را بر سر گذارد.

۸.

p	q	$p \vee q$	(الف) $\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$	$p \to q$	$q \to p$	(ت) $(p \to q) \to (q \to p)$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	(ث) $[p \wedge (p \to q)] \to q$	(ج)	(چ)
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰

p	q	r	$q \to r$	(ب) $p \to (q \to r)$	$p \to q$	(پ) $(p \to q) \to r$	(ح)
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

۹. گزاره‌های (الف)، (ث)، (ج) و (ح) راستگو هستند.

۱۰.

p	q	r	$\overbrace{p \to (q \to r)}^{s}$	$\overbrace{(p \to q) \to (p \to r)}^{t}$	$s \to t$
۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

۱۱. الف) $۲^۵ = ۳۲$ ب) ۲^n

۱۲. الف) وقتی $(p \wedge q) \wedge r$ درست (۱) و $s \vee t$ نادرست (۰) است، $[(p \wedge q) \wedge r] \to (s \vee t)$ نادرست است.
بنابراین، p، q و r باید درست (۱) و s و t باید نادرست (۰) باشند.

۱۳. الف) p : ۰؛ r : ۰؛ s : ۰

ب) ارزش راستی گزارهٔ s باید ۱ باشد، ولی گزارهٔ p، مانند گزارهٔ r، می‌تواند دارای ارزش راستی ۰ یا ۱ باشد.

۱۴. الف) $n = ۹$ ث) $n = ۱۸$

۱۵. الف) $m = ۳$، $n = ۶$ ب) $m = ۳$، $n = ۹$ پ) $m = ۱۸$، $n = ۹$

ت) $m = ۴$، $n = ۹$ ث) $m = ۴$، $n = ۹$ ج) $m = ۴$، $n = ۹$

چ) $m = ۴$، $n = ۱۹$

۱۶. الف) $۱۰^۲ - ۱۰ = ۹۰$ ب) $۲۰^۲ - ۲۰ = ۳۸۰$

پ) $(۱۰)(۲۰) - ۱۰ = ۱۹۰$ ت) $(۲۰)(۱۰) - ۱۰ = ۱۹۰$

۱۷. ۲۷

۱۸. الف) بله   ب) بله   پ) خیر   ت) خیر

۱۹. حالتهای ممکن زیر را در نظر می‌گیریم:

(یک) فرض کنید گزارهٔ اول یا گزارهٔ دوم گزارهٔ درست باشد. دراین صورت گزاره‌های (۳) و (۴) نادرست و بنابراین، نقیض آنها درست‌اند. با توجه به (۳) می‌بینیم که دختر کوچکتر آن تکه ازکلوچه را نخورده است، درحالی که از (۴) نتیجه می‌گیریم که دختر کوچکتر آن را واقعاً خورده است.

(دو) اکنون فرض کنیم گزارهٔ (۳) تنها گزارهٔ درست باشد. بنابراین، گزاره‌های (۳) و (۴) دیگر ناقض هم نیستند. ولی اکنون گزارهٔ (۲) نادرست است و پسرکوچکتر و دختر کوچکتر را (به ترتیب، با توجه به گزاره‌های (۲) و (۳)) مجرم می‌شناسیم.

(سه) سرانجام، آخرین امکان را در نظر می‌گیریم، یعنی حالتی که گزارهٔ (۴) گزارهٔ درست باشد. باز هم گزاره‌های (۳) و (۴) ناقض یکدیگر نیستند و در اینجا با توجه به گزارهٔ (۲) درمی‌یابیم که پسر کوچکتر مجرم است.

بند ۲.۲

۱. الف) (یک)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

(دو)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \to r$	$p \to r$	$q \to r$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

(سه)

p	q	r	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$p \to q$	$\neg r \to (p \to q)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

ب)

$[p \to (q \vee r)] \iff [\neg r \to (p \to q)]$ با توجه به (سه) در قسمت (الف)

$\iff [\neg r \to (\neg p \vee q)]$ بنابر قاعدهٔ دوم جایگذاری و $(p \to q) \iff (\neg p \vee q)$

$\iff [\neg(\neg p \vee q) \to \neg\neg r]$ بنابر قاعدهٔ اول جایگذاری و اینکه به‌ازای هر دو گزارهٔ اولیهٔ s و t، $(s \to t) \iff (\neg t \to \neg s)$

$\iff [(\neg\neg p \wedge \neg q) \to r]$ بنابر قانون دمورگان، نقیض مضاعف و قاعدهٔ دوم جایگذاری.

$\iff [(p \wedge \neg q) \to r]$ بنابر نقیض مضاعف و قاعدهٔ دوم جایگذاری.

.۲

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱

.۳ الف) به‌ازای هرگزارهٔ اولیه مانند s، $s \vee \neg s \iff T$. به‌جای هر s گزارهٔ $p \vee (q \wedge r)$ را بگذارید و نتیجهٔ مطلوب از قاعدهٔ اول جایگذاری حاصل می‌شود.

ب) به‌ازای هر دوگزارهٔ اولیه مانند s و t داریم $(\neg t \to \neg s) \iff (s \to t)$. به‌جای هر s گزارهٔ $p \vee q$ و به‌جای هر t گزارهٔ r را بگذارید و نتیجهٔ مطلوب از قاعدهٔ اول جایگذاری حاصل می‌شود.

پ) به‌ازای هر سه گزارهٔ اولیهٔ a، b و c، قانون پخش‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$ بیان می‌کند که

$$a \vee (b \wedge c) \iff (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

اگر قاعدهٔ اول جایگذاری را همراه با جایگذاریهای $[(p \vee q) \to r]$ به‌جای a، s به‌جای b و t به‌جای c به‌کار ببریم، گزارهٔ مفروض راستگوست.

۴. (۱) $[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge q) \wedge \neg r] \iff (p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r) \iff (p \wedge q) \wedge T_\circ \iff p \wedge q$

(۲) $[p \wedge q) \vee \neg q] \iff (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q) \iff (p \vee \neg q) \wedge T_\circ \iff p \vee \neg q$

بنابراین، گزارهٔ مفروض به‌صورت $s \to (p \vee \neg q)$ یا $s \to (q \to p)$ ساده می‌شود.

۵. الف) رضا مطالعه را مقدم بر رهبری تیمهای دانشکده قرار داد ولی (با وجود این) به مدارج تحصیلی خوبی نرسید.

ب) آرمان تکالیف ریاضی خود را انجام نمی‌دهد یا مژگان درسهای پیانوی خود را تمرین نمی‌کند.

پ) آرین به تعطیلات رفت و از مسافرت با هواپیما نترسید، ولی (با وجود این) به او خوش نگذشت.

ت) هومن درس پاسکال را با نمرهٔ قبولی گذراند و پروژهٔ ساختمان داده‌ها را به پایان رساند، ولی در پایان ترم فارغ‌التحصیل نشد.

۶. الف) $\neg[p \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)] \iff \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \iff$

$(\neg q \wedge \neg r) \vee [\neg p \vee (p \wedge q \wedge \neg r)] \iff (\neg q \wedge \neg r) \vee [T_\circ \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))] \iff$

$(\neg q \wedge \neg r) \vee [\neg p \vee (q \wedge \neg r)] \iff \neg p \vee [(\neg q \vee q) \wedge \neg r] \iff \neg p \vee \neg r$

ب) $\neg[(p \wedge q) \to r] \iff \neg[\neg(p \wedge q) \vee r] \iff (p \wedge q) \wedge \neg r$

پ) $p \wedge (q \vee \neg r)$ ت) $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

۷. الف)

p	q	$(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge (p \wedge q))$	$p \wedge q$
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱

ب) $(\neg p \wedge q) \vee (p \vee (p \vee q)) \iff p \vee q$

۸. الف) $q \to p \iff \neg q \vee p$؛ پس $(q \to p)^d \iff \neg q \wedge p$

ب) $p \to (q \wedge r) \iff \neg p \vee (q \wedge r)$؛ پس $[p \to (q \wedge r)]^d \iff \neg p \wedge (q \vee r)$

پ) $p \leftrightarrow q \iff (p \to q) \wedge (q \to p) \iff (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$؛ پس

$(p \leftrightarrow q)^d \iff (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$

ت) $p \veebar q \iff (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$؛ پس $(p \veebar q)^d \iff (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$.

۹. الف) اگر امروز روزکارگر[1] باشد، آن‌گاه فردا سه‌شنبه است. (درست)

عکس نقیض: اگر فردا سه‌شنبه نباشد، آن‌گاه امروز روزکارگر نیست. (درست)

عکس: اگر فردا سه‌شنبه باشد، آن‌گاه امروز روزکارگر است.

وارون: اگر امروز روزکارگر نباشد، آن‌گاه فردا سه‌شنبه نیست.

۱ـ درکشورهای ایالات متحد امریکا و کانادا، اولین دوشنبهٔ ماه سپتامبر روزکارگر است.ـم.

هر دوشنبهٔ دلخواه سال، غیر از روزکارگر، را درنظر بگیرید. بنابراین، هم عکس نادرست است هم وارون؛ ولی، به‌ازای هر روز دیگر، عکس و وارون هر دو درست‌اند.

ب) اگر $۳ > -۱$ و $۱۰ = ۷ + ۳$، آن‌گاه $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = -۱$. (درست)

عکس: اگر $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = -۱$، آن‌گاه $۳ > -۱$ و $۱۰ = ۷ + ۳$. (درست)

وارون: اگر $۳ \leq -۱$ یا $۱۰ \neq ۷ + ۳$، آن‌گاه $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) \neq -۱$. (درست)

عکس نقیض: اگر $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) \neq -۱$، آن‌گاه $۳ \leq -۱$ یا $۱۰ \neq ۷ + ۳$.

پ) اگر بهمن در نیوانگلند زندگی کند، آن‌گاه بهمن در ایالت وِرمونت زندگی می‌کند.

عکس نقیض: اگر بهمن در ایالت ورمونت زندگی نکند، آن‌گاه بهمن در نیوانگلند زندگی نمی‌کند.

اگر بهمن در ورمونت یا در جایی خارج از نیوانگلند زندگی کند، آن‌گاه هم استلزام مفروض درست است و هم عکس نقیض آن. اگر بهمن در جایی در نیوانگلند غیر از ورمونت زندگی کند، آن‌گاه هم استلزام مفروض نادرست است هم عکس نقیض آن.

عکس: اگر بهمن در ایالت ورمونت زندگی کند، آن‌گاه بهمن در نیوانگلند زندگی می‌کند. (درست)

وارون: اگر بهمن در نیوانگلند زندگی نکند، آن‌گاه بهمن در ایالت ورمونت زندگی نمی‌کند. (درست)

۱۰. الف) درست   **ب)** درست   **پ)** درست   **ت)** درست

۱۱. الف) $(q \to r) \vee \neg p$ **ب)** $(\neg q \vee r) \vee \neg p$

۱۲. عکس: اگر بهمن به بازی بسکتبال رفته باشد، آن‌گاه کارش را به پایان رسانده است و برف نمی‌بارد.

وارون: اگر بهمن کارش را به پایان نرسانده باشد یا برف نبارد، آن‌گاه بهمن به بازی بسکتبال نخواهد رفت.

عکس نقیض: اگر بهمن به بازی بسکتبال نرود، آن‌گاه کارش را به پایان نرسانده است یا برف می‌بارد.

نقیض: یا بهمن کارش را به پایان نرسانده است یا برف می‌بارد یا بهمن به بازی بسکتبال می‌رود.

۱۳.

	z	شکل ۱.۲ (الف)	شکل ۱.۲ (ب)
الف)	۲	۲۰	$۱۰ + ۱ = ۱۱$
ب)	۶	۲۰	$۱۰ + ۵ = ۱۵$
پ)	۹	۲۰	$۱۰ + ۸ = ۱۸$
ت)	۱۰	۲۰	$۱۰ + ۹ = ۱۹$
ث)	۱۵	۲۰	$۱۰ + ۱۰ = ۲۰$
ج)	$n > ۱۰$	۲۰	$۱۰ + ۱۰ = ۲۰$

۱۴.

p	q	$p \veebar q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$	$\neg(p \leftrightarrow q)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰

.۱۵

p	q	r	$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)]$	$[(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)]$
۰	۰	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱

.۱۶ الف)

p	q	$p \wedge q$	$q \to (p \wedge q)$	$p \to [q \to (p \wedge q)]$
۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱

ب) به‌جای هر p گزارهٔ $p \vee q$ را بگذارید. در این صورت، بنابر قاعدهٔ اول جایگذاری، راستگوی $(p \vee q) \to [q \to [(p \vee q) \wedge q]]$ را داریم: چون بنابر قوانین جذب داریم $q \Longleftrightarrow q \wedge (p \vee q)$، درنتیجه $(p \vee q) \to [q \to q] \Longleftrightarrow T_0$

پ)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$q \to (p \wedge q)$	$(p \vee q) \to [q \to (p \wedge q)]$
۰	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

بنابراین، گزارهٔ مفروض راستگو نیست. اگر کوشش کنیم قاعدهٔ دوم جایگذاری را در بارهٔ نتیجهٔ قسمت (الف) به‌کار ببریم، باید به‌جای اولین p، گزارهٔ $p \vee q$ را بگذاریم. ولی این کار به پیدایش یک گزارهٔ راستگو منجر نمی‌شود؛ زیرا این عمل کاربرد معتبری از این قاعدهٔ جایگذاری نیست (چراکه p و $p \vee q$ منطقاً هم‌ارز نیستند).

.۱۷ الف) $\neg p \Longleftrightarrow (p \mid p)$

ب) $p \vee q \Longleftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \Longleftrightarrow (\neg p \uparrow \neg q) \Longleftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \mid q)$

پ) $p \wedge q \Longleftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(p \mid q) \Longleftrightarrow (p \mid q) \mid (p \mid q)$

ت) $p \to q \Longleftrightarrow \neg p \vee q \Longleftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \Longleftrightarrow (p \mid \neg q) \Longleftrightarrow p \mid (q \mid q)$

ث) $p \leftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p) \Longleftrightarrow t \wedge u \Longleftrightarrow (t \mid u) \mid (t \mid u)$ که در آن t به‌جای $p \mid (q \mid q)$ و u به جای $(p \mid p) \mid q$ گذاشته شده است.

۱۸. الف) $\neg p \iff (p \downarrow p)$

ب) $p \vee q \iff \neg\neg(p \vee q) \iff \neg(p \downarrow q) \iff (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

پ) $p \wedge q \iff \neg\neg p \wedge \neg\neg q \iff (\neg p \downarrow \neg q) \iff (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

ت) $p \to q \iff \neg p \vee q \iff (\neg p \downarrow q) \downarrow (\neg p \downarrow q) \iff [(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$

ث) $p \leftrightarrow q \iff (r \downarrow r) \downarrow (s \downarrow s)$، که در آن r به‌جای $[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$ و s به‌جای $[(q \downarrow q) \downarrow p] \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow p]$ گذاشته شده است.

۱۹.

p	q	$\neg(p \downarrow q)$	$(\neg p \mid \neg q)$	$\neg(p \uparrow q)$	$(\neg p \downarrow \neg q)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

۲۰. الف)

	دلایل
$[(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)] \vee q$	
$\iff [p \vee (q \wedge \neg q)] \vee q$	قانون پخش‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$
$\iff (p \vee F_{\circ}) \vee q$	$q \wedge \neg q \iff F_{\circ}$ (قانون وارون)
$\iff p \vee q$	$p \vee F_{\circ} \iff p$ (قانون همانی)

ب)

	دلایل
$\neg(p \vee q) \wedge [(\neg p \wedge q) \vee \neg q]$	
$\iff \neg(p \vee q) \vee [\neg q \vee (\neg p \wedge q)]$	قانون تعویض‌پذیری $\vee$
$\iff \neg(p \vee q) \vee [(\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q)]$	قانون پخش‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$
$\iff \neg(p \vee q) \vee [(\neg q \vee \neg p) \wedge T_{\circ}]$	$\neg q \vee q \iff T_{\circ}$ (قانون وارون)
$\iff \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg p)$	قانون همانی
$\iff \neg(p \vee q) \vee \neg(q \wedge p)$	قوانین دمورگان
$\iff \neg[(p \vee q) \wedge (q \wedge p)]$	قوانین دمورگان
$\iff \neg[(q \wedge p) \wedge (p \vee q)]$	قانون تعویض‌پذیری $\wedge$
$\iff \neg[q \wedge [p \wedge (p \vee q)]]$	قانون شرکت‌پذیری $\wedge$
$\iff \neg(q \wedge p)$	قانون جذب

پ)

	دلایل
$(p \to q) \wedge [\neg q \wedge (r \vee \neg q)]$	
$\iff (p \to q) \wedge \neg q$	قانون جذب (و قانون تعویض‌پذیری $\vee$)
$\iff (\neg p \vee q) \wedge \neg q$	$p \to q \iff \neg p \vee q$
$\iff \neg q \wedge (\neg p \vee q)$	قانون تعویض‌پذیری $\wedge$
$\iff (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)$	قانون پخش‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$
$\iff (\neg q \wedge \neg p) \vee F_{\circ}$	قانون وارون
$\iff \neg q \wedge \neg p$	قانون همانی
$\iff \neg(q \vee p)$	قوانین دمورگان

۲۱. الف)

	دلایل
$p \vee [p \wedge (p \vee q)]$	
$\Longleftrightarrow p \vee p$	قانون جذب
$\Longleftrightarrow p$	قانون خودتوانی $\vee$

ب)

	دلایل
$p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$	
$\Longleftrightarrow (p \vee q) \vee [\neg(p \vee q) \wedge r]$	قوانین دمورگان
$\Longleftrightarrow [(p \vee q) \vee \neg(p \vee q)] \wedge (p \vee q \vee r)$	قانون پخش‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$
$\Longleftrightarrow T_0 \wedge (p \vee q \vee r)$	قانون وارون
$\Longleftrightarrow p \vee q \vee r$	قانون همانی

پ)

	دلایل
$[(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)]$	
$\Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge q \wedge r)$	$s \rightarrow t \Longleftrightarrow \neg s \vee t$
$\Longleftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (p \wedge q \wedge r)$	قوانین دمورگان
$\Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r)$	قانون نقیض مضاعف
$\Longleftrightarrow p \wedge q$	قانون جذب

ت)

	دلایل
$p \wedge \big[(\neg q \rightarrow (r \wedge r)) \vee \neg[q \vee ((r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s))]\big]$	
$\Longleftrightarrow p \wedge \big[(\neg q \rightarrow r) \vee \neg[q \vee ((r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s))]\big]$	قانون خودتوانی $\wedge$
$\Longleftrightarrow p \wedge \big[(\neg q \rightarrow r) \vee \neg[q \vee (r \wedge (s \vee \neg s))]\big]$	قانون پخش‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$
$\Longleftrightarrow p \wedge [(\neg q \rightarrow r) \vee \neg(q \vee (r \wedge T_0))]$	قانون وارون
$\Longleftrightarrow p \wedge [(\neg q \rightarrow r) \vee \neg(q \vee r)]$	قانون همانی
$\Longleftrightarrow p \wedge [(\neg\neg q \vee r) \vee \neg(q \vee r)]$	$t \rightarrow u \Longleftrightarrow \neg t \vee u$
$\Longleftrightarrow p \wedge [(q \vee r) \vee \neg(q \vee r)]$	قانون نقیض مضاعف
$\Longleftrightarrow p \wedge T_0$	قانون وارون
$\Longleftrightarrow p$	قانون همانی

۲۲. الف)

$$[p \wedge (\neg r \vee q \vee \neg q)] \vee [(r \vee t \vee \neg r) \wedge \neg q] \Longleftrightarrow [p \wedge (\neg r \vee T_0)] \vee [(T_0 \vee t) \wedge \neg q]$$

$$\Longleftrightarrow (p \wedge T_0) \vee (T_0 \wedge \neg q) \Longleftrightarrow p \vee \neg q$$

ب) با توجه به قانون جذب،

$$[p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r)] \wedge [(p \wedge r \wedge t) \vee t] \Longleftrightarrow p \wedge t$$

بند ۳.۲

۱. الف)

p	q	r	$p \rightarrow q$	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \rightarrow r$
۰	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

اعتبار این استدلال از نتایج آخرین سطر حاصل می‌شود. (می‌توان هفت سطر اول را نادیده گرفت.)

ب)

p	q	r	$(p \wedge q) \to r$	$\neg q$	$p \to \neg r$	$\neg p \vee \neg q$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰

اعتبار این استدلال از نتایج سطرهای ۱، ۲ و ۵ از این جدول حاصل می‌شود. می‌توان نتایج پنج سطر دیگر را نادیده گرفت.

پ)

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$[p \vee (q \vee r)] \wedge \neg q$	$p \vee r$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۰	۱

دو ستون آخر این جدول ارزش را درنظر بگیرید. می‌بینیم که وقتی ارزش راستی $[p \vee (q \vee r)] \wedge \neg q$ برابر با ۱ است، ارزش راستی $p \vee r$ نیز ۱ است. در نتیجه،

$$\big[[p \vee (q \vee r)] \wedge \neg q\big] \Rightarrow p \vee r$$

(سطرهایی از این جدول که برای تشخیص اعتبار استدلال نقش قاطع دارند عبارت‌اند از سطرهای ۲، ۵ و ۶. می‌توان سطرهای ۱، ۳، ۴، ۷ و ۸ را نادیده گرفت.)

۲. الف)

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

ب)

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$[(p \to q) \wedge \bar{q}] \to \neg p$
۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۰	۱

پ)

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$
۰	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۱

ت)

p	q	r	$p \to r$	$q \to r$	$\overbrace{(p \vee q) \to r}^{s}$	$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to s$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

۳. الف) اگر ارزش راستی p برابر با ۰ باشد، ارزش راستی $p \wedge q$ نیز چنین است.

ب) اگر ارزش راستی $p \vee q$ برابر با ۰ باشد، ارزش راستی p (و q) نیز برابر با ۰ است.

پ) اگر ارزش راستی q برابر با ۰ باشد، آنگاه بدون توجه به ارزش راستی p، ارزش راستی $[(p \vee q) \wedge \neg p]$ برابر با ۰ است.

ت) ارزش راستی گزارهٔ $q \vee s$ فقط وقتی ۰ است که ارزش راستی هر یک از دو گزارهٔ q و s برابر با ۰ باشد. دراین صورت وقتی ارزش راستی p برابر با ۰ است ارزش راستی $(p \to q)$ برابر با ۱ است؛ وقتی ارزش راستی r برابر با ۰ است، ارزش راستی $(r \to s)$ برابر با ۱ است. بنابراین، $(p \vee r)$ باید دارای ارزش راستی ۰ باشد، نه ۱.

ث) وقتی ارزش راستی هر دو گزارهٔ p و r برابر با ۱ است، ارزش راستی $(\neg p \vee \neg r)$ برابر با ۰ است. دراین صورت، برای آنکه ارزش راستی $(p \to q)$ و $(r \to s)$ برابر با ۱ باشد، q و s الزاماً دارای ارزش راستی ۱ هستند. ولی، این به ارزش راستی ۰ برای $(\neg q \vee \neg s)$ منجر می‌شود.

۴. الف) رؤیا دختر بیژن شمعهای اتومبیل را معاینه خواهد کرد. (قاعدهٔ قیاس استثنایی)
ب) آرین مسألهٔ نخست را درست حل نکرد. (قاعدهٔ نقیض انتزاع)
پ) این یک حلقهٔ repeat – until است. (قاعدهٔ قیاس استثنایی)
ت) بهمن عصر تلویزیون تماشا کرد. (قاعدهٔ نقیض انتزاع)
ث) گیتا عکسهای هومن را پاره کرد. (قاعدهٔ نقیض انتزاع)

۵. الف) قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
ب) نامعتبر (تلاش برای استدلال به‌وسیلهٔ عکس)
پ) قاعدهٔ نقیض انتزاع
ت) قاعدهٔ قیاس فصلی
ث) نامعتبر (تلاش برای استدلال به‌وسیلهٔ وارون)
ج) قانون قیاس صوری

۶. الف)

	مراحل	دلایل
(۱)	$q \wedge r$	مقدمه
(۲)	q	مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۳)	$q \vee r$	مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ تفصیل فصلی

در نتیجه، $(q \wedge r) \rightarrow (q \vee r)$ راستگوست یا $q \wedge r \Rightarrow q \vee r$.

ب) انتساب ارزشهای راستی $p : ۰$، $q : ۱$ و $r : ۰$ را درنظر بگیرید. به‌ازای این انتسابها، ارزش راستی $[p \wedge (q \wedge r)] \vee \neg[p \vee (q \wedge r)]$ برابر با ۱ است، درحالی‌که ارزش راستی $[p \wedge (q \vee r)] \vee \neg[p \vee (q \vee r)]$ برابر با ۰ است. بنابراین، $P \rightarrow P_۱$ راستگو نیست یا $P \not\Rightarrow P_۱$.

۷.

(۱)و(۲)	مقدمه
(۳)	مراحل (۱) و (۲) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۴)	مقدمه
(۵)	مرحلهٔ(۴)و $(q \rightarrow \neg r) \Longleftrightarrow (\neg\neg q \rightarrow \neg r) \Longleftrightarrow (r \rightarrow \neg q)$
(۶)	مراحل (۳) و (۵) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۷)	مقدمه
(۸)	مراحل (۶) و (۷) و قاعدهٔ قیاس فصلی
(۹)	مرحلهٔ (۸) و قاعدهٔ تفصیل فصلی

۸.

(۱) مقدمه

(۲) مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۳) مقدمه

(۴) مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۵) مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۶) مراحل (۴) و (۵) و قانون ترکیب عطفی

(۷) مقدمه

(۸) مرحلهٔ (۷) و $[r \to (s \vee t)] \iff [\neg(s \vee t) \to \neg r]$

(۹) مرحلهٔ (۸) و قوانین دمورگان

(۱۰) مراحل (۶) و (۹) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۱۱) مقدمه

(۱۲) مرحلهٔ (۱۱) و $[(\neg p \vee q) \to r] \iff [\neg r \to \neg(\neg p \vee q)]$

(۱۳) مرحلهٔ (۱۲) و قوانین دمورگان و قانون نقیض مضاعف

(۱۴) مراحل (۱۰) و (۱۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۱۵) مرحلهٔ (۱۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

۹. الف)

(۱) مقدمه (نقیض حکم)

(۲) مرحلهٔ (۱) و $\neg(\neg q \to s) \iff \neg(\neg\neg q \vee s) \iff \neg(q \vee s) \iff \neg q \wedge \neg s$

(۳) مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۴) مقدمه

(۵) مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ قیاس فصلی

(۶) مقدمه

(۷) مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۸) مراحل (۶) و (۷) و قاعدهٔ نقیض انتزاع

(۹) مقدمه

(۱۰) مراحل (۸) و (۹) و قاعدهٔ قیاس فصلی

(۱۱) مراحل (۵) و (۱۰) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

(۱۲) مرحلهٔ (۱۱) و روش برهان خلف

ب)

(۱)	$p \to q$	مقدمه
(۲)	$\neg q \to \neg p$	مرحلهٔ (۱)و$(p \to q) \iff (\neg q \to \neg p)$
(۳)	$p \lor r$	مقدمه
(۴)	$\neg p \to r$	مرحلهٔ (۳)و$(p \lor r) \iff (\neg p \to r)$
(۵)	$\neg q \to r$	مراحل (۲) و (۴) و قانون قیاس صوری
(۶)	$\neg r \lor s$	مقدمه
(۷)	$r \to s$	مرحلهٔ (۶)و$(\neg r \lor s) \iff (r \to s)$
(۸)	$\therefore \neg q \to s$	مراحل (۵) و (۷) و قانون قیاس صوری

پ)

(۱)	$\neg p \leftrightarrow q$	مقدمه
(۲)	$(\neg p \to q) \land (q \to \neg p)$	مرحلهٔ (۱)و$(\neg p \leftrightarrow q) \iff [(\neg p \to q) \land (q \to \neg p)]$
(۳)	$\neg p \to q$	مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۴)	$q \to r$	مقدمه
(۵)	$\neg p \to r$	مراحل (۳) و (۴) و قانون قیاس صوری
(۶)	$\neg r$	مقدمه
(۷)	$\therefore p$	مراحل (۵) و (۶) و قاعدهٔ نقیض انتزاع

۱۰. الف)

(۱)	$p \land \neg q$	مقدمه
(۲)	p	مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۳)	r	مقدمه
(۴)	$p \land r$	مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۵)	$\therefore (p \land r) \lor q$	مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ تفصیل فصلی

ب)

(۱)	$p, p \to q$	مقدمات
(۲)	q	مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۳)	$\neg q \lor r$	مقدمه
(۴)	$q \to r$	مرحلهٔ (۳)و$(q \to r) \iff \neg q \lor r$
(۵)	$\therefore r$	مراحل (۲) و (۴) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

پ)

(۱)	$p \to q, \neg q$	مقدمات
(۲)	$\neg p$	مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۳)	$\neg r$	مقدمه

(۴) $\neg p \wedge \neg r$ مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

(۵) $\therefore \neg(p \vee r)$ مرحلهٔ (۴) و قوانین دمورگان

ت)

(۱) $r, r \to \neg q$ مقدمات

(۲) $\neg q$ مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۳) $p \to q$ مقدمه

(۴) $\therefore \neg p$ مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ نقیض انتزاع

ث)

(۱) p مقدمه

(۲) $\neg q \to \neg p$ مقدمه

(۳) $p \to q$ مرحلهٔ (۲)و$(p \to q) \iff (\neg q \to \neg p)$

(۴) q مراحل (۱) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۵) $p \wedge q$ مراحل (۱) و (۴) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

(۶) $p \to (q \to r)$ مقدمه

(۷) $(p \wedge q) \to r$ مرحلهٔ (۶) و $[p \to (q \to r)] \iff [(p \wedge q) \to r]$

(۸) $\therefore r$ مراحل (۵) و (۷) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

ج)

(۱) $p \wedge q$ مقدمه

(۲) p مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۳) $p \to (r \wedge q)$ مقدمه

(۴) $r \wedge q$ مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۵) r مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی

(۶) $r \to (s \vee t)$ مقدمه

(۷) $s \vee t$ مراحل (۵) و (۶) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۸) $\neg s$ مقدمه

(۹) $\therefore t$ مراحل (۷) و (۸) و قاعدهٔ قیاس فصلی

چ)

(۱) $\neg s, p \vee s$ مقدمات

(۲) p مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ قیاس فصلی

(۳) $p \to (q \to r)$ مقدمه

(۴) $q \to r$ مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

(۵) $t \to q$ مقدمه

(۶) $t \to r$ مراحل (۴) و (۵) و قانون قیاس صوری

(۷) $\therefore \neg r \to \neg t$ مرحلهٔ (۶)و $(t \to r) \iff (\neg r \to \neg t)$

ح)

(۱) $\neg p \vee r$ مقدمه

(۲) $p \to r$ مرحلهٔ (۱)و $(p \to r) \iff (\neg p \vee r)$

(۳) $\neg r$ مقدمه

(۴) $\neg p$ مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ نقیض انتزاع

(۵) $p \vee q$ مقدمه

(۶) $\neg p \to q$ مرحلهٔ (۵)و $(p \vee q) \iff (\neg\neg p \vee q) \iff (\neg p \to q)$

(۷) $\therefore q$ مراحل (۴) و (۶) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

۱۱. الف) p : ۱ q : ۰ r : ۱

ب) p : ۰ q : ۰ r : ۰ یا ۱

p : ۰ q : ۱ r : ۱

پ) p, q, r : ۱ s : ۰

ت) p, q, r : ۱ s : ۰

۱۲. الف) بهروز استاد راهنما می‌شود : p

بهروز تلاش می‌کند : q

بهروز افزایش حقوق دارد : r

بهروز اتومبیل نو می‌خرد : s

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \to r \\ r \to s \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg p \vee \neg q \end{array}$$

(۱) $\neg s$ مقدمه

(۲) $r \to s$ مقدمه

(۳) $\neg r$ مراحل (۱) و (۲) و قاعدهٔ نقیض انتزاع

(۴) $(p \wedge q) \to r$ مقدمه

(۵) $\neg(p \wedge q)$ مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ نقیض انتزاع

(۶) $\therefore \neg p \vee \neg q$ مرحلهٔ (۵) و $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$

ب) آرین به میدان اسب‌دوانی می‌رود : p

رؤیا عصبانی می‌شود : q

آرمان تمام شب را بازی می‌کند : r

مژگان عصبانی می‌شود : s

رضا مطلع می‌شود : t

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ (q \vee s) \rightarrow t \\ \neg t \\ \hline \therefore \neg p \wedge \neg r \end{array}$$

(۱)	$\neg t$	مقدمه
(۲)	$(q \vee s) \rightarrow t$	مقدمه
(۳)	$\neg(q \vee s)$	مراحل (۱) و (۲) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۴)	$\neg q \wedge \neg s$	مرحلهٔ (۳) و $\neg(q \vee s) \Longleftrightarrow \neg q \wedge \neg s$
(۵)	$\neg q$	مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۶)	$p \rightarrow q$	مقدمه
(۷)	$\neg p$	مراحل (۵) و (۶) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۸)	$\neg s$	مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۹)	$r \rightarrow s$	مقدمه
(۱۰)	$\neg r$	مراحل (۸) و (۹) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۱۱)	$\therefore \neg p \wedge \neg r$	مراحل (۷) و (۱۰) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

پ) آریا به جلسهٔ سه‌شنبه صبح می‌رود : p

آریا سه‌شنبه صبح زود بیدار می‌شود : q

آریا دوشنبه شب به مهمانی می‌رود : r

آریا بعد از ساعت ۱۱ شب (دوشنبه شب) به خانه باز می‌گردد : s

آریا با کمتر از هفت ساعت خواب سرکار حاضر می‌شود : t

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ (s \wedge q) \rightarrow t \\ \neg t \\ \hline \therefore \neg r \vee \neg p \end{array}$$

(۱)	$(s \wedge q) \to t$	مقدمه
(۲)	$\neg t$	مقدمه
(۳)	$\neg(s \wedge q)$	مراحل (۱) و (۲) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۴)	$\neg s \vee \neg q$	مرحلهٔ (۳)و $\neg(s \wedge q) \iff \neg s \vee \neg q$
(۵)	$p \to q$	مقدمه
(۶)	$r \to s$	مقدمه
(۷)	$\therefore \neg r \vee \neg p$	مراحل (۵)، (۶) و (۴) و قاعدهٔ ذوالوجهین مخرب

ت) احتمال باران آمدن هست : p

ریحانه نوار قرمز دور سرش را گم می‌کند : q

ریحانه چمنهای باغچه را نمی‌چیند : r

دما بالای ۸۰ درجهٔ فارنهایت است : s

$$
\begin{array}{l}
(p \vee q) \to r \\
s \to \neg p \\
\underline{s \wedge \neg q} \\
\therefore \neg r
\end{array}
$$

انتساب ارزشهای راستی زیر مثالی نقض برای رد اعتبار این استدلال به‌دست می‌دهد: p : ۰، q : ۰، r : ۱، s : ۱.

بند ۴.۲

۱. الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست
ث) نادرست ج) درست چ) نادرست ح) نادرست
خ) نادرست

۲. الف) (یک) درست (دو) نادرست (سه) درست
(چهار) درست (پنج) درست (شش) نادرست

ب) تنها مقداری برای x که ازگزارهٔ باز $[p(x) \wedge q(x)] \wedge r(x)$ گزارهٔ درستی می‌سازد مقدار ۲ است.

پ) کوچکترین پنج عدد صحیح مثبتی که از $p(x) \to [\neg q(x) \wedge r(x)]$ گزارهٔ درستی می‌سازند عبارت‌اند از ۱، ۳، ۴، ۵ و ۶.

۳. گزاره‌های (الف)، (پ) و (ث) درست وگزاره‌های (ب)، (ت) و (ج) نادرست‌اند.

۴. الف) هر چندضلعی یا چهارضلعی است یا مثلث (ولی نه هر دو). (درست، البته نسبت به عالم مورد بحث.)

ب) هر مثلث متساوی‌الساقین متساوی‌الاضلاع است. (نادرست)
پ) مثلثی وجود دارد که یکی از زاویه‌های داخلی آن بزرگتر از 180° است. (نادرست)
ت) اگر همهٔ زاویه‌های یک چهارضلعی برابر باشند، آنگاه این چندضلعی یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. (نادرست)
ث) همهٔ زاویه‌های یک مثلث برابرند اگر و فقط اگر آن مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. (درست)
ج) چهارضلعی‌ای وجود دارد که مستطیل نیست. (درست)
چ) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست. (درست)
ح) اگر همهٔ ضلعهای یک چندضلعی برابر باشند، آنگاه این چندضلعی یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. (نادرست)
خ) اگر همهٔ ضلعهای یک چهارضلعی برابر باشند، آنگاه این چهارضلعی یک مربع است. (نادرست)
د) چهارضلعی‌ای وجود دارد که یکی از زاویه‌های داخلی آن بزرگتر از 180° است. (درست)
ذ) مثلثی وجود ندارد که یک زاویهٔ داخلی بزرگتر از 180° داشته باشد. (درست)
ر) اگر همهٔ زاویه‌های داخلی یک چندضلعی برابر باشند، آنگاه این چندضلعی مثلث متساوی‌الاضلاع یا مستطیل است. (درست، البته نسبت به عالم مورد بحث.)

.۵

الف) $\exists x[m(x) \wedge c(x) \wedge j(x)]$ درست

ب) $\exists x[s(x) \wedge c(x) \wedge \neg m(x)]$ درست

پ) $\forall x[c(x) \rightarrow (m(x) \veebar p(x))]$ نادرست

ت) $\forall x[(g(x) \wedge c(x)) \rightarrow \neg p(x)]$ درست

یا

$\forall x[(p(x) \wedge c(x)) \rightarrow \neg g(x)]$

یا

$\forall x[(g(x) \wedge p(x)) \rightarrow \neg c(x)]$

ث) $\forall x[(c(x) \wedge s(x)) \rightarrow (p(x) \veebar e(x))]$ درست

ج) $\exists x[g(x) \wedge \neg m(x) \wedge \neg p(x)]$

یا

$\exists x[g(x) \wedge \neg(m(x) \vee p(x))]$ درست

.۶ الف) درست ب) درست پ) نادرست
ت) درست ث) نادرست ج) نادرست

۷. الف)

(یک) $\exists x q(x)$

(دو) $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$

(سه) $\forall x[q(x) \rightarrow \neg t(x)]$

(چهار) $\forall x[q(x) \rightarrow \neg t(x)]$

(پنج) $\exists x[q(x) \wedge t(x)]$

(شش) $\forall x[(q(x) \wedge r(x)) \rightarrow s(x)]$

ب) گزاره‌های (یک)، (چهار) و (پنج) درست‌اند. گزاره‌های (دو) و (سه) نادرست‌اند: $x = ۱۰$ مثالی نقض برای هر یک از این گزاره‌ها به‌دست می‌دهد.

پ) (یک) اگر x مجذور کامل باشد، آنگاه $x > ۰$.

(دو) اگر x بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آنگاه x زوج است.

(سه) اگر x بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آنگاه x بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

(چهار) عدد صحیحی وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر است ولی مجذور کامل نیست.

ت) (یک) فرض کنید $x = ۰$. (سه) فرض کنید $x = ۲۰$.

۸. الف) درست ب) نادرست: به‌ازای $x = ۱$، $q(x)$ درست و $p(x)$ نادرست است.

پ) درست ت) درست ث) درست

ج) درست چ) درست ح) درست

خ) درست د) نادرست: به‌ازای $x = -۱$، $(p(x) \vee q(x))$ درست و $r(x)$ نادرست است.

۹. الف) (یک) درست (دو) نادرست ($x = ۳$ را درنظر بگیرید.)

(سه) درست (چهار) درست

ب) (یک) درست (دو) نادرست ($x = ۳$ را درنظر بگیرید.)

(سه) درست (چهار) درست

پ) (یک) درست (دو) درست

(سه) درست (چهار) نادرست (به‌ازای $x = ۲$ یا $x = ۵$، ارزش راستی $p(x)$ برابر با ۱ و ارزش راستی $r(x)$ برابر با ۰ است.)

۱۰. الف) $\forall m, n \ A[m,n] > ۰$

ب) $\forall m, n \ ۰ < A[m,n] \leq ۷۰$

پ) $\exists m, n \ A[m,n] > ۶۰$

ت) $\forall m \ [(۱ \leq n < ۱۹) \rightarrow (A[m,n] < A[m,n+۱])]$

ث) $\forall n \ [(۱ \leq m < ۹) \rightarrow (A[m,n] < A[m+۱,n])]$

ج) $\forall ۱ \le m, i \le ۳ \, \forall ۱ \le n, j \le ۲۰ [((m,n) \neq (i,j)) \rightarrow (A[m,n] \neq A[i,j])]$

چ) $\forall ۱ \le m \le ۸ \, \forall m \le i, j \le m+۲ \, \forall ۱ \le k, l \le ۱۰ [((i,k) \neq (j,l)) \rightarrow$
$(A[i,k] \neq A[j,l])]$

ح) $\forall ۱ \le m \le ۹ \left[\sum_{j=۱}^{۲۰} A[m,j] + ۲۰ = \sum_{j=۱}^{۲۰} A[m+۱, j] \right]$

۱۱. الف) هر دو متغیر x و y مقیدند. متغیر آزاد وجود ندارد.

ب) متغیر x آزاد است، درحالی‌که متغیرهای y و z مقیدند.

پ) متغیرهای x و y مقیدند. متغیر z آزاد است.

ت) متغیر x مقید و متغیر y آزاد است.

۱۲. الف) (یک) نادرست (دو) نادرست، زیرا ۷ عدد ۳ را نمی‌شمارد.

(سه) درست (چهار) درست (پنج) اگر $x = ۰$ گزاره نادرست است.

(شش) اگر $x = ۰$، گزاره نادرست است. (هفت) درست

(هشت) نادرست (اگر $y = ۰$، آن‌گاه $x \neq ۰$؛ اگر $y \neq ۰$، فرض کنید $x = ۲y$.)

(نه) نادرست (مثلاً فرض کنید $x = ۲$ و $y = -۲$.)

(ده) درست

ب) اکنون گزاره‌های (پنج)، (شش) و (نه) درست‌اند (زیرا عالم عوض شده است).

پ) (یک) درست (دو) درست (سه) درست

(چهار) نادرست (به‌ازای هر y، $x = ۲y$ را درنظر بگیرید.)

۱۳. الف) $p(۲,۵) \vee p(۳,۵) \vee p(۵,۵)$

ب) $p(۲,۳) \wedge p(۳,۳) \wedge p(۵,۳)$

پ) $p(۲,۲) \wedge p(۲,۳) \wedge p(۲,۵)$

ت) $[p(۲,۲) \vee p(۲,۳) \vee p(۲,۵)] \vee [p(۳,۲) \vee p(۳,۳) \vee p(۳,۵)] \vee [p(۵,۲) \vee p(۵,۳) \vee p(۵,۵)]$

ث) $[p(۲,۲) \wedge p(۲,۳) \wedge p(۲,۵)] \wedge [p(۳,۲) \wedge p(۳,۳) \wedge p(۳,۵)] \wedge [p(۵,۲) \wedge p(۵,۳) \wedge p(۵,۵)]$

ج) $[p(۲,۲) \vee p(۳,۲) \vee p(۵,۲)] \wedge [p(۲,۳) \vee p(۳,۳) \vee p(۵,۳)] \wedge [p(۲,۵) \vee p(۳,۵) \vee p(۵,۵)]$

۱۴. گزاره‌های (الف)، (ب)، (ث)، (ج) و (چ) گزاره‌های منطقاً هم‌ارزند و هریک از آنها را می‌توان با $\forall n[q(n) \rightarrow p(n)]$ بیان کرد. گزاره‌های (پ)، (ح) و (خ) نیز با یکدیگر منطقاً هم‌ارزند و هر یک از این سه گزاره را می‌توان با $\forall n[p(n) \rightarrow q(n)]$ بیان کرد. گزارهٔ (ت) با هیچ‌یک از هشت گزارهٔ دیگر منطقاً هم‌ارز نیست.

۱۵. الف) نقیض پیشنهادی صحیح و گزارهٔ درستی است.

ب) نقیض پیشنهادی غلط است. صورت صحیح نقیض چنین است: به‌ازای هر دو عدد صحیح گویای x و y، مجموع $x + y$ عددی گویاست. این صورت صحیح نقیض، گزارهٔ درستی است.

پ) نقیض پیشنهادی صحیح، ولی گزاره‌ای نادرست است. گزارهٔ اصلی درست است.

ت) نقیض پیشنهادی غلط است. صورت صحیح نقیض چنین است: به‌ازای هر دو عدد صحیح x و y، اگر x و y فرد باشند، آن‌گاه xy زوج است. گزارهٔ اصلی درست است.

ث) نقیض پیشنهادی غلط است. صورت صحیح نقیض چنین است: عدد گویایی وجود دارد که مجذور آن گنگ است. گزارهٔ اصلی درست است.

۱۶. الف) رشتهٔ اصلی یکی از دانشجویان کلاس درس پاسکال استاد خرسند، نه علوم کامپیوتر است نه ریاضیات.

ب) اگر دانشجویی در کلاس درس پاسکال استاد خرسند باشد، آنگاه رشتهٔ اصلی این دانشجو تاریخ نیست یا، هیچ‌یک از دانشجویانی که رشتهٔ اصلیشان تاریخ است، دانشجوی کلاس درس پاسکال استاد خرسند نیست.

پ) هیچ‌یک از دانشجویان کلاس درس پاسکال استاد خرسند همهٔ مقاله‌های پژوهشی او را دربارهٔ ساختمان داده‌ها نخوانده است یا، هیچ‌یک از دانشجویانی که همهٔ مقاله‌های پژوهشی استاد خرسند را دربارهٔ ساختمان داده‌ها خوانده است در کلاس درس پاسکال او ثبت‌نام نکرده است.

۱۷. الف) عدد صحیحی مانند n وجود دارد که بر ۲ بخش‌پذیر نیست ولی زوج است (یعنی فرد نیست).

ب) به‌ازای عدد صحیحی مانند n، $n^۲$ فرد و n زوج است (یعنی فرد نیست).

پ) اعداد صحیحی مانند k، m و n وجود دارند به‌طوری‌که $k - m$ و $m - n$ فردند و $k - n$ نیز فرد است.

ت) به‌ازای عددی حقیقی مانند x، $x^۲ > ۱۶$ ولی $-۴ \leq x \leq ۴$ (یعنی $-۴ \leq x$ و $x \leq ۴$).

ث) عددی حقیقی مانند x وجود دارد به‌طوری‌که $|x - ۳| < ۷$ و یا $x \leq -۴$ یا $x \geq ۱۰$.

۱۸. الف) $\forall x[\neg p(x) \wedge \neg q(x)]$

ب) $\exists x[\neg p(x) \vee q(x)]$

پ) $\exists x[p(x) \wedge \neg q(x)]$

ت) $\forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \neg r(x)]$

۱۹. الف) گزاره: به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n، اگر $m > n$، آنگاه $m^۲ > n^۲$. (درست)

عکس: به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n، اگر $m^۲ > n^۲$، آنگاه $m > n$. (درست)

وارون: به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n، اگر $m \leq n$، آنگاه $m^۲ \leq n^۲$. (درست)

عکس نقیض: به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n، اگر $m^۲ \leq n^۲$، آنگاه $m \leq n$. (درست)

ب) گزاره: به‌ازای هر دو عدد صحیح a و b، اگر $a > b$، آنگاه $a^۲ > b^۲$. (نادرست. فرض کنید $a = ۱$ و $b = -۲$.)

عکس: به‌ازای هر دو عدد صحیح a و b، اگر $a^۲ > b^۲$، آنگاه $a > b$. (نادرست. فرض کنید $a = -۵$ و $b = ۳$.)

وارون: به‌ازای هر دو عدد صحیح a و b، اگر $a \leq b$، آنگاه $a^۲ \leq b^۲$. (نادرست. فرض کنید $a = -۵$ و $b = ۳$.)

عکس نقیض: به‌ازای هر دو عدد صحیح a و b، اگر $a^۲ \leq b^۲$، آنگاه $a \leq b$. (نادرست. فرض کنید $a = ۱$ و $b = -۲$.)

پ) گزاره: به‌ازای هر سه عدد صحیح m، n و p، اگر m عدد n و n عدد p را بشمارد، آنگاه m عدد p را می‌شمارد. (درست)

عکس: به‌ازای هر دو عدد صحیح m و p، اگر m عدد p را بشمارد، آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح n نتیجه می‌شود که m عدد n و n عدد p را می‌شمارد. (نادرست. فرض کنید $m = ۱$، $n = ۲$ و $p = ۳$.)

وارون: به‌ازای هر سه عدد صحیح m، n و p، اگر m عدد n یا n عدد p را نشمارد، آنگاه m عدد p را نمی‌شمارد. (نادرست. فرض کنید $m = ۱$، $n = ۲$ و $p = ۳$.)

عکس نقیض: به‌ازای هر دو عدد صحیح m و p، اگر m عدد p را نشمارد، آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح n نتیجه می‌شود که m عدد n یا n عدد p را نمی‌شمارد. (درست)

ت) گزاره: $\forall x[(x > ۳) \to (x^۲ > ۹)]$ (درست)

عکس: $\forall x[(x^۲ > ۹) \to (x > ۳)]$ (نادرست. فرض کنید $x = -۵$.)

وارون: $\forall x[(x \leq ۳) \to (x^۲ \leq ۹)]$ (نادرست. فرض کنید $x = -۵$.)

عکس نقیض: $\forall x[(x^۲ \leq ۹) \to (x \leq ۳)]$ (درست)

ث) گزاره: هر عدد صحیحی که بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد بر ۴ نیز بخش‌پذیر است. (درست)

عکس: هر عدد صحیحی که بر ۴ بخش‌پذیر باشد بر ۱۲ نیز بخش‌پذیر است. (نادرست. عدد صحیح ۸ را درنظر بگیرید.)

وارون: اگر عدد صحیحی بر ۱۲ بخش‌پذیر نباشد، آنگاه بر ۴ بخش‌پذیر نیست. (نادرست. عدد صحیح ۸ را درنظر بگیرید.)

عکس نقیض: اگر عدد صحیحی بر ۴ بخش‌پذیر نباشد آنگاه بر ۱۲ بخش‌پذیر نیست. (درست)

ج) گزاره. $\forall x[(x^۲ + ۴x - ۲۱ > ۰) \to [(x > ۳) \vee (x < -۷)]]$ (درست)

عکس: $\forall x[[(x > ۳) \vee (x < -۷)] \to (x^۲ + ۴x - ۲۱ > ۰)]$ (درست)

وارون: $\forall x\big[(x^۲ + ۴x - ۲۱ \leq ۰) \to [(x \leq ۳) \wedge (x \geq -۷)]]$ یا $\forall x[(x^۲ + ۴x - ۲۱ \leq ۰) \to (-۷ \leq x \leq ۳)]$ (درست)

عکس نقیض: $\forall x[[(x \leq ۳) \wedge (x \geq -۷)] \to (x^۲ + ۴x - ۲۱ \leq ۰)]$ یا $\forall x[(-۷ \leq x \leq ۳) \to (x^۲ + ۴x - ۲۱ \leq ۰)]$ (درست)

۲۰. برای هر یک از پاسخهای زیر این امکان وجود دارد که جای استلزام مفروض و عکس نقیض آن را عوض کرد. اگر این کار انجام گیرد، باید جای عکس و وارون متناظر را نیز عوض کرد.

الف) استلزام: اگر عدد صحیح مثبتی بر ۲۱ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۷ بخش‌پذیر است. (درست)

عکس: اگر عدد صحیح مثبتی بر ۷ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۲۱ بخش‌پذیر است. (نادرست. عدد صحیح مثبت ۱۴ را درنظر بگیرید.)

وارون: اگر عدد صحیح مثبتی بر ۲۱ بخش‌پذیر نباشد، آنگاه بر ۷ بخش‌پذیر نیست. (نادرست. عدد صحیح مثبت ۱۴ را درنظر بگیرید.)

عکس نقیض: اگر عدد صحیح مثبتی بر ۷ بخش‌پذیر نباشد، آنگاه بر ۲۱ بخش‌پذیر نیست. (درست)

ب) استلزام: اگر شخصی خوشحال باشد، آنگاه یک کیف بزرگ حاوی اوراق بهادار دارد.

عکس: اگر شخصی یک کیف بزرگ حاوی اوراق بهادار داشته باشد، آنگاه این شخص خوشحال است.

وارون: اگر شخصی خوشحال نباشد، آن‌گاه کیف بزرگی حاوی اوراق بهادار ندارد.
عکس نقیض: اگر شخصی کیف بزرگی حاوی اوراق بهادار نداشته باشد، آن‌گاه این شخص خوشحال نیست.

پ) استلزام: اگر ماری مارکبرا باشد، آن‌گاه این مار خطرناک است.
عکس: اگر ماری خطرناک باشد، آن‌گاه این مار، مارکبراست.
وارون: اگر ماری مارکبرا نباشد، آن‌گاه این مار خطرناک نیست.
عکس نقیض: اگر ماری خطرناک نباشد، آن‌گاه این مار، مارکبرا نیست.

ت) استلزام: به‌ازای هر عدد مختلط مانند z، اگر z^2 حقیقی باشد، آن‌گاه z حقیقی است. (نادرست. فرض کنید $z = i$.)
عکس: به‌ازای هر عدد مختلط مانند z، اگر z حقیقی باشد، آن‌گاه z^2 حقیقی است. (درست)
وارون: به‌ازای هر عدد مختلط مانند z، اگر z^2 حقیقی نباشد، آن‌گاه z حقیقی نیست. (درست)
عکس نقیض: به‌ازای هر عدد مختلط مانند z، اگر z حقیقی نباشد، آن‌گاه z^2 حقیقی نیست. (نادرست. فرض کنید $z = i$.)

۲۱. الف) درست ب) نادرست پ) نادرست
ت) درست ث) درست ج) نادرست

۲۲. الف) درست ب) نادرست پ) درست
ت) درست ث) درست ج) درست

۲۳. الف) $\forall a \exists b[a + b = b + a = 0]$
ب) $\exists u \forall a[au = ua = a]$
پ) $\forall a \neq 0 \exists b[ab = ba = 1]$
ت) گزارهٔ قسمت (ب) درست باقی می‌ماند، ولی به‌ازای این عالم جدید، گزارهٔ قسمت (پ) دیگر درست نیست.

۲۴. الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست

۲۵. الف) $\exists x \exists y[(x > y) \wedge (x - y \leq 0)]$
ب) $\exists x \exists y[(x > 0) \wedge (y = \log_{10} x) \wedge x \neq 10^y]$
پ) $\exists x \exists y[(x < y) \wedge \forall z[x \geq z \vee z \geq y]]$
ت) $\exists x \exists y[(|x| = |y|) \wedge (y \neq \pm x)]$
ث) $[\forall x \forall y((x > 0) \wedge (y > 0))] \wedge [\forall z(xz \leq y)]$

۲۶. الف) (یک) $\forall x[x \neq 0 \rightarrow \exists! y(xy = 1)]$
(دو) $\forall x \forall y \exists! z(z = x + y)$
(سه) $\forall x \exists! y(y = 3x + 7)$
ب) (یک) نادرست (دو) درست

پ) (یک) درست (دو) درست

ت) وقتی عالم مورد بحث عبارت باشد از اعداد صحیح ۰، ۱ و ۲، گزارهٔ p درست است. برای عالم متشکل از ۲، ۳ و ۴، این گزاره نادرست است.

۲۷. $\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} \neq L \Longleftrightarrow \exists\epsilon > ۰ \forall k > ۰ \exists n[(n > k) \wedge \left|\frac{r}{n} - L\right| \geq \epsilon]$

بند ۵.۲

۱. گرچه می‌توانیم بنویسیم $۱۶ + ۴ + ۴ + ۴ = ۱ + ۱ + ۱ + ۲۵ = ۲۸$، ولی راهی برای بیان ۲۸ به‌صورت مجموع حداکثر سه مجذور کامل وجود ندارد.

۲. گرچه $۱ + ۱ + ۱ = ۳$ و $۱ + ۴ = ۵$، ولی وقتی به ۷ می‌رسیم مشکلی پیش می‌آید. می‌توانیم بنویسیم $۱ + ۱ + ۱ + ۴ = ۷$، ولی نمی‌توانیم ۷ را به‌صورت مجموع سه مجذور کامل یا کمتر بنویسیم. [در مورد عددهای صحیح ۱۵ و ۲۳ نیز مشکل داریم.]

۳. می‌بینیم که

$۵۰ = ۲۵ + ۲۵$	$۴۰ = ۳۶ + ۴$	$۳۰ = ۲۵ + ۴ + ۱$
$۵۲ = ۳۶ + ۱۶$	$۴۲ = ۲۵ + ۱۶ + ۱$	$۳۲ = ۱۶ + ۱۶$
$۵۴ = ۲۵ + ۲۵ + ۴$	$۴۴ = ۳۶ + ۴ + ۴$	$۳۴ = ۲۵ + ۹$
$۵۶ = ۳۶ + ۱۶ + ۴$	$۴۶ = ۳۶ + ۹ + ۱$	$۳۶ = ۳۶$
$۵۸ = ۴۹ + ۹$	$۴۸ = ۱۶ + ۱۶ + ۱۶$	$۳۸ = ۳۶ + ۱ + ۱$

۴.

$۲۸ = ۲۳ + ۵$	$۱۶ = ۱۳ + ۳$	$۴ = ۲ + ۲$
$۳۰ = ۱۷ + ۱۳$	$۱۸ = ۱۳ + ۵$	$۶ = ۳ + ۳$
$۳۲ = ۱۹ + ۱۳$	$۲۰ = ۱۷ + ۳$	$۸ = ۳ + ۵$
$۳۴ = ۱۷ + ۱۷$	$۲۲ = ۱۷ + ۵$	$۱۰ = ۵ + ۵$
$۳۶ = ۱۹ + ۱۷$	$۲۴ = ۱۷ + ۷$	$۱۲ = ۷ + ۵$
$۳۸ = ۱۹ + ۱۹$	$۲۶ = ۱۹ + ۷$	$۱۴ = ۷ + ۷$

۵. الف) عدد حقیقی π عددی صحیح نیست.

ب) سپیده نظام طبقه‌بندی کتابخانهٔ ملی را می‌داند.

پ) همهٔ مدیران اداری می‌دانند چگونه از اختیارات خود استفاده کنند.

ت) چهارضلعی $MNPQ$ چهار زاویهٔ برابر ندارد.

ث) بهنام از خوردن جگر سیاه اجتناب می‌کند.

۶. الف) معتبر. این استدلال از قاعدهٔ تخصیص و قاعدهٔ قیاس استثنایی نتیجه می‌شود.

ب) نامعتبر (تلاش برای استدلال به‌وسیلهٔ عکس).

پ) نامعتبر (تلاش برای استدلال به‌وسیلهٔ وارون).

ت) نامعتبر (تلاش برای استدلال به‌وسیلهٔ عکس).

۷. الف) وقتی گزارهٔ $\exists x[p(x) \vee q(x)]$ درست باشد، حداقل یک عنصر مانند c از عالم مورد بحث وجود دارد به‌طوری‌که $p(c) \vee q(c)$ درست است. بنابراین، ارزش راستی حداقل یکی از دو گزارهٔ $p(c)$ و $q(c)$ برابر با ۱ است؛ پس دست‌کم یکی از دو گزارهٔ $\exists xp(x)$ و $\exists xq(x)$ درست است. بنابراین، نتیجه می‌شود که $\exists xp(x) \vee \exists xq(x)$ درست است و $\exists x[p(x) \vee q(x)] \Longrightarrow \exists xp(x) \vee \exists xq(x)$. برعکس، اگر $\exists xp(x) \vee \exists xq(x)$ درست باشد، دراین صورت به‌ازای عنصرهایی مانند a و b از عالم مورد بحث، ارزش راستی دست‌کم یکی از دوگزارهٔ $p(a)$ و $q(b)$ برابر با ۱ است. بدون کاستن از کلیت، فرض کنیم ارزش راستی $p(a)$ برابر با ۱ باشد. دراین صورت ارزش راستی $p(a) \vee q(a)$ برابر با ۱ است؛ پس $\exists x[p(x) \vee q(x)]$ گزارهٔ درستی است و $\exists xp(x) \vee \exists xq(x) \Longrightarrow \exists x[p(x) \vee q(x)]$.

ب) نخست ببینیم چه‌وقت گزارهٔ $\forall x[p(x) \wedge q(x)]$ درست است. این وضعیت زمانی روی می‌دهد که به‌ازای هر a از عالم مورد بحث، $p(a) \wedge q(a)$ درست باشد. دراین صورت به‌ازای هر a از عالم، $p(a)$ (و نیز $q(a)$) درست است؛ پس گزاره‌های $\forall xp(x)$ و $\forall xq(x)$ درست‌اند. بنابراین، گزارهٔ $\forall xp(x) \wedge \forall xq(x)$ درست است و $\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Longrightarrow \forall xp(x) \wedge \forall xq(x)$. برعکس، فرض کنیم $\forall xp(x) \wedge \forall xq(x)$ گزارهٔ درستی باشد. دراین صورت هر دو گزارهٔ $\forall xp(x)$ و $\forall xq(x)$ درست‌اند: اکنون فرض کنیم c عنصر دلخواهی از عالم مورد بحث باشد. دراین صورت هر سه گزارهٔ $p(c)$، $q(c)$ و $p(c) \wedge q(c)$ درست‌اند. چون c به دلخواه انتخاب شده بود، نتیجه می‌شود که گزارهٔ $\forall x[p(x) \wedge q(x)]$ درست است و $\forall xp(x) \wedge \forall xq(x) \Longrightarrow \forall x[p(x) \wedge q(x)]$.

۸. الف) فرض کنیم گزارهٔ $\forall xp(x) \vee \forall xq(x)$ درست باشد. همچنین، بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد گزارهٔ $\forall xp(x)$ نیز درست است. دراین صورت به‌ازای هر c از عالم مفروض، $p(c)$ و $p(c) \vee q(c)$ درست‌اند. بنابراین، $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ درست است و $\forall xp(x) \vee \forall xq(x) \Longrightarrow \forall x[p(x) \vee q(x)]$.

ب) برای عالم همهٔ اعداد صحیح غیرصفر فرض کنیم

$$p(x) : x > ۰ \qquad \text{و} \qquad q(x) : x < ۰$$

دراین صورت $\forall xp(x)$ و $\forall xq(x)$ نادرست‌اند؛ پس $\forall xp(x) \vee \forall xq(x)$ نادرست است، درحالی‌که $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ درست است.

۹. (۱) مقدمه
(۲) مقدمه
(۳) مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ تخصیص
(۴) مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ تخصیص
(۵) مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۶) مراحل (۵) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۷) مرحلهٔ (۶) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۸) مرحلهٔ (۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۹) مراحل (۷) و (۸) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

(۱۰) مرحلهٔ (۹) و قاعدهٔ تعمیم.

۱۰. (۴) مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ تخصیص

(۵) مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ قیاس فصلی

(۶) مقدمه

(۷) مرحلهٔ (۶) و قاعدهٔ تخصیص

(۸) مرحلهٔ (۷) و $q(a) \to r(a) \iff \neg q(a) \vee r(a)$

(۹) مراحل (۵) و (۸) و قاعدهٔ قیاس استثنایی (یا قاعدهٔ انتزاع)

(۱۰) مقدمه

(۱۱) مرحلهٔ (۱۰) و قاعدهٔ تخصیص

(۱۲) مرحلهٔ (۱۱) و $r(a) \to \neg s(a) \iff \neg\neg r(a) \to \neg s(a) \iff s(a) \to \neg r(a)$

(۱۳) مراحل (۹) و (۱۲) و قاعدهٔ قیاس استثنایی (یا قاعدهٔ انتزاع)

۱۱. گزاره‌های باز زیر را درنظر بگیرید:

$w(x)$: x برای این اتحادیهٔ اعتباری کار می‌کند

$\ell(x)$: x فرمهای وام را می‌نویسد

$c(x)$: x کوبول می‌داند

$q(x)$: x کواترو می‌داند

فرض کنیم r رامین و i یاسمن را نشان دهد.

استدلال مفروض به‌صورت زیر در قالب نمادها بیان می‌شود:

$$\begin{array}{l}
\forall x[w(x) \to c(x)] \\
\forall x[(w(x) \wedge \ell(x)) \to q(x)] \\
w(r) \wedge \neg q(r) \\
q(i) \wedge \neg c(i) \\
\hline
\therefore \neg \ell(r) \wedge \neg w(i)
\end{array}$$

	مراحل	دلایل
(۱)	$\forall x[w(x) \to c(x)]$	مقدمه
(۲)	$q(i) \wedge \neg c(i)$	مقدمه
(۳)	$\neg c(i)$	مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۴)	$w(i) \to c(i)$	مرحلهٔ (۱) و قاعدهٔ تخصیص
(۵)	$\neg w(i)$	مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۶)	$\forall x[(w(x) \wedge \ell(x)) \to q(x)]$	مقدمه
(۷)	$w(r) \wedge \neg q(r)$	مقدمه

(۸)	$\neg q(r)$	مرحلهٔ (۷) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۹)	$(w(r) \wedge \ell(r)) \to q(r)$	مرحلهٔ (۶) و قاعدهٔ تخصیص
(۱۰)	$\neg(w(r) \wedge \ell(r))$	مراحل (۸) و (۹) و قاعدهٔ نقیض انتزاع
(۱۱)	$w(r)$	مرحلهٔ (۷) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۱۲)	$\neg w(r) \vee \neg \ell(r)$	مرحلهٔ (۱۰) و قانون دمورگان
(۱۳)	$\neg \ell(r)$	مراحل (۱۱)، (۱۲) و قاعدهٔ قیاس فصلی
(۱۴)	$\therefore \neg \ell(r) \wedge \neg w(i)$	مراحل (۱۳) و (۵) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

۱۲. الف) برهان: چون k و ℓ هر دو زوج‌اند می‌توان نوشت $k = ۲c$ و $\ell = ۲d$، که در آن c و d اعدادی صحیح‌اند. این مطلب از تعریف ۲ ۸ ۰ نتیجه می‌شود. دراین‌صورت، بنابر قانون پخش‌پذیری ضرب نسبت به جمع برای اعداد صحیح، داریم $k + \ell = ۲c + ۲d = ۲(c+d)$. درنتیجه، چون $c+d$ عددی صحیح است، بنابر تعریف ۲ ۸ ۰ از $k + l = ۲(c+d)$ معلوم می‌شود که $k + \ell$ زوج است.

ب) برهان: مانند قسمت (الف)، می‌نویسیم $k = ۲c$ و $\ell = ۲d$، که درآن c و d دو عدد صحیح‌اند. دراین صورت، بنابر قوانین تعویض‌پذیری و شرکت‌پذیری ضرب اعداد صحیح، داریم $k\ell = (۲c)(۲d) = ۲(۲cd)$، که در آن $۲cd$ عددی صحیح است. چون $۲cd$ عددی صحیح است، از تعریف ۲ ۸ ۰ نتیجه می‌شود که $k\ell$ زوج است.

۱۳. الف) عکس نقیض: به‌ازای هر دو عدد صحیح مانند k و ℓ، اگر k و ℓ هر دو فرد نباشند، آنگاه $k\ell$ فرد نیست. یا، به‌ازای هر دو عدد صحیح مانند k و ℓ، اگر حداقل یکی از دو عدد k و ℓ زوج باشد، آنگاه $k\ell$ زوج است.
برهان: می‌توانیم بدون کاستن از کلیت فرض کنیم k زوج است. دراین صورت، با توجه به تعریف ۲ ۸ ۰، به‌ازای عدد صحیحی مانند c داریم $k = ۲c$. بنابر قانون شرکت‌پذیری ضرب اعداد صحیح داریم $k\ell = (۲c)\ell = ۲(c\ell)$ و $k\ell$ عددی صحیح است. در نتیجه، باز هم بنابر تعریف ۲ ۸ ۰، $k\ell$ زوج است.
[توجه داشته باشید که این نتیجه نیازی به هیچ فرضی دربارهٔ عدد صحیح ℓ ندارد.]

ب) عکس نقیض: به‌ازای هر دو عدد صحیح k و ℓ، اگر k و ℓ هر دو زوج یا هر دو فرد نباشند، آنگاه $k + \ell$ فرد است. یا، به‌ازای هر دو عدد صحیح k و ℓ، اگر یکی از دو عدد k و ℓ فرد و دیگری زوج باشد، آنگاه $k + \ell$ فرد است.

برهان: می‌توانیم بدون کاستن از کلیت فرض کنیم k زوج و ℓ فرد است. دراین صورت، بنابر تعریف ۲ ۸ ۰، می‌توان نوشت $k = ۲c$ و $\ell = ۲d + ۱$، که در آن c و d دو عدد صحیح‌اند. اکنون می‌بینیم که، بنابر قانون شرکت‌پذیری جمع و قانون پخش‌پذیری ضرب نسبت به جمع در اعداد صحیح، داریم

$$k + \ell = ۲c + (۲d + ۱) = ۲(c + d) + ۱$$

که در آن $c + d$ عددی صحیح است. با توجه به تعریف ۲ ۸ ۰ می‌بینیم که از $k + \ell = ۲(c + d) + ۱$ نتیجه می‌شود که $k + \ell$ فرد است.

۱۴. برهان: چون n فرد است، با توجه به تعریف ۲ ۸ ۰، به‌ازای عدد صحیحی مانند a می‌توانیم بنویسیم $n = ۲a + ۱$.

دراین صورت

$$n^۲ = (۲a + ۱)^۲ = ۴a^۲ + ۴a + ۱ = ۲(۲a^۲ + ۲a) + ۱$$

که در آن $۲a^۲ + ۲a$ عددی صحیح است. باز هم از تعریف ۲ ۰ ۸ نتیجه می‌شود که $n^۲$ فرد است.

۱۵. برهان: فرض کنیم به‌ازای عدد صحیحی مانند n، $n^۲$ فرد باشد ولی n فرد نباشد. دراین صورت n زوج است و بنابر تعریف ۲ ۰ ۸، به‌ازای عدد صحیحی مانند a می‌توانیم بنویسیم $n = ۲a$. در نتیجه، بنابر قوانین تعویض‌پذیری و شرکت‌پذیری ضرب اعداد صحیح، داریم

$$n^۲ = (۲a)^۲ = (۲a)(۲a) = (۲ \times ۲)(a \times a)$$

بنابراین، می‌توانیم بنویسیم $n^۲ = ۲(۲a^۲)$، که در آن $۲a^۲$ عددی صحیح است. این به معنی آن است که $n^۲$ زوج است. به این ترتیب، به تناقض رسیده‌ایم، زیرا اکنون $n^۲$ هم فرد است (فرض اولیه) و هم زوج است. این تناقض از این فرض نادرست که n فرد نیست به‌دست آمد. بنابراین، به‌ازای هر عدد صحیح مانند n نتیجه می‌گیریم که

$$(n \text{ فرد است}) \Longrightarrow (n^۲ \text{ فرد است})$$

۱۶. دراینجا باید دو نتیجه را ثابت کنیم: (یک) اگر $n^۲$ زوج باشد، آنگاه n زوج است؛ و (دو) اگر n زوج باشد، آنگاه $n^۲$ زوج است.

برهان (یک): با استفاده از روش مبتنی‌بر عکس نقیض، فرض کنیم n زوج نباشد، یعنی فرض کنیم n فرد باشد. دراین صورت، به‌ازای عدد صحیحی مانند a، داریم

$$n^۲ = (۲a + ۱)^۲ = ۴a^۲ + ۴a + ۱ = ۲(۲a^۲ + ۲a) + ۱$$

که در آن $۲a^۲ + ۲a$ عددی صحیح است. بنابراین، $n^۲$ فرد است (یا، $n^۲$ زوج نیست).

برهان (دو): اگر n زوج باشد، دراین صورت به‌ازای عدد صحیحی مانند c داریم $n = ۲c$. بنابراین، با توجه به قوانین شرکت‌پذیری و تعویض‌پذیری ضرب اعداد صحیح، داریم

$$n^۲ = (۲c)^۲ = (۲c)(۲c) = ۲\big(c(۲c)\big) = ۲\big((c \cdot ۲)c\big) = ۲\big((۲c)c\big) = ۲(۲c^۲)$$

چون $۲c^۲$ عددی صحیح است، پس $n^۲$ زوج است.

۱۷. برهان:

(۱) چون n فرد است، به‌ازای عدد صحیحی مانند a داریم $n = ۲a + ۱$. دراین صورت

$$n + ۱۱ = (۲a + ۱) + ۱۱ = ۲a + ۱۲ = ۲(a + ۶)$$

که در آن $a + ۶$ عددی صحیح است. از تعریف ۲ ۰ ۸، نتیجه می‌شود که $n + ۱۱$ زوج است.

(۲) اگر $n + ۱۱$ زوج نباشد، دراین صورت فرد است و به‌ازای عدد صحیحی مانند b داریم $n + ۱۱ = ۲b + ۱$. بنابراین،

$$n = (۲b + ۱) - ۱۱ = ۲b - ۱۰ = ۲(b - ۵)$$

که در آن $b - ۵$ عددی صحیح است. از تعریف ۲ ۰ ۸ نتیجه می‌شود که n زوج است، یعنی n فرد نیست.

(۳) در این حالت، علاوه‌بر فرض مسأله، یعنی فرد بودن n، فرض کنیم که $n + ۱۱$ زوج نباشد. بنابراین، $n + ۱۱$ فرد است. پس به‌ازای عدد صحیحی مانند b می‌توانیم بنویسیم $n + ۱۱ = ۲b + ۱$. در این صورت، به‌ازای عدد صحیح $b - ۵$ داریم $n = ۲(b - ۵)$. اکنون از تعریف ۲ ۰ ۸ نتیجه می‌شود که n زوج است. ولی اکنون که n هم زوج است (این را ثابت کردیم) هم فرد (بنابر فرض اولیه) به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین، فرض ما نادرست بوده است و نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر عدد صحیح فرد مانند n، $n + ۱۱$ زوج است.

۱۸. برهان: [در اینجا برهان مستقیم را ارائه می‌کنیم.] چون m و n مجذورکامل‌اند، می‌توانیم به‌ازای دو عدد صحیح (مثبت) مانند a و b بنویسیم $m = a^۲$ و $n = b^۲$. در این صورت، بنابر قوانین شرکت‌پذیری و تعویض‌پذیری ضرب اعداد صحیح، می‌بینیم که

$$mn = (a^۲)(b^۲) = (aa)(bb) = \big((aa)b\big)b = \big(a(ab)\big)b = \big((ab)a\big)b = (ab)(ab) = (ab)^۲$$

بنابراین، mn نیز مجذورکامل است.

۱۹. این نتیجه در حالت کلی درست نیست. مثلاً $m = ۴ = ۲^۲$ و $n = ۱ = ۱^۲$ دو عدد صحیح مثبت و مجذور کامل‌اند، ولی $m + n = ۲^۲ + ۱^۲ = ۵$ مجذورکامل نیست.

۲۰. فرض کنیم $m = ۹ = ۳^۲$ و $n = ۱۶ = ۴^۲$. در این صورت $m + n = ۲۵ = ۵^۲$. پس نتیجه درست است.

۲۱. برهان: برای اثبات نتیجهٔ موردنظر، درستی عکس نقیض آن را (که با خود حکم منطقاً هم‌ارز است) ثابت خواهیم کرد.

نقیض حکم مفروض را درنظر می‌گیریم؛ یعنی فرض کنیم $x < ۵۰$ و $y < ۵۰$. در این صورت از $x < ۵۰$ و $y < ۵۰$ نتیجه می‌شود که $x + y < ۵۰ + ۵۰ = ۱۰۰$ و به این ترتیب، نقیض فرض به‌دست می‌آید. اکنون از این روش غیرمستقیم اثبات (یعنی روش مبتنی‌بر عکس نقیض) نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود.

تمرینات تکمیلی

۱.

p	q	r	s	$q \wedge r$	$\neg(s \vee r)$	$\overbrace{[(q \wedge r) \to \neg(s \vee r)]}^{t}$	$p \leftrightarrow t$
۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰

۲. الف)

p	q	r	$p \to q$	$\neg p \to r$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$
۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

ب) اگر p، آن‌گاه q، در غیراین صورت r.

۳. الف)

p	q	r	$q \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

ب) انتساب ارزشهای راستی ۰ : p، ۰ : q و ۰ : r به ارزش راستی ۱ برای $[p \to (q \to r)]$ و ۰ برای $[(p \to q) \to r]$ منجر می‌شود. در نتیجه، این گزاره‌ها منطقاً هم‌ارز نیستند.

۴. $p \leftrightarrow q \iff (p \to q) \wedge (q \to p) \iff (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$، پس

$$\neg(p \leftrightarrow q) \iff \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \iff (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

۵. چون $\neg p \to \neg q \iff \neg\neg p \vee \neg q \iff p \vee \neg q$، می‌توانیم گزارهٔ مفروض را به‌صورت زیر بیان کنیم:

(۱) اگر آرین درسهای پیانو را تمرین نکند، آن‌گاه نمی‌تواند به سینما برود.

چون $q \to p \iff \neg q \vee p \iff p \vee \neg q$، می‌توانیم گزارهٔ مفروض را به‌صورت زیر نیز بیان کنیم:

(۲) اگر آرین قرار است به سینما برود باید درسهای پیانو را تمرین کند.

۶. الف) $p \to (q \wedge r)$

عکس: $(q \wedge r) \to p$

وارون: $[\neg p \to \neg(q \wedge r)] \iff [\neg p \to (\neg q \vee \neg r)]$

عکس نقیض: $[\neg(q \wedge r) \to \neg p] \iff [(\neg q \vee \neg r) \to \neg p]$

ب) $(p \vee q) \to r$

عکس: $r \to (p \vee q)$

وارون: $[\neg(p \vee q) \to \neg r] \iff [(\neg p \wedge \neg q) \to \neg r]$

عکس نقیض: $[\neg r \to \neg(p \vee q)] \iff [\neg r \to (\neg p \wedge \neg q)]$

۷. الف) $(\neg p \vee \neg q) \wedge (F_0 \vee p) \wedge p$

ب) $(\neg p \vee \neg q) \wedge (F_0 \vee p) \wedge p$

$\iff (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \wedge p)$	$F_0 \vee p \iff p$
$\iff (\neg p \vee \neg q) \wedge p$	قانون خودتوانی $\wedge$
$\iff p \wedge (\neg p \vee \neg q)$	قانون تعویض‌پذیری $\wedge$
$\iff (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)$	قانون پخش‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$
$\iff F_0 \vee (p \wedge \neg q)$	$p \wedge \neg p \iff F_0$
$\iff p \wedge \neg q$	F_0 عنصر همانی برای $\vee$ است

۸. الف) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge s)$

ب) چون $p \to (q \wedge \neg r \wedge s) \iff \neg p \vee (q \wedge \neg r \wedge s)$، بنابراین،

$$[p \to (q \wedge \neg r \wedge s)]^d \iff \neg p \wedge (q \vee \neg r \vee s)$$

پ) $[(p \vee F_0) \vee (q \wedge T_0)] \wedge [r \vee s \vee F_0]$

۹. الف) عکس نقیض ب) وارون پ) عکس نقیض
ت) وارون ث) وارون ج) عکس نقیض
چ) عکس

۱۰. الف)

p	q	r	$q \to \neg r$	$p \wedge (q \to \neg r)$	$\neg p \vee q$	$\neg p \vee r$	$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r)$
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰

با توجه به نتایج ستونهای ۵ و ۸ از این جدول، نتیجه می‌شود که

$$[p \wedge (q \to \neg r)] \iff [\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r)]$$

ب)

	دلایل
$p \wedge (q \rightarrow \neg r)$	
$\Longleftrightarrow p \wedge (\neg q \vee \neg r)$	$(q \rightarrow \neg r) \Longleftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$ و قانون دوم جایگذاری.
$\Longleftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$	قانون پخش‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$
$\Longleftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg r)$	قانون نقیض مضاعف
$\Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r)$	قانون دمورگان

.۱۱

p	q	r	$p \uparrow q$	$(p \uparrow q) \uparrow r$	$q \uparrow r$	$p \uparrow (q \uparrow r)$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱

با توجه به ستونهای ۵ و ۷ می‌بینیم که $(p \uparrow q) \uparrow r \not\Longleftrightarrow p \uparrow (q \uparrow r)$

۱۲. الف)

p	q	r	$p \downarrow q$	$(p \downarrow q) \downarrow r$	$q \downarrow r$	$p \downarrow (q \downarrow r)$
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰

با توجه به ستونهای ۵ و ۷ می‌بینیم که $p \downarrow (q \downarrow r)$ و $(p \downarrow q) \downarrow r$ منطقاً هم‌ارز نیستند.

ب)

p	q	r	$q \downarrow r$	$p \uparrow (q \downarrow r)$	$p \uparrow q$	$p \uparrow r$	$(p \uparrow q) \downarrow (p \uparrow r)$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱

نتایج ستونهای ۵ و ۸ نشان می‌دهند که $p \uparrow (q \downarrow r) \not\Leftrightarrow (p \uparrow q) \downarrow (p \uparrow r)$

پ)

p	q	r	$q \uparrow r$	$p \downarrow (q \uparrow r)$	$p \downarrow q$	$p \downarrow r$	$(p \downarrow q) \uparrow (p \downarrow r)$
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱

از ستونهای ۵ و ۸ در این جدول ارزش نتیجه می‌شود که $p \downarrow (q \uparrow r) \not\Leftrightarrow (p \downarrow q) \uparrow (p \downarrow r)$

۱۳. (۱)

p	q	r	$p \xrightarrow{1} q$	$q \xrightarrow{1} r$	$(p \xrightarrow{1} q) \wedge (q \xrightarrow{1} r)$	$p \xrightarrow{1} r$	$[(p \xrightarrow{1} q) \wedge (q \xrightarrow{1} r)] \xrightarrow{1} (p \xrightarrow{1} r)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

جدول بالا نشان می‌دهد که گزارهٔ $[(p \xrightarrow{۱} q) \wedge (q \xrightarrow{۱} r)] \xrightarrow{۱} (p \xrightarrow{۱} r)$ راستگو نیست.

(۲) انتساب ارزشهای راستی $p : ۰$، $q : ۱$ و $r : ۰$ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت ارزشهای راستی زیر را می‌یابیم:

$$p \xrightarrow{۲} q : ۰ \qquad q \xrightarrow{۲} r : ۰ \qquad p \xrightarrow{۲} r : ۱$$

$$[(p \xrightarrow{۲} q) \wedge (q \xrightarrow{۲} r)] \xrightarrow{۲} (p \xrightarrow{۲} r) : ۰$$

در نتیجه، گزارهٔ $[(p \xrightarrow{۲} q) \wedge (q \xrightarrow{۲} r)] \xrightarrow{۲} (p \xrightarrow{۲} r)$ راستگو نیست.

(۳) برای آخرین حالت فرض کنیم ارزش راستی هر یک از سه گزارهٔ p، q و r برابر با ۰ باشد. دراین صورت هر سه گزارهٔ $(p \xrightarrow{۳} q)$، $(q \xrightarrow{۳} r)$ و $(p \xrightarrow{۳} r)$ یک ارزش راستی دارند که آن هم ۰ است. بنابراین، ارزش راستی گزارهٔ $[(p \xrightarrow{۳} q) \wedge (q \xrightarrow{۳} r)] \xrightarrow{۳} (p \xrightarrow{۳} r)$ نیز ۰ است؛ پس این گزاره راستگو نیست.

۱۴. اثبات با برهان خلف

(۱)	$\neg(p \to s)$	مقدمه (نقیض حکم)
(۲)	$p \wedge \neg s$	مرحلهٔ (۱)، $(p \to s) \iff \neg p \vee s$، قوانین دمورگان و قانون نقیض مضاعف
(۳)	p	مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۴)	$p \to q$	مقدمه
(۵)	q	مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ انتزاع
(۶)	r	مقدمه
(۷)	$q \wedge r$	مراحل (۵) و (۶) و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۸)	$(q \wedge r) \to s$	مقدمه
(۹)	s	مراحل (۷) و (۸) و قاعدهٔ انتزاع
(۱۰)	$\neg s$	مرحلهٔ (۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی
(۱۱)	$s \wedge \neg s (\iff F_0)$	مراحل (۹) و (۱۰) و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۱۲)	$\therefore p \to s$	مراحل (۱) و (۱۱) و روش اثبات به‌وسیلهٔ برهان خلف

روش ۲

(۱)	$(q \wedge r) \to s$	مقدمه
(۲)	$r \to (q \to s)$	$r \to (q \to s) \iff (q \wedge r) \to s$
(۳)	r	مقدمه
(۴)	$q \to s$	مراحل (۲) و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۵)	$p \to q$	مقدمه
(۶)	$\therefore p \to s$	مراحل (۴) و (۵) و قانون قیاس صوری

روش ۳

(۱)	$(q \wedge r) \rightarrow s$	مقدمه
(۲)	$\neg s \rightarrow \neg(q \wedge r)$	مرحلهٔ (۱) و به‌ازای هر دوگزارهٔ اولیهٔ u و v، $u \rightarrow v \Longleftrightarrow \neg v \rightarrow \neg u$ و قاعدهٔ اول جایگذاری.
(۳)	$s \vee \neg(q \wedge r)$	مرحلهٔ (۲) و به‌ازای هر دوگزارهٔ اولیهٔ u و v، $u \rightarrow v \Longleftrightarrow \neg u \vee v$ و قاعدهٔ اول جایگذاری. همچنین، $\neg\neg s \Longleftrightarrow s$.
(۴)	$(s \vee \neg q) \vee \neg r$	مرحلهٔ (۳)، قانون دمورگان و قانون شرکت‌پذیری $\vee$
(۵)	r	مقدمه
(۶)	$s \vee \neg q$	مراحل (۴) و (۵) و قانون قیاس فصلی
(۷)	$q \rightarrow s$	مرحلهٔ (۶) و $s \vee \neg q \Longleftrightarrow \neg q \vee s \Longleftrightarrow q \rightarrow s$
(۸)	$p \rightarrow q$	مقدمه
(۹)	$\therefore p \rightarrow s$	مراحل (۷) و (۸) و قانون قیاس صوری

روش ۴ (در این روش فرض می‌کنیم p مقدمه باشد و s را به عنوان نتیجه به‌دست می‌آوریم.)

(۱)	p	مقدمه(ی فرضی)
(۲)	$p \rightarrow q$	مقدمه
(۳)	q	مراحل (۱) و (۲) و قاعدهٔ قیاس استثنایی
(۴)	r	مقدمه
(۵)	$q \wedge r$	مراحل (۳) و (۴) و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۶)	$(q \wedge r) \rightarrow s$	مقدمه
(۷)	$\therefore s$	مراحل (۵) و (۶) و قاعدهٔ قیاس استثنایی

۱۵. الف)

p	q	r	$p \veebar q$	$(p \veebar q) \veebar r$	$q \veebar r$	$p \veebar (q \veebar r)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱

از نتایج ستونهای (۵) و (۷) نتیجه می‌شود که $[p \veebar (q \veebar r)] \Longleftrightarrow [(p \veebar q) \veebar r]$

ب) گزاره‌های مفروض منطقاً هم‌ارز نیستند. انتساب ارزشهای راستی $p : 1$، $q : 0$ و $r : 0$ مثالی نقض به‌دست می‌دهد.

پ) اگر ارزش راستی هر سه گزارهٔ p، q و r برابر با 0 باشد، آنگاه $p \to (q \veebar r)$ درست و $(p \to q) \veebar (p \to r)$ نادرست است؛ پس استلزام مفروض استلزام منطقی نیست.

۱۶. الف) جمعه هوا سرد است : p

آریا نیم‌تنهٔ چرمی خود را می‌پوشد : q

جیبهای نیم‌تنهٔ چرمی تعمیر شده‌اند : r

$$\begin{array}{l} p \to (r \to q) \\ p \wedge \neg r \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

این استدلال نامعتبر است. انتساب ارزشهای راستی $p : 1$، $q : 1$، $r : 0$ و $s : 1$ یکی از مثالهای نقض ممکن را به‌دست می‌دهد.

ب) قرار داد به سر خواهد رسید : p

در ماه بهمن پنجره‌های جدید خانه نصب می‌شوند : q

ریحانه روز اول اسفند به خانهٔ جدید نقل‌مکان می‌کند : r

ریحانه اجارهٔ اسفند آپارتمان خود را می‌پردازد : s

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \to r \\ \neg r \to s \\ q \vee s \\ \hline \therefore \neg s \end{array}$$

این استدلال نامعتبر است. انتساب ارزشهای راستی $p : 0$، $q : 0$، $r : 0$ و $s : 1$ یکی از مثالهای نقض ممکن را به‌دست می‌دهد.

۱۷. الف) درست	ب) نادرست	پ) درست	ت) درست
ث) درست	ج) نادرست	چ) نادرست	ح) نادرست
خ) نادرست	د) درست		

۱۸. الف) $\forall a \exists b \; 0 < b < a$ ب) $\exists! a \; a^2 = a$ پ) $\forall a \exists! b \; ab = ba = 1$

۳

نظریهٔ مجموعه‌ها

بند ۱.۳

۱. همهٔ آنها یک مجموعه‌اند.

۲. همهٔ گزاره‌ها، جزگزارهٔ قسمت (ج)، درست‌اند.

۳. همهٔ گزاره‌ها، جزگزاره‌های قسمتهای (ب) و (ت)، درست‌اند.

۴. همهٔ گزاره‌ها، جزگزاره‌های قسمتهای (الف) و (ب)، درست‌اند.

۵. الف) $\{۰, ۲\}$

ب) $\left\{۲, ۲\frac{۱}{۲}, ۳\frac{۱}{۳}, ۵\frac{۱}{۵}, ۷\frac{۱}{۷}\right\}$

پ) $\{۰, ۲, ۱۲, ۳۶, ۸۰\}$

ت) $\left\{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۱۲}, \frac{۱}{۳۰}, \frac{۱}{۵۶}, \frac{۱}{۹۰}, \frac{۱}{۱۳۲}\right\}$

۶. الف) درست ب) درست پ) درست

ت) نادرست ث) درست ج) نادرست

۷. الف) $\forall x\ [x \in A \rightarrow x \in B] \wedge \exists x\ [x \in B \wedge x \notin A]$

ب) $\exists x\ [x \in A \wedge x \notin B] \vee \forall x\ [x \notin B \vee x \in A]$

۸. الف) $۲^۷ - ۱۲۸$

ب) $۱۲۷ = ۱ - ۱۲۸$ (تفریق ۱ از ۱۲۸ به‌خاطر $\emptyset$ است)

پ) $۱۲۷ = ۱ - ۱۲۸$ (تفریق ۱ از ۱۲۸ به‌خاطر A است)

ت) ۱۲۶ ث) $\binom{۷}{۳} = ۳۵$

ج) به‌ازای هر یک از پنج عنصر دیگر A دو انتخاب وجود دارد: گنجاندن آن همراه با ۱ و ۲ در یک زیرمجموعه یا کنارگذاشتن آن از زیرمجموعه‌ای که حاوی ۱ و ۲ است. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۲^۵$ زیرمجموعهٔ حاوی ۱ و ۲ وجود دارد.

چ) $\binom{۵}{۲}$

ح) $۲^۵ - ۱$

خ) $\binom{۷}{۰} + \binom{۷}{۲} + \binom{۷}{۴} + \binom{۷}{۶} = ۶۴$

د) $\binom{۷}{۱} + \binom{۷}{۳} + \binom{۷}{۵} + \binom{۷}{۷} = ۶۴$

ذ) $\binom{۶}{۰} + \binom{۶}{۲} + \binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۶} = ۳۲$

۹. الف) $|A| = ۶$

ب) $|B| = ۷$

پ) اگر B دارای ۲^n زیرمجموعه با عدد اصلی فرد باشد، آن‌گاه $|B| = n + ۱$.

۱۰. تنها مجموعه‌های ناتهی عبارت‌اند از مجموعه‌های قسمتهای (ت) و (ج).

۱۱. الف) مجموعه‌ای که از یک سکهٔ یک سنتی، یک سکهٔ پنج سنتی، یک سکهٔ ده سنتی، یک سکهٔ بیست و پنج سنتی و یک سکهٔ نیم دلاری تشکیل شده است $۳۱ = ۱ - ۲^۵$ زیرمجموعهٔ ناتهی دارد.

ب) ۳۰

پ) ۲۸

۱۲. الف) $\binom{۱۲}{۶} = ۹۲۴$

ب) $\binom{۶}{۲}\binom{۶}{۲} = ۲۲۵$

پ) $۲^۶ - ۱ = ۶۳$

ت) $۲^۴ = ۱۶$

۱۳. الف) $\binom{۳۰}{۵}$

ب) چون ۵ کوچکترین عنصر A است، باید چهار عنصر دیگر A را از $\{۶, ۷, ۸, \dots, ۲۹, ۳۰\}$ انتخاب کنیم. این کار را به $\binom{۲۵}{۴}$ طریق می‌توان انجام داد.

پ) فرض کنیم x کوچکترین عنصر A باشد. دراین صورت چهار حالت پیش می‌آید:

($x = ۱$) دراین حالت می‌توانیم چهار عنصر دیگر را به $\binom{۲۹}{۴}$ طریق انتخاب کنیم.

($x = ۲$) دراین حالت $\binom{۲۸}{۴}$ انتخاب وجود دارد.

($x = ۳$) دراین حالت $\binom{۲۷}{۴}$ زیرمجموعهٔ ممکن وجود دارد.

($x = ۴$) دراین آخرین حالت $\binom{۲۶}{۴}$ امکان داریم.

روی هم $\binom{۲۶}{۴} + \binom{۲۷}{۴} + \binom{۲۸}{۴} + \binom{۲۹}{۴}$ زیرمجموعه مانند A وجود دارد به‌طوری‌که $|A| = ۵$ و کوچکترین عنصر A کمتر از ۵ باشد.

۱۴. الف) مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۱\}$ دارای $۲^{۱۱}$ زیرمجموعه و مجموعهٔ $\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱\}$ دارای $۲^۶$ زیرمجموعه است. هیچ‌یک از $۲^۶$ زیرمجموعهٔ $\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱\}$ حاوی هیچ‌یک از عددهای صحیح زوج ۲، ۴، ۶، ۸ یا ۱۰ نیست. بنابراین، $۱۹۸۴ = ۲^۶ - ۲^{۱۱}$ زیرمجموعه از $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۱\}$ وجود دارد که هر یک از آنها حاوی دست‌کم یک عدد صحیح زوج است.

ب) $۲^{۱۲} - ۲^۶ = ۴۰۳۲$

پ) به‌ازای $n = ۲k + ۱$، $k \geq ۰$، تعداد زیرمجموعه‌هایی از $\{۱, ۲, ۳, \dots, n\}$ که حاوی دست‌کم یک عدد زوج هستند $۲^n - ۲^{k+۱}$ است.

۱۵. فرض کنید $W = \{1\}$، $X = \{\{1\}, 2\}$، $Y = \{X, 3\}$.

۱۶.

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱ $(n = 6)$

۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱ $(n = 7)$

۱ ۸ ۲۸ ۵۶ ۷۰ ۵۶ ۲۸ ۸ ۱ $(n = 8)$

۱۷. الف) فرض کنیم $x \in A$. چون $A \subseteq B$، نتیجه می‌شود $x \in B$. دراین صورت با توجه به $B \subseteq C$، نتیجه می‌شود $x \in C$. بنابراین، $x \in A \Longrightarrow x \in C$ و $A \subseteq C$.

ب) چون $A \subset B \Longrightarrow A \subseteq B$، بنابر قسمت (الف) داریم $A \subseteq C$. چون $A \subset B$، عنصری مانند $x \in B$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \notin A$. با توجه به $B \subseteq C$، $x \in B \Longrightarrow x \in C$. بنابراین، عنصری مانند $x \in C$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \notin A$ و $A \subset C$.

پ) چون $B \subset C$، نتیجه می‌شود که $B \subseteq C$؛ پس بنابر قسمت (الف) داریم $A \subseteq C$. همچنین، $B \subset C \Longrightarrow \exists x \in \mathcal{U}(x \in C \wedge x \notin B)$. چون $A \subseteq B$، $x \notin B \Longrightarrow x \notin A$. بنابراین $A \subseteq C$ و $\exists x \in \mathcal{U}(x \in C \wedge x \notin A)$. درنتیجه، $A \subset C$.

ت) چون $A \subset B \Longrightarrow A \subseteq B$، نتیجهٔ مطلوب از قسمت (پ) حاصل می‌شود.

۱۸. نادرست. فرض کنید $A = \{1\}$، $B = \{1, 2\}$ و $C = \{1, 3\}$.

۱۹. الف) به‌ازای $n, k \in \mathbf{Z}^+$ به‌طوری‌که $n \geq k + 1$، شش ضلعی با مرکز $\binom{n}{k}$ را درنظر بگیرید. این شش ضلعی به‌صورت

$$\begin{array}{ccccccc} & \binom{n-1}{k-1} & & \binom{n-1}{k} & \\ \binom{n}{k-1} & & \binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} \\ & \binom{n+1}{k} & & \binom{n+1}{k+1} & \end{array}$$

است، که در آن دو سه‌تایی یک در میان، یعنی $\binom{n-1}{k-1}$، $\binom{n}{k+1}$، $\binom{n+1}{k}$ و $\binom{n-1}{k}$، $\binom{n+1}{k+1}$، $\binom{n}{k-1}$، در رابطهٔ $\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}$ صدق می‌کنند.

ب) به‌ازای $n, k \in \mathbf{Z}^+$ به‌طوری‌که $n \geq k + 1$،

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} &= \left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\right]\left[\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\right]\left[\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\right] \\ &= \left[\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\right]\left[\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\right]\left[\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\right] \\ &= \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1} \end{aligned}$$

۲۰. الف) هر یک از این دنباله‌های اکیداً صعودی از اعداد صحیح متناظر با زیرمجموعه‌ای از $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ است. بنابراین، 2^5 تا از این نوع دنباله‌های اکیداً صعودی وجود دارد.

ب) 2^5

پ) 2^{35} و 2^{35}

ت) فرض کنیم m و n دو عدد صحیح مثبت باشند به‌طوری‌که $m < n$. تعداد دنباله‌های اکیداً صعودی از اعداد صحیح که با m شروع و به n ختم می‌شوند $2^{[(n-m)+1]-2} = 2^{n-m-1}$ است.

.۲۱ $$\left(\frac{1}{4}\right)\binom{n}{5} = \binom{n-1}{4} \Longrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)\left[\frac{n!}{5!(n-5)!}\right] = \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}$$

$$\Longrightarrow n! = 20(n-1)! \Longrightarrow n = 20$$

.۲۲
$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$
$$= \frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!} + \frac{r(n!)}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = \binom{n+1}{r}$$

.۲۳ فرض کنیم $S = \{x, y, a_1, a_2, \dots, a_n\}$. $\binom{n+2}{r}$ تا از زیرمجموعه‌های S زیرمجموعه‌های r عنصری‌اند. این زیرمجموعه‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند.

الف) نه x در زیرمجموعه است نه y. $\binom{n}{r}$ تا از این نوع زیرمجموعه‌ها وجود دارد.

ب) دقیقاً یکی از دو عنصر x و y در زیرمجموعه است. تعداد این نوع زیرمجموعه‌ها $2\binom{n}{r-1}$ است.

پ) هم x در زیرمجموعه است هم y. $\binom{n}{r-2}$ تا از این نوع زیرمجموعه‌ها وجود دارد.

.۲۴

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \cdots + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r}{r}$$
$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \cdots + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r}{r}$$
$$= \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \cdots + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r}{r}$$
$$= \binom{n+3}{2} + \binom{n+3}{3} + \cdots + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r}{r}$$
$$= \binom{n+4}{3} + \cdots + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r}{r}$$
$$= \cdots = \binom{n+r}{r-1} + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r-1}{r}$$

.۲۵ الف) اگر $S \in S$، آن‌گاه با توجه به $S = \{A | A \notin A\}$ داریم $S \notin S$.

ب) اگر $S \notin S$، آن‌گاه از تعریف S نتیجه می‌شود که $S \in S$.

۲۶. ب)

```
10 Random
20 Dim B(12), S(6)
30 B(1) = 2: B(2) = 3: B(3)= 5: B(4) = 7
40 B(5) = 11: B(6) = 13: B(7) = 17: B(8) = 19
50 B(9) = 23: B(10) = 29: B(11) = 31: B(12) = 37
60 For I = 1 To 6
70      S(I)= Int(Rnd*40) + 1
80      For J= 1 To I - 1
90          If S(J) = S(I) Then GOTO 70
100     Next J
110 Next I
120 For I = 1 To 6
130     For J = 1 To 12
140         If S(I) = B(J) Then GOTO 170
150     Next J
160     GOTO 240
170 Next I
180 Print "The subset S contains the elements";
190 For I = 1 To 5
200     Print S(I); ", ";
210 Next I
220 Print S(6); " and is a subset of B"
230 GOTO 290
240 Print "The subset S contains the elements";
250 For I = 1 To 5
260     Print S(I); ",  ";
270 Next I
280 Print S(6); " but it is not a subset of B"
290 End
```

.۲۷

```
Program Subsets4 (Input, Output);
Var
   i, j, k, l: integer;
Begin
   For i := 1 to 4 do
      For j := i+1 to 5 do
         For k := j+1 to 6 do
            For l := k+1 to 7 do
               Writeln ('{', i:0, ',   ', j:0, ',  ', k:0 ',  ', l:0, '}')
   End.
```

.۲۸

```
Program List_subsets4 (Input, Output);
Const
     Size = 10;
Type
```

```
    Member-type = 1.. Size;
    Set)type = set of Member-type;
Var
    n: 1.. Size;
    S: Set)type;

Procedure Write)set (S: Set)type);
Var
    i: 1.. Size;
Begin
    Write ('{');
    For i := 1 to Size do
        If i in S then
            Begin
                S := S - [i];
                If S <> [], then
                    Write (i:3, ',')
                Else Write (i: 3);
            End;
     Writeln ('}');
End;

Procedure Subsets (L,R : Set)type; i: Member)type);
Begin
    If i<= n then
        Begin
            Subsets (L + [i], R, i+1);
            Subsets (L, R + [i], i+1);
         End
    Else
        Begin
                    Write_set (L);
                    Write_set (R);
                End;
          End;

          Begin
              Write ('What is the value of n?);
              Readln (n);
              Subsets ([1],[],2);
     End.
```

بند ۲.۳

۱. الف) $\{1, 2, 3, 5\}$ ب) A پ) $\mathcal{U} - \{2\}$

ت) $\mathcal{U} - \{2\}$ ث) $\{4, 8\}$ ج) $\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$

چ) $\emptyset$ ح) $\{2, 4, 8\}$ خ) $\{1, 3, 4, 5, 8\}$

۲. الف) $[۲,۳]$ ب) $[۰,۷)$ پ) $(-\infty,۰)\cup(۳,+\infty)$
ت) $[۰,۲)\cup(۳,۷)$ ث) $[۰,۲)$ ج) $(۳,۷)$

۳. چون $C \subset B \subset (A\cap B)$، در نتیجه ۳ $= |B|$. دراین صورت $B=\{a,b,d\}$ یا $B=\{a,b,e\}$.

۴. الف) با توجه به $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ داریم $A=\{۱,۳,۴,۷,۹,۱۱\}$. به‌همین ترتیب می‌بینیم که $B=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$.

ب) $C=\{۱,۲,۴,۵,۹\}$ و $D=\{۵,۷,۸,۹\}$.

۵. ۹

۶. الف) (یک) درست (دو) نادرست (سه) نادرست
(چهار) درست (پنج) درست (شش) نادرست

ب) (یک) E (دو) B (سه) D
(چهار) D (پنج) $\mathbf{Z}-A=\{۲n+۱|n\in\mathbf{Z}\}=$ (شش) E

مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح فرد (مثبت و منفی)

۷. الف) $|\emptyset|\leq|A\cap B|\leq|B|\leq|A\cup B|\leq|\mathcal{U}|$

ب) $|\emptyset|\leq|A-B|\leq|A\Delta B|\leq|A\cup B|\leq|A|+|B|\leq|\mathcal{U}|$

پ) $|\emptyset|\leq|A-B|\leq|A|\leq|A\cup B|\leq|A|+|B|\leq|\mathcal{U}|$

۸. $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap\overline{B})\cap(B\cap\overline{A})=(A\cap\overline{A})\cap(B\cap\overline{B})=\emptyset$

۹. الف) درست ب) درست پ) درست ت) نادرست ث) درست
ج) درست چ) درست ح) نادرست خ) نادرست د) نادرست

۱۰. الف) با توجه به $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$،

$$x\in A\cap C\Longrightarrow(x\in C,x\in A)\Longrightarrow(x\in D,x\in B)$$
$$\Longrightarrow x\in B\cap D$$

بنابراین، $A\cap C\subseteq B\cap D$.

از $x\in A\cup C$ نتیجه می‌شود که $x\in A$ یا $x\in C$. اگر $x\in A$، دراین صورت با توجه به $A\subseteq B$، نتیجه می‌شود $x\in B$. به همین ترتیب $x\in C\Longrightarrow x\in D$. در هر حالت داریم $x\in A\cup C\Longrightarrow x\in B\cup D$. بنابراین، $A\cup C\subseteq B\cup D$.

ب) $x\in A\cap B\Longrightarrow x\in A\wedge x\in B\Longrightarrow x\in A$ (بنابر قاعدهٔ ساده‌سازی عطفی)

$$\Longrightarrow x\in C(A\subseteq C \text{ زیرا})$$

بنابراین، $A\cap B\subseteq C$.

$x\in A\cup B\Longrightarrow x\in A\vee x\in B$. بدون کاستن ازکلیت فرض می‌کنیم که $x\in A$. دراین صورت با توجه به $A\subseteq C$، نتیجه می‌شود $x\in C$. بنابراین، $A\cup B\subseteq C$.

پ) فرض کنیم $A\subseteq B$. همواره داریم $\emptyset\subseteq A\cap\overline{B}$؛ پس فرض کنیم $x\in A\cap\overline{B}$. دراین صورت $x\in A$ و

$x \in \overline{B}$. با توجه به $A \subseteq B$ داریم $x \in A \Longrightarrow x \in B$.

$$x \in B, x \in \overline{B} \Longrightarrow x \in B \cap \overline{B} = \emptyset$$

بنابراین $A \cap \overline{B} = \emptyset$. برعکس، اگر $A \cap \overline{B} = \emptyset$، فرض کنیم $x \in A$. اگر $x \notin B$، دراین صورت $x \in \overline{B}$ و بنابراین، $x \in A \cap \overline{B} = \emptyset$. بنابراین، $x \in B$ و $A \subseteq B$.

ت) این قسمت از قسمت (پ) با استفاده از اصل دوگانی به‌دست می‌آید.

۱۱. الف) نادرست. فرض کنید

$$C = \{۳\},\ B = \{۲\},\ A = \{۱\},\ \mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳\}$$

دراین صورت $A \cap C = B \cap C$ ولی $A \neq B$.

ب) نادرست. فرض کنید

$$C = \{۱, ۲\},\ B = \{۲\},\ A = \{۱\},\ \mathcal{U} = \{۱, ۲\}$$

دراین صورت $A \cup B = A \cup C$ ولی $A \neq B$.

پ) $x \in A \Longrightarrow x \in A \cup C \Longrightarrow x \in B \cup C$. اگر $x \in B$، دراین صورت $A \subseteq B$. اگر $x \in C$، دراین صورت $x \in A \cap C = B \cap C$ و بنابراین، $x \in B$. در هر حالت داریم $A \subseteq B$. به‌همین ترتیب، $B \subseteq A$. در نتیجه، $A = B$.

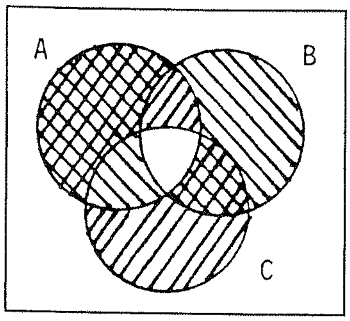
ت) فرض کنیم $x \in A$. دو حالت پیش می‌آید:

یک) $x \in C \Longrightarrow x \notin A\Delta C \Longrightarrow x \notin B\Delta C \Longrightarrow x \in B$

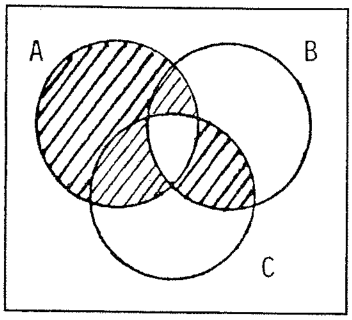
دو) $x \notin C \Longrightarrow x \in A\Delta C \Longrightarrow x \notin B\Delta C \Longrightarrow x \in B$

در هر حالت داریم $A \subseteq B$. به‌همین ترتیب می‌بینیم که $B \subseteq A$ و بنابراین، $A = B$.

۱۲. الف)



$(A\Delta B) \cap (A\Delta C)$

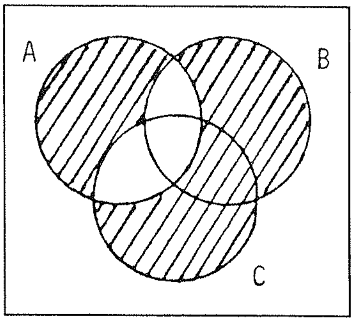


$A\Delta(B \cap C)$

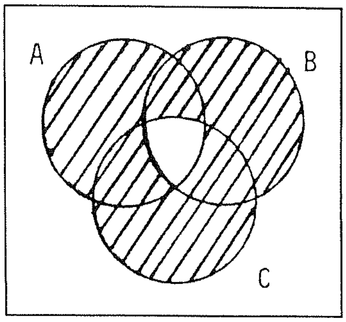
از این نمودارهای ون نتیجه می‌شود که $A\Delta(B \cap C) \neq (A\Delta B) \cap (A\Delta C)$ و بنابراین، فرمول داده شده نادرست است.

ب) درست

پ)



$A\Delta(B\cup C)$



$(A\Delta B)\cup(A\Delta C)$

با توجه به این نمودارهای ون می‌بینیم که $A\Delta(B\cup C)\neq(A\Delta B)\cup(A\Delta C)$ و بنابراین، فرمول داده شده نادرست است.

ت) درست

ث) درست

۱۳. $\{d, x, z\} = (A\cap B)\cup C$ که ۷ = ۱ − ۲^{۳} زیرمجموعهٔ سره دارد؛ $A\cap(B\cup C)=\{d\}$ که ۱ زیرمجموعهٔ سره دارد.

۱۴. الف) ۰

ب) ۰ و ۱

۱۵. الف) $\emptyset=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$

ب) $A=A\cup(A\cap B)$

پ) $A\cap B=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)$

ت) $A=(A\cap B)\cup(A\cap U)$

۱۶. دوگان گزارهٔ $A\cap B=A$، گزارهٔ $A\cup B=A$ است. ولی $B\subseteq A \iff A\cup B=A$؛ بنابراین، دوگان گزارهٔ $A\subseteq B$، گزارهٔ $B\subseteq A$ است.

۱۷. الف) نادرست. فرض کنید $\mathcal{U}=\{۱,۲,۳\}$، $A=\{۱\}$ و $B=\{۲\}$. $P(A)=\{\emptyset, A\}$، $P(B)=\{\emptyset, B\}$، $P(A\cup B)=\{\emptyset,\{۱\},\{۲\},\{۱,۲\}\}$ و $\{۱,۲\}\notin P(A)\cup P(B)$.

ب) $X\in P(A)\cap P(B)\iff X\in P(A), X\in P(B)\iff X\subseteq A,$

$X\subseteq B\iff X\subseteq A\cap B\iff X\in P(A\cap B)$

بنابراین، $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

۱۸. الف و پ)

A	B	$A\cap B$	$\overline{A\cap B}$	$\overline{A}\cup\overline{B}$	$A\cup(A\cap B)$
۰	۰	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۱

ب)

A	$A\cup A$
۰	۰
۱	۱

ت)

A	B	C	$A\cap B$	$\overline{A}\cap C$	$\overline{(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap C)}$
۰	۰	۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۰

$A\cap\overline{B}$	$\overline{A}\cap\overline{C}$	$(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{C})$
۰	۱	۱
۰	۰	۰
۰	۱	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱
۱	۰	۱
۰	۰	۰
۰	۰	۰

۱۹. الف) $۶۴ = ۲^۶$

ب) ۲^n

پ) در ستونهای مربوط به A و B، به‌ازای هر ۱ در ستون A یک ۱ در ستون B و در همان مکان دیده می‌شود.

ت)

A	B	C	$A\cup\overline{B}$	$A\cap B$	$\overline{B\cap C}$	$(A\cap B)\cup(\overline{B\cap C})$
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۰	۱

۲۰.

مراحل	دلایل
$(A\cap B)\cup\left[B\cap\left((C\cap D)\cup(C\cap\overline{D})\right)\right]$	
$=(A\cap B)\cup\left[B\cap\left(C\cap(D\cup\overline{D})\right)\right]$	قانون پخش‌پذیری $\cap$ نسبت به $\cup$
$=(A\cap B)\cup\left[B\cap(C\cap\mathcal{U})\right]$	$D\cup\overline{D}=\mathcal{U}$
$=(A\cap B)\cup(B\cap C)$	قانون همانی $[C\cap\mathcal{U}=C]$
$=(B\cap A)\cup(B\cap C)$	قانون تعویض‌پذیری $\cap$
$=B\cap(A\cup C)$	قانون پخش‌پذیری $\cap$ نسبت به $\cup$

۲۱. الف) $A\cap(B-A)=A\cap(B\cap\overline{A})=B\cap(A\cap\overline{A})=B\cap\emptyset=\emptyset$

ب) با توجه به قانون جذب داریم:

$$\left[(A\cap B)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap D)\right]\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cup\overline{A})\cap B$$

$$=\mathcal{U}\cap B=B$$

پ) $(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)=A\cap(\overline{B}\cup B)=A\cap\mathcal{U}=A$

ت) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup(A\cap B\cap\overline{C})=\overline{(A\cap B)}\cup\left[(A\cap B)\cap\overline{C}\right]$

$$=\left[\overline{(A\cap B)}\cup(A\cap B)\right]\cap\left[\overline{(A\cap B)}\cup\overline{C}\right]$$

$$=\left[\overline{(A\cap B)}\cup\overline{C}\right]=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$$

ث) $\overline{A}\cup(A\cap\overline{B})=(\overline{A}\cup A)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$

$$\overline{A\cap B}\cup\left[(A\cap B)\cap\overline{C}\right]=\overline{A\cap B}\cup\overline{C}=\overline{A\cap B\cap C}$$

اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم، $\overline{A\cap B\cap C\cap D\cap\ldots}$ را به‌دست می‌آوریم.

۲۲. $\bigcap_{n=1}^{7} A_n = A_1 = \{1\}, \bigcup_{n=1}^{7} A_n = A_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$\bigcap_{n=1}^{m} A_n = A_1 = \{1\}, \bigcup_{n=1}^{m} A_n = A_m = \{1, 2, 3, \ldots, m-1, m\}$$

۲۳. $\bigcap_{n=3}^{12} B_n = B_{12} = \{13, 14, 15, \ldots\}$ ، $\bigcup_{n=1}^{8} B_n = B_1 = \{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbf{Z}^+ - \{1\}$

$$\bigcap_{n=1}^{m} B_n = B_m, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B_1$$

۲۴. الف) $[-6, 9]$ ب) $[-8, 12]$ پ) $\emptyset$ ت) $[-8, -6) \cup (9, 12]$

ث) $[-14, 21]$ ج) $[-2, 3]$ چ) $\mathbf{R}$ ح) $[-2, 3]$

۲۵. $x \in A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \iff$ ($x \in A$ و به‌ازای اندیسی مانند $i \in I$، $x \in B_i$)

$\iff$ (به‌ازای اندیسی مانند $i \in I$، $x \in A$، $x \in B_i$)

$\iff$ (به‌ازای اندیسی مانند $i \in I$، $x \in A \cap B_i$)

$\iff x \in \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i)$

فرمول دوم با استفاده از اصل دوگانی ثابت می‌شود.

۲۶. $x \in \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \iff x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \iff$ (به‌ازای دست‌کم یک $i \in I$، $x \notin A_i$)

$\iff$ (به‌ازای دست‌کم یک $i \in I$، $x \in \overline{A}_i$) $\iff x \in \bigcup_{i\in I} \overline{A}_i$

بندهای ۳.۳ و ۴.۳

۱. الف) !۲۴ جایگشت شامل الگوی OUT و !۲۴ جایگشت شامل الگوی DIG وجود دارد. !۲۲ جایگشت وجود دارد که شامل هر دو الگو هستند. در نتیجه، !۲۲ − (!۲۴)۲ جایگشت وجود دارد که یا شامل OUT هستند یا شامل DIG.

ب) روی‌هم !۲۶ جایگشت وجود دارد. از بین این جایگشتها !۲۴ جایگشت شامل الگوی MAN، !۲۴ جایگشت شامل الگوی ANT و !۲۳ جایگشت شامل هر دو الگو (یعنی شامل MANT) وجود دارد. بنابراین، !۲۳ − (!۲۴)۲ جایگشت وجود دارد که یا شامل MAN هستند یا شامل ANT و [!۲۳ − (!۲۴)۲] − !۲۶ جایگشت وجود دارد که شامل هیچ‌یک از این دو الگو نیستند.

۲. برای الگوی FUN چهار حالت درنظر می‌گیریم:

الف) ـ ـ ـ FUN. در این حالت جاهای خالی را می‌توان به $(36)^3$ طریق پر کرد.

ب) ـ ـ FUN ـ. در این حالت جاهای خالی را می‌توان به $(36)^2(26)$ طریق پر کرد.

پ) ـ FUN ـ ـ. باز هم $26(36)^2$ طریق برای پرکردن جاهای خالی وجود دارد.

ت) FUN ـ ـ ـ. در این حالت نیز $26(36)^2$ طریق برای پرکردن جاهای خالی وجود دارد. در نتیجه، تعداد نامهای متغیر شش‌نویسه‌ای شامل FUN عبارت است از $(36)^3 + 3(26)(36)^2 - 1$، زیرا متغیر FUNFUN هم در حالت (الف) شمرده شد و هم در حالت (ت). همچنین، $(36)^3 + 3(26)(36)^2 - 1$ تا از این نوع متغیرها وجود دارند که شامل TIP هستند. دو متغیر هم شامل FUN هستند هم شامل TIP. در نتیجه، تعداد نامهای متغیر شش‌نویسه‌ای که یا شامل FUN هستند یا شامل TIP برابر است با $2\left[(36)^3 + 3(26)(36)^2 - 1\right] - 2$.

۳. $9! + 9! - 8!$

۴. الف) ۱۲ ب) ۲ پ) ۱۶

۵. الف) فرض کنیم $S =$ فضای نمونه $= \{(x_1, x_2, x_3) | 1 \le x_i \le 3, i = 1, 2, 3\}$. دراین‌صورت $|S| = 6^3 = 216$. فرض کنیم

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 < x_2, x_1 < x_3\} = \bigcup_{n=1}^{5} \{(n, x_2, x_3) | n < x_3, n < x_2\}$$

به‌ازای $1 \le n \le 5$، $|\{(n, x_2, x_3) | n < x_3 \text{ و } n < x_2\}| = (6-n)^2$. درنتیجه،

$$|A| = 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 55$$

بنابراین، $Pr(A) = \frac{55}{216}$.

ب) با همان مجموعهٔ S در قسمت (الف)، فرض‌کنیم

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 < x_2 < x_3\}$$

دراین‌صورت

$$|\{(1, x_2, x_3) | 1 < x_2 < x_3\}| = 10, \quad |\{(2, x_2, x_3) | 2 < x_2 < x_3\}| = 6$$

و

$$|\{(3, x_2, x_3) | 3 < x_2 < x_3\}| = 3, \quad |\{(4, x_2, x_3) | 4 < x_2 < x_3\}| = 1$$

بنابراین، $|B| = 20$ و $Pr(B) = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$

۶. الف) ۱۰ ب) ۱ پ) $\frac{4}{15}$

۷. الف) $\frac{14!}{15!} = \frac{1}{15}$ ب) $\frac{14! + 14!}{15!} = \frac{2(14!)}{15!} = \frac{2}{15}$

پ) $\frac{(2)(9)(13!)}{15!} = \frac{3}{35}$ ت) $\frac{1}{2}$

۸. الف) $\frac{24}{300} = 0{,}08$

ب) (یک) ۱۸۰ دانشجو می‌توانند به زبان پاسکال برنامه‌نویسی کنند. دو نفر از آنها را می‌توان به $\binom{۱۸۰}{۲}$ طریق انتخاب کرد. فضای نمونه‌ای از $\binom{۳۰۰}{۲}$ جفت دانشجو تشکیل شده است. بنابراین، احتمال اینکه هر دو دانشجویی که به تصادف انتخاب می‌شوند بتوانند به زبان پاسکال برنامه‌نویسی کنند $۰/۳۶ \doteq \frac{۱۸۰ \times ۱۷۹}{۳۰۰ \times ۲۹۹} = \frac{\binom{۱۸۰}{۲}}{\binom{۳۰۰}{۲}}$ است. (دو) $۰/۲۹ \doteq \frac{\binom{۱۶۲}{۲}}{\binom{۳۰۰}{۲}}$

۹. این هشت کتاب را می‌توان به !۸ طریق مرتب کرد. برای مرتب کردن کتابهای مربوط به مهندسی برق !۵ طریق وجود دارد. به‌ازای هر یک از این !۵ ترتیب، شش مکان برای (کنار هم) قرار دادن هر سه کتاب فیزیک وجود دارد. چون کتابهای فیزیک را می‌توان به !۳ طریق مرتب کرد، (!۳)(۶)(!۵) طریق برای مرتب کردن این هشت کتاب، به‌گونه‌ای که هر سه کتاب فیزیک کنار هم قرار گیرند، وجود دارد. احتمال مطلوب برابر است با $\frac{۳}{۲۸} = \frac{(۵!)(۶)(۳!)}{۸!}$.

۱۰. الف) $\frac{\binom{۱۵}{۲}}{\binom{۲۲}{۲}}$ ب) $\frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۲۴}{۲}}$ پ) $\frac{\binom{۱۸}{۲} + \binom{۱۸}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۲۴}{۲}}$

ت) $\frac{\binom{۱۸}{۱}\binom{۶}{۱} + \binom{۶}{۲}}{\binom{۲۴}{۲}}$ ث) $\frac{\binom{۱۸}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۲۴}{۲}}$ ج) $\frac{\binom{۱۸}{۲}}{\binom{۲۴}{۲}}$

مجموع احتمالهای قسمتهای (ب)، (ث) و (ج) برابر ۱ است.

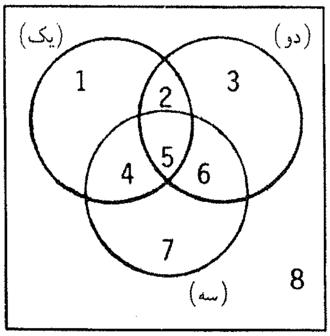
۱۱. $Pr(A) = \frac{۱}{۳}$، $Pr(B) = \frac{۷}{۱۵}$، $Pr(A \cap B) = \frac{۲}{۱۵}$ و $Pr(A \cup B) = \frac{۲}{۳}$. می‌بینید که

$$Pr(A \cup B) = \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳} + \frac{۷}{۱۵} - \frac{۲}{۱۵} = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$$

۱۲. الف) $۲\left(\frac{۵!}{۲!}\right) \Big/ \left(\frac{۷!}{۲!۲!}\right) = \frac{۱۲۰}{۱۲۶۰} \doteq ۰/۰۹۵۲$

ب) $$\left[\frac{۷!}{۲!۲!} - ۲\left(\frac{۶!}{۲!} - ۵!\right) - ۵!\right] \Big/ \left(\frac{۷!}{۲!۲!}\right) = \left(\frac{۷!}{۲!۲!} - ۲\frac{۶!}{۲!} + ۵!\right) \Big/ \left(\frac{۷!}{۲!۲!}\right)$$

$$= \frac{۱۲۶۰ - ۷۲۰ + ۱۲۰}{۱۲۶۰} = \frac{۶۶۰}{۱۲۶۰} \doteq ۰/۵۲۳۸$$



۱۳. الف) دایرهٔ (یک) برای ترتیبهای حاوی Sهای کنار هم است، دایرهٔ (دو) برای Eهای کنار هم و دایرهٔ (سه) برای Lهای کنار هم است. پاسخ مسأله عبارت است از تعداد ترتیبهایی از ناحیهٔ ۸ که به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند. برای ناحیهٔ ۵، !۱۰ طریق برای مرتب کردن ۱۰ نماد M، I، C، A، N، O، U، SS، EE، LL وجود دارد. برای ناحیه‌های ۲، ۴ و ۶، $\frac{۱۱!}{۲!} - ۱۰!$ ترتیب حاوی دقیقاً دو جفت از حروف متوالی وجود دارد. سرانجام، هر یک از ناحیه‌های ۱، ۳ و ۷ حاوی $\frac{۱۲!}{۲!۲!} - ۲\left(\frac{۱۱!}{۲!} - ۱۰!\right) - ۱۰!$ ترتیب است. بنابراین،

ناحیهٔ ۸ شامل $10! - 3\frac{11!}{2!} + 3\frac{12!}{2!2!} - \frac{13!}{(2!)^3}$ ترتیب است.

ب) نتیجهٔ قسمت (الف) را بر تعداد کل ترتیبها که $\frac{13!}{(2!)^3}$ است تقسیم کنید.

۱۴. تعداد ترتیبهایی که در آنها H قبل از E یا E قبل از T یا T قبل از M است، برابر است با تعداد کل ترتیبها (یعنی $7!$) منهای تعداد ترتیبهایی که در آنها E قبل از H و T قبل از E و M قبل از T است. $3!$ طریق برای مرتب کردن C، I و S وجود دارد. برای هر یک از این ترتیبها، چهار مکان وجود دارد (یکی در آغاز، دو تا بین حروف و یکی در انتها) که می‌توان، با مجاز بودن تکرار، انتخاب کرد تا حروف M، T، E و H را با همین ترتیب، در آنها قرار داد. بنابراین، $(3!)\binom{4+4-1}{4} = 3!\binom{7}{4}$ ترتیب وجود دارد که در آنها M قبل از T، T قبل از E و E قبل از H است. درنتیجه، $7! - (3!)\binom{7}{4}$ ترتیب وجود دارد که در آنها یا H قبل از E، یا E قبل از T یا T قبل از M است.

۱۵. تعداد ترتیبهایی از حروف واژهٔ CORRESPONDENT که با حرف O شروع و به حرف O ختم می‌شوند $\frac{11!}{(2!)^3}$ است. تعداد ترتیبهایی از حروف همین واژه که با یک حرف شروع و به همان حرف ختم می‌شوند $(4)\frac{11!}{(2!)^3}$ است. چون روی‌هم $\frac{13!}{(2!)^4}$ ترتیب وجود دارد، احتمال اینکه ترتیب مفروضی با یک حرف شروع و به همان حرف ختم شود $\frac{2}{39} = (4)\left[\frac{11!}{(2!)^3}\right] \Big/ \left[\frac{13!}{(2!)^4}\right]$ است.

تمرینات تکمیلی

۱. فرض‌کنیم $(A-B) \subseteq C$ و $x \in A - C$. دراین‌صورت $x \in A$ و $x \notin C$. اگر $x \notin B$، دراین‌صورت $[x \in A \wedge x \notin B] \Longrightarrow x \in (A-B) \subseteq C$، بنابراین، $x \notin C$ و $x \in C$. از این تناقض نتیجه می‌شود $x \in B$ و بنابراین، $(A-C) \subseteq B$.

برعکس، اگر $(A-C) \subseteq B$، فرض‌کنیم $y \in A - B$. دراین‌صورت $y \in A$ و $y \notin B$. اگر $y \notin C$، دراین‌صورت $[y \in A \wedge y \notin C] \Longrightarrow y \in (A-C) \subseteq B$. از این تناقض، یعنی از $y \notin B$ و $y \in B$، نتیجه می‌شود که $y \in C$ و بنابراین، $(A-B) \subseteq C$.

۲. فرض‌کنیم $A \subseteq B$ و $C \subseteq \mathcal{U}$، که در آن $C \subseteq A$. بنابر قضیهٔ ۱۰۳(الف)، $C \subseteq B$. برعکس، فرض‌کنیم $\forall C \subseteq \mathcal{U}(C \subseteq A \Longrightarrow C \subseteq B)$. اگر $x \in A$، دراین‌صورت $\{x\} \subseteq A$ و بنابراین، $\{x\} \subseteq B$. ولی $\{x\} \subseteq B \Longrightarrow x \in B$. بنابراین، $A \subseteq B$.

۳. الف) $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$، $A = \{1, 2\}$، $B = \{1\}$ و $C = \{2\}$ یک مثال نقض به‌دست می‌دهند.

ب)
$$A = A \cap \mathcal{U} = A \cap (C \cup \overline{C}) = (A \cap C) \cup (A \cap \overline{C}) = (A \cap C) \cup (A - C)$$
$$= (B \cap C) \cup (B - C) = (B \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) = B \cap (C \cup \overline{C}) = B \cap \mathcal{U} = B$$

پ) مجموعه‌های قسمت (الف) یک مثال نقض برای این قسمت نیز به‌دست می‌دهند.

ت) فرض‌کنیم $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$، $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1\}$. دراین‌صورت $|P(A-B)| = 2^2 = 4$، درحالی‌که $|P(A)| - |P(B)| = 6$ و بنابراین، همان‌طورکه این مثال نقض نشان می‌دهد، فرمول داده شده نادرست است.

۴. الف) $m + n$ شیئی را که با $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ نشان داده شده‌اند درنظر می‌گیریم.

فرض کنیم $A=\{x_1,\dots,x_m\}$ و $B=\{y_1,\dots,y_n\}$. هنگام انتخاب r عنصر از $A\cup B$، k عنصر $(0\le k\le m)$ از A و $r-k$ عنصر $(0\le r-k\le n)$ از B برمی‌گزینیم. درنتیجه، تعداد زیرمجموعه‌های r عنصری $A\cup B$ عبارت است از

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$$
$$=\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

ب) در قسمت (الف)، n را به‌جای m و n را به‌جای r بگذارید و برابری $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}^2$ را به‌کار ببرید.

۵. الف) ۱۲۶ (درصورتی‌که گروهها لباسهای متفاوت بر تن کنند)؛ ۶۳ (درصورتی‌که گروهها از یکدیگر تمیز داده نشوند).

ب) 2^n-2؛ $\frac{1}{2}(2^n-2)$؛ $2^n-2-2-2n$؛ $\frac{1}{2}(2^n-2-2n)$.

۶. الف) نادرست: فرض کنید $A=\{0,1,2,3,\dots\}$ و $B=\{0,-1,-2,\dots\}$. دراین‌صورت A و B نامتناهی‌اند، ولی $|A\cap B|=|\{0\}|=1$.

ب) نادرست: فرض کنید $A=\{1,2\}$ و $B=\mathbf{Z}^+$.

پ) درست

ت) نادرست: فرض کنید $A=\{1,2\}$ و $B=\mathbf{Z}^+$.

۷. الف) ۱۲۸ ب) $|A|=8$

۸. الف) 2^7 ب) $\binom{8}{3}(2^7)$ پ) $\binom{8}{3}\binom{7}{5}$

ت)

```
10   Random
20   Dim S(8)
30   For I = 1 To 8
40       S(I)= Int(Rnd * 15) + 1
50       For J= 1 To I - 1
60           If S(I)= S(J) Then GOTO 40
70       Next J
80   Next I
90   C= 0
100  Rem C counts the odd elements of the subset
110  For I = 1 TO 8
120      If (S(I)/2) <> Int (S(I)/2) Then C = C + 1
130  Next I
140  Print "The eight-element subset generated ";
150  Print "in this program contains the elements"
160  For I= 1 To 7
170      Print S(I); ",";
180  Next I
190  Print " and "; S(8); ", and "; C;
200  Print " of these elements are odd"
210  End
```

۹. فرض کنیم $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$ و $x\in C$. دراین‌صورت

$$x\in C \Longrightarrow x\in(A\cap B)\cup C \Longrightarrow x\in A\cap(B\cup C)\subseteq A$$

بنابراین، $x\in A$ و $C\subseteq A$.

برعکس، فرض کنیم $C\subseteq A$.

(۱) اگر $y\in(A\cap B)\cup C$، دراین‌صورت $y\in A\cap B$ یا $y\in C$.

(یک) $y\in A\cap B \Longrightarrow y\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Longrightarrow y\in A\cap(B\cup C)$

(دو) چون $C\subseteq A$، نتیجه می‌شود $y\in C\Longrightarrow y\in A$. همچنین $y\in C\Longrightarrow y\in B\cup C$. پس $y\in A\cap(B\cup C)$. در هر حالت ((یک) یا (دو)) داریم $y\in A\cap(B\cup C)$ و بنابراین، $(A\cap B)\cup C\subseteq A\cap(B\cup C)$.

(۲) اکنون فرض کنیم $z\in A\cap(B\cup C)$. دراین‌صورت

$$z\in A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq(A\cap B)\cup C$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$.

.۱۰ $$(A-C)-(B-C)=(A\cap\overline{C})\cap\overline{(B\cap\overline{C})}=(A\cap\overline{C})\cap(\overline{B}\cup C)$$
$$=(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C}\cap C)=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=(A-B)-C$$

۱۱. الف) فرض کنیم $A\cup B=\mathcal{U}$ و $x\in\overline{A}$. دراین‌صورت، با توجه به $A\cup B=\mathcal{U}$، داریم

$$x\in\overline{A}\Longrightarrow x\notin A\Longrightarrow x\in B$$

درنتیجه، $\overline{A}\subseteq B$.

برعکس، فرض کنیم $y\in\mathcal{U}$. اگر $y\in A$، کار تمام است. در غیراین صورت، $y\notin A$ و بنابراین، $y\in\overline{A}\subseteq B$. در هر حالت داریم $y\in A\cup B$ و در نتیجه، $\mathcal{U}\subseteq A\cup B$. ولی همواره داریم $A\cup B\subseteq\mathcal{U}$ و بنابراین، $A\cup B=\mathcal{U}$.

ب) اگر $x\in B$ و $A\cap B=\emptyset$، دراین‌صورت $x\notin A$. ولی $x\notin A\Longrightarrow x\in\overline{A}$ و بنابراین، $B\subseteq\overline{A}$.

برعکس، اگر $B\subseteq\overline{A}$ و $y\in A\cap B$، دراین‌صورت $y\in B$ و $y\in A$. ولی، $y\in B\Longrightarrow y\in\overline{A}$، زیرا $B\subseteq\overline{A}$. پس $y\in A$ و $y\in\overline{A}$ یا $y\in A\cap\overline{A}=\emptyset$ و $A\cap B\subseteq\emptyset$. چون همواره داریم $\emptyset\subseteq A\cap B$، نتیجه می‌شود که $A\cap B=\emptyset$.

۱۲. الف) دراینجا $|A\cup B|-|A\cap B|=5$ و بنابراین، 2^5 زیرمجموعه مانند C وجود دارند که در $A\cap B\subseteq C\subseteq A\cup B$ صدق می‌کنند. تعداد زیرمجموعه‌هایی که تعداد عنصرهایشان زوج است عبارت است از

$$\binom{5}{1}+\binom{5}{3}+\binom{5}{5}=16$$

(برای $|C|=4$) (برای $|C|=6$) (برای $|C|=8$)

ب) 2^5؛ $\binom{5}{0}+\binom{5}{2}+\binom{5}{4}=16$

۱۳. الف) $\left[0,\frac{14}{3}\right]$ ب) $\left(0,\frac{9}{5}\right]$ پ) $\{0\}$ ت) $\{0\}\cup(6,12]$

ث) $[۰,+\infty)$ ج) $(۰,+\infty)$ چ) $\{۰\}$ ح) $\emptyset$

۱۴. الف) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)=B\Delta A$

ب) $A\Delta\overline{A}=(A-\overline{A})\cup(\overline{A}-A)=A\cup\overline{A}=\mathcal{U}$

پ) $A\Delta\mathcal{U}=(A-\mathcal{U})\cup(\mathcal{U}-A)=\emptyset\cup A=A$

ت) $A\Delta\emptyset=(A-\emptyset)\cup(\emptyset-A)=A\cup\emptyset=A$

۱۵. الف)

	A	B	$A\cap B$
→	۰	۰	۰
→	۰	۱	۰
	۱	۰	۰
→	۱	۱	۱

چون $A\subseteq B$، فقط سطرهای ۱، ۲ و ۴ از این جدول را درنظر می‌گیریم. در این سطرها، یک مقدار در ستونهای مربوط به A و $A\cap B$ دیده می‌شود؛ بنابراین،

$$A\subseteq B\Longrightarrow A=A\cap B$$

پ)

	A	B	C	$A\cap\overline{C}$	$A\cap\overline{B}$	$B\cap\overline{C}$	$(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{C})$
→	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱
	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰
→	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱
	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱
→	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱
→	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰

فقط سطرهای ۱، ۵، ۷ و ۸ را درنظر می‌گیریم. در این سطرها داریم $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{C})=A\cap\overline{C}$.

د،ه،وت) نتایج مربوط به این قسمتها را نیز به همین ترتیب می‌توان تحقیق کرد.

۱۶. الف) $B\subseteq A\Longrightarrow A\cup B=A$

ب) $(B\cap C=C)$ و $(A\cup B=A)\Longrightarrow A\cap B\cap C=C$

پ) $C\supseteq B\supseteq A\Longrightarrow(A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{C})=A\cup\overline{C}$

ت) $(A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{A})=C\Longrightarrow(B\cup\overline{C})\cap(C\cup\overline{B})=A$ و $(A\cup\overline{C})\cap(C\cup\overline{A})=B$

۱۷. الف) این r تا ۰، $r + ۱$ مکان برای m تا ۱ مفروض تعیین می‌کنند. اگر $m \leq r + ۱$، می‌توانیم این مکانها را به $\binom{r+۱}{m}$ طریق انتخاب کنیم.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، در اینجا k تا ۱ (برای عنصرهای A) و $n - k$ تا ۰ (برای عنصرهای $U - A$) داریم. این $n-k$ تا ۰، $n-k+۱$ مکان برای k تا ۱ به‌طوری‌که هیچ دوتایی کنار هم نباشند، به‌دست می‌دهند. اگر $k \leq n - k + ۱$ یا $۲k \leq n + ۱$، k مکان موردنظر را می‌توان به $\binom{n-k+۱}{k}$ طریق انتخاب کرد. پس $\binom{n-k+۱}{k}$ زیرمجموعه از U مانند A وجود دارد به‌طوری‌که $|A| = k$ و A شامل اعداد صحیح متوالی نباشد.

۱۸. در اینجا

$$B = \{۳k + ۱ | k \in \mathbf{N}, ۰ \leq k \leq ۳۳\} \cup \{۳t + ۲ | t \in \mathbf{N}, ۰ \leq t \leq ۳۲\}$$
$$\cup \{۹, ۱۸, ۳۶, ۴۵, ۶۳, ۷۲, ۸۱, ۹۰, ۹۹\}$$

و بنابراین، $|B| = ۳۴ + ۳۳ + ۹ = ۷۶$.

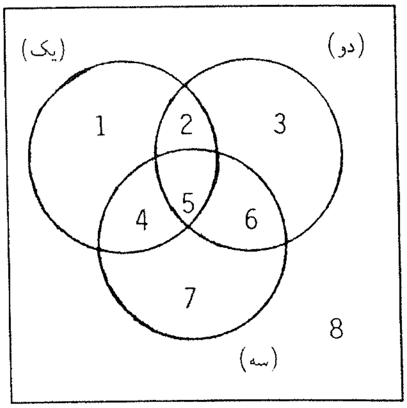
۱۹. الف) ۲۳ ب) ۸

۲۰. $\frac{۲}{۷}$

۲۱. الف) $\dfrac{\binom{۱۵}{۱۲}}{\binom{۱۹}{۱۶}}$ ب) $\dfrac{\binom{۱۱}{۸}}{\binom{۱۹}{۱۶}}$ پ) $\dfrac{۱}{\binom{۱۹}{۱۶}}$

۲۲. ۷

۲۳. در شکل مقابل، فرض کنید دایرهٔ (یک) زیرمجموعهٔ متشکل از همهٔ گماردنهایی باشد که کسی روی آزمایش (یک) کار نکند. به‌همین ترتیب، برای دایره‌های (دو) و (سه). برای هر دستیار، هفت امکان وجود دارد: هر هفت زیرمجموعهٔ ناتهی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳\}$. بنابراین، $۷^{۱۵}$ نحوهٔ ممکن برای گماردن وجود دارد. برای تعیین تعداد گماردنهای واقع در ناحیهٔ ۸، باید تعداد گماردنهای واقع در اجتماع هر سه زیرمجموعهٔ دایره‌ای را تعیین کنیم. ناحیهٔ ۵، ۰ عنصر دارد درحالی‌که هر یک از ناحیه‌های ۲، ۴ و ۶ حاوی ۱ عنصر است (مثلاً در مورد ناحیهٔ ۲، اگر همهٔ دستیاران فقط به آزمایش ۳ گمارده شوند، دراین‌صورت این تنها طریقی است که هر کس روی یک آزمایش کار می‌کند، ولی کسی روی آزمایشهای ۱ و ۲ کار نمی‌کند).

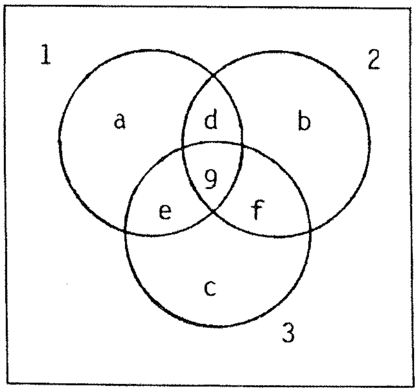


در هر یک از ناحیه‌های ۱، ۳ و ۷، $۳^{۱۵} - ۲$ عنصر وجود دارد (مثلاً در مورد ناحیه‌های ۱، ۲، ۴ و ۵، سه حالت وجود دارد که کسی روی آزمایش ۱ کار نکند ـ زیرا هر دستیار می‌تواند فقط روی آزمایش ۲ یا فقط روی آزمایش ۳ یا روی هر دو آزمایش ۲ و ۳ کار کند). تعداد گماردنهایی که در هر یک از آنها دست‌کم یک نفر روی هر آزمایش کار کند $۷^{۱۵} - ۳(۳^{۱۵} - ۲) - ۳$ است.

۲۴. نمودار ون را در شکل صفحهٔ بعد در نظر بگیرید. با توجه به اطلاعات داده شده می‌دانیم که

(یک) $a+b+c+d+e+f=۲۱-۹=۱۲$ (دو) $b+c+f=۵$

(سه) $a+c+e=۷$ (چهار) $a+b+d=۶$



اگر برابریهای بالا را با هم جمع کنیم می‌بینیم که $۲(a+b+c)+(d+e+f)=۱۸$ و بنابراین، $[۱۸-۲(a+b+c)]+(a+b+c)=۱۲$. بنابراین، تعداد دانشجویانی که دقیقاً به یک پرسش پاسخ داده‌اند $a+b+c=۶$ است.

۲۵. چون $|A\cap B|=۰$، نتیجه می‌شود $|A\cup B|=۱۲+۱۰=۲۲$. $\binom{۲۲}{۷}$ طریق برای انتخاب هفت عنصر از $A\cup B$ وجود دارد. $\binom{۱۲}{۴}\binom{۱۰}{۳}$ تا از این انتخابها حاوی چهار عنصر از A و سه عنصر از B است. در نتیجه، احتمال موردنظر $۰٫۳۴۸۳ \doteq \frac{(۴۹۵)(۱۲۰)}{۱۷۰۵۴۴} = \frac{\binom{۱۲}{۴}\binom{۱۰}{۳}}{\binom{۲۲}{۷}}$ است.

۲۶. الف) $P(\mathcal{U})=\{۰,\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\},\mathcal{U}\}$ و

$$\sum_{A\in P(\mathcal{U})}\sigma(A)=۱+۲+۳+(۱+۲)+(۱+۳)+(۲+۳)+(۱+۲+۳)$$
$$=۴(۱+۲+۳)=۲^{۲}(۱+۲+۳)=۲۴$$

ب) $۲^{۳}(۱+۲+۳+۴)=۸۰$

پ) $۲^{۴}(۱+۲+۳+۴+۵)=۲۴۰$

ت) $۲^{n-۱}(۱+۲+۳+\cdots+n)$

برهان (۱): فرض کنیم $x\in\mathcal{U}$. در این صورت x در ۱ زیرمجموعهٔ یک عنصری، $\binom{n-۱}{۱}$ زیرمجموعهٔ ۲ عنصری، $\binom{n-۱}{۲}$ زیرمجموعهٔ ۳ عنصری، …، $\binom{n-۱}{k-۱}$ زیرمجموعهٔ k عنصری، … و $\binom{n-۱}{n-۱}$ زیرمجموعهٔ n عنصری حضور دارد. بنابراین، روی‌هم x در $۲^{n-۱}=\left[\binom{n-۱}{۰}+\binom{n-۱}{۱}+\binom{n-۱}{۲}+\cdots+\binom{n-۱}{n-۱}\right]$ زیرمجموعه حضور دارد. در نتیجه، $\sum_{A\in P(\mathcal{U})}\sigma(A)=۲^{n-۱}\sum_{x\in\mathcal{U}}x=۲^{n-۱}(۱+۲+۳+\cdots+n)$.

برهان (۲): فرض کنیم $x\in\mathcal{U}$. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ $A\subseteq\mathcal{U}$، اگر $x\notin A$، در این صورت $x\in\overline{A}$. بنابراین، به‌ازای هر جفت مانند $(A,\overline{A})$ از زیرمجموعه‌های $\mathcal{U}$، دقیقاً یکی از آنها حاوی x است. چند تا

از این نوع جفتها وجود دارد؟ $\left(\frac{1}{2}\right)(2^n) = 2^{n-1}$. در نتیجه، هر $x \in \mathcal{U}$ را می‌توان دقیقاً در 2^{n-1} زیرمجموعهٔ $\mathcal{U}$ یافت و به این ترتیب مقدار $\sum_{A\in P(\mathcal{U})}\sigma(A)$ به‌دست می‌آید.

ث) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (ت) می‌بینیم که $\sum_{A\in P(\mathcal{U})}\sigma(A) = 2^{n-1}s$.

۲۷. الف)

$$\underbrace{\binom{16}{8}}_{\substack{\text{بدون حرکت}\\ \text{مورب}}} + \underbrace{\binom{14}{7}}_{\substack{\text{یک حرکت}\\ \text{مورب}}}\binom{15}{1} + \underbrace{\binom{12}{6}}_{\substack{\text{دو حرکت}\\ \text{مورب}}}\binom{13+2-1}{2}$$

$$+ \underbrace{\binom{10}{5}}_{\substack{\text{سه حرکت}\\ \text{مورب}}}\binom{11+3-1}{3} + \underbrace{\binom{8}{4}}_{\substack{\text{چهار حرکت}\\ \text{مورب}}}\binom{9+4-1}{4} + \underbrace{\binom{6}{3}}_{\substack{\text{پنج حرکت}\\ \text{مورب}}}\binom{7+5-1}{5}$$

$$+ \underbrace{\binom{4}{2}}_{\substack{\text{شش حرکت}\\ \text{مورب}}}\binom{5+6-1}{6} + \underbrace{\binom{2}{1}}_{\substack{\text{هفت حرکت}\\ \text{مورب}}}\binom{3+7-1}{1} + \underbrace{\binom{0}{0}}_{\substack{\text{هشت حرکت}\\ \text{مورب}}}\binom{1+8-1}{8}$$

$$= \sum_{i=0}^{8}\binom{2i}{i}\binom{(2i+1)+(8-i)-1}{8-i} = \sum_{i=0}^{8}\binom{2i}{i}\binom{8+i}{8-i}$$

ب) یک) $\binom{12}{6}\binom{14}{2}\Big/\sum_{i=0}^{8}\binom{2i}{i}\binom{8+i}{8-i}$

دو) $\binom{12}{6}\binom{13}{1}\Big/\sum_{i=0}^{8}\binom{2i}{i}\binom{8+i}{8-i}$

سه) $\left[\binom{16}{8} + \binom{12}{6}\binom{14}{2} + \binom{8}{4}\binom{12}{4} + \binom{4}{2}\binom{10}{6} + \binom{0}{0}\binom{8}{8}\right]\Big/\sum_{i=0}^{8}\binom{2i}{i}\binom{8+i}{8-i}$

۴

ویژگیهای اعداد صحیح: استقرای ریاضی

بند ۴.۱

۱. الف) $S(n): ۱^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ + \cdots + (۲n-۱)^۲ = \dfrac{n(۲n-۱)(۲n+۱)}{۳}$

$S(۱): ۱^۲ = \dfrac{۱ \times ۱ \times ۳}{۳}$. این گزاره درست است.

فرض‌کنیم به‌ازای عددی مانند $k \geq ۱$، $S(k): ۱^۲ + ۳^۲ + \cdots + (۲k-۱)^۲ = \dfrac{k(۲k-۱)(۲k+۱)}{۳}$. $S(k+۱)$ را درنظر می‌گیریم.

$$[۱^۲ + ۳^۲ + \cdots + (۲k-۱)^۲] + (۲k+۱)^۲ = \frac{k(۲k-۱)(۲k+۱)}{۳} + (۲k+۱)^۲$$

$$= \left(\frac{۲k+۱}{۳}\right)[k(۲k-۱) + ۳(۲k+۱)] = \left(\frac{۲k+۱}{۳}\right)[۲k^۲ + ۵k + ۳]$$

$$= \frac{(k+۱)(۲k+۱)(۲k+۳)}{۳}$$

بنابراین، $S(k) \Longrightarrow S(k+۱)$ و به این ترتیب با استفاده از استقرای ریاضی، نتیجهٔ مطلوب به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ حاصل می‌شود.

ب) $S(n): \sum_{i=۱}^{n} \dfrac{۱}{i(i+۱)} = \dfrac{n}{n+۱}$

$\sum_{i=۱}^{۱} \dfrac{۱}{i(i+۱)} = \dfrac{۱}{۱ \times ۲} = \dfrac{۱}{۱+۱}$ و بنابراین، $S(۱)$ درست است.

فرض کنیم $S(k): \sum_{i=۱}^{k} \dfrac{۱}{i(i+۱)} = \dfrac{k}{k+۱}$. $S(k+۱)$ را درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{i=۱}^{k+۱} \frac{۱}{i(i+۱)} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{i(i+۱)} + \frac{۱}{(k+۱)(k+۲)} = \frac{k}{k+۱} + \frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}$$

$$= \frac{k(k+۲)+۱}{(k+۱)(k+۲)} = \frac{k+۱}{k+۲}$$

بنابراین، $S(k) \Longrightarrow S(k+1)$ و به این ترتیب بنابر اصل استقرای متناهی، نتیجهٔ مطلوب به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ حاصل می‌شود.

ت) $S(n) : \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$

$S(1) : \sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^1 - 1$ و بنابراین، $S(1)$ درست است.

فرض کنیم $S(k) : \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = 2^k - 1$ ، $S(k+1)$ را درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

بنابراین، $S(k) \Longrightarrow S(k+1)$ و بنابر استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

ث) فرض کنیم $S(n)$ گزارهٔ باز $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ را نشان دهد. وقتی $n = 1$، داریم $S(1) : 1^3 = 1^2(2(1)^2 - 1) = 1(2 - 1) = 1$، که گزارهٔ درستی است. اکنون به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{Z}^+$، درستی $S(k)$ را مفروض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2 - 1)$$

اگر حالت $n = k + 1$ را درنظر بگیریم می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
&1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2k-1)^3 + (2(k+1)-1)^3 \\
&= [1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2k-1)^3] + (2k+1)^3 \\
&= k^2(2k^2 - 1) + (2k+1)^3 = 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\
&= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
(k+1)^2\left[2(k+1)^2 - 1\right] &= (k^2 + 2k + 1)[2k^2 + 4k + 2 - 1] \\
&= (k^2 + 2k + 1)(2k^2 + 4k + 1) \\
&= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1
\end{aligned}$$

بنابراین، $S(k) \Longrightarrow S(k+1)$. به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ حاصل می‌شود.

اثبات قسمتهای دیگر نیز به‌همین ترتیب انجام می‌گیرد.

۲. الف) به‌ازای $n = 1$، $\sum_{i=1}^{1} i(2^i) = 2 = 2 + (1-1)2^{1+1}$ و بنابراین، گزارهٔ $S(1)$ درست است. فرض کنیم $S(k)$ درست باشد، یعنی $\sum_{i=1}^{k} i(2^i) = 2 + (k-1)2^{k+1}$. به‌ازای $n = k + 1$ ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i(2^i) = \sum_{i=1}^{k} i(2^i) + (k+1)2^{k+1} &= 2 + (k-1)2^{k+1} + (k+1)2^{k+1} \\
&= 2 + (2k)2^{k+1} = 2 + (k \times 2^{k+2})
\end{aligned}$$

در نتیجه، بنابر اصل استقرای ریاضی، $S(n)$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

ب) وقتی $n = ۱$، $\sum_{i=۱}^{۱} ۲(۳^{i-۱}) = ۲ = ۳^۱ - ۱$ و بنابراین، گزارهٔ مفروض در این حالت درست است. اگر نتیجه را به‌ازای $n = k$ مفروض بگیریم، خواهیم داشت $\sum_{i=۱}^{k} ۲(۳^{i-۱}) = ۳^k - ۱$. اکنون به‌ازای $n = k + ۱$ می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{k+۱} ۲(۳^{i-۱}) &= \sum_{i=۱}^{k} ۲(۳^{i-۱}) + ۲ \times ۳^k = ۳^k - ۱ + ۲ \times ۳^k = (۱ + ۲)۳^k - ۱ \\ &= ۳^{k+۱} - ۱\end{aligned}$$

بنابراین، $S(k) \Longrightarrow S(k + ۱)$. در نتیجه، بنابر اصل استقرای ریاضی، $S(n)$ به‌ازای هر $n \geq ۱$ درست است.

پ) به‌ازای $n = ۱$ می‌بینیم که $\sum_{i=۱}^{۱}(i)(i!) = ۱ = (۱ + ۱)! - ۱$ و بنابراین، $S(۱)$ درست است. درستی $S(k)$ را مفروض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم $\sum_{i=۱}^{k} i(i!) = (k + ۱)! - ۱$. اکنون برای حالت $n = k + ۱$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{k+۱} i(i!) &= \sum_{i=۱}^{k} i(i!) + (k + ۱)(k + ۱)! = (k + ۱)! - ۱ + (k + ۱)(k + ۱)! \\ &= \big[۱ + (k + ۱)\big](k + ۱)! - ۱ = (k + ۲)(k + ۱)! - ۱ \\ &= (k + ۲)! - ۱\end{aligned}$$

بنابراین، $S(k) \Longrightarrow S(k + ۱)$. چون $S(۱)$ درست است، بنابر اصل استقرای ریاضی، گزارهٔ مفروض به‌ازای هر $n \geq ۱$ درست است.

۳. الف) ۷۶۲۶ ب) ۶۲۷۸۷۴

۴. فرض کنیم $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{۲۵}$ این اعداد را (با همان ترتیبی که روی گردونه قرار دارند) نشان دهند و $x_۱ + x_۲ + x_۳ < ۳۹$، $x_۲ + x_۳ + x_۴ < ۳۹$، ...، $x_{۲۳} + x_{۲۴} + x_۱ < ۳۹$ و $x_{۲۴} + x_۱ + x_۲ < ۳۹$. دراین‌صورت $\sum_{i=۱}^{۲۵} ۳x_i < ۲۵(۳۹)$. ولی

$$\sum_{i=۱}^{۲۵} ۳x_i = ۳\sum_{i=۱}^{۲۵} i = \frac{۳ \times ۲۵ \times ۲۶}{۲} = ۳۹ \times ۲۵$$

۵. برهان: عددهای واقع روی دایره را به‌صورت $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ...، $x_{۹۹}$، $x_{۱۰۰}$ نشان می‌دهیم. اگر حکم درست نباشد، دراین صورت

$$\begin{array}{lcl} x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ & < & ۲۰۲ \\ x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ & < & ۲۰۲ \\ x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ & < & ۲۰۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\begin{aligned}
x_{۹۷}+x_{۹۸}+x_{۹۹}+x_{۱۰۰} &< ۲۰۲\\
x_{۹۸}+x_{۹۹}+x_{۱۰۰}+x_{۱} &< ۲۰۲\\
x_{۹۹}+x_{۱۰۰}+x_{۱}+x_{۲} &< ۲۰۲\\
x_{۱۰۰}+x_{۱}+x_{۲}+x_{۳} &< ۲۰۲
\end{aligned}$$

اگر نتایج هر دو طرف این ۱۰۰ نابرابری را با هم جمع کنیم، می‌بینیم که $۴\sum_{i=۱}^{۱۰۰} x_i < ۱۰۰(۲۰۲)$ یا

$$۲۰۲۰۰ > ۴\sum_{i=۱}^{۱۰۰} x_i = ۴\sum_{i=۱}^{۱۰۰} i = ۴\frac{۱۰۰\times ۱۰۱}{۲} = ۲۰۰\times ۱۰۱ = ۲۰۲۰۰$$

که این هم تناقض است.

۶. در اینجا داریم $\sum_{i=۱}^{۲n} i = \frac{۲n(۲n+۱)}{۲} = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} = \sum_{i=۱}^{n} i^۲$ و

$$\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} = \frac{۲n(۲n+۱)}{۲} \Longrightarrow \frac{n(n+۱)}{۶} = \frac{۲n}{۲} \Longrightarrow \frac{n+۱}{۶} = ۱$$
$$\Longrightarrow n+۱ = ۶ \Longrightarrow n = ۵$$

۷. الف) $\sum_{i=۱۱}^{۳۳} i = \sum_{i=۱}^{۳۳} i - \sum_{i=۱}^{۱۰} i = \frac{۳۳\times ۳۴}{۲} - \frac{۱۰\times ۱۱}{۲} = ۵۶۱ - ۵۵ = ۵۰۶$

ب) $\sum_{i=۱۱}^{۳۳} i^۲ = \sum_{i=۱}^{۳۳} i^۲ - \sum_{i=۱}^{۱۰} i^۲ = \frac{۳۳\times ۳۴\times ۶۷}{۶} - \frac{۱۰\times ۱۱\times ۲۱}{۶} = ۱۲۱۴۴$

۸. الف) $(\cos\theta + i\sin\theta)^۲ = \cos^۲\theta + ۲i\sin\theta\cos\theta - \sin^۲\theta$

$$= (\cos^۲\theta - \sin^۲\theta) + i(۲\sin\theta\cos\theta) = \cos ۲\theta + i\sin ۲\theta$$

ب) $S(n) : (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$S(۱)$ درست است. بنابراین، فرض کنیم $S(k) : (\cos\theta + i\sin\theta)^k = (\cos k\theta + i\sin k\theta)$.
$S(k+۱)$ را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+۱} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin\theta\cos k\theta + \sin k\theta\cos\theta)\\
&= \cos(k+۱)\theta + i\sin(k+۱)\theta
\end{aligned}$$

بنابراین، $S(k) \Longrightarrow S(k+۱)$ و بنابر اصل استقرای متناهی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

پ) $(۱+i)^{۱۰۰} = ۲^{۵۰}(\cos ۴۵۰۰^\circ + i\sin ۴۵۰۰^\circ) = ۲^{۵۰}(\cos ۱۸۰^\circ + i\sin ۱۸۰^\circ) = -(۲^{۵۰})$

۹. به‌ازای $n = ۱۱$، $۱۱ - ۲ = ۹ < ۹\frac{۱}{۶} = \frac{۱۱^۲ - ۱۱}{۱۲}$، فرض کنیم نتیجه به‌ازای $n = k\,(k \geq ۱۱)$ درست باشد، یعنی $k - ۲ < \frac{k^۲ - k}{۱۲}$. وقتی $n = k+۱$،

$$k - ۲ < \frac{k^۲ - k}{۱۲} \Longrightarrow (k-۲)+۱ < \frac{k^۲ - k}{۱۲} + ۱ \Longrightarrow (k+۱) - ۲ < \frac{k^۲ - k + ۱۲}{۱۲}$$

به‌ازای $k > 6$، $2k > 12$ و $k > 12 - k$ و بنابراین،

$$(k+1) - 2 < \frac{k^2+k}{12} = \frac{[(k+1)^2-(k+1)]}{12}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq 11$ حاصل می‌شود.

۱۰. به‌ازای $n = 4$ داریم $4! = 24 > 16 = 2^4$ و بنابراین، گزارهٔ $S(4)$ درست است. درستی $S(k)$ را مفروض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم $2^k < k!$. به‌ازای $k \geq 4$، $2 < k+1$ و

$$\left[(2^k < k!) \wedge (2 < k+1)\right] \Longrightarrow (2^k)(2) < (k!)(k+1)$$

یا $2^{k+1} < (k+1)!$. در نتیجه، بنابر اصل استقرای ریاضی، $S(n)$ به‌ازای هر $n \geq 4$ درست است.

۱۱. به‌ازای $n = 5$، $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. فرض کنیم نتیجه به‌ازای $n = k\,(k \geq 5)$ درست باشد، یعنی $2^k > k^2$. به‌ازای $k > 2$، $k(k-2) > 1$ یا $k^2 > 2k+1$. ولی

$$2^k > k^2 \Longrightarrow 2^k + 2^k > k^2 + k^2 \Longrightarrow 2^{k+1} > k^2 + k^2 > k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

پس، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq 5$ درست است.

۱۲. وقتی $n = 10$ می‌بینیم که $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$ و بنابراین، $S(10)$ درست است. درستی $S(k)$ را مفروض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم $2^k > k^3$. اکنون $S(k+1)$ را درنظر می‌گیریم. در اینجا می‌بینیم که $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$ و برای اثبات درستی $S(k+1)$ لازم است که ثابت کنیم $k^2+3k+1 < k^3$.

پس باید این حکم را ثابت کنیم: به‌ازای هر $n \geq 10$ (و در حقیقت، هر $n \geq 4$) داریم $3n^2+3n+1 < n^3$. وقتی $n = 10$ داریم $3(10)^2+3(10)+1 = 331 < 1000 = 10^3$؛ پس این حکم به‌ازای $n = 10$ درست است. نتیجه را به‌ازای $n = r$ مفروض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم $3r^2+3r+1 < r^3$. اکنون حالت $n = r+1$ را درنظر می‌گیریم و می‌بینیم که $(r+1)^3 = r^3+3r^2+3r+1 > 2(3r^2+3r+1)$. اینک می‌خواهیم نشان دهیم که

$$(r+1)^3 > 3(r+1)^2+3(r+1)+1$$

یا

$$2(3r^2+3r+1) > 3(r^2+2r+1)+3(r+1)+1$$

یا

$$6r^2+6r+2 > 3r^2+9r+7$$

یا

$$3r^2-3r-5 > 0$$

یا

$$3\left(r-\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{23}{4}$$

که این هم به‌ازای هر $r \geq ۲$ درست است.

اکنون اگر به مسألهٔ اصلی بازگردیم می‌بینیم که

$$(k+۱)^۳ = k^۳ + (۳k^۲ + ۳k + ۱) < k^۳ + k^۳ = ۲k^۳ < ۲(۲^k) = ۲^{k+۱}$$

بنابراین، $S(k) \Longrightarrow S(k+۱)$ و بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq ۱۰$ درست است.

۱۳. الف) بار دیگر از $n = ۰$ شروع می‌کنیم. می‌بینیم که $H_{۲^۰} = H_۱ \geq ۱ + \frac{۰}{۲} = ۱$؛ پس این حالت اول درست است. اگر درستی گزاره را به‌ازای $n = k\,(k \in \mathbf{N})$ مفروض بگیریم، فرض استقرا را به‌دست می‌آوریم:

$$۱ + \frac{k}{۲} \leq H_{۲^k}$$

اکنون اگر حالت $n = k + ۱$ را درنظر بگیریم می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
H_{۲^{k+۱}} &= H_{۲^k} + \left(\frac{۱}{۲^k+۱} + \frac{۱}{۲^k+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^k+۲^k}\right)\\
&\geq H_{۲^k} + \left(\frac{۱}{۲^k+۲^k} + \frac{۱}{۲^k+۲^k} + \cdots + \frac{۱}{۲^k+۲^k}\right) = H_{۲^k} + ۲^k\left(\frac{۱}{۲^{k+۱}}\right)\\
&= H_{۲^k} + \frac{۱}{۲} \geq ۱ + \frac{k}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱ + \frac{k+۱}{۲}
\end{aligned}$$

اینک، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq ۰$ حاصل می‌شود.

ب) اگر با $n = ۱$ شروع کنیم می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
\sum_{j=۱}^{۱} jH_j = H_۱ = ۱ &= \left(\frac{۲\times۱}{۲}\right)\left(\frac{۳}{۲}\right) - \left(\frac{۲\times۱}{۴}\right)\\
&= \left(\frac{۲\times۱}{۲}\right)H_۲ - \left(\frac{۲\times۱}{۴}\right)
\end{aligned}$$

اگر درستی گزارهٔ مفروض را به‌ازای $n = k$ بپذیریم، خواهیم داشت

$$\sum_{j=۱}^{k} jH_j = \frac{(k+۱)k}{۲}H_{k+۱} - \frac{(k+۱)k}{۴}$$

اکنون می‌بینیم که به‌ازای $n = k + ۱$،

$$\begin{aligned}
\sum_{j=۱}^{k+۱} jH_j &= \sum_{j=۱}^{k} jH_j + (k+۱)H_{k+۱}\\
&= \left[(k+۱)(k)/۲\right]H_{k+۱} - \left[(k+۱)(k)/۴\right] + (k+۱)H_{k+۱}\\
&= (k+۱)[۱ + (k/۲)]H_{k+۱} - [(k+۱)(k)/۴]
\end{aligned}$$

$$= (k+1)[1+(k/2)][H_{k+2} - (1/(k+2))] - [(k+1)(k)/4]$$
$$= [(k+2)(k+1)/2]H_{k+2} - [(k+1)(k+2)]/[2(k+2)] - [(k+1)(k)/4]$$
$$= [(k+2)(k+1)/2]H_{k+2} - [(1/4)[2(k+1)+k(k+1)]]$$
$$= [(k+2)(k+1)/2]H_{k+2} - [(k+2)(k+1)/4]$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌شود که گزارهٔ مفروض به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۱۴. برهان: به‌ازای $n = 1$ داریم

$$\sum_{i=0}^{1} \frac{1}{2i+1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{و} \quad H_3 - \left(\frac{1}{2}\right) H_1 = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \times (1) = \frac{4}{3}$$

و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است.

فرض کنیم نتیجه به‌ازای $n = k$ درست باشد، یعنی فرض کنیم $\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+1} = H_{2k+1} - \left(\frac{1}{2}\right) H_k$.
وقتی $n = k+1$ می‌بینیم که

$$\sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{2i+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2k+3} = H_{2k+1} - \left(\frac{1}{2}\right) H_k + \frac{1}{2k+3}$$
$$= \left(H_{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+3}\right) - \frac{1}{2}H_k - \frac{1}{2k+2}$$
$$= H_{2k+3} - \frac{1}{2}\left(H_k + \frac{1}{k+1}\right) = H_{2k+3} - \left(\frac{1}{2}\right) H_{k+1}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به ازای هر عدد صحیح مثبت حاصل می‌شود.

۱۵. به‌ازای عددی مانند $k \geq 1$، $S(k)$ را مفروض می‌گیریم. برای $S(k+1)$ ملاحظه می‌کنیم که

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{2} + (k+1) = \frac{(k^2+k)+\frac{1}{4}+2k+2}{2} = \frac{(k+1)^2+(k+1)+\frac{1}{4}}{2}$$
$$= \frac{\left[(k+1)+\frac{1}{2}\right]^2}{2}$$

بنابراین، $S(k) \Longrightarrow S(k+1)$. ولی هیچ مقدار اولیه‌ای برای k، که $S(k)$ به‌ازای آن درست باشد، نداریم: به‌ازای هر $k \geq 1$، $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ و

$$\frac{k(k+1)}{2} = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{2}$$
$$\Longrightarrow 0 = \frac{1}{4}$$

۱۶. حدس: به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$،

$$(n^۲ + ۱) + (n^۲ + ۲) + (n^۲ + ۳) + \cdots + (n + ۱)^۲ = \sum_{i=۱}^{۲n+۱} (n^۲ + i)$$
$$= n^۳ + (n + ۱)^۳$$

برهان:

$$\sum_{i=۱}^{۲n+۱}(n^۲ + i) = n^۲ \sum_{i=۱}^{۲n+۱} ۱ + \sum_{i=۱}^{۲n+۱} i = n^۲(۲n + ۱) + (۲n + ۱)(۲n + ۲)/۲$$
$$= ۲n^۳ + n^۲ + (۲n + ۱)(n + ۱) = ۲n^۳ + n^۲ + ۲n^۲ + ۳n + ۱$$
$$= n^۳ + [n^۳ + ۳n^۲ + ۳n + ۱] = n^۳ + (n + ۱)^۳$$

۱۷. حدس: فرض کنیم $n \in \mathbf{N}$. دراین صورت

$$(۲n + ۱)^۲ + [۴(۰ + ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n)]^۲ = [۴(۰ + ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n) + ۱]^۲$$

برهان: به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم $(۰ + ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n) = \dfrac{n(n + ۱)}{۲}$ و بنابراین،

$$(۲n + ۱)^۲ + [۴(۰ + ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n)]^۲$$
$$= (۴n^۲ + ۴n + ۱) + ۱۶[n(n + ۱)/۲]^۲$$
$$= (۴n^۲ + ۴n + ۱) + ۴n^۲(n + ۱)^۲$$
$$= (۴n^۲ + ۴n + ۱) + ۴n^۴ + ۸n^۳ + ۴n^۲$$
$$= ۴n^۴ + ۸n^۳ + ۸n^۲ + ۴n + ۱$$

همچنین،

$$[۴(۰ + ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n) + ۱]^۲ = \left[\frac{۴n(n + ۱)}{۲} + ۱\right]^۲ = [۲n(n + ۱) + ۱]^۲$$
$$= (۲n^۲ + ۲n + ۱)^۲ = ۴n^۴ + ۸n^۳ + ۸n^۲ + ۴n + ۱$$

۱۸. به‌ازای $n = ۰$، $S = \{a_۱\}$ و ۰ مقایسه لازم داریم. چون $۲^۰ \times ۰ = ۰$، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = ۰$ درست است. این نتیجه را به‌ازای $n = k$ $(k \geq ۰)$ مفروض می‌گیریم. اکنون حالت $n = k + ۱$ را درنظر می‌گیریم. اگر $|S| = ۲^{k+۱}$، دراین صورت $S = S_۱ \cup S_۲$، که در آن $|S_۱| = |S_۲| = ۲^k$. بنابر فرض استقرا، تعداد مقایسه‌های لازم برای مرتب کردن عنصرهای هر یک از مجموعه‌های $S_۱$ و $S_۲$ به ترتیب صعودی، از $k \times ۲^k$ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، با توجه به اطلاعات داده شده، می‌توان عنصرهای S را با حداکثر

$$(k \times ۲^k) + (k \times ۲^k) + (۲^k + ۲^k - ۱) = (k + ۱)۲^{k+۱} - ۱ \leq (k + ۱)۲^{k+۱}$$

مقایسه به ترتیب صعودی مرتب کرد.

۱۹. الف) به‌ازای $n = 1$، $\cos\theta = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta} = \frac{\sin(2^n\theta)}{2^n\sin\theta}$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت درست است.

این نتیجه را به‌ازای $n = k$ مفروض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم

$$(\cos\theta)(\cos 2\theta)\cdots\left(\cos(2^{k-1})\theta\right) = \frac{\sin(2^k\theta)}{2^k\sin\theta}$$

اگر $n = k + 1$، دراین صورت

$$(\cos\theta)(\cos 2\theta)\cdots(\cos(2^{k-1})\theta)(\cos(2^k\theta)) = [\sin(2^k\theta)\cos(2^k\theta)][2^k\sin\theta] =$$

$$[2\sin(2^k\theta)\cos(2^k\theta)]/[2^{k+1}\sin\theta] = [\sin 2(2^k\theta)][2^{k+1}\sin\theta] = [\sin(2^{k+1}\theta)]/(2^{k+1}\sin\theta)$$

به‌این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq 1$ درست است.

ب) اگر $n = 1$، گزارهٔ مفروض به‌صورت $\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$ درمی‌آید که گزارهٔ درستی است، زیرا

$$\frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin\theta} = \cos\theta$$

به‌ازای $n = k$، درستی گزارهٔ

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cdots + \cos(2k-1)\theta = \frac{\sin 2k\theta}{2\sin\theta}$$

را مفروض می‌گیریم. وقتی $n = k + 1$، داریم

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2k-1)\theta) + \cos(2k+1)\theta &= \frac{\sin 2k\theta}{2\sin\theta} + \cos(2k+1)\theta \\ &= \frac{\sin 2k\theta + 2\sin\theta\cos(2k+1)\theta}{2\sin\theta}\end{aligned}$$

برای اثبات این برابری باید نشان دهیم که $\sin(2k+2)\theta = [\sin 2k\theta + 2\sin\theta\cos(2k+1)\theta]$. می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\sin(2k+2)\theta &= \sin 2k\theta\cos 2\theta + \cos 2k\theta\sin 2\theta \\ &= \sin 2k\theta[1 - 2\sin^2\theta] + 2\sin\theta\cos\theta\cos 2k\theta \\ &= \sin 2k\theta - 2\sin\theta[\sin\theta\sin 2k\theta - \cos\theta\cos 2k\theta] \\ &= \sin 2k\theta + 2\sin\theta\cos(2k+1)\theta\end{aligned}$$

اکنون بنابر اصل استقرای متناهی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq 1$ حاصل می‌شود.

۲۰. اگر $n = 0$، دراین صورت گزارهٔ «$n <> 0$» نادرست است و بنابراین، حلقهٔ While کنار گذاشته می‌شود و مقدار نسبت داده شده به Answer، $x = x + 0 \times y$ است. بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است.

اکنون این نتیجه را به‌ازای $n = k$ درست می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که اگر به‌ازای $x, y \in \mathbf{R}$، برنامه با مقدار $k \in \mathbf{Z}$، $k \geq 0$، به بالای حلقهٔ While برسد، دراین صورت با کنار گذاشتن حلقه وقتی

$k = ۰$ یا با اجرا کردن دو دستورالعمل حلقه، به تعداد k $(k > ۰)$ بار، مقدار نسبت داده شده به Answer، $x + ny$ خواهد بود. برای اثبات نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = k + ۱$، فرض می‌کنیم برنامه به بالای حلقهٔ While برسد. چون $k \geq ۰$، $n = k + ۱ > ۰$، بنابراین، حلقه کنارگذاشته نمی‌شود. در نخستین اجرای حلقهٔ While می‌بینیم که

مقدار نسبت داده شده به x، $x + y$ است و

مقدار n به $k = ۱ - (k + ۱)$ کاهش می‌یابد.

اکنون فرض استقرا را دربارهٔ اعداد حقیقی $x + y$ و y و عدد صحیح نامنفی $k = n - ۱$ به‌کار می‌بریم و با کنارگذاشتن حلقه وقتی $k = ۰$ یا با اجرا کردن هر دو دستورالعمل حلقه، به تعداد k $(k > ۰)$ بار، می‌بینیم که مقدار نسبت داده شده به Answer

$$(x + y) + ky = x + (k + ۱)y$$

است. اینک بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ حاصل می‌شود.

۲۱. به‌ازای $x, n \in \mathbf{Z}^+$، فرض کنیم $S(n)$ گزارهٔ زیر را نشان دهد:

اگر برنامه، پس از اجرای هر دو دستورالعمل حلقه، به تعداد n $(n > ۰)$ بار، به بالای حلقهٔ While برسد، آنگاه مقدار متغیر صحیح Answer، $x(n!)$ است.

نخست $S(۱)$، یعنی گزارهٔ مفروض برای حالت $n = ۱$، را درنظر می‌گیریم. در اینجا برنامه (اگر به بالای حلقهٔ While برسد) به یک‌بار اجرای حلقهٔ While منجر می‌شود: به x مقدار $x \times ۱ = x(۱!)$ نسبت داده می‌شود و مقدار n به ۰ کاهش می‌یابد. چون مقدار n برابر با ۰ است، حلقه مجدداً پردازش نمی‌شود و مقدار متغیر Answer، $x(۱!)$ است. بنابراین، $S(۱)$ درست است.

اکنون درستی گزاره را به‌ازای $n = k$ مفروض می‌گیریم: به‌ازای $x, k \in \mathbf{Z}^+$، اگر برنامه به بالای حلقهٔ While برسد، دراین‌صورت هنگام خروج از حلقه، مقدار متغیر Answer، $x(k!)$ است. برای اثبات $S(k + ۱)$، توجه می‌کنیم که اگر برنامه به بالای حلقهٔ While برسد، دراین‌صورت در نخستین اجرای حلقه، پیشامد زیر روی می‌دهد:

مقدار نسبت داده شده به متغیر x، $x(k + ۱)$ است.

مقدار n به $k = ۱ - (k + ۱)$ کاهش می‌یابد.

دراین‌صورت می‌توانیم فرض استقرا را دربارهٔ اعداد صحیح $x(k + ۱)$ و k به‌کار ببریم و پس از خارج شدن از حلقهٔ While به‌ازای این مقادیر، مقدار متغیر Answer، $\big(x(k + ۱)\big)(k!) = x(k + ۱)!$ است.

درنتیجه، $S(n)$ به‌ازای هر $n \geq ۱$ درست است و به این ترتیب درستی این قطعه برنامهٔ پاسکال را، با استفاده از اصل استقرای ریاضی، تحقیق کرده‌ایم.

۲۲. الف) نتیجهٔ موردنظر به‌ازای n برابر با ۲، ۴، ۵ و ۶ درست است. فرض می‌کنیم این نتیجه به‌ازای هر $n = ۲, ۴, ۵, \ldots, k - ۱, k$، که در آن $k \geq ۶$، درست باشد. اگر $n = k + ۱$، دراین‌صورت

$n = ۲ + (k - ۱)$ و چون نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $k - ۱$ درست است، بنابر استقرا نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $k + ۱$ نیز درست است. به این ترتیب، بنابر اصل استقرای متناهی قوی، می‌توان هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \neq ۱, ۳$، را به‌صورت مجموعی از ۲ها و ۵ها نوشت.

ب) $۲۶ = ۵ + ۷ + ۷ + ۷ \quad ۲۵ = ۵ + ۵ + ۵ + ۵ + ۵ \quad ۲۴ = ۵ + ۵ + ۷ + ۷$

$۲۸ = ۷ + ۷ + ۷ + ۷ \quad ۲۷ = ۵ + ۵ + ۵ + ۵ + ۷$

بنابراین، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $۲۴ \leq n \leq ۲۸$ درست است. فرض کنیم این نتیجه به‌ازای $۲۴ \leq n \leq k$ درست باشد و $n = k + ۱$ را درنظر می‌گیریم. چون $k + ۱ \geq ۲۹$، می‌توان نوشت $k + ۱ = [(k + ۱) - ۵] + ۵ = (k - ۴) + ۵$، که در آن می‌توان $k - ۴$ را به‌صورت مجموعی از ۵ها و ۷ها بیان کرد. بنابراین، $k + ۱$ را می‌توان به‌صورت چنین مجموعی بیان کرد و بنابر صورت قوی اصل استقرای متناهی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq ۲۴$ حاصل می‌شود.

۲۳. اگر $p_n = \left(\frac{۱۰۰۰}{\sqrt{۵}}\right)\left[\left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱} - \left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}\right]$، باگذاشتن ۱ و ۲ به‌جای n، می‌بینیم که $p_۱ = ۱۰۰۰$، $p_۲ = ۲۰۰۰$ و بنابراین، p_n به‌ازای $n = ۱, ۲$ درست است. درستی $p_۱$، $p_۲$، $\dots$، $p_{k-۲}$، $p_{k-۱}$ را به‌ازای $k \geq ۳$ مفروض می‌گیریم. دراین صورت،

$$\begin{aligned}
p_k = p_{k-۱} + p_{k-۲} &= (۱۰۰۰/\sqrt{۵})[((۱ + \sqrt{۵})/۲)^k - ((۱ - \sqrt{۵})/۲)^k \\
&\quad + ((۱ + \sqrt{۵})/۲)^{k-۱} - ((۱ - \sqrt{۵})/۲)^{k-۱}] \\
&= (۱۰۰۰/\sqrt{۵})[((۱ + \sqrt{۵})/۲)^{k-۱}[۱ + ((۱ + \sqrt{۵}/۲)] \\
&\quad - ((۱ - \sqrt{۵})/۲)^{k-۱}[۱ + ((۱ - \sqrt{۵})/۲)]] \\
&= (۱۰۰۰/\sqrt{۵})[((۱ + \sqrt{۵})/۲)^{k-۱}((۱ + \sqrt{۵})/۲)^۲ \\
&\quad - ((۱ - \sqrt{۵})/۲)^{k-۱}((۱ - \sqrt{۵})/۲)^۲] \\
&= (۱۰۰۰/\sqrt{۵})[((۱ + \sqrt{۵})/۲)^{k+۱} - ((۱ - \sqrt{۵})/۲)^{k+۱}]
\end{aligned}$$

در نتیجه، بنابر صورت قوی اصل استقرای ریاضی، p_n به‌ازای هر $n \geq ۱$ درست است.

۲۴. الف) $a_۳ = ۳ \quad a_۴ = ۵ \quad a_۵ = ۸ \quad a_۶ = ۱۳ \quad a_۷ = ۲۱$

ب) $a_۱ = ۱ < \left(\frac{۷}{۴}\right)^۱$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = ۱$ درست است. به‌همین ترتیب، می‌توانیم بنویسیم $a_۲ = ۲ < \frac{۴۹}{۱۶} = \left(\frac{۷}{۴}\right)^۲$ و نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = ۲$ نیز درست است.

فرض کنیم نتیجه به‌ازای هر $۱ \leq n \leq k$، که در آن $k \geq ۲$، درست باشد. اکنون به‌ازای $n = k + ۱$ داریم

$$a_{k+۱} = a_k + a_{k-۱} < (۷/۴)^k + (۷/۴)^{k-۱} = (۷/۴)^{k-۱}[(۷/۴) + ۱] = (۷/۴)^{k-۱}(۱۱/۴)$$
$$= (۷/۴)^{k-۱}(۴۴/۱۶) < (۷/۴)^{k-۱}(۴۹/۱۶) = (۷/۴)^{k-۱}(۷/۴)^۲ = (۷/۴)^{k+۱}$$

به این ترتیب، بنابر صورت قوی اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n \geq ۱$، $a_n < \left(\frac{۷}{۴}\right)^n$.

۲۵. فرض کنیم $\{T = \{n \in \mathbf{Z}^+ | S(n), n \geq n_۰$ درست است. چون $S(n_۰)$، $S(n_۰ + ۱)$، $S(n_۰ + ۲)$، ...، $S(n_۱)$ درست‌اند، می‌دانیم که $n_۰, n_۰ + ۱, n_۰ + ۲, \ldots, n_۱ \notin T$. اگر $T \neq \emptyset$ دراین صورت بنابر اصل خوش‌ترتیبی، T دارای کوچکترین عنصری مانند r است، زیرا $T \subseteq \mathbf{Z}^+$. ولی، چون $S(n_۰)$، $S(n_۰ + ۱)$، ...، $S(r - ۱)$ درست‌اند، نتیجه می‌شود که $S(r)$ نیز درست است. بنابراین، $T = \emptyset$ و نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

بند ۲.۴

۱. الف) $c_۱ = ۷$ و به‌ازای هر $n \geq ۱$، $c_{n+۱} = c_n + ۷$

ب) $c_۱ = ۷$ و به‌ازای هر $n \geq ۱$، $c_{n+۱} = ۷c_n$

پ) $c_۱ = ۱۰$ و به‌ازای هر $n \geq ۱$، $c_{n+۱} = c_n + ۳$

ت) $c_۱ = ۳$ و به‌ازای هر $n \geq ۱$، $c_{n+۱} = c_n + ۱۱$

ث) $c_۱ = ۷$ و به‌ازای هر $n \geq ۱$، $c_{n+۱} = c_n$

ج) $c_۱ = ۱$ و به‌ازای هر $n \geq ۱$، $c_{n+۱} = c_n + ۲n + ۱$

چ) $c_۱ = ۶$ و به‌ازای هر $n \geq ۱$، $c_{n+۱} = c_n + ۲n + ۴$

ح) $c_۱ = ۳$، $c_۲ = ۱$ و به‌ازای هر $n \geq ۱$ $c_{n+۲} = c_n$

۲. الف) اگر گزاره‌های $p_۱$، $p_۲$، ...، p_n، $p_{n+۱}$ مفروض باشند،

(۱) ترکیب فصلی $p_۱$ و $p_۲$ را با $p_۱ \vee p_۲$ و (۲) ترکیب فصلی $p_۱$، $p_۲$، ...، p_n، $p_{n+۱}$ را با $p_۱ \vee p_۲ \vee \ldots \vee p_n \vee p_{n+۱} \Longleftrightarrow (p_۱ \vee p_۲ \vee \cdots \vee p_n) \vee p_{n+۱}$ تعریف می‌کنیم.

ب) نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = ۳$ درست است. این همان قانون شرکت‌پذیری ۷ در بند ۲.۲ است.

اکنون درستی این نتیجه را به‌ازای $n = k \geq ۳$ و هر $۱ \leq r < k$ مفروض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم

$$(p_۱ \vee p_۲ \vee \cdots \vee p_r) \vee (p_{r+۱} \vee \cdots \vee p_k) \Longleftrightarrow (p_۱ \vee p_۲ \vee \cdots \vee p_r \vee p_{r+۱} \vee \cdots \vee p_k)$$

وقتی حالت مربوط به $n = k + ۱$ را درنظر می‌گیریم باید هر $۱ \leq r < k + ۱$ را به‌حساب آوریم.

۱) اگر $r = k$، دراین صورت از تعریف بازگشتی نتیجه می‌شود که

$$(p_۱ \vee p_۲ \vee \cdots \vee p_k) \vee p_{k+۱} \Longleftrightarrow p_۱ \vee p_۲ \vee \cdots \vee p_k \vee p_{k+۱}$$

۲) به‌ازای $۱ \leq r < k$ داریم

$$\begin{aligned}
&(p_۱ \vee p_۲ \vee \cdots \vee p_r) \vee (p_{r+۱} \vee \cdots \vee p_k \vee p_{k+۱}) \\
&\Longleftrightarrow (p_۱ \vee p_۲ \vee \cdots \vee p_r) \vee [(p_{r+۱} \vee \cdots \vee p_k) \vee p_{k+۱}] \\
&\Longleftrightarrow [(p_۱ \vee p_۲ \vee \cdots \vee p_r) \vee (p_{r+۱} \vee \cdots \vee p_k)] \vee p_{k+۱}
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_r \vee p_{r+1} \vee \cdots \vee p_k) \vee p_{k+1}$$
$$\Longleftrightarrow p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_r \vee p_{r+1} \vee \cdots \vee p_k \vee p_{k+1}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq 3$ درست است.

۳. الف) به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq 2$، فرض کنیم $T(n)$ گزارهٔ باز زیر را نشان دهد: برای گزاره‌های p، q_1، q_2، $\ldots$، q_n،

$$p \vee (q_1 \wedge \cdots \wedge q_n) \Longleftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \cdots \wedge (p \vee q_n)$$

بنابر قانون پخش‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$، گزارهٔ $T(2)$ درست است. به‌ازای $k \geq 2$، $T(k)$ را مفروض می‌گیریم و وضعیت مربوط به گزاره‌های p، q_1، q_2، $\ldots$، q_k، q_{k+1} را بررسی می‌کنیم. می‌بینیم که

$$p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_k \wedge q_{k+1}) \Longleftrightarrow p \vee [(q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_k) \wedge q_{k+1}]$$
$$\Longleftrightarrow [p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_k)] \wedge (p \vee q_{k+1})$$
$$\Longleftrightarrow [(p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \cdots \wedge (p \vee q_k)] \wedge (p \vee q_{k+1})$$
$$\Longleftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \cdots \wedge (p \vee q_k) \wedge (p \vee q_{k+1})$$

اکنون بنابر اصل استقرای ریاضی نتیجه می‌شود که گزارهٔ $T(n)$ به‌ازای هر $n \geq 2$ درست است.

ب) وقتی $n = 2$، گزارهٔ $p \wedge (q_1 \vee q_2) \Longleftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2)$ درست است. این همان قانون پخش‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$ است (که در بند ۲۰۲ به‌دست آمد).

فرض کنیم این نتیجه برای حالت $n = k$ $(k \geq 2)$ درست باشد. اکنون ببینیم وقتی $n = k+1$ چه روی می‌دهد:

$$p \wedge [q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_k \vee q_{k+1}] \Longleftrightarrow p \wedge [(q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_k) \vee q_{k+1}]$$
$$\Longleftrightarrow [p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_k)] \vee (p \wedge q_{k+1})$$
$$\Longleftrightarrow [(p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \cdots \vee (p \wedge q_k)] \vee (p \vee q_{k+1})$$
$$\Longleftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \cdots \vee (p \wedge q_k) \vee (p \wedge q_{k+1})$$

۴. الف) به‌ازای $n = 2$، نتیجهٔ موردنظر همان قانون دمورگان $\neg(p_1 \vee p_2) \Longleftrightarrow \neg p_1 \wedge \neg p_2$ است. اگر درستی این نتیجه را به‌ازای $n = k$ مفروض بگیریم، می‌بینیم که به‌ازای $n = k + 1$،

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots p_k \vee p_{k+1}) \Longleftrightarrow \neg[(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_k) \vee p_{k+1}]$$
$$\Longleftrightarrow \neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_k) \wedge \neg p_{k+1} \Longleftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_k) \wedge \neg p_{k+1}$$
$$\Longleftrightarrow \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_k \wedge \neg p_{k+1}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq 2$ درست است.

ب) این قسمت را می‌توان با استدلالی مشابه قسمت (الف) ثابت کرد یا می‌توان آن را از قسمت (الف) با استفاده از اصل دوگانی برای گزاره‌ها به‌دست آورد.

۵. الف) (یک) اشتراک A_1 و A_2، $A_1 \cap A_2$ است.

(دو) اشتراک A_1، A_2، ...، A_n، A_{n+1} با $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cap A_{n+1}$، یعنی با اشتراک دو مجموعهٔ $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ و A_{n+1} تعریف می‌شود.

ب) فرض کنیم $S(n)$ گزارهٔ باز مفروض را نشان دهد. دراین صورت درستی $S(3)$ از قانون شرکت‌پذیری $\cap$ نتیجه می‌شود. با مفروض گرفتن درستی $S(k)$ به‌ازای عددی مانند $k \geq 3$ و به‌ازای هر $1 \leq r < k$، حالت مربوط به $k+1$ مجموعه را بررسی می‌کنیم. دراین صورت می‌بینیم که

۱) به‌ازای $r = k$ داریم $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1} = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+1}$. این از تعریف بازگشتی نتیجه می‌شود.

۲) به‌ازای $1 \leq r < k$ داریم

$$\begin{aligned}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r) \cap (A_{r+1} \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}) &= (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r) \\ \cap [(A_{r+1} \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+1}] &= [(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r) \cap (A_{r+1} \cap \ldots \cap A_k)] \\ \cap A_{k+1} &= (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r \cap A_{r+1} \cap \ldots \cap A_k) \\ \cap A_{k+1} &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r \cap A_{r+1} \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}\end{aligned}$$

در نتیجه، بنابر اصل استقرای ریاضی، $S(n)$ به‌ازای هر $n \geq 3$ درست است.

۶. (یک) به‌ازای $n = 2$، نتیجهٔ موردنظر از قوانین دمورگان حاصل می‌شود. این نتیجه را به‌ازای $n = k \geq 2$ مفروض می‌گیریم و حالت مربوط به $k+1$ مجموعهٔ A_1، A_2، ...، A_k، A_{k+1} را بررسی می‌کنیم، دراین صورت

$$\begin{aligned}\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}} &= \overline{(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+1}} \\ &= \overline{(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)} \cup \overline{A_{k+1}} \\ &= [\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_k}] \cup \overline{A_{k+1}} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_k} \cup \overline{A_{k+1}}\end{aligned}$$

اکنون، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq 2$ درست است.

(دو) اثبات این نتیجه مشابه اثبات قسمت (یک) است. کافی است به جای هر $\cap$، $\cup$ را بگذارید و برعکس. (همچنین، می‌توانیم (دو) را از (یک) با به‌کار بردن اصل دوگانی، یعنی قضیهٔ ۳ ۰ ۵، به‌دست آوریم.)

۷. الف) به‌ازای $n = 2$، درستی نتیجهٔ $A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$ از قانون پخش‌پذیری $\cap$ نسبت به $\cup$ حاصل می‌شود.

با مفروض گرفتن این نتیجه به‌ازای $n = k$، حالت مربوط به مجموعه‌های A، B_1، B_2، ...، B_k، B_{k+1} را بررسی می‌کنیم. داریم

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k \cup B_{k+1}) = A \cap [(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k) \cup B_{k+1}]$$

$$= [A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k)] \cup (A \cap B_{k+1}) = [(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)] \cup (A \cap B_{k+1}) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k) \cup (A \cap B_{k+1})$$

ب) فرض کنیم $S(n)$ گزارهٔ باز مفروض را نشان دهد. بنابر قانون پخش‌پذیری $\cup$ نسبت به $\cap$، می‌دانیم که $S(2)$ درست است. بنابراین، درستی $S(k)$ را به‌ازای عددی مانند $k \geq 2$ مفروض می‌گیریم و $S(k+1)$ را برای مجموعه‌های A، B_1، B_2، ...، B_k، B_{k+1} درنظر می‌گیریم. می‌بینیم که

$$A \cup [B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k \cap B_{k+1}] = A \cup [(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k) \cap B_{k+1}] = [A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k)] \cap (A \cup B_{k+1}) = [(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots \cap (A \cup B_k)] \cap (A \cup B_{k+1}) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots \cap (A \cup B_k) \cap (A \cup B_{k+1})$$

و در نتیجه، بنابر اصل استقرای ریاضی، $S(n)$ به‌ازای هر $n \geq 2$ درست است.

۸. الف) (یک) به‌ازای $n = 2$، $x_1 + x_2$ مجموع معمولی اعداد حقیقی x_1 و x_2 را نشان می‌دهد.

(دو) به‌ازای اعداد حقیقی x_1، x_2، ...، x_n، x_{n+1} داریم

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}$$

یعنی مجموع دو عدد حقیقی $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ و x_{n+1}.

ب) درستی این نتیجه به‌ازای $n = 3$ از قانون شرکت‌پذیری جمع حاصل می‌شود. چون

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$$

ابهامی در عبارت $x_1 + x_2 + x_3$ وجود ندارد.

به‌ازای عددی مانند $k \geq 3$، درستی این نتیجه را به‌ازای هر $1 \leq r < k$ مفروض می‌گیریم و حالت مربوط به $k + 1$ عدد حقیقی را بررسی می‌کنیم. می‌بینیم که

۱) وقتی $r = k$، بنابر تعریف بازگشتی داریم

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + x_{r+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_r + x_{r+1}$$

۲) به‌ازای $1 \leq r < k$ داریم

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + (x_{r+1} + \cdots + x_k + x_{k+1}) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + [(x_{r+1} + \cdots + x_k) + x_{k+1}] = [(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + (x_{r+1} + \cdots + x_k)] + x_{k+1} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r + x_{r+1} + \cdots + x_k) + x_{k+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_r + x_{r+1} + \cdots + x_k + x_{k+1}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq 3$ و هر $1 \leq r < n$ درست است.

۹. الف) (یک) به‌ازای $n = 2$، عبارت $x_1 x_2$ حاصل‌ضرب معمولی اعداد حقیقی x_1 و x_2 را نشان می‌دهد.

(دو) فرض کنیم $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq 2$. به‌ازای اعداد حقیقی x_1، x_2، ...، x_n، x_{n+1}،

$$x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} = (x_1 x_2 \dots x_n) x_{n+1}$$

را برابر با حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی $x_1 x_2 \dots x_n$ و x_{n+1} تعریف می‌کنیم.

ب) بنابر قانون شرکت‌پذیری ضرب (اعداد حقیقی)، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = 3$ درست است. بنابراین، $x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3$ و ابهامی در عبارت $x_1 x_2 x_3$ وجود ندارد.

فرض کنیم به‌ازای عدد خاصی مانند $k \geq 3$، این نتیجه به‌ازای هر $1 \leq r < k$ درست باشد و حالت مربوط به $k+1$ $(k \geq 4)$ عدد حقیقی را بررسی می‌کنیم. می‌بینیم که

۱) وقتی $r = k$، بنابر تعریف بازگشتی داریم

$$(x_1 x_2 \cdots x_r) x_{r+1} = x_1 x_2 \cdots x_r x_{r+1}$$

۲) به‌ازای $1 \leq r < k$ داریم

$$\begin{aligned}(x_1 x_2 \dots x_r)(x_{r+1} \dots x_k x_{k+1}) &= (x_1 x_2 \dots x_r)((x_{r+1} \dots x_k) x_{k+1}) = \\ ((x_1 x_2 \dots x_r)(x_{r+1} \dots x_k)) x_{k+1} &= (x_1 x_2 \dots x_r x_{r+1} \dots x_k) x_{k+1} \\ &= x_1 x_2 \dots x_r x_{r+1} \dots x_k x_{k+1}\end{aligned}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq 3$ و هر $1 \leq r < n$ درست است.

۱۰. با توجه به مطالب ارائه شده در آغاز مسأله، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = 2$ درست است. اگر درستی این نتیجه را به‌ازای $n = k$ عدد حقیقی مفروض بگیریم، به‌ازای $n = k + 1$ داریم

$$\begin{aligned}|x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}| &= |(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_{k+1}| \leq \\ |x_1 + x_2 + \cdots + x_k| + |x_{k+1}| &\leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| + |x_{k+1}|\end{aligned}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq 2$ درست است.

۱۱. الف) فرض کنیم a_1، a_2، a_3، ... دنبالهٔ موردنظر از اعداد صحیح را نشان دهد. دراین صورت می‌توانیم این دنباله را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف کنیم:

(۱) $a_1 = 2$ و (۲) به‌ازای هر $n \geq 1$، $a_{n+1} = (a_n)^2$.

ب) اگر دنبالهٔ موردنظر از اعداد صحیح را با b_1، b_2، b_3، ... نشان دهیم، دراین صورت می‌توانیم تعریف بازگشتی زیر را بیاوریم:

(۱) $b_1 = 2$ و (۲) به‌ازای هر $n \geq 2$، $b_{n+1} = 2^{b_n}$.

۱۲. برهان (با استفاده از اصل استقرای قوی):

چون $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $n = 0, 1$، $0 \leq a_n \leq 1$. این مرحلهٔ پایهٔ برهان را برقرار می‌کند.

برای برقراری مرحلهٔ استقرایی، فرض استقرا را دانسته می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که به‌ازای عددی مانند $k \geq ۱$ و به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots, k-۱, k$، $۰ \leq a_n \leq ۱$. وقتی $n = k + ۱$، نتیجه می‌شود که

(۱) چون $n - ۱ = (k + ۱) - ۱ = k \geq ۱$ و چون هر یک از عددهای a_k، $a_{k-۱}$ و k نامنفی است، داریم $a_{k+۱} \geq ۰$. و علاوه‌برآن،

$$a_{k+۱} = \left(\frac{۱}{k+۱}\right)[a_k + ka_{k-۱}] \leq \left(\frac{۱}{k+۱}\right)[۱ + k] = ۱ \quad (۲)$$

در نتیجه، بنابر اصل استقرای قوی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم $۰ \leq a_n \leq ۱$.

۱۳. برهان (با استفاده از اصل استقرای قوی):

به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲$ داریم

$$a_{۰+۲} = a_۲ = ۱ \geq (\sqrt{۲})^۰ \qquad (n = ۰)$$

$$a_{۱+۲} = a_۳ = a_۲ + a_۰ = ۲ \geq \sqrt{۲} = (\sqrt{۲})^۱ \qquad (n = ۱)$$

$$a_{۲+۲} = a_۴ = a_۳ + a_۱ = ۲ + ۱ = ۳ \geq ۲ = (\sqrt{۲})^۲ \qquad (n = ۲)$$

بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این سه حالت درست است و این مرحلهٔ پایهٔ برهان را به‌دست می‌دهد.

اکنون، فرض کنیم به‌ازای عددی مانند $k \geq ۲$، این نتیجه به‌ازای هر $n = ۰, ۱, ۲, \ldots, k$ درست باشد. وقتی $n = k + ۱$، می‌بینیم که

$$a_{(k+۱)+۲} = a_{k+۳} = a_{k+۲} + a_k \geq (\sqrt{۲})^k + (\sqrt{۲})^{k-۲} = [(\sqrt{۲})^۲ + ۱](\sqrt{۲})^{k-۲} = ۳(\sqrt{۲})^{k-۲}$$
$$= \frac{۳}{۲}(۲)(\sqrt{۲})^{k-۲} = \frac{۳}{۲}(\sqrt{۲})^k \geq (\sqrt{۲})^{k-۲} \qquad \left(\text{زیرا } \frac{۳}{۲} = ۱/۵ > \sqrt{۲}(\doteq ۱/۴۱۴)\right)$$

این مرحلهٔ استقرایی برهان را به‌دست می‌دهد.

اکنون با توجه به مراحل پایه و استقرایی و بنابر اصل استقرای قوی، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $a_{n+۲} \geq (\sqrt{۲})^n$.

۱۴. برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

توجه می‌کنیم که $F_۰ = \sum_{i=۰}^{۰} F_i = ۰ = ۱ - ۱ = F_۲ - ۱$ و بنابراین، گزارهٔ مفروض در این حالت اول درست است. به‌این ترتیب مرحلهٔ پایهٔ برهان فراهم می‌شود.

برای مرحلهٔ استقرایی، درستی گزاره را به‌ازای $n = k$ $(k \geq ۰)$ مفروض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم $\sum_{i=۰}^{k} F_i = F_{k+۲} - ۱$، اکنون ببینیم وقتی $n = k + ۱$ چه روی می‌دهد. می‌بینیم که در این حالت،

$$\sum_{i=۰}^{k+۱} F_i = \Big(\sum_{i=۰}^{k} F_i\Big) + F_{k+۱} = (F_{k+۲} - ۱) + F_{k+۱} = (F_{k+۲} + F_{k+۱}) - ۱ = F_{k+۳} - ۱$$

و بنابراین، درستی گزاره در $n = k$ مستلزم درستی آن در $n = k + ۱$ است.

در نتیجه، بنابر اصل استقرای ریاضی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم $\sum_{i=۰}^{n} F_i = F_{n+۲} - ۱$.

۱۵. برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

به‌ازای $n = ۱$ داریم $\sum_{i=۱}^{۲} F_i F_{i-۱} = F_۱F_۰ + F_۲F_۱ = (۱)(۰) + (۱)(۱) = ۱ = ۱^۲ = F_۲^۲$ و بنابراین

نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است.

اکنون فرض کنیم این نتیجه به‌ازای عددی مانند $k \geq ۱$ درست باشد. در این صورت، داریم $\sum_{i=۱}^{۲k} F_i F_{i-۱} = F_{۲k}^{۲}$. به‌ازای $n = k + ۱$ می‌بینیم که

$$\sum_{i=۱}^{۲(k+۱)} F_i F_{i-۱} = \sum_{i=۱}^{۲k} F_i F_{i-۱} + F_{۲k+۱}F_{۲k} + F_{۲k+۲}F_{۲k+۱}$$

$$= F_{۲k}^{۲} + F_{۲k+۱}F_{۲k} + F_{۲k+۲}F_{۲k+۱} = F_{۲k}(F_{۲k} + F_{۲k+۱}) + F_{۲k+۲}F_{۲k+۱}$$

$$= F_{۲k}F_{۲k+۲} + F_{۲k+۲}F_{۲k+۱} = F_{۲k+۲}(F_{۲k} + F_{۲k+۱}) = F_{۲k+۲}^{۲}$$

چون نتیجهٔ موردنظر در $n = ۱$ درست است و چون درستی گزاره در $n = k$ مستلزم درستی آن در $n = k + ۱$ است، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $\sum_{i=۱}^{۲n} F_i F_{i-۱} = F_{۲n}^{۲}$.

۱۶. برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

اگر $n = ۱$ می‌بینیم که $\sum_{i=۰}^{۲}(-۱)^{i+۱}F_i = -F_۰ + F_۱ - F_۲ = ۰ + ۱ - ۱ = ۰ = -۱ + ۱ = -F_۱ + ۱$ و بنابراین، گزارهٔ باز مفروض در این حالت اول درست است و این مرحلهٔ پایهٔ برهان را به‌دست می‌دهد.

برای ثابت کردن مرحلهٔ استقرایی، فرض می‌کنیم که به‌ازای عددی مانند $k \geq ۱$، داشته باشیم $\sum_{i=۰}^{۲k}(-۱)^{i+۱}F_i = -F_{۲k-۱} + ۱$. وقتی آنچه را که در $n = k + ۱$ روی می‌دهد بررسی کنیم می‌بینیم که

$$\sum_{i=۰}^{۲(k+۱)} (-۱)^{i+۱} F_i = \sum_{i=۰}^{۲k}(-۱)^{i+۱}F_i + (-۱)^{۲k+۲}F_{۲k+۱} + (-۱)^{۲k+۳}F_{۲k+۲}$$

$$= -F_{۲k-۱} + ۱ + F_{۲k+۱} - F_{۲k+۲} = -F_{۲k-۱} + ۱ - F_{۲k}$$

$$= -(F_{۲k-۱} + F_{۲k}) + ۱ = -F_{۲k+۱} + ۱ = -F_{۲(k+۱)-۱} + ۱$$

این مرحله استقرایی برهان را به‌دست می‌دهد.

اکنون از مراحل پایه و استقرایی و با توجه به اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $\sum_{i=۰}^{۲n}(-۱)^{i+۱}F_i = -F_{۲n-۱} + ۱$.

۱۷. برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

مرحلهٔ پایه: وقتی $n = ۱$ می‌بینیم که

$$\sum_{i=۱}^{۱} \frac{F_{i-۱}}{۲^i} = \frac{F_۰}{۲} = ۰ = ۱ - \frac{۲}{۲} = ۱ - \frac{F_۳}{۲} = ۱ - \frac{F_{۱+۲}}{۲^۱}$$

و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است.

مرحلهٔ استقرایی: اگر درستی گزارهٔ باز مفروض را به‌ازای $n = k$ بپذیریم، داریم $\sum_{i=۱}^{k} \frac{F_{i-۱}}{۲^i} = ۱ - \frac{F_{k+۲}}{۲^k}$.
وقتی $n = k + ۱$، می‌بینیم که

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{F_{i-1}}{2^i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{F_{i-1}}{2^i} + \frac{F_k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{F_{k+2}}{2^k} + \frac{F_k}{2^{k+1}}$$

$$= 1 + (1/2^{k+1})[F_k - 2F_{k+2}] = 1 + (1/2^{k+1})[(F_k - F_{k+2}) - F_{k+2}]$$

$$= 1 + (1/2^{k+1})[-F_{k+1} - F_{k+2}] = 1 - (1/2^{k+1})(F_{k+1} + F_{k+2}) = 1 - (F_{k+3}/2^{k+1})$$

از مراحل پایه و استقرایی و با توجه به اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌گیریم که

$$\forall n \in \mathbf{Z}^+ \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{i-1}}{2^i} = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}$$

۱۸. برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

به‌ازای $n = 1$ می‌بینیم که

$$L_1^2 = 1^2 = 1 = (1)(3) - 2 = L_1 L_2 - 2$$

و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است.

اکنون فرض کنیم نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = k$ درست باشد. بنابراین، $\sum_{i=1}^{k} L_i^2 = L_k L_{k+1} - 2$.
در این صورت، به‌ازای $n = k + 1$ می‌بینیم که

$$\sum_{i=1}^{k+1} L_i^2 = \sum_{i=1}^{k} L_i^2 + L_{k+1}^2 = L_k L_{k+1} - 2 + L_{k+1}^2 = L_k L_{k+1} + L_{k+1}^2 - 2$$

$$= L_{k+1}\left(L_k + L_{k+1}\right) - 2 = L_{k+1} L_{k+2} - 2$$

در نتیجه، بنابر اصل استقرای ریاضی، داریم

$$\forall n \in \mathbf{Z}^+ \quad \sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$$

۱۹. برهان (با استفاده از اصل استقرای قوی):

نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = 0$ و $n = 1$ درست است، زیرا

$$5F_{0+2} = 5F_2 = 5(1) = 5 = 7 - 2 = L_4 - L_0 = L_{0+4} - L_0 \qquad (n = 0)$$

$$5F_{1+2} = 5F_3 = 5(2) = 10 = 11 - 1 = L_5 - L_1 = L_{1+4} - L_1 \qquad (n = 1)$$

این مرحلهٔ پایهٔ برهان را برقرار می‌کند.

اکنون فرض استقرا را دانسته می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که به‌ازای عددی مانند $k (\geq 1)$ و به‌ازای هر

$n = 0, 1, 2, \ldots, k-1, k$ داشته باشیم $5F_{n+2} = L_{n+4} - L_n$. در این صورت به‌ازای $n = k+1$ داریم

$$\begin{aligned} 5F_{(k+1)+2} &= 5F_{k+3} = 5(F_{k+2} + F_{k+1}) = 5(F_{k+2} + F_{(k-1)+2}) \\ &= 5F_{k+2} + 5F_{(k-1)+2} = (L_{k+4} - L_k) + (L_{(k-1)+4} - L_{k-1}) \\ &= (L_{k+4} - L_k) + (L_{k+3} - L_{k-1}) = (L_{k+4} + L_{k+3}) - (L_k + L_{k-1}) \\ &= L_{k+5} - L_{k+1} = L_{(k+1)+4} - L_{k+1} \end{aligned}$$

که در آن، برای اثبات برابریهای دوم و هشتم، تعریفهای بازگشتی اعداد فیبوناچی و اعداد لوکا را به‌کار برده‌ایم.

اکنون از اصل استقرای قوی نتیجه می‌شود که

$$\forall n \in \mathbf{N}\ 5F_{n+2} = L_{n+4} - L_n$$

۲۰. الف) فرض کنیم E مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت زوج را نشان دهد. E را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۱) $2 \in E$ و (۲) به‌ازای هر $n \in E$، $n + 2 \in E$.

ب) اگر G مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح نامنفی زوج را نشان دهد، G را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۱) $0 \in G$ و (۲) به‌ازای هر $m \in G$، $m + 2 \in G$.

۲۱. الف)

	مراحل	دلایل
(۱)	p, q, r, T_0	قسمت (۱) از تعریف
(۲)	$(p \vee q)$	مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲ ـ دو) از تعریف
(۳)	$(\neg r)$	مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲ ـ یک) از تعریف
(۴)	$(T_0 \wedge (\neg r))$	مراحل (۱) و (۳) و قسمت (۲ ـ سه) از تعریف
(۵)	$((p \vee q) \rightarrow (T_0 \wedge (\neg r)))$	مراحل (۲) و (۴) و قسمت (۲ ـ چهار) از تعریف

ب)

	مراحل	دلایل
(۱)	p, q, r, s, F_0	قسمت (۱) از تعریف
(۲)	$(\neg p)$	مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲ـ یک) از تعریف
(۳)	$((\neg p) \leftrightarrow q)$	مراحل (۱) و (۲) و قسمت (۲ـ پنج) از تعریف
(۴)	$(s \vee F_0)$	مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲ـ دو) از تعریف
(۵)	$(r \wedge (s \vee F_0))$	مراحل (۱) و (۴) و قسمت (۲ـ سه) از تعریف
(۶)	$(((\neg p) \leftrightarrow q) \rightarrow (r \wedge (s \vee F_0)))$	مراحل (۳) و (۵) و قسمت (۲ـ چهار) از تعریف

پ) | | مراحل | دلایل |
|---|---|---|
| (۱) | p, q, r, s | قسمت (۱) از تعریف |
| (۲) | $(p \to r)$ | مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲ـ چهار) از تعریف |
| (۳) | $(p \vee q)$ | مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲ـ دو) از تعریف |
| (۴) | $((p \vee q) \to s)$ | مراحل (۳۰) و (۱) و قسمت (۲ـ چهار) از تعریف |
| (۵) | $((p \to r) \wedge ((p \vee q) \to s))$ | مراحل (۲) و (۴) و قسمت (۲ـ سه) از تعریف |

۲۲. الف) به‌ازای $n = ۲$ داریم $[(p_۱ \wedge p_۲) \to p_۳] \Longrightarrow [(p_۱ \to p_۲) \wedge (p_۲ \to p_۳)]$، زیرا اگر $(p_۱ \wedge p_۲) \to p_۳$ دارای مقدار ۰ باشد، در این صورت ارزش $p_۱$، $p_۲$ برابر با ۱ و ارزش $p_۳$ برابر با ۰ است. بنابراین، ارزش هر دو گزارهٔ $p_۲ \to p_۳$ و $(p_۱ \to p_۲) \wedge (p_۲ \to p_۳)$ برابر با ۰ است. فرض کنیم نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = k - ۱$ درست باشد و حالت مربوط به $n = k$ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت

$$[(p_۱ \to p_۲) \wedge (p_۲ \to p_۳) \wedge \cdots \wedge (p_{k-۱} \to p_k) \wedge (p_k \to p_{k+۱})] \Longrightarrow$$
$$[((p_۱ \wedge p_۲ \wedge \cdots \wedge p_{k-۱}) \to p_k) \wedge (p_k \to p_{k+۱})] \Longrightarrow [(p_۱ \wedge p_۲ \wedge \cdots \wedge p_k) \to p_{k+۱}]$$

ب) فرض کنیم $S(۱)$ درست باشد و اگر به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{Z}^+$، $S(k)$ درست باشد، آنگاه $S(k) \Longrightarrow S(k + ۱)$. دراین صورت می‌بینیم که

$$[S(۱) \Longrightarrow S(۲), S(۲) \Longrightarrow S(۳), \ldots, S(k) \Longrightarrow S(k + ۱)]$$

و بنابر قسمت (الف)،

$$[(S(۱) \wedge S(۲) \wedge \ldots \wedge S(k)) \Longrightarrow S_{k+۱}]$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۴ ۰ ۲، $S(n)$ به‌ازای هر n درست است. بنابراین، قضیهٔ ۴ ۰ ۲ مستلزم قضیهٔ ۴ ۰ ۱ است.

پ) اگر $n = ۱$ نتیجهٔ موردنظر برقرار است. این نتیجه را به‌ازای $n = k \geq ۱$، که در آن $k \in \mathbf{Z}^+$، مفروض می‌گیریم و حالت مربوط به $n = k + ۱$ را بررسی می‌کنیم. اگر $۱ \in S$، دراین صورت نتیجهٔ موردنظر برقرار است. اگر $۱ \notin S$، فرض کنیم $T = \{x - ۱ | x \in S\} \neq \emptyset$. دراین صورت $k \in T$ و با به کارگیری فرض استقرا دربارهٔ T، T کوچکترین عنصری مانند $t \geq ۱$ دارد که در نتیجه، $t + ۱ \geq ۲$ کوچکترین عنصر S است.

ت) با توجه به قسمت (پ)، قضیهٔ ۴ ۰ ۱ مستلزم اصل خوش‌ترتیبی است. در حل تمرین ۲۵ از بند ۴ ۰ ۱ دیدیم که اصل خوش‌ترتیبی مستلزم قضیهٔ ۴ ۰ ۲ است. بنابراین، قضیهٔ ۴ ۰ ۱ مستلزم قضیهٔ ۴ ۰ ۲ است.

بند ۴.۳

۱. الف) $a = a \times ۱$ و بنابراین، $۱|a$. $۰ = a \times ۰$ و بنابراین، $a|۰$.

ب) از $a|b$ نتیجه می‌شود که به‌ازای عددی مانند $c \in \mathbf{Z}$، $b = ac$. از $b|a$ نتیجه می‌شود که به‌ازای عددی

مانند $d \in \mathbf{Z}^+$، $a = bd$. بنابراین، $b = ac = b(dc)$ و $d = c = ۱$ یا $d = c = -۱$. بنابراین، $a = b$ یا $a = -b$.

پ) از $a|b$ و $b|c$ نتیجه می‌شود که به‌ازای دو عدد مانند $x, y \in \mathbf{Z}$، $b = ax$ و $c = by$. بنابراین، $c = by = a(xy)$ و $a|c$.

ت) $a|b \Longrightarrow (\text{به‌ازای عددی مانند } c \in \mathbf{Z}\text{، } ac = b) \Longrightarrow acx = bx \Longrightarrow a|bx$

ث) اگر $a|x$ و $a|y$، دراین‌صورت به‌ازای اعدادی مانند $c, d \in \mathbf{Z}$، $x = ac$ و $y = ad$. بنابراین، $z = x - y = a(c - d)$ و $a|z$. اثبات حالتهای دیگر نیز به همین ترتیب انجام می‌گیرد.

چ) این قسمت از قسمت (ج) بااستفاده از استقرای ریاضی حاصل می‌شود.

۲. الف) از $a|b$ و $c|d$ نتیجه می‌شود که به‌ازای اعدادی مانند $x, y \in \mathbf{Z}^+$، $b = ax$ و $d = cy$. دراین‌صورت $(ac)(xy) = bd$ و بنابراین، $ac|bd$.

پ) $ac|bc \Longrightarrow (\text{به‌ازای عددی مانند } x \in \mathbf{Z}^+\text{، } acx = bc) \Longrightarrow (ax - b)c = 0$

$$ax - b = 0\ (\text{زیرا } c > 0) \Longrightarrow ax = b \Longrightarrow a|b$$

اثبات قسمت (ب) نیز به همین ترتیب انجام می‌گیرد.

۳. چون q اول است، تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت آن ۱ و q هستند. چون p اول است، پس $p > ۱$. بنابراین، $p|q \Longrightarrow p = q$.

۴. خیر. $6|(3 \times 2)$ ولی $6 \nmid 2$ و $6 \nmid 3$.

۵. برهان (با استفاده از عکس نقیض):

فرض کنیم $a|b$ یا $a|c$. اگر $a|b$، دراین‌صورت به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{Z}$، $ak = b$. ولی

$$ak = b \Longrightarrow (ak)c = a(kc) = bc \Longrightarrow a|bc$$

اگر $a|c$، نتیجهٔ مشابهی به‌دست می‌آید.

۶. برهان (با استقرای ریاضی):

با توجه به قسمت (الف) از تمرین ۲، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = ۲$ درست است. پس این نتیجه را به‌ازای $n = k \geq ۲$ مفروض می‌گیریم. اکنون حالت مربوط به $n = k + ۱$ را درنظر می‌گیریم: عددهای صحیح مثبت $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}$ به‌طوری که، به‌ازای هر $1 \leq i \leq k + 1$ داریم $a_i|b_i$، مفروض‌اند. اگر فرض کنیم $a = a_1 a_2 \ldots a_k$ و $b = b_1 b_2 \ldots b_k$، دراین‌صورت با توجه به فرض استقرا می‌دانیم که $a|b$. چون $a|b$ و $a_{k+1}|b_{k+1}$، با توجه به حالت مربوط به $n = ۲$، نتیجه می‌گیریم که $a \cdot a_{k+1}|b \cdot b_{k+1}$ یا

$$(a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1})|(b_1 \cdot b_2 \cdots b_k \cdot b_{k+1})$$

اکنون، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq ۲$ درست است.

۷. الف) فرض کنید $a = ۱$، $b = ۵$ و $c = ۲$. یک مثال دیگر عبارت است از $a = b = ۵$ و $c = ۳$.

ب) برهان:

(یک) $31|(5a + 7b + 11c) \Longrightarrow 31|(10a + 14b + 22c)$. همچنین، $31|(31a + 31b + 31c)$ و

بنابراین، $۳۱|[(۳۱a+۳۱b+۳۱c)-(۱۰a+۱۴b+۲۲c)]$. بنابراین، $۳۱|(۲۱a+۱۷b+۹c)$.

(دو) $۳۱|(۵a+۷b+۱۱c)$ و $۳۱|(۳۱a+۳۱b+۳۱c)$ و بنابراین،

$$۳۱|\left[۲(۳۱a+۳۱b+۳۱c)-۵(۵a+۷b+۱۱c)\right]$$

یا

$$۳۱|(۳۷a+۲۷b+۷c)$$

چون $۳۱|۳۱a$، نتیجه می‌شود که $۳۱|[(۳۷a+۲۷b+۷c)-۳۱a]$، یعنی $۳۱|(۶a+۲۷b+۷c)$.

۸. ملاحظه می‌شود که هریک از ۱۲ عدد این خریدار به ۶ بخش‌پذیر است. در نتیجه، با توجه به قسمت (چ) از قضیهٔ ۳۰۴ (و با این فرض که، به‌ازای هر $۱ \le i \le n$، $x_i = ۱$)، مجموع هر تعداد از این عددها نیز بر ۶ بخش‌پذیر است. متأسفانه ۵۰۰ بر ۶ بخش‌پذیر نیست و بنابراین، خریدار موردنظر امکان استفاده از چنین جایزه‌ای را ندارد.

۹. چون $b|a$ و $b|(a+۲)$، به‌ازای هر $x, y \in \mathbf{Z}$ داریم $b|[ax+(a+۲)y]$. فرض کنید $x=-۱$ و $y=۱$. دراین صورت $b>۰$ و $b|۲$. بنابراین، $b=۱$ یا $b=۲$.

۱۰. فرض می‌کنیم $n=۲k+۱$، $k \ge ۰$. دراین صورت

$$n^۲-۱=(۲k+۱)^۲-۱=۴k^۲+۴k=۴k(k+۱)$$

چون یکی از دو عدد k و $k+۱$ باید زوج باشد، نتیجه می‌گیریم که $۸|(n^۲-۱)$.

۱۱. فرض می‌کنیم به ازای اعدادی مانند $m,n \ge ۰$، $a=۲m+۱$ و $b=۲n+۱$. دراین صورت $a^۲+b^۲=۴(m^۲+m+n^۲+n)+۲$ و بنابراین، $۲|(a^۲+b^۲)$، ولی $۴ \nmid (a^۲+b^۲)$.

۱۲. الف) $۲۳=۳\times ۷+۲$، $q=۳$، $r=۲$.

ب) $-۱۱۵=(-۱۰)\times ۱۲+۵$، $q=-۱۰$، $r=۵$.

پ) $۰=۰\times ۴۲+۰$، $q=۰$، $r=۰$.

ت) $۳۷=۳۷\times ۱+۰$، $q=۳۷$، $r=۰$.

ث) $۴۳۴=۱۴\times ۳۱+۰$، $q=۱۴$، $r=۰$.

ج) $-۶۴۴=(-۸)\times ۸۵+۳۶$، $q=-۹$، $r=۳۶$.

۱۳. برهان:

به‌ازای $n=۰$ داریم $۷^n-۴^n=۷^۰-۴^۰=۱-۱=۰$ و $۳|۰$. بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت درست است. با مفروض گرفتن درستی آن به‌ازای $n=k$، داریم $۳|(۷^k-۴^k)$. اگر حالت مربوط به $n=k+۱$ را درنظر بگیریم، می‌بینیم که

$$۷^{k+۱}-۴^{k+۱}=۷(۷^k)-۴(۴^k)=(۳+۴)(۷^k)-۴(۴^k)=۳(۷^k)+۴(۷^k-۴^k)$$

چون $۳|۳$ و (بنابر فرض استقرا) $۳|(۷^k-۴^k)$، از قسمت (ج) در قضیهٔ ۳۰۴ نتیجه می‌شود که $۳|[۳(۷^k)+۴(۷^k-۴^k)]$، یعنی $۳|(۷^{k+۱}-۴^{k+۱})$. اکنون، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $۳|(۷^n-۴^n)$.

۱۴. الف) $(۲۱۱)_{۸} = (۲۰۲۱)_{۴} = (۱۰۰۰۱۰۰۱)_{۲} = ۱۳۷$

ب) $(۱۴۱۴۳)_{۸} = (۱۲۰۱۲۰۳)_{۴} = (۱۱۰۰۰۰۱۱۰۰۰۱۱)_{۲} = ۶۲۴۳$

پ) $(۳۰۰۷۱)_{۸} = (۳۰۰۰۳۲۱)_{۴} = (۱۱۰۰۰۰۰۰۱۱۱۰۰۱)_{۲} = ۱۲۳۴۵$

۱۵.

	مبنای ۱۰	مبنای ۲	مبنای ۱۶
الف)	۲۲	۱۰۱۱۰	۱۶
ب)	۵۲۷	۱۰۰۰۰۰۱۱۱۱	۲۰F
پ)	۱۲۳۴	۱۰۰۱۱۰۱۰۰۱۰	۴D۲
ت)	۶۹۲۳	۱۱۰۱۱۰۰۰۰۱۰۱۱	۱B۰B

۱۶.

	مبنای ۱۶	مبنای ۲	مبنای ۱۰
الف)	A۷	۱۰۱۰۰۱۱۱	۱۶۷
ب)	۴C۲	۱۰۰۱۱۰۰۰۰۱۰	۱۲۱۸
پ)	۱CB۲	۱۱۱۰۰۱۰۱۱۰۰۱۰	۷۳۴۶
ت)	A۲DFE	۱۰۱۰۰۰۱۰۱۱۰۱۱۱۱۱۱۱۱۰	۶۶۷۱۳۴

۱۷.

	مبنای ۲	مبنای ۱۰	مبنای ۱۶
الف)	۱۱۰۰۱۱۱۰	۲۰۶	CE
ب)	۰۰۱۱۰۰۰۱	۴۹	۳۱
پ)	۱۱۱۱۰۰۰۰	۲۴۰	F۰
ت)	۰۱۰۱۰۱۱۱	۸۷	۵۷

۱۸. الف) ۰۰۰۰۱۱۱۱ ب) ۱۱۱۱۰۰۰۱ پ) ۰۱۱۰۰۱۰۰

ت) با نمایش دودویی ۶۵ شروع کنید

۶۵

↓

۰۱۰۰۰۰۰۱

↓ جای ۰ها و ۱ها را عوض کنید تا متمم نسبت به یک به‌دست آید

۱۰۱۱۱۱۱۰

↓ ۱ را به متمم نسبت به یک بیفزایید

۱۰۱۱۱۱۱۱

ث) ۰۱۱۱۱۱۱۱ ج) ۱۰۰۰۰۰۰۰

۱۹.

	بزرگترین عدد صحیح	کوچکترین عدد صحیح
الف)	$۷ = ۲^{۳} - ۱$	$-۸ = -(۲^{۳})$
ب)	$۱۲۷ = ۲^{۷} - ۱$	$-۱۲۸ = -(۲^{۷})$
پ)	$۲^{۱۵} - ۱$	$-(۲^{۱۵})$
ت)	$۲^{۳۱} - ۱$	$-(۲^{۳۱})$
ث)	$۲^{n-۱} - ۱$	$-(۲^{n-۱})$

۲۰. الف)
$$\begin{array}{rl} ۰۱۰۱ & (=۵) \\ +۰۰۰۱ & (=۱) \\ \hline ۰۱۱۰ & (=۶) \end{array}$$

ب)
$$\begin{array}{rl} ۱۱۰۱ & (=-۳) \\ +۱۱۱۰ & (=-۲) \\ \hline ۱۰۱۱ & (=-۵) \end{array}$$

پ)
$$\begin{array}{rl} ۰۱۱۱ & (=۷) \\ +۱۰۰۰ & (=-۸) \\ \hline ۱۱۱۱ & (=-۱) \end{array}$$

ت)
$$\begin{array}{rl} ۱۱۰۱ & (=-۳) \\ +۱۰۱۰ & (=-۶) \\ \hline ۰۱۱۱ & (\neq -۹) \end{array}$$
(خطای سرریز)

ث)
$$\begin{array}{rl} ۱۰۱۱ & (=-۵) \\ +۰۱۰۱ & (=۵) \\ \hline ۰۰۰۰ & (=۰) \end{array}$$

ج)
$$\begin{array}{rl} ۰۱۰۱ & (=۵) \\ +۰۱۰۰ & (=۴) \\ \hline ۱۰۰۱ & (=۹) \end{array}$$

۲۱. $ax = ay \Longrightarrow ax - ay = ۰ \Longrightarrow a(x-y) = ۰$. در دستگاه اعداد صحیح، اگر $b, c \in \mathbf{Z}$ و $bc = ۰$، آنگاه $b = ۰$ یا $c = ۰$. چون $a(x-y) = ۰$ و $a \neq ۰$، پس $(x-y) = ۰$ و $x = y$.

۲۲.

```
Program  ChangeOfBase (Input, Output);
Var Number, Base, Remainder,
    Power, Result, Keep : Integer;
Begin
     Writeln ('Input the base 10 number - positive integer - that is to be changed.');
     Write ('Number = ');
     Read (Number);
     Writeln ('Input the base - an integer between 2 and 9 inclusive.');
     Write (' Base = ');
     Read (Base);
     Keep := Number;
     Result := 0;
     Power := 1;
     While Number > 0 Do
          Begin
               Remainder := Number Mod Base;
               Result := Result + (Remainder * Power);
               Power := Power * 10;
               Number := Number Div Base
          End;
     Writeln ('The number ', Keep:0, 'when converted to',
          'base', Base:0, 'is written as', Result:0)
End.
```

۲۳. (یک) اگر $a = ۰$، انتخاب کنید $q = r = ۰$.

(دو) فرض می‌کنیم $a > 0$ و $b < 0$. دراین صورت $-b > 0$ و بنابراین، اعدادی مانند $q, r \in \mathbf{Z}$ وجود دارند به‌طوری‌که $a = q(-b) + r$ و $0 \le r < (-b)$. بنابراین، $a = (-q)b + r$، که در آن $0 \le r < |b|$.

(سه) سرانجام، حالتی را درنظر می‌گیریم که در آن $a < 0$ و $b < 0$. دراین صورت، $-a > 0$ و $-b > 0$ و بنابراین، $-a = q'(-b) + r'$، که در آن $0 \le r' < (-b)$. بنابراین،

$$a = q'b - r' = (q' + 1)b + (-r' - b) = qb + r$$

که در آن $0 \le r = -b - r' < -b = |b|$.

برای اثبات یکتایی، فرض کنید $a, b \in \mathbf{Z}$، $b \neq 0$ و $a = q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2$، که درآن $0 \le r_1, r_2 \le |b|$. دراین صورت $(q_1 - q_2)b + (r_1 - r_2) = 0$ و $|q_1 - q_2||b| = |r_1 - r_2|$. اگر $r_1 \neq r_2$، دراین صورت $|r_1 - r_2| > 0$. ولی $|r_1 - r_2| < |b|$، بنابراین، $|q_1 - q_2||b| < |b|$. این امر تنها زمانی روی می‌دهد که $q_1 = q_2$. دراین صورت $r_1 = r_2$. بنابراین، q و r یکتا هستند.

.۲۴

```
Program Base_16(Input, Output);
(* This program converts any positive integer less than 4,294,967,295
(= 16^8 - 1) to base 16.*)
Type
    sub1 = 0..15;
    sub2 = 10..15;
    sub3 = 0..8;
    sub4 = -1..7;
Var
    remainders: sub1;
    larger: sub2;
    positions: array [0..7] of sub 1;
    i: sub3;
    j: sub4;
    m,n: integer;
Begin
    Writeln ('What positive integer do you wish to convert to base 16?');
    Readln (n);
    For i := 0 to 7 do
        positions [i] := 0;
     m := n;
     i := 0;
     While m > 0 do
         Begin
            positions[i] := m mod 16;
            m := m div 16;
            i := i+1
         End;
    j := i-1;
    Write ('The integer ', n:0, ' in base 16 is written ');
    While j > = 0 do
```

```
        Begin
            If positions[j] < 10 then
              Write (positions[j] : 1)
            Else
            Begin
                  larger := positions[j];
                  Case larger of
                     10: Write ('A');
                     11: Write ('B');
                     12: Write ('C');
                     13: Write ('D');
                     14: Write ('E');
                     15: Write ('F');
                 End
             End;
           j := j-1
       End;
     Writeln('.')
End.
```

.۲۵

```
Program Divisors (input,output);
Var
    N, Divisor: Integer;
Begin
    Write ('The positive integer N whose divisors are sought is N = ');
    Read (N);
    Writeln;
    If N = 1 Then
        Writeln ('The only divisor of 1 is 1.')
    Else
        Begin
        Writeln ('The divisors of ', N:0, 'are :');
        Writeln (1:8);
        If N Mod 2 = 0 Then
            Begin
                For Divisor := 2 to N Div 2 Do
                If N Mod Divisor = 0 Then
                    Writeln (Divisor:8)
            End
        Else
            For Divisor := 3 to N Div 3 Do
                If N Mod Divisor = 0 Then
                      Writeln (Divisor:8)
         End;
     Writeln (N:8)
End.
```

۲۶. برهان: فرض کنید $Y = \{۳k | k \in \mathbf{Z}^+\}$، یعنی Y مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح مثبت بخش‌پذیر بر ۳ است. برای نشان دادن اینکه $X = Y$، تحقیق خواهیم کرد که $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$.

(یک) ($X \subseteq Y$): بنابر قسمت (۱) از تعریف بازگشتی X، ۳ متعلق به X است. چون $۱ \times ۳ = ۳$، نتیجه می‌گیریم که ۳ متعلق به Y است. با توجه به قسمت (۲) از این تعریف بازگشتی، فرض می‌کنیم به‌ازای $x, y \in X$ داشته باشیم $x, y \in Y$. بنابر تعریف می‌دانیم که $x + y \in X$ و باید نشان دهیم که $x + y \in Y$. این هم بی‌درنگ حاصل می‌شود، زیرا

$$x, y \in Y \Longrightarrow (y = ۳n \text{ و } x = ۳m \text{ ، } m, n \in \mathbf{Z}^+ \text{ به‌ازای دو عدد مانند})$$

$$\Longrightarrow x + y = ۳m + ۳n = ۳(m + n)$$

چون $m + n \in \mathbf{Z}^+$، $x + y \in Y$. بنابراین، هر عدد صحیح مثبتی که از قسمت (۱) یا از قسمت (۲) در تعریف بازگشتی X به دست آید عنصری از Y است. در نتیجه، $X \subseteq Y$.

(دو) ($Y \subseteq X$): برای اثبات این رابطهٔ شمول، باید نشان دهیم هر مضرب صحیح مثبت ۳ متعلق به X است. این را با استفاده از اصل استقرای ریاضی انجام می‌دهیم.

کار را با گزارهٔ باز

$$S(n) : \text{ ۳n عنصری از } X \text{ است}$$

که در عالم $\mathbf{Z}^+$ تعریف شده است شروع می‌کنیم. مرحلهٔ پایه، یعنی $S(۱)$، درست است زیرا، بنابر قسمت (۱) از تعریف بازگشتی X، $۳ = ۱ \times ۳$ در X قرار دارد. برای مرحلهٔ استقرایی، درستی $S(k)$ را به‌ازای عددی مانند $k \geq ۱$ مفروض می‌گیریم و می‌خواهیم ببینیم به‌ازای $n = k + ۱$ چه روی می‌دهد. از فرض استقرا، یعنی $S(k)$، می‌دانیم که $۳k$ متعلق به X است. دراین‌صورت، با توجه به قسمت (۲) از تعریف بازگشتی X می‌بینیم

$$۳(k + ۱) = ۳k + ۳ \in X$$

زیرا $۳k, ۳ \in X$. بنابراین، $S(k) \Longrightarrow S(k + ۱)$. به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌گیریم که $S(n)$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است و بنابراین $Y \subseteq X$.

با توجه به $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$، نتیجه می‌گیریم که $X = Y$.

۲۷. الف) چون به‌ازای هر $t \in \mathbf{Z}^+$ داریم $۲|۱۰^t$، $۲|n$ اگر و فقط اگر $۲|r_۰$.

ب) این قسمت از این واقعیت نتیجه می‌شود که به‌ازای $t \geq ۲$، $۴|۱۰^t$.

پ) این قسمت از این واقعیت نتیجه می‌شود که به‌ازای $t \geq ۳$، $۸|۱۰^t$.

به‌طور کلی، $۲^{t+۱}|n$ اگر و فقط اگر $۲^{t+۱}|(r_t \times ۱۰^t + \cdots + r_۱ \times ۱۰ + r_۰)$.

بند ٤.٤

۱. الف) $۱۸۲۰ = ۷(۲۳۱) + ۲۰۳$ ، $۲۳۱ = ۱(۲۰۳) + ۲۸$

$$۲۰۳ = ۷(۲۸) + ۷ \quad , \quad ۲۸ = ۷(۴)$$

بنابراین، $\gcd(۱۸۲۰, ۲۳) = ۷$.

$$\text{۷} = \text{۲۰۳} - \text{۷}(\text{۲۸}) = \text{۲۰۳} - \text{۷}(\text{۲۳۱} - \text{۲۰۳}) = (-\text{۷})(\text{۲۳۱}) + \text{۸}(\text{۲۰۳})$$
$$= (-\text{۷})(\text{۲۳۱}) + \text{۸}[\text{۱۸۲۰} - \text{۷}(\text{۲۳۱})] = \text{۸}(\text{۱۸۲۰}) + (-\text{۶۳})(\text{۲۳۱})$$

ب) $\gcd(\text{۱۳۶۹}, \text{۲۵۹۷}) = \text{۱} = \text{۲۵۹۷}(\text{۵۳۴}) + \text{۱۳۶۹}(-\text{۱۰۱۳})$

پ) $\gcd(\text{۲۶۸۹}, \text{۴۰۰۱}) = \text{۱} = \text{۴۰۰۱}(-\text{۱۱۱۷}) + \text{۲۶۸۹}(\text{۱۶۶۲})$

ت) $\gcd(\text{۷۹۸۳}, \text{۷۹۸۲}) = \text{۱} = \text{۷۹۸۳}(\text{۱}) + \text{۷۹۸۲}(-\text{۱})$

۲. الف) اگر $as + bt = \text{۲}$، دراین صورت $\gcd(a, b)$ یا ۱ است یا ۲، زیرا $\gcd(a, b)$ هم a را می‌شمارد هم b را و بنابراین، $as + bt = \text{۲}$ را می‌شمارد.

ب) $as + bt = \text{۳} \Longrightarrow \gcd(a, b) = $ ۱ یا ۳

پ) $as + bt = \text{۴} \Longrightarrow \gcd(a, b) = $ ۱، ۲ یا ۴

ت) $as + bt = \text{۶} \Longrightarrow \gcd(a, b) = $ ۱، ۲، ۳ یا ۶

۳. از $\gcd(a, b) = d$ نتیجه می‌شود که به‌ازای دو عدد مانند $x, y \in \mathbf{Z}$، $d = ax + by$. همچنین، $\gcd(a, b) = d \Longrightarrow \frac{a}{d}, \frac{b}{d} \in \mathbf{Z}$. بنابراین،

$$\text{۱} = \left(\frac{a}{d}\right) x + \left(\frac{b}{d}\right) y \Longrightarrow \gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \text{۱}$$

۴. فرض کنیم $\gcd(a, b) = g$ و $\gcd(na, nb) = h$. از $\gcd(a, b) = g$ نتیجه می‌شود که به‌ازای دو عدد مانند $s, t \in \mathbf{Z}$، $g = as + bt$. پس $ng = (na)s + (nb)t$ و بنابراین، $h|ng$. از $h = \gcd(na, nb)$ نتیجه می‌شود که به‌ازای دو عدد مانند $x, y \in \mathbf{Z}$، $h = (na)x + (nb)y$.

$$h = n(ax + by) \Longrightarrow n|h \Longrightarrow (nh_\text{۱} = h \text{، که در آن } h_\text{۱} = (ax + by) \in \mathbf{Z})$$

از $g = \gcd(a, b)$ نتیجه می‌شود که $g|h_\text{۱}$ و بنابراین، به‌ازای عددی مانند $h_\text{۲} \in \mathbf{Z}$، $n(gh_\text{۲}) = h$. دراین صورت $(ng)|h$. چون $h|ng$ و $h, ng \in \mathbf{Z}^+$، نتیجه می‌گیریم که $\gcd(na, nb) = h = ng = n\gcd(a, b)$.

۵. فرض کنیم $\gcd(a, b) = h$ و $\gcd(b, d) = g$.

$$\gcd(a, b) = h \Longrightarrow h|a \text{ و } h|b \Longrightarrow h|(a \times \text{۱} + bc) \Longrightarrow h|d$$
$$h|b, h|d \Longrightarrow h|g$$
$$\gcd(b, d) = g \Longrightarrow g|d, g|b \Longrightarrow g|\big(d \times \text{۱} + b(-c)\big) \Longrightarrow g|a$$
$$\big(g|b, g|a, h = \gcd(a, b)\big) \Longrightarrow g|h$$

چون $g|h$ و $h|g$ و $h, g \in \mathbf{Z}^+$، پس $g = h$.

۶. از $\gcd(a, b) = \text{۱}$ نتیجه می‌شود که به‌ازای دو عدد مانند $x, y \in \mathbf{Z}$، $ax + by = \text{۱}$. دراین صورت $c = acx + bcy$. از $a|c$ نتیجه می‌شود $c = ad$ و از $b|c$ نتیجه می‌شود $c = be$؛ بنابراین، $c = ab(ex + dy)$ و $ab|c$. اگر $\gcd(a, b) \neq \text{۱}$، این نتیجه نادرست است. مثلاً، فرض کنید $a = \text{۱۲}$، $b = \text{۱۸}$ و $c = \text{۳۶}$.

دراین صورت، $a|c$ و $b|c$، ولی $(ab)\nmid c$.

۷. الف) اگر $c\in \mathbf{Z}^+$، دراین صورت $c=\gcd(a,b)$ اگر و فقط اگر

(۱) $c|a$ و $c|b$ و

(۲) $\forall d\in \mathbf{Z}\left[(d|a)\wedge(d|b)\right]\Longrightarrow d|c$

ب) اگر $c\in \mathbf{Z}^+$، دراین صورت $c\neq\gcd(a,b)$ اگر و فقط اگر

(۱) $c\nmid a$ یا $c\nmid b$ یا

(۲) $\exists\, d\in \mathbf{Z}\left[(d|a)\wedge(d|b)\wedge(d\nmid c)\right]$

۸. اگر $c=\gcd(a-b,a+b)$، دراین صورت به‌ازای هر دو عدد دلخواه $x,y\in\mathbf{Z}$، $c|[(a-b)x+(a+b)y]$. بویژه، به‌ازای $x=y=۱$ داریم $c|۲a$ و به‌ازای $x=-۱$ و $y=۱$ داریم $c|۲b$. با توجه به تمرین ۶، داریم $\gcd(۲a,۲b)=۲\gcd(a,b)=۲$ و بنابراین، $c|۲$ و $c=۱$ یا $c=۲$.

۹. از $\gcd(a,b)=۱$ نتیجه می‌شود که به‌ازای دو عدد مانند $x,y\in\mathbf{Z}$، $ax+by=۱$. دراین صورت $acx+bcy=c$. چون $a|acs$ و $a|bcy$ (زیرا $a|bc$)، پس $a|c$.

۱۰. برهان: فرض کنیم $d_۱=\gcd(a,b)$ و $d_۲=\gcd\left(\frac{a}{۲},b\right)$.

چون a زوج است، به‌ازای عددی مانند $a_۱\in\mathbf{Z}^+$ داریم $a=۲a_۱$. همچنین، $\gcd(۲,b)=۱$، زیرا b فرد است.

$$d_۱=\gcd(a,b)\Longrightarrow\left(d_۱=ax+by \text{ داریم } x,y\in\mathbf{Z} \text{ به‌ازای دو عدد مانند}\right)\Longrightarrow d_۱=a_۱(۲x)+by$$

$$d_۲=\gcd\left(\frac{a}{۲},b\right)=\gcd(a_۱,b)\Longrightarrow\left[d_۲|a_۱\wedge d_۲|b\right]\Longrightarrow d_۲|[a_۱(۲x)+by]\Longrightarrow d_۲|d_۱$$

$$d_۱=\gcd(a\,,b)\Longrightarrow[d_۱|a\wedge d_۱|b]$$

$$[d_۱|b\wedge b \text{ فرد است}]\Longrightarrow\gcd(d_۱,۲)=۱$$

$$d_۱|a\Longrightarrow d_۱|۲a_۱\Longrightarrow d_۱|a_۱\quad[\text{زیرا } \gcd(d_۱,۲)=۱]$$

چون $d_۱|a_۱$، $a_۱=\frac{a}{۲}$ و $d_۱|b$، نتیجه می‌گیریم که $d_۱|d_۲$. بنابراین، چون $d_۱|d_۲$ و $d_۲|d_۱$ و چون $d_۱$ و $d_۲$ هر دو مثبت‌اند. داریم

$$\gcd(a,b)=d_۱=d_۲=\gcd\left(\frac{a}{۲},b\right)$$

۱۱. برهان: فرض کنیم $d_۱=\gcd(a,b)$ و $d_۲=\gcd(a-b,b)$ با توجه به قسمت (ج) از قضیهٔ ۴۰۳،

$$d_۲=\gcd(a-b,b)\Longrightarrow\left[d_۲|(a-b)\wedge d_۲|b\right]\Longrightarrow\left[d_۲|[(a-b)+b]\right]$$
$$\Longrightarrow[d_۲|a\wedge d_۲|b] \text{ و } d_۲|a\Longrightarrow d_۲|d_۱$$

با توجه به قسمت (ج) از قضیهٔ ۴۰۳،

$$d_۱=\gcd(a,b)\Longrightarrow[d_۱|a\wedge d_۱|b]\Longrightarrow d_۱|[a+(-۱)b]\Longrightarrow d_۱|(a-b)$$

چون $d_۱|(a-b)$ و $d_۱|b$، نتیجه می‌گیریم که $d_۱|d_۲$. بنابراین،

$$[d_۱|d_۲\wedge d_۲|d_۱\wedge(d_۱>۰)\wedge(d_۲>۰)]\Longrightarrow\gcd(a,b)=d_۱=d_۲=\gcd(a-b,b)$$

۱۲. برهان: فرض می‌کنیم $m = \frac{a}{ad-bc}$ و $k = \frac{-c}{ad-bc}$. دراین صورت

$$\begin{aligned}(an+b)k+(cn+d)m &= (an+b)\left[\frac{-c}{ad-bc}\right]+(cn+d)\left[\frac{a}{ad-bc}\right]\\ &= \frac{-acn-bc+acn+ad}{ad-bc}=\frac{ad-bc}{ad-bc}=۱\end{aligned}$$

درنتیجه، به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، اعداد صحیح مثبت $an+b$ و $cn+d$، تحت شرایط داده شده، نسبت به‌هم اول‌اند.

۱۳. برهان: توجه کنید که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ داریم

$$(۵n+۳)(۷)+(۷n+۴)(-۵)=(۳۵n+۲۱)-(۳۵n+۲۰)=۱$$

درنتیجه، $\gcd(۵n+۳,۷n+۴)=۱$. به عبارت دیگر، $۵n+۳$ و $۷n+۴$ نسبت به‌هم اول‌اند.

۱۴. $۳۳۰x+۲۹۰y=۲۴۹۰۰$ (یا $۳۳x+۲۹y=۲۴۹۰$).

$\gcd(۳۳,۲۹)=۱$ و $۳۳=(۱)(۲۹)+۴$ و $۲۹=(۷)(۴)+۱$. بنابراین،

$$\begin{aligned}&۱=۲۹-۷(۴)=۲۹-۷(۳۳-۲۹)=۸(۲۹)-۷(۳۳)\\ &۱=۳۳(-۷)+۲۹(۸)\Longrightarrow ۲۴۹۰=۳۳(-۱۷۴۳۰)+۲۹(۱۹۹۲۰)\\ &\quad=۳۳(-۱۷۴۳۰+۲۹k)+۲۹(۱۹۹۲۰-۳۳k),\qquad k\in\mathbf{Z}\\ &x=-۱۷۴۳۰+۲۹k,\ y=۱۹۹۲۰-۳۳k\\ &x\geq ۰\Longrightarrow ۲۹k\geq ۱۷۴۳۰\Longrightarrow k\geq ۶۰۲\\ &y\geq ۰\Longrightarrow ۱۹۹۲۰\geq ۳۳k\Longrightarrow ۶۰۳\geq k\end{aligned}$$

اگر $k=۶۰۲$، آن‌گاه $x=۲۹$ و $y=۵۴$ و اگر $k=۶۰۳$، آن‌گاه $x=۵۷$ و $y=۲۱$.

۱۵. $\gcd(۸۴,۹۹۰)=۶$. بنابراین، معادلهٔ $۸۴x+۹۹۰y=c$ جوابی مانند $x_۰$ و $y_۰$ در $\mathbf{Z}$ دارد هرگاه $۶|c$. به‌ازای $۱۰<c<۲۰$، از $۶|c$ نتیجه می‌شود که $c=۱۲$ یا $c=۱۸$. این معادله به‌ازای $c=۱۱,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۹$ جواب ندارد.

وقتی $c=۱۲$، داریم $۸۴x+۹۹۰y=۱۲$ (یا $۱۴x+۱۶۵y=۲$).

$$\begin{aligned}۱۶۵&=۱۱(۱۴)+۱۱\\ ۱۴&=۱(۱۱)+۳\\ ۱۱&=۳(۳)+۲\\ ۳&=۱(۲)+۱\end{aligned}$$

بنابراین،

$$۱=۳-۲=۳-[۱۱-۳(۳)]=۴(۳)-۱۱=۴\big[(۱۴-۱۱)-۱۱\big]=۴(۱۴)-۵(۱۱)$$

$$= ۴(۱۴) - ۵[۱۶۵ - ۱۱(۱۴)] = ۵۹(۱۴) - ۵(۱۶۵)$$

$$۱ = ۱۴(۵۹) + ۱۶۵(-۵)$$

$$۲ = ۱۴(۱۱۸) + ۱۶۵(-۱۰) = ۱۴(۱۱۸ - ۱۶۵k) + ۱۶۵(-۱۰ + ۱۴k)$$

جوابهای $۱۲ = ۸۴x + ۹۹۰y$ عبارت‌اند از $x = ۱۱۸ - ۱۶۵k$ و $y = -۱۰ + ۱۴k$، که در آن $k \in \mathbf{Z}$. وقتی $c = ۱۸$، جوابها عبارت‌اند از $x = ۱۷۷ - ۱۶۵k$ و $y = -۱۵ + ۱۴k$، که در آن $k \in \mathbf{Z}$.

۱۶. الف) اگر معادلهٔ اول را از معادلهٔ دوم کم کنیم، می‌بینیم که $۱۲x + ۳۰y = ۶۶$ یا

$$۲x + ۵y = ۱۱$$

چون $\gcd(۵, ۲) = ۱$، می‌توانیم بنویسیم $۵(۱) + ۲(-۲) = ۱$ و بنابراین،

$$۱۱ = ۲(-۲۲) + ۵(۱۱) = ۲(-۲۲ + ۵k) + ۵(۱۱ - ۲k), \qquad k \in \mathbf{Z}$$

دراین صورت $w = ۵۰ - x - y = ۵۰ - (-۲۲ + ۵k) - (۱۱ - ۲k) = ۶۱ - ۳k$. در نتیجه، جواب دستگاه معادلات دیوفانتی مفروض عبارت است از

$$w = ۶۱ - ۳k, \qquad x = -۲۲ + ۵k, \qquad y = ۱۱ - ۲k, \qquad k \in \mathbf{Z}$$

ب) فقط یک جواب از این نوع وجود دارد، زیرا

$$w > ۰ \Longrightarrow ۶۱ - ۳k > ۰ \Longrightarrow k < \frac{۶۱}{۳} \Longrightarrow k \leq ۲۰ \quad (۱)$$

$$x > ۰ \Longrightarrow -۲۲ + ۵k > ۰ \Longrightarrow k > \frac{۲۲}{۵} \Longrightarrow k \geq ۵ \quad (۲)$$

$$y > ۰ \Longrightarrow ۱۱ - ۲k > ۰ \Longrightarrow k < \frac{۱۱}{۲} \Longrightarrow k \leq ۵ \quad (۳)$$

وقتی $k = ۵$، نتیجه می‌گیریم که $w = ۴۶$، $x = ۳$ و $y = ۱$.

پ) مانند قسمت (ب) می‌بینیم که

$$w > ۱۰ \Longrightarrow ۶۱ - ۳k > ۱۰ \Longrightarrow -۳k > -۵۱ \Longrightarrow k < ۱۷ \Longrightarrow k \leq ۱۶ \quad (۱)$$

$$x > ۲۸ \Longrightarrow -۲۲ + ۵k > ۲۸ \Longrightarrow ۵k > ۵۰ \Longrightarrow k > ۱۰ \Longrightarrow k \geq ۱۱ \quad (۲)$$

$$y > -۱۵ \Longrightarrow ۱۱ - ۲k > -۱۵ \Longrightarrow -۲k > -۲۶ \Longrightarrow k < ۱۳ \Longrightarrow k \leq ۱۲ \quad (۳)$$

در نتیجه، دقیقاً دو جواب وجود دارد:

اگر $k = ۱۱$، آن‌گاه

$$w = ۶۱ - ۳k = ۶۱ - ۳(۱۱) = ۲۸$$

$$x = -۲۲ + ۵k = -۲۲ + ۵(۱۱) = ۳۳$$

$$y = ۱۱ - ۲k = ۱۱ - ۲(۱۱) = -۱۱$$

اگر $k = ۱۲$، آن‌گاه

$$w = ۶۱ - ۳k = ۶۱ - ۳۶ = ۲۵, \qquad x = -۲۲ + ۵k = -۲۲ + ۶۰ = ۳۸$$

$$y = ۱۱ - ۲k = ۱۱ - ۲۴ = -۱۳$$

۱۷. فرض می‌کنیم $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$. اگر $ax + by = c$ جوابی مانند $x_۰$ و $y_۰$ در $\mathbf{Z}$ داشته باشد، دراین‌صورت $ax_۰ + by_۰ = c$ و چون $\gcd(a,b)$ عددهای a و b را می‌شمارد، پس $\gcd(a,b)|c$. برعکس، فرض کنیم $\gcd(a,b)|c$. دراین‌صورت به‌ازای عددی مانند $d \in \mathbf{Z}$ داریم $c = \gcd(a,b)d$. چون به‌ازای اعدادی مانند $s, t \in \mathbf{Z}$، $\gcd(a,b) = as + bt$، داریم $a(sd) + b(td) = \gcd(a,b)d = c$ یا $ax_۰ + by_۰ = c$ و بنابراین، $ax + by = c$ در $\mathbf{Z}$ جواب دارد.

۱۸. فرض می‌کنیم $\gcd(a,b) = g$ و $\operatorname{lcm}(a,b) = h$. از $\gcd(a,b) = g$ و از $\operatorname{lcm}(a,b) = h$ نتیجه می‌شود که به‌ازای اعدادی مانند $s, t \in \mathbf{Z}$ و $m, n \in \mathbf{Z}^+$ داریم $as + bt = g$ و $h = ma = nb$. دراین‌صورت

$$hg = has + hbt = nbas + mabt = ab(ns + mt) \Longrightarrow ab|hg$$

از $\gcd(a,b) = g$ نتیجه می‌شود که $g|a$ و $g|b$ و بنابراین، $\frac{a}{g}b = \frac{b}{g}a$ مضرب مشترکی از a و b است. در نتیجه، $h\Big|\left(\frac{a}{g}b\right)$ و به‌ازای عددی مانند $x \in \mathbf{Z}$، $hx = \left(\frac{a}{g}\right)b$ یا $ghx = ab$. بنابراین، $gh|ab$.

۱۹. از قضیهٔ ۴.۰۱ می‌دانیم که $ab = \operatorname{lcm}(a,b) \times \gcd(a,b)$. در نتیجه،

$$b = \frac{\operatorname{lcm}(a,b) \times \gcd(a,b)}{a} = \frac{(۲۴۲۵۰۰)(۱۰۵)}{۶۳۰} = ۴۰۴۲۵$$

۲۰. $\operatorname{lcm}(a,b) = \frac{ab}{\gcd(a,b)}$

الف) $\operatorname{lcm}(۲۳۱, ۱۸۲۰) = \frac{۲۳۱ \times ۱۸۲۰}{۷} = ۶۰۰۶۰$

ب) $\operatorname{lcm}(۱۳۶۹, ۲۵۹۷) = ۱۳۶۹ \times ۲۵۹۷ = ۳۵۵۵۲۹۳$

پ) $\operatorname{lcm}(۲۶۸۹, ۴۰۰۱) = (۲۶۸۹)(۴۰۰۱) = ۱۰۷۵۸۶۸۹$

ت) $\operatorname{lcm}(۷۹۸۲, ۷۹۸۳) = (۷۹۸۲)(۷۹۸۳) = ۶۳۷۲۰۳۰۶$

۲۱. $\gcd(n, n+۱) = ۱$ و $\operatorname{lcm}(n, n+۱) = n(n+۱)$

۲۲. برهان: نتیجهٔ موردنظر از قضیهٔ ۴.۰۱ و تمرین ۶ در همین بند حاصل می‌شود. می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\operatorname{lcm}(na, nb) &= \frac{(na)(nb)}{\gcd(na, nb)} = \frac{n^۲ab}{n\gcd(a,b)}\\ &= n\left[\frac{ab}{\gcd(a,b)}\right]\\ &= n\operatorname{lcm}(a,b)\end{aligned}$$

بند ۵.٤

۱. الف) $۱۱ \times ۵^۳ \times ۳^۳ \times ۲^۲$

ب) $۱۱^۲ \times ۷^۲ \times ۵^۲ \times ۳ \times ۲^۴$

پ) $۱۳ \times ۱۱ \times ۷^۲ \times ۵^۳ \times ۳^۲$

۲.

$$\gcd(۱۴۸۵۰۰, ۷۱۱۴۸۰۰) = ۲^۲ \times ۳ \times ۵^۲ \times ۱۱ = ۳۳۰۰$$

$$\operatorname{lcm}(۱۴۸۵۰۰, ۷۱۱۴۸۰۰) = ۲^۴ \times ۳^۳ \times ۵^۳ \times ۷^۲ \times ۱۱^۲ = ۳۲۰۱۶۶۰۰۰$$

$$\gcd(۱۴۸۵۰۰, ۷۸۸۲۸۷۵) = ۳^۳ \times ۵^۳ \times ۱۱ = ۱۲۳۷۵$$

$$\operatorname{lcm}(۱۴۸۵۰۰, ۷۸۸۲۸۷۵) = ۲^۲ \times ۳^۳ \times ۵^۳ \times ۷^۲ \times ۱۱ \times ۱۳ = ۹۴۵۹۴۵۰۰$$

$$\gcd(۷۱۱۴۸۰۰, ۷۸۸۲۸۷۵) = ۳ \times ۵^۲ \times ۷^۲ \times ۱۱ = ۴۰۴۲۵$$

$$\operatorname{lcm}(۷۱۱۴۸۰۰, ۷۸۸۲۸۷۵) = ۲^۴ \times ۳^۴ \times ۵^۳ \times ۷^۲ \times ۱۱^۲ \times ۱۳ = ۱۳۸۷۳۸۶۰۰۰$$

۳.

$$m^۲ = p_۱^{۲e_۱} p_۲^{۲e_۲} p_۳^{۲e_۳} \cdots p_t^{۲e_t}$$
$$m^۳ = p_۱^{۳e_۱} p_۲^{۳e_۲} p_۳^{۳e_۳} \cdots p_t^{۳e_t}$$

۴. الف) $۸! = ۲^۷ \times ۳^۲ \times ۵^۱ \times ۷^۱$ ب) $۱۰! = ۲^۸ \times ۳^۴ \times ۵^۲ \times ۷^۱$

پ) $۱۲! = ۲^{۱۰} \times ۳^۵ \times ۵^۲ \times ۷^۱ \times ۱۱^۱$ ت) $۱۵! = ۲^{۱۱} \times ۳^۶ \times ۵^۳ \times ۷^۲ \times ۱۱^۱ \times ۱۳^۱$

۵. $n = ۱۹$

۶. نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = ۱$ درست است. با توجه به لم ۲۰۴، این نتیجه به‌ازای $n = ۲$ نیز درست است. به‌ازای $k \geq ۲$، فرض کنیم که از $p|a_۱a_۲\cdots a_k$ نتیجه بشود که به‌ازای اندیسی مانند $۲ \leq i \leq k$، $p|a_i$. اکنون $p|a_۱a_۲\cdots a_ka_{k+۱}$ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت (با توجه به حالت مربوط به $n = ۲$ و فرض استقرا) داریم

$$\begin{aligned} p|(a_۱a_۲\cdots a_k)a_{k+۱} &\Longrightarrow (p|a_۱a_۲\cdots a_k \text{ یا } p|a_{k+۱}) \\ &\Longrightarrow (\text{به‌ازای اندیسی مانند } ۱ \leq i \leq k\text{، } p|a_i \text{ یا } p|a_{k+۱}) \\ &\Longrightarrow (\text{به‌ازای اندیسی مانند } ۱ \leq i \leq k+۱\text{، } p|a_i) \end{aligned}$$

اکنون بنابر استقرای ریاضی، درستی نتیجهٔ کلی موردنظر ثابت می‌شود.

۷. برهان: (اثبات این تمرین نظیر اثباتی است که در مثال ۳۸۰۴ آورده شد.) اگر این‌طور نباشد، داریم $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$، که در آن $a, b \in \mathbf{Z}^+$ و $\gcd(a, b) = ۱$. دراین صورت، با توجه به لم ۲۰۴، داریم

$$\begin{aligned} \sqrt{p} = \frac{a}{b} &\Longrightarrow p = \frac{a^۲}{b^۲} \Longrightarrow pb^۲ = a^۲ \Longrightarrow p|a^۲ \\ &\Longrightarrow p|a \end{aligned}$$

چون $p|a$، می‌دانیم که به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{Z}^+$ داریم $a = pk$. پس

$$pb^۲ = a^۲ = (pk)^۲ = p^۲k^۲ \Longrightarrow b^۲ = pk^۲ \Longrightarrow p|b^۲ \Longrightarrow p|b$$

ولی اگر $p|a$ و $p|b$، دراین صورت $\gcd(a,b) = p > ۱$ و این با فرض قبلی $\gcd(a,b) = ۱$ تناقض دارد.

۸. برهان: مانند تمرین قبلی، فرض می‌کنیم $\sqrt[۳]{p} = \frac{a}{b}$، که در آن $a,b \in \mathbf{Z}^+$ و $\gcd(a,b) = ۱$. دراین صورت

$$a^۳ = pb^۳ \Longrightarrow p|a^۳ \Longrightarrow p|a \Longrightarrow \exists\, c \in \mathbf{Z}^+\ a = pc$$

اکنون از $a = pc$ و $a^۳ = pb^۳$ نتیجه می‌شود که $pb^۳ = (pc)^۳ = p^۳c^۳$ و بنابراین، $b^۳ = p^۲c^۳$. اینک ملاحظه می‌شود که

$$b^۳ = p^۲c^۳ \Longrightarrow p|b^۳ \Longrightarrow p|b$$

در نتیجه، می‌بینیم که $\gcd(a,b) \geq p$ و این با فرض قبلی $\gcd(a,b) = ۱$ تناقض دارد.

۹. ب) فرض می‌کنیم $\log_{۱۰} p = \frac{a}{b}$، که در آن $a,b \in \mathbf{Z}^+$ و $\gcd(a,b) = ۱$. دراین صورت $p = ۱۰^{\frac{a}{b}}$ یا $p^b = ۱۰^a = ۲^a \times ۵^a$ و این با قضیهٔ بنیادی حساب تناقض دارد.

۱۰. الف) $۲^۹ = ۵۱۲$ ب) $۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸ = ۸! = ۴۰۳۲۰$

پ) چون $۱۷! = ۲^{۱۵} \times ۳^۶ \times ۵^۳ \times ۷^۲ \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۱۷$، نتیجه می‌گیریم که

$$۱۶ \times ۷ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۱۰۷۵۲$$

عدد صحیح مثبت وجود دارند که !۱۷ را می‌شمارند.

۱۱. الف) $۳ \times ۴ \times ۴ \times ۲ = ۹۶$ ب) ۲۷۰ پ) ۱۴۴

۱۲. الف) عدد $n = ۲^{۱۴} \times ۳^۹ \times ۵^۸ \times ۷^{۱۰} \times ۱۱^۳ \times ۱۳^۵ \times ۳۷^{۱۰}$ دارای

$$۱۵ \times ۱۰ \times ۹ \times ۱۱ \times ۴ \times ۶ \times ۱۱ = ۳۹۲۰۴۰۰$$

مقسوم‌علیه مثبت است.

ب) (یک)

$$(۱۰ - ۲ + ۱)(۵ - ۰ + ۱)(۳ - ۲ + ۱)(۱۰ - ۰ + ۱)(۸ - ۷ + ۱)(۹ - ۴ + ۱)(۱۴ - ۳ + ۱)$$
$$= ۹ \times ۶ \times ۲ \times ۱۱ \times ۲ \times ۶ \times ۱۲ = ۱۷۱۰۷۲$$

(دو) چون $۲^۹ \times ۳^۶ \times ۵^۵ = ۱۱۶۶۴۰۰۰۰۰$، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت موردنظر برابر است با

$$(۱۰ - ۰ + ۱)(۵ - ۰ + ۱)(۳ - ۰ + ۱)(۱۰ - ۰ + ۱)(۸ - ۵ + ۱)(۹ - ۶ + ۱)(۱۴ - ۹ + ۱)$$
$$= ۱۱ \times ۶ \times ۴ \times ۱۱ \times ۴ \times ۴ \times ۶ = ۲۷۸۷۸۴$$

(سه) $۸ \times ۵ \times ۵ \times ۶ \times ۲ \times ۳ \times ۶ = ۴۳۲۰۰$

(چهار) $۷ \times ۳ \times ۴ \times ۶ \times ۱ \times ۳ \times ۶ = ۹۰۷۲$

(پنج) $۶ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۶ = ۵۸۳۲$

(شش) $۵ \times ۴ \times ۳ \times ۴ \times ۲ \times ۲ \times ۴ = ۳۸۴۰$

(هفت) $۱ \times ۱ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ \times ۳ = ۱۲$

(هشت) $۴ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۱ \times ۲ \times ۳ = ۶۴۸$

(نه) $۳ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۱ \times ۲ \times ۳ = ۲۱۶$

(ده) $۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ \times ۲ = ۴۸$

۱۳. با توجه به قضیهٔ ۴ ۰ ۱ می‌دانیم که $mn = \mathrm{lcm}(m,n) \times \gcd(m,n)$ و بنابراین،

$$\gcd(m,n) = \frac{mn}{\mathrm{lcm}(m,n)} = ۲^۲ \times ۳^۱ \times ۵^۱ \times ۱۱^۱ = ۶۶۰$$

۱۴. $\gcd = ۳ \times ۵^۲ \times ۱۱ = ۲۸۵$ و $\mathrm{lcm} = ۲^۴ \times ۳^۳ \times ۵^۳ \times ۷^۲ \times ۱۱^۲ \times ۱۳ = ۴۱۶۲۱۵۸۰۰۰$

۱۵. چون $۷ \times ۵ \times ۳^۲ \times ۲^۴ = ۷!$، کوچکترین مجذورکامل بخش‌پذیر بر $۷!$ برابر است با

$$۲^۴ \times ۳^۲ \times ۵^۲ \times ۷^۲ = (۳۵) \times (۷!) = ۱۷۶۴۰۰$$

۱۶. اگر $n \in \mathbf{Z}^+$ مجذورکامل باشد، دراین صورت $n = p_۱^{e_۱} p_۲^{e_۲} \cdots p_k^{e_k}$، که در آن به‌ازای هر k ≥ i ≥ ۱، p_i عددی اول و e_i یک عدد صحیح زوج مثبت است. بنابراین، $(e_۱ + ۱)(e_۲ + ۱) \cdots (e_k + ۱)$ حاصل‌ضربی از اعداد فرد است. در نتیجه، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n عددی فرد است.

برعکس، اگر $n \in \mathbf{Z}^+$ مجذورکامل نباشد، دراین صورت $n = p_۱^{e_۱} p_۲^{e_۲} \cdots p_k^{e_k}$، که در آن هر p_i عددی اول است و به‌ازای اندیسی مانند $۱ \leq i \leq k$، e_i عددی فرد است. بنابراین، به‌ازای اندیسی مانند $۱ \leq i \leq k$، $(e_i + ۱)$ زوج است و در نتیجه، $(e_۱ + ۱)(e_۲ + ۱) \cdots (e_k + ۱)$ نیز زوج است. پس، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n زوج است.

۱۷. برای آنکه $۱۲۶۰ \times n$ مکعب کامل باشد، نمای هر یک از مقسوم‌علیه‌های اول باید مضربی از ۳ باشد. چون $۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۷ = ۱۲۶۰$، پس باید $۱۲۶۰ \times n = ۲^۳ \times ۳^۳ \times ۵^۳ \times ۷^۳$ وبنابراین، $n = ۲ \times ۳ \times ۵^۲ \times ۷^۲ = ۷۳۵۰$.

۱۸. الف) چون $۵^۲ \times ۲^۳ = ۲۰۰$، تعداد دفعاتی که سکهٔ دویستم پشت و رو می‌شود برابر است با $۱۲ = ۳ \times ۴$، یعنی برابر با تعداد مقسوم‌علیه‌های ۲۰۰.

ب) سکه‌های زیر نیز ۱۲ بار پشت‌ورو می‌شوند:

(یک) $۲^۳ \times ۳^۲ = ۷۲$ (دو) $۲^۵ \times ۳ = ۹۶$ (سه) $۲^۲ \times ۳^۳ = ۱۰۸$

(چهار) $۲^۵ \times ۵ = ۱۶۰$

پ) سکهٔ ۱۹۲اُم ۱۴ بار پشت‌ورو می‌شود، زیرا $۳ \times ۲^۶ = ۱۹۲$.

۱۹. الف) $۲^۲ = ۴$، $۲^۳ = ۸$، $۲^۴ = ۱۶$ و $۲^۵ = ۳۲$.

اگر توانهای ۲ را درنظر بگیریم، ۵ مجموع مختلف از دو نمای متمایز وجود دارد: $۲ + ۳ = ۵$، $۲ + ۴ = ۶$، $۳ + ۴ = ۷$، $۲ + ۵ = ۷$، $۳ + ۵ = ۸$ و $۴ + ۵ = ۹$. بنابراین، ۵ حاصل‌ضرب مختلف می‌توان ساخت.

ب) در اینجا توانهای ۲^n را به‌ازای $n = ۲, ۳, ۴, ۵$ داریم. ۷ مجموع مختلف از دو نمای متمایز وجود دارد: $۲ + ۳ = ۵$، $۲ + ۴ = ۶$، $۳ + ۴ = ۷ = ۲ + ۵$، $۳ + ۵ = ۸ = ۲ + ۶$، $۴ + ۵ = ۹ = ۳ + ۶$، $۴ + ۶ = ۱۰$ و $۵ + ۶ = ۱۱$. در نتیجه، دراین حالت ۷ حاصل‌ضرب مختلف می‌توان ساخت.

پ) این مجموعه را می‌توان به صورت $A \cup B$ نیز نمایش داد، که در آن $A = \{۲^n | n \in \mathbf{Z}^+, ۲ \leq n \leq ۶\}$

و $B = \{۳^k | k \in \mathbf{Z}^+, ۲ \leq k \leq ۵\}$.

اگر حاصل‌ضرب از دو عدد صحیح متعلق به A تشکیل شود، ۷ امکان وجود دارد. اگر هر دو عدد صحیح از B انتخاب شوند، دراین صورت ۵ امکان وجود دارد. سرانجام، $۵ \times ۴ = ۲۰$ حاصل‌ضرب وجود دارد که در هر یک از آنها یک عدد از A و یک عدد از B به‌کار رفته است. روی‌هم، تعداد حاصل‌ضربهای مختلف برابر است با $۳۲ = ۲۰ + ۵ + ۷$.

ت) مجموعهٔ مفروض را به‌صورت $A \cup B \cup C$ می‌نویسیم، که در آن $A = \{۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴\}$، $B = \{۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳, ۷۲۹\}$ و $C = \{۲۵, ۱۲۵, ۶۲۵, ۳۱۲۵\}$.

در اینجا شش حالت پیش می‌آید.

(۱) هر دو عنصر در A هستند: ۷ امکان

(۲) هر دو عنصر در B هستند: ۷ امکان

(۳) هر دو عنصر در C هستند: ۵ امکان

(۴) یک عنصر در A است و یک عنصر در B: $۵ \times ۵ = ۲۵$ امکان

(۵) یک عنصر در A است و یک عنصر در C: $۵ \times ۴ = ۲۰$ امکان

(۶) یک عنصر در B است و یک عنصر در C: $۵ \times ۴ = ۲۰$ امکان

روی‌هم، $۸۴ = ۲۰ + ۲۰ + ۲۵ + ۵ + ۷ + ۷$ حاصل‌ضرب ممکن وجود دارد.

ث) این حالت، تعمیم نتیجهٔ قسمت (ت) است. در اینجا هم ۸۴ حاصل‌ضرب ممکن وجود دارد.

.۲۰

```
Program Primefactors (input,output);
Var
    p, j, k, n, originalvalue, count: integer;
Begin
Write ('The value of n is ');
    Read (n);
    originalvalue := n;
    Writeln ('The prime factorization of ', n:0, ' is ');
    If n Mod 2 = 0 Then
        Begin
          count := 0;
          While n Mod 2 = 0 Do
             Begin
               count := count + 1;
               n := n Div 2
            End;
         Write ('2(', count:0, ') ')
      End;
  If n Mod 3 = 0 Then
     Begin
         count := 0;
         While n Mod 3 = 0 Do
```

```
                Begin
                    count := count + 1;
                    n := n Div 3
                End;
            Write ('3(', count :0, ') ')
        End;
    p := 5;
    While n >= 5 Do
        Begin
            j := 1;
            Repeat
                j := j + 1;
                k := p Mod j
            Until (k = 0) Or (j = Trunc(Sqrt(p)));
            If (k <> 0)And (n Mod p = 0 ) Then
                Begin
                    count := 0;
                        While n Mod p = 0 Do
                            Begin
                                count := count + 1;
                                n := n Div p
                            End;
                        Write (p:0, ')', count :0, ') ')
                End;
            p := p + 2
        End;
End.
```

۲۱. طول AB برابر است با ۲۵۶ = ۲^۸ و طول AC برابر است با ۵۱۲ = ۲^۹. محیط مثلث ۱۰۶۱ است.

۲۲. الف)

$$\prod_{i=1}^{10}(-1)^i = -1$$

ب)

$$\prod_{i=1}^{2n}(-1)^i = (-1)^{(2n)(2n+1)/2} = (-1)^{n(2n+1)} = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ -1 & \text{فرد } n \end{cases}$$

پ)

$$\prod_{i=1}^{2n+1}(-1)^i = (-1)^{(2n+1)(2n+2)/2} = (-1)^{(2n+1)(n+1)} = \begin{cases} 1 & \text{فرد } n \\ -1 & \text{زوج } n \end{cases}$$

ت)

$$\prod_{i=2}^{8}\frac{(i+1)(i+2)}{(i-1)(i)} = \left(\frac{5\cdot 6}{3\cdot 4}\right)\left(\frac{6\cdot 7}{4\cdot 5}\right)\left(\frac{7\cdot 8}{5\cdot 6}\right)\left(\frac{8\cdot 9}{6\cdot 7}\right)\left(\frac{9\cdot 10}{7\cdot 8}\right)$$

$$= \frac{8\cdot 9\cdot 9\cdot 10}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5} = 27$$

ث) $\displaystyle\prod_{i=5}^{10}\frac{i}{10-i+1}=\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{7}{4}\right)\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{10}{1}\right)=(10!/4!)6!$

$$=(10!)/[(4!)(6!)]=\binom{10}{4}=\binom{10}{6}$$

ج) $\displaystyle\prod_{i=n}^{2n}\frac{i}{2n-i+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n}{1}\right)$

$$=[(2n)!/(n-1)!]/(n+1)!=(2n)!/[(n-1)!(n+1)!]$$

$$=\binom{2n}{n-1}=\binom{2n}{n+1}$$

۲۳. الف) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5}2^i=(2^1)(2^2)(2^3)(2^4)(2^5)=2^{1+2+3+4+5}=2^{15}=32768$

$$\prod_{i=2}^{5}i^2=(2^2)(3^2)(4^2)(5^2)=(5!)^2=120^2=14400$$

ب) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}a^i=a^1\cdot a^2\cdot a^3\cdots a^n=a^{1+2+3+\cdots+n}=a^{n(n+1)/2}$

$$\prod_{i=1}^{n}a^{(i^2)}=a^{1^2}\cdot a^{2^2}\cdot a^{3^2}\cdots a^{n^2}=a^{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=a^{n(n+1)(2n+1)/6}$$

۲۴. الف) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5}(i^2+i)$

ب) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5}(1+x^i)$

پ) $\displaystyle\prod_{i=1}^{6}(1+x^{2i-1})$

ت) $6\times24\times60\times12=(8-2)(27-3)(64-4)(125-5)$

$$=(2^3-2)(3^3-3)(4^3-4)(5^3-5)=\prod_{i=2}^{5}(i^3-i)$$

۲۵. برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

به‌ازای $n=2$ می‌بینیم که $\prod_{i=2}^{2}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\times2}$ ؛ پس نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است و به این ترتیب، مرحلهٔ پایهٔ برهان استقرایی برقرار می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم نتیجه به‌ازای عددی مانند $k\in\mathbf{Z}^+$، $k\geq2$، درست باشد. دراین صورت $\frac{k+1}{2k}=\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$.

اگر حالت مربوط به $n=k+1$ را درنظر بگیریم، مرحلهٔ استقرایی را به‌دست می‌آوریم، زیرا می‌بینیم که

$$\prod_{i=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\left(\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=[(k+1)/(2k)]\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]$$

$$= \left[\frac{k+۱}{۲k}\right]\left[\frac{(k+۱)^۲-۱}{(k+۱)^۲}\right] = \frac{k^۲+۲k}{(۲k)(k+۱)}$$

$$= (k+۲)/(۲(k+۱)) = ((k+۱)+۱)/(۲(k+۱))$$

اکنون بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر عدد صحیح مثبت $n \geq ۲$ درست است.

۲۶. الف) وقتی n عددی اول است، دقیقاً دو مقسوم‌علیه مثبت دارد، یعنی ۱ و n.

ب) اگر $n = p^۲$ و p اول باشد، دراین صورت n دقیقاً سه مقسوم‌علیه مثبت دارد، یعنی ۱، p و $p^۲$.

پ) فرض می‌کنیم p و q دو عدد اول متمایز باشند. اگر $n = p^۳$ یا $n = pq$، دراین صورت n دقیقاً چهار مقسوم‌علیه مثبت دارد که عبارت‌اند از ۱، p، $p^۲$ و $p^۳$ برای $n = p^۳$ و ۱، p، q و pq برای $n = pq$.

ت) اگر $n = p^۴$ و p اول باشد، دراین صورت n دقیقاً پنج مقسوم‌علیه مثبت دارد که عبارت‌اند از ۱، p، $p^۲$، $p^۳$ و $p^۴$.

۲۷. الف) مقسوم‌علیه‌های مثبت ۲۸ عبارت‌اند از ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۴ و ۲۸. از طرف دیگر،

$$۱ + ۲ + ۴ + ۷ + ۱۴ + ۲۸ = ۵۶ = ۲ \times ۲۸$$

و بنابراین، ۲۸ عدد صحیح تام است.

مقسوم‌علیه‌های مثبت ۴۹۶ عبارت‌اند از ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۱، ۶۲، ۱۲۴، ۲۴۸ و ۴۹۶. از طرف دیگر،

$$۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶ + ۳۱ + ۶۲ + ۱۲۴ + ۲۴۸ + ۴۹۶ = ۹۹۲ = ۲ \times ۴۹۶$$

و بنابراین، ۴۹۶ عدد صحیح تام است.

ب) از قضیهٔ بنیادی حساب نتیجه می‌شود که اگر $۲^m - ۱$ عددی اول باشد، مقسوم‌علیه‌های $۲^{m-۱}(۲^m - ۱)$ عبارت‌اند از ۱، ۲، $۲^۲$، $۲^۳$، ...، $۲^{m-۱}$ و $(۲^m - ۱)$، $۲(۲^m - ۱)$، $۲^۲(۲^m - ۱)$، $۲^۳(۲^m - ۱)$، ...، $۲^{m-۱}(۲^m - ۱)$.

مجموع این مقسوم‌علیه‌ها برابر است با

$$\left[۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{m-۱}\right] + (۲^m - ۱)\left[۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{m-۱}\right] =$$

$$(۲^m - ۱) + (۲^m - ۱)(۲^m - ۱) = (۲^m - ۱)\left[۱ + (۲^m - ۱)\right] = ۲^m(۲^m - ۱) =$$

$$۲\left[۲^{m-۱}(۲^m - ۱)\right]$$

و بنابراین، $۲^{m-۱}(۲^m - ۱)$ یک عدد صحیح تام است.

۲۸. الف) چون S زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbf{Z}^+$ است، از اصل خوش‌ترتیبی نتیجه می‌شود که S دارای کوچکترین عنصری مانند $c \in \mathbf{Z}^+$ است. بنابراین، $c\sqrt{۲} \in \mathbf{Z}^+$. چون $۲c \in \mathbf{Z}^+$ و $\sqrt{۲}c < ۲c$، داریم $۲c - \sqrt{۲}c \in \mathbf{Z}^+$. از $۲c - \sqrt{۲}c = (\sqrt{۲}c - c)\sqrt{۲}$ نتیجه می‌شود $\sqrt{۲}c - c \in \mathbf{Z}^+$. در نتیجه، $\sqrt{۲}c - c \in S$ یا $c(\sqrt{۲} - ۱) \in S$. ولی از $۲ > \sqrt{۲}$ نتیجه می‌شود $۱ > (\sqrt{۲} - ۱)$ یا $c(\sqrt{۲} - ۱) < c$. این هم با تعریف c به عنوان کوچکترین عنصر S تناقض دارد.

تمرینات تکمیلی

۱. $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+(n-1)d)=na+\frac{(n-1)nd}{2}$. به‌ازای $n=1$، $a=a+0$ و نتیجهٔ موردنظر در این حالت درست است. اگر فرض کنیم $\sum_{i=1}^{k}[a+(i-1)d]=ka+\frac{(k-1)kd}{2}$، دراین صورت

$$\sum_{i=1}^{k+1}[a+(i-1)d]=\left(ka+\frac{(k-1)kd}{2}\right)+(a+kd)=(k+1)a+\frac{k(k+1)d}{2}$$

پس بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n\in\mathbf{Z}^+$ درست است.

۲. فرض کنیم t تعداد دفعات اجرای حلقهٔ While باشد. دراین صورت داریم

$$\text{sum}=10+17+24+\cdots+(10+7(t-1))=10+(10+7)+(10+14)+\cdots+(10+7(t-1))$$

با توجه به تمرین قبلی، می‌دانیم که به‌ازای هر $t\in\mathbf{Z}^+$

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+(t-1)d)=ta+\frac{(t-1)td}{2}$$

و بنابراین، داریم

$$\text{sum}=10t+\frac{7}{2}t(t-1)$$

به‌ازای $t=52$ داریم $\text{sum}=9802$ و به‌ازای $t=53$ می‌بینیم که $\text{sum}=10176$. بنابراین، n، یعنی آخرین جمعوند، برابر است با $10+7(52-1)=367$.

۳. حدس: به‌ازای هر $n\in\mathbf{Z}^+$، $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i^2=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}i$.

برهان (با استفاده از اصل استقرای ریاضی):

اگر $n=1$، این حدس می‌گوید $\sum_{i=1}^{1}(-1)^{i+1}i^2=(-1)^{1+1}(1)^2=1=(-1)^{1+1}(1)=(-1)^{1+1}\sum_{i=1}^{1}i$، که گزارهٔ درستی است. این مرحلهٔ پایهٔ برهان را به‌دست می‌دهد. برای تأیید مرحلهٔ استقرایی، درستی

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}i^2=(-1)^{k+1}\sum_{i=1}^{k}i$$

را به‌ازای عددی مانند $k\geq 1$ مفروض می‌گیریم. وقتی $n=k+1$، می‌بینیم که

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}i^2=\Big(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}i^2\Big)+(-1)^{(k+1)+1}(k+1)^2$$

$$=(-1)^{k+1}\sum_{i=1}^{k}i+(-1)^{k+2}(k+1)^2=(-1)^{k+1}(k)(k+1)/2+(-1)^{k+2}(k+1)^2$$

$$=(-1)^{k+2}\big[(k+1)^2-(k)(k+1)/2\big]$$

$$=(-1)^{k+2}(1/2)[2(k+1)^2-k(k+1)]$$

$$= (-۱)^{k+۲}(۱/۲)[۲k^۲ + ۴k + ۲ - k^۲ - k]$$

$$= (-۱)^{k+۲}(۱/۲)[k^۲ + ۳k + ۲] = (-۱)^{k+۲}(۱/۲)(k+۱)(k+۲) = (-۱)^{k+۲}\sum_{i=۱}^{k+۱} i$$

و بنابراین، درستی نتیجهٔ مفروض در $n = k$ مستلزم درستی آن در $n = k + ۱$ است و مرحلهٔ استقرایی برقرار می‌شود.

اکنون، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$،

$$\sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i+۱}i^۲ = (-۱)^{n+۱}\sum_{i=۱}^{n} i$$

۴. الف) $S(n) : ۵|(n^۵ - n)$.

به‌ازای $n = ۱$، $n^۵ - n = ۰$ و $۵|۰$. بنابراین، $S(۱)$ درست است. فرض کنیم

$$S(k) : ۵|(k^۵ - k)$$

به‌ازای $n = k + ۱$ داریم

$$(k+۱)^۵ - (k+۱) = (k^۵ - k) + ۵k^۴ + ۱۰k^۳ + ۱۰k^۲ + ۵k$$

با توجه به $S(k)$، می‌بینیم که $۵|\big((k+۱)^۵ - (k+۱)\big)$ و بنابراین $S(k) \Longrightarrow S(k+۱)$. بنابر اصل استقرای متناهی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

ب) $S(n) : ۶|(n^۳ + ۵n)$.

وقتی $n = ۱$، $n^۳ + ۵n = ۶$ و بنابراین، $S(۱)$ درست است. با مفروض گرفتن $S(k)$، $S(k+۱)$ را بررسی می‌کنیم

$$(k+۱)^۳ + ۵(k+۱) = (k^۳ + ۵k) + ۶ + ۳k(k+۱)$$

چون یکی از دو عدد k و $k + ۱$ باید زوج باشد، پس $۶|[۳k(k+۱)]$. دراین صورت با مفروض بودن $S(k)$، داریم $۶|[(k+۱)^۳ + ۵(k+۱)]$ و بنابر اصل استقرای متناهی، نتیجهٔ کلی به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۵. الف)

n	$n^۲ + n + ۴۱$	n	$n^۲ + n + ۴۱$	n	$n^۲ + n + ۴۱$
۱	۴۳	۴	۶۱	۷	۹۷
۲	۴۷	۵	۷۱	۸	۱۱۳
۳	۵۳	۶	۸۳	۹	۱۳۱

ب) به‌ازای $n = ۳۹$ داریم $n^۲ + n + ۴۱ = ۱۶۰۱$، که عددی اول است. ولی به‌ازای $n = ۴۰$ داریم $n^۲ + n + ۴۱ = (۴۱)^۲$ و بنابراین، $S(۳۹) \not\Longrightarrow S(۴۰)$.

۶. ب) $s_۵ = ۷۱۹/۷۲۰ = (۶! - ۱)/۶!$ $\quad s_۴ = ۱۱۹/۱۲۰ = (۵! - ۱)/۵!$

$s_۶ = ۵۰۳۹/۵۰۴۰ = (۷! - ۱)/۷!$

پ) $s_n = \dfrac{(n+۱)! - ۱}{(n+۱)!}$

ت) با توجه به محاسبات قسمت (الف)، حدس ارائه شده به‌ازای $n = ۱$ درست است. با مفروض گرفتن $s_k = \dfrac{(k+۱)! - ۱}{(k+۱)!}$ به‌ازای $k \in \mathbf{Z}^+$، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} s_{k+۱} &= s_k + (k+۱)/(k+۲)! = [(k+۱)! - ۱]/(k+۱)! + (k+۱)/(k+۲)! \\ &= [(k+۲)! - (k+۲) + (k+۱)]/(k+۲)! = [(k+۲)! - ۱]/(k+۲)! \end{aligned}$$

پس بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۷. به‌ازای $n = ۱$، $\sum_{i=۱}^{۱} i^۴ = ۱ = \dfrac{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۵}{۳۰}$ و بنابراین، فرمول داده شده در این حالت اول درست است. اکنون فرض می‌کنیم این نتیجه به‌ازای $n = k$ درست باشد، یعنی فرض می‌کنیم

$$\sum_{i=۱}^{k} i^۴ = \frac{k(k+۱)(۲k+۱)(۳k^۲ + ۳k - ۱)}{۳۰}$$

وقتی $n = k + ۱$، داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=۱}^{k+۱} i^۴ &= \left[k(k+۱)(۲k+۱)(۳k^۲ + ۳k - ۱)\right]/۳۰ + (k+۱)^۴ \\ &= \left[(k+۱)/۳۰\right]\left[k(۲k+۱)(۳k^۲ + ۳k - ۱) + ۳۰(k+۱)^۳\right] \\ &= \left[(k+۱)/۳۰\right]\left[۶k^۴ + ۳۹k^۳ + ۹۱k^۲ + ۸۹k + ۳۰\right] \\ &= \left[(k+۱)/۳۰\right]\left[(k+۲)(۲k+۳)(۳k^۲ + ۹k + ۵)\right] \\ &= \left[(k+۱)/۳۰\right]\left[(k+۲)(۲(k+۱)+۱)(۳(k+۱)^۲ + ۳(k+۱) - ۱)\right] \end{aligned}$$

و بنابراین، درستی حکم به‌ازای $n = k + ۱$ از درستی حکم به‌ازای $n = k$ نتیجه می‌شود. به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۸. برهان: چهار حالت پیش می‌آید.

(۱) $n = ۱۰m + ۱$. در این حالت $n^۱$ در شرط بیان شده صدق می‌کند.

(۲) $n = ۱۰m + ۳$. در این حالت داریم $n^۲ = ۱۰۰m^۲ + ۶۰m + ۹$ و

$$\begin{aligned} n^۴ &= ۱۰۰۰۰m^۴ + ۱۲۰۰۰m^۳ + ۵۴۰۰m^۲ + ۱۰۸۰m + ۸۱ \\ &= ۱۰(۱۰۰۰m^۴ + ۱۲۰۰m^۳ + ۵۴۰m^۲ + ۱۰۸m + ۸) + ۱ \end{aligned}$$

بنابراین، رقم یکان $n^۴$ برابر با ۱ است.

(۳) $n = ۱۰m + ۷$. مانند حالت (۲)، $n^۲$ را می‌یابیم. $n^۲ = ۱۰۰m^۲ + ۱۴۰m + ۴۹$ و

$$\begin{aligned} n^۴ &= ۱۰۰۰۰m^۴ + ۲۸۰۰۰m^۳ + ۲۹۴۰۰m^۲ + ۱۳۷۲۰m + ۲۴۰۱ \\ &= ۱۰(۱۰۰۰m^۴ + ۲۸۰۰m^۳ + ۲۹۴۰m^۲ + ۱۳۷۲m + ۲۴۰) + ۱ \end{aligned}$$

و باز هم رقم یکان $n^۴$ برابر با ۱ است.

(۴) $n = ۱۰m + ۹$. خوشبختانه در این حالت فقط به $n^۲$ نیاز داریم، زیرا

$$n^۲ = ۱۰۰m^۲ + ۱۸۰m + ۸۱ = ۱۰(۱۰m^۲ + ۱۸m + ۸) + ۱$$

[یادداشت: به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، که در آن n فرد و بخش‌ناپذیر بر ۵ باشد، می‌بینیم که رقم یکان $n^۴$ برابر با ۱ است.]

الف) به‌ازای $n = ۰$، $۳ = ۱ + ۲ = ۱ + ۲^{۲n+۱}$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است. فرض کنیم به‌ازای $n = k \in \mathbf{N}$، ۳ عدد $۲^{۲k+۱} + ۱$ را بشمارد و حالت مربوط به $n = k + ۱$ را درنظر می‌گیریم. چون

$$۲^{۲(k+۱)+۱} + ۱ = ۲^{۲k+۳} + ۱ = ۴(۲^{۲k+۱}) + ۱ = ۴(۲^{۲k+۱} + ۱) - ۳$$

و چون ۳ هر دو عدد $۲^{۲k+۱} + ۱$ و ۳ را می‌شمارد، نتیجه می‌گیریم که ۳ عدد $۲^{۲(k+۱)+۱} + ۱$ را می‌شمارد. بنابراین، وقتی نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = k$ درست باشد به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست است. به این ترتیب، بنابر اصل استقرای متناهی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ درست است.

ب) وقتی $n = ۰$، $۹ = (۲ + ۰)^۳ + (۱ + ۰)^۳ + ۰^۳$ و بنابراین، گزارهٔ مفروض در این حالت درست است. درستی این نتیجه را به‌ازای $n = k \geq ۰$ مفروض می‌گیریم و حالت مربوط به $n = k + ۱$ را بررسی می‌کنیم. می‌بینیم که

$$\begin{aligned} (k + ۱)^۳ + (k + ۲)^۳ + (k + ۳)^۳ &= (k + ۱)^۳ + (k + ۲)^۳ + (k^۳ + ۹k^۲ + ۲۷k + ۲۷) \\ &= [k^۳ + (k + ۱)^۳ + (k + ۲)^۳] + [۹(k^۲ + ۳k + ۳)] \end{aligned}$$

که در آن، بنابر فرض استقرا، جمعوند اول بر ۹ بخش‌پذیر است. بنابراین، چون نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = ۰$ درست است و چون درستی آن به‌ازای $n = k$ $(k \geq ۰)$ مستلزم درستی آن به‌ازای $n = k + ۱$ است، از اصل استقرای ریاضی نتیجه می‌شود که گزارهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq ۰$ درست است.

پ) اگر $n = ۰$، داریم $۰ = \frac{n^۷}{۷} + \frac{n^۳}{۳} + \frac{۱۱n}{۲۱}$، که عددی صحیح است. بنابراین، گزارهٔ مفروض در این حالت اول درست است. اگر درستی گزاره را به‌ازای $n = k \geq ۰$ مفروض بگیریم، خواهیم داشت $\frac{k^۷}{۷} + \frac{k^۳}{۳} + \frac{۱۱k}{۲۱} \in \mathbf{Z}$. اکنون حالت مربوط به $n = k + ۱$ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت داریم

$$\frac{(k + ۱)^۷}{۷} + \frac{(k + ۱)^۳}{۳} + \frac{۱۱(k + ۱)}{۲۱} = \left(\frac{k^۷}{۷} + \frac{k^۳}{۳} + \frac{۱۱k}{۲۱}\right)$$

$$+\left(\frac{7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k}{7}\right)$$
$$+\left(\frac{3k^2+3k}{3}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{11}{21}\right)$$

دراین عبارت، جمعوند اول بنابر فرض استقرا عددی صحیح است، جمعوندهای دوم و سوم عدد صحیح‌اند زیرا در هر یک از آنها صورت بر مخرج بخش‌پذیر است. بنابراین، درستی گزاره به‌ازای $n=k+1$ به این بستگی دارد که آیا آخرین جمعوند عددی صحیح است یا خیر. ولی این جمعوند نیز عددی صحیح است، زیرا

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{11}{21}=\frac{3+7+11}{21}=1\in \mathbf{Z}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n\in \mathbf{N}$ درست است.

۱۰. وقتی $n=1$، گزارهٔ درست $\sin\theta=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}$ را داریم. بنابراین، فرض می‌کنیم این گزاره به‌ازای $n=k$، $k\in \mathbf{Z}^+$، درست باشد، یعنی فرض می‌کنیم

$$\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\cdots+\sin(2k-1)\theta=\frac{\sin^2 k\theta}{\sin\theta}$$

به‌ازای $n=k+1$ می‌بینیم که

$$\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\cdots+\sin(2k-1)\theta+\sin(2k+1)\theta$$
$$=\frac{\sin^2 k\theta}{\sin\theta}+\sin(2k+1)\theta$$

برای تکمیل اثبات باید ثابت کنیم که $\frac{\sin^2(k+1)\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2 k\theta}{\sin\theta}+\sin(2k+1)\theta$ یا

$$\sin^2 k\theta+\sin\theta\sin(2k+1)\theta=\sin^2(k+1)\theta$$

ولی طرف چپ این معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin^2 k\theta+\sin\theta[\sin k\theta\cos(k+1)\theta+\cos k\theta\sin(k+1)\theta]=$$
$$\sin^2 k\theta+\sin\theta[\sin k\theta\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin k\theta\sin\theta+\cos k\theta\sin k\theta\cos\theta+$$
$$\cos k\theta\cos k\theta\sin\theta]=\sin^2 k\theta+2\sin\theta\cos\theta\sin k\theta\cos k\theta-\sin^2 k\theta\sin^2\theta+\cos^2 k\theta\sin^2\theta=$$
$$\sin^2 k\theta(1-\sin^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta\sin k\theta\cos k\theta+\cos^2 k\theta\sin^2\theta=\sin^2 k\theta\cos^2\theta+$$
$$2\sin\theta\cos\theta\sin k\theta\cos k\theta+\cos^2 k\theta\sin^2\theta=(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)^2=\sin^2(k+1)\theta$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n\in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۱۱. به‌ازای $n=2$ می‌بینیم که $4^2=16>\binom{4}{2}=6>4=2^2$. پس گزاره در این حالت اول درست است.

درستی این نتیجه را به‌ازای $n = k \geq ۲$ مفروض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم $۴^k > \binom{۲k}{k} > ۲^k$ و $n = k + ۱$ را بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که با توجه به $۱ < \frac{(k+۱)+k}{k+۱} = \frac{۲k+۱}{k+۱}$، داریم

$$\binom{۲(k+۱)}{k+۱} = \binom{۲k+۲}{k+۱} = \left[\frac{(۲k+۲)(۲k+۱)}{(k+۱)(k+۱)}\right]\binom{۲k}{k}$$
$$= ۲ \times \frac{(۲k+۱)}{(k+۱)}\binom{۲k}{k} > ۲ \times \frac{(۲k+۱)}{(k+۱)} \times ۲^k > ۲^{k+۱}$$

علاوه‌بر آن، $۲ > \frac{(k+۱)+k}{k+۱}$ و بنابراین، $\binom{۲k+۲}{k+۱} = ۲\frac{(۲k+۱)}{(k+۱)}\binom{۲k}{k} < (۲)(۲)\binom{۲k}{k} < ۴^{k+۱}$ به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq ۲$ درست است.

۱۲. به‌ازای $n = ۱$، $(۵۷)(۱۵) = ۸۵۵ = ۸^۳ + ۷^۳$. اگر فرض کنیم $۵۷|(۷^{k+۲} + ۸^{۲k+۱})$،

$$۷^{(k+۱)+۲} + ۸^{۲(k+۱)+۱} = ۷^{k+۳} + ۸^{۲k+۳} = ۷(۷^{k+۲}) + ۶۴(۸^{۲k+۱})$$
$$= ۶۴(۷^{k+۲}) + ۶۴(۸^{۲k+۱}) - ۵۷(۷^{k+۲})$$

و بنابراین، $۵۷|(۷^{k+۳} + ۸^{۲k+۳})$. پس بنابر استقرا، نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود.

۱۳. الف) نخست ملاحظه می‌کنیم که گزاره به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $۶۴ \leq n \leq ۶۸$، درست است. این ادعا از محاسبات زیر نتیجه می‌شود:

$$۶۴ = ۲(۱۷) + ۶(۵) \qquad ۶۵ = ۱۳(۵) \qquad ۶۶ = ۳(۱۷) + ۳(۵)$$
$$۶۷ = ۱(۱۷) + ۱۰(۵) \qquad ۶۸ = ۴(۱۷)$$

اکنون فرض می‌کنیم نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر n، $k \geq n \geq ۶۸$، درست باشد و عدد صحیح $k + ۱$ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت $k + ۱ = (k - ۴) + ۵$ و چون $۶۴ \leq k - ۴ < k$، می‌توانیم به‌ازای اعدادی مانند $a, b \in \mathbf{N}$، بنویسیم $k - ۴ = a(۱۷) + b(۵)$. بنابراین، $k + ۱ = a(۱۷) + (b + ۱)(۵)$ و بنابر اصل استقرای قوی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq ۶۴$ درست است.

ب) اثبات این قسمت مشابه اثبات قسمت (الف) است. محاسبات زیر نشان می‌دهند که این نتیجه به‌ازای هر $۱۰۸ \leq n \leq ۱۱۷$ درست است:

$$۱۰۸ = ۶(۱۳) + ۳(۱۰) \quad ۱۰۹ = ۳(۱۳) + ۷(۱۰) \quad ۱۱۰ = ۱۱(۱۰)$$
$$۱۱۱ = ۷(۱۳) + ۲(۱۰) \quad ۱۱۲ = ۴(۱۳) + ۶(۱۰) \quad ۱۱۳ = ۱(۱۳) + ۱۰(۱۰)$$
$$۱۱۴ = ۸(۱۳) + ۱(۱۰) \quad ۱۱۵ = ۵(۱۳) + ۵(۱۰) \quad ۱۱۶ = ۲(۱۳) + ۹(۱۰)$$
$$۱۱۷ = ۹(۱۳)$$

۱۴. برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

به‌ازای $n = ۱$ می‌بینیم که

$$\sum_{i=۱}^{۱} \frac{۱}{۱+i} = \frac{۱}{۲} = ۱ - \frac{۱}{۲} = \sum_{i=۱}^{۲(۱)} (-۱)^{i-۱}\left(\frac{۱}{i}\right)$$

و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است و به این ترتیب، مرحلهٔ پایهٔ برهان فراهم می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم به‌ازای عددی مانند $k \geq ۱$ داشته باشیم $\sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{k+i} = \sum_{i=۱}^{۲k} (-۱)^{i-۱}\left(\frac{۱}{i}\right)$ و سپس حالت $n = k + ۱$ را بررسی می‌کنیم.

$$\sum_{i=۱}^{k+۱} \frac{۱}{(k+۱)+i} = \frac{۱}{k+۲} + \frac{۱}{k+۳} + \cdots + \frac{۱}{۲(k+۱)} =$$

$$\left(\sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{k+i} - \frac{۱}{k+۱}\right) + \frac{۱}{۲k+۱} + \frac{۱}{۲k+۲} =$$

$$\sum_{i=۱}^{۲k} (-۱)^{i-۱}\left(\frac{۱}{i}\right) - \frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{۲k+۱} + \frac{۱}{۲k+۲} =$$

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲k-۱} - \frac{۱}{۲k} - \frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{۲k+۱} + \frac{۱}{۲k+۲} =$$

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲k-۱} - \frac{۱}{۲k} + \frac{۱}{۲k+۱} + \left[\frac{۱}{۲k+۲} - \frac{۱}{k+۱}\right] =$$

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲k-۱} - \frac{۱}{۲k} + \frac{۱}{۲k+۱} + \left[\frac{۱}{۲k+۲} - \frac{۲}{۲k+۲}\right] =$$

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲k-۱} - \frac{۱}{۲k} + \frac{۱}{۲k+۱} - \frac{۱}{۲k+۲} =$$

$$\sum_{i=۱}^{۲(k+۱)} (-۱)^{i-۱}\left(\frac{۱}{i}\right)$$

به این ترتیب، با توجه به اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$،

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n+i} = \sum_{i=۱}^{۲n} (-۱)^{i-۱}\left(\frac{۱}{i}\right)$$

۱۵. الف)

$$r = r_۰ + r_۱ \times ۱۰ + r_۲ \times ۱۰^۲ + \cdots + r_n \times ۱۰^n = r_۰ + r_۱(۹) + r_۱ + r_۲(۹۹) + r_۲ + \cdots$$
$$+ r_n(\underbrace{۹۹\cdots۹}_{n \text{ تا } ۹}) + r_n = [۹r_۱ + ۹۹r_۲ + \cdots + (۹۹\cdots۹)r_n] + (r_۰ + r_۱ + r_۲ + \cdots + r_n)$$

بنابراین، $۹|r$ اگر و فقط اگر $۹|(r_۰ + r_۱ + r_۲ + \cdots + r_n)$.

پ) به‌ازای $x = ۱$ یا $x = ۴$ یا $x = ۷$ داریم $۳|t$. به‌ازای $x = ۷$ داریم $۹|t$.

۱۶. $۵۰x + ۲۰y = ۶۲۰ \Longrightarrow ۵x + ۲y = ۶۲$

$\gcd(۵,۲) = ۱$ و $۵(۱) + ۲(-۲) = ۱$ و بنابراین،

$$۶۲ = ۵(۶۲) + ۲(-۱۲۴) = ۵(۶۲ - ۲k) + ۲(-۱۲۴ + ۵k)$$

که در آن $k \in \mathbf{Z}$، اکنون ملاحظه می‌کنیم که $x = ۶۲ - ۲k \geq ۰ \Longrightarrow ۳۱ \geq k$؛

$$y = -۱۲۴ + ۵k \geq ۰ \Longrightarrow k \geq ۲۴٫۸$$

جوابهای مطلوب:

(۱) $k = ۲۵ : x = ۱۲, y = ۱$ (۲) $k = ۲۶ : x = ۱۰, y = ۶$

(۳) $k = ۲۷ : x = ۸, y = ۱۱$ (۴) $k = ۲۸ : x = ۶, y = ۱۶$

(۵) $k = ۲۹ : x = ۴, y = ۲۱$ (۶) $k = ۳۰ : x = ۲, y = ۲۶$

(۷) $k = ۳۱ : x = ۰, y = ۳۱$

۱۷. الف) $n = ۲^{e_1} \times ۳^{e_2} \times ۵^{e_3} \times ۷^{e_4} \times ۱۱^{e_5}$، که در آن $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = ۹$ و به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۵$، $e_i \geq ۰$. تعداد جوابهای این معادله برابر است با $\binom{۱۳}{۹} = \binom{۵+۹-۱}{۹}$.

ب) $\binom{۸}{۴}$ پ) $\binom{۱۱}{۷}$؛ $\binom{۷}{۳}$

۱۸. الف) $m = sd - bt$، $n = at - cs$.

ب) فرض می‌کنیم $g = \gcd(m,n)$. دراین صورت، به‌ازای اعدادی مانند $x, y \in \mathbf{Z}$، داریم $g = mx + ny$ و g کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که می‌توان آن را به‌صورت ترکیبی خطی از m و n بیان کرد. باتوجه به

$$g = mx + ny = (sd - bt)x + (at - cs)y = s(dx - cy) + t(ay - bx)$$

می‌توان g را به‌صورت ترکیبی خطی از s و t نوشت. اگر $g \neq \gcd(s,t)$، دراین صورت $\gcd(s,t) = h < g$، که در آن

$$h = sw + tv = (am + bn)w + (cm + dn)v = (aw + cv)m + (bs + dv)n$$

و این با $g = \gcd(m,n)$ تناقض دارد.

۱۹. الف) ۱، ۴، ۹.

ب) ۱، ۴، ۹، ۱۶، ...، k، که در آن k، بزرگترین مجذور کامل کوچکتر از یا برابر با n است.

۲۰. برهان: به‌ازای $۱ \leq i \leq ۵$، از الگوریتم تقسیم نتیجه می‌شود که $a_i = ۵q_i + r_i$، که در آن $۰ \leq r_i \leq ۴$، به‌همین سبب باقیمانده‌های r_1، r_2، r_3، r_4 و r_5 را درنظر می‌گیریم. در حقیقت، اگر مجموعی از باقیمانده‌ها مضرب ۵ باشد، مجموع عنصرهای متناظر آنها در A نیز مضرب ۵ خواهد بود. (توجه داشته باشید که لزومی ندارد باقیمانده‌ها پنج عدد صحیح متمایز باشند.)

۱) اگر به‌ازای اندیسی مانند $۱ \leq i \leq ۵$، $r_i = ۰$، دراین صورت $۵|a_i$ و کار تمام است. بنابراین، از حالا به بعد

فرض می‌کنیم به‌ازای هر $1 \le i \le 5$، $r_i \neq 0$.

۲) اگر $1 \le r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 \le 4$، دراین صورت

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 5(q_1 + q_2 + \cdots + q_5) + 5r_1$$

و نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. بنابراین، اکنون توجه خود را به حالتهایی معطوف می‌کنیم که در هر یک از آنها دست‌کم دو باقیماندهٔ غیرصفر متفاوت وجود دارد.

حالت ۱: (دست‌کم سه تا ۴ وجود دارد). در این حالت، امکاناتی که پیش می‌آیند عبارت‌اند از (یک) ۱ + ۴، (دو) ۲ + ۴ + ۴ و (سه) ۳ + ۴ + ۴ + ۴. هر یک از این موارد به نتیجهٔ موردنظر منجر می‌شود.

حالت ۲: (یک یا دو تا ۴ داریم). اگر دست‌کم یک ۱ یا دست‌کم یک ۲ و یک ۳ وجود داشته باشد، دراین صورت کار تمام است. در غیراین صورت، یکی از امکانات زیر را خواهیم داشت: (یک) ۲ + ۲ + ۲ + ۴ یا (دو) ۳ + ۳ + ۴.

حالت ۳: (۴ وجود ندارد ولی دست‌کم یک ۳ وجود دارد.) دراین صورت داریم (یک) ۲ + ۳ یا (دو) ۱ + ۱ + ۳ یا (سه) ۱ + ۳ + ۳ + ۳.

حالت ۴: (در این حالت، جمعوندها فقط ۱ و ۲ هستند). آخرین امکانات عبارت‌اند از (یک) ۱ + ۱ + ۱ + ۲ و (دو) ۱ + ۲ + ۲.

۲۱. الف)
$$\prod_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{4} i\right) = \prod_{j=1}^{3}(1+2+3+4) = \prod_{j=1}^{3}(10) = (10)(10)(10) = 1000$$

ب)
$$\sum_{j=1}^{4}\left(\prod_{i=1}^{j}(i+2)\right) = \left(\prod_{i=1}^{1}(i+2)\right) + \left(\prod_{i=1}^{2}(i+2)\right) + \left(\prod_{i=1}^{3}(i+2)\right) + \left(\prod_{i=1}^{4}(i+2)\right) = 3 + (3)(4) + (3)(4)(5) + (3)(4)(5)(6) = 435$$

پ)
$$\prod_{i=1}^{3}\left(\prod_{j=1}^{i} j\right) = \left(\prod_{j=1}^{1} j\right)\left(\prod_{j=1}^{2} j\right)\left(\prod_{j=1}^{3} j\right) = (1)[(1)(2)][(1)(2)(3)] = 12$$

۲۲. دو حالت پیش می‌آید:

(۱) اگر $n = p^{14}$، که در آن p عددی اول است، دراین صورت n دقیقاً ۱۵ مقسوم‌علیه مثبت دارد که عبارت‌اند از 1، p، p^2، p^3، $\cdots$، p^{13} و p^{14}.

(۲) اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند و $n = p^2q^4$، دراین صورت n دقیقاً ۱۵ مقسوم‌علیه مثبت دارد که عبارت‌اند از p^iq^j، $0 \le i \le 2$ و $0 \le j \le 4$.

۲۳. الف) به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \ge 3$، داریم $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. اگر $\{1, 2, 3, \cdots, n\} = A \cup B$، که در آن $s_A = s_B$، دراین صورت $2s_A = \dfrac{n(n+1)}{2}$ یا $4s_A = n(n+1)$. چون $4 | n(n+1)$ و $\gcd(n, n+1) = 1$، دراین صورت یا $4|n$ یا $4|(n+1)$.

ب) در اینجا می‌خواهیم عکس نتیجهٔ قسمت (الف) را تحقیق کنیم.

(یک) اگر $۴|n$ می‌نویسیم $n = ۴k$. داریم

$$\{۱, ۲, ۳, \ldots, k, k+۱, \ldots, ۳k, ۳k+۱, \ldots, ۴k\} = A \cup B$$

که در آن

$$A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, k, ۳k+۱, ۳k+۲, \ldots, ۴k-۱, ۴k\}$$

و

$$B = \{k+۱, k+۲, \ldots, ۲k, ۲k+۱, ۳k-۱, ۳k\}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} s_A &= (۱+۲+۳+\cdots+k) + \big[(۳k+۱)+(۳k+۲)+\cdots+(۳k+k)\big] \\ &= \frac{k(k+۱)}{۲} + k(۳k) + \frac{k(k+۱)}{۲} = k(k+۱) + ۳k^۲ = ۴k^۲ + k \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} s_B &= \big[(k+۱)+(k+۲)+\cdots+(k+k)\big] + \big[(۲k+۱)+(۲k+۲)+\cdots+(۲k+k)\big] \\ &= k(k) + \frac{k(k+۱)}{۲} + k(۲k) + \frac{k(k+۱)}{۲} = ۳k^۲ + k(k+۱) = ۴k^۲ + k \end{aligned}$$

(دو) اکنون حالت مربوط به $n+۱ = ۴k$ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت، $n = ۴k-۱$ و داریم

$$\{۱, ۲, ۳, \ldots, k-۱, k, \ldots, ۳k-۱, ۳k, \ldots, ۴k-۲, ۴k-۱\} = A \cup B$$

که در آن

$$A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, k-۱, ۳k, ۳k+۱, \cdots, ۴k-۱\}$$

و

$$B = \{k, k+۱, \cdots, ۲k-۱, ۲k, ۲k+۱ \cdots, ۳k-۱\}$$

اکنون می‌بینیم که

$$\begin{aligned} s_A &= \big[۱+۲+۳+\cdots+(k-۱)\big] + \big[۳k+(۳k+۱)+\cdots+(۳k+(k-۱)\big] \\ &= \frac{(k-۱)k}{۲} + k(۳k) + \frac{(k-۱)k}{۲} = ۳k^۲ + k^۲ - k = ۴k^۲ - k \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} s_B &= \big[k+(k+۱)+\cdots+\big(k+(k-۱)\big)\big] + \big[۲k+(۲k+۱)+\cdots+(۲k+(k-۱)\big] \\ &= k^۲ + \frac{(k-۱)k}{۲} + k(۲k) + \frac{(k-۱)k}{۲} = ۳k^۲ + (k-۱)k = ۴k^۲ - k \end{aligned}$$

۵
رابطه و تابع

بند ۱.۵

۱. $A \times B = \{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵)\}$

$B \times A = \{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴)\}$

$A \cup (B \times C) = \{۱,۲,۳,۴,(۲,۳),(۲,۴),(۲,۷),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۷)\}$

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) = \{(۱,۳),(۲,۳),(۳,۳),(۴,۳),(۵,۳),(۱,۴),$

$(۲,۴),(۳,۴),(۴,۴),(۵,۴),(۱,۷),(۲,۷),(۳,۷),(۴,۷),(۵,۷)\}$

۲. الف) $\{(۱,۲)\}; \{(۱,۲),(۱,۴),(۱,۵),(۲,۲),(۲,۴)\}; A \times B$

ب) $\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۳)\}; \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۳)\}; \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$.

۳. با توجه به تعریف جفت مرتب داریم $(۲-x, ۵) = (۴, y-۲)$ که در نتیجه $۲-x=۴$ و $y-۲=۵$. بنابراین، $x=-۲$ و $y=۷$.

۴. الف) $|A_۱ \times A_۲ \times A_۳ \times A_۴| = \prod_{i=۱}^{۴} |A_i| = ۵ \times ۴ \times ۷ \times ۷ = ۹۸۰$

فرض کنیم $\mathcal{R} \subseteq A_۱ \times A_۲ \times A_۳ \times A_۴$، که در آن $(s,t,u,v) \in \mathcal{R}$ هرگاه $stuv \neq ۰$، دراین‌صورت

$$|\mathcal{R}| = ۴ \times ۴ \times ۶ \times ۶ = ۵۷۶$$

و چون

$$\mathcal{R}_۱ = (A_۱ \times A_۲ \times A_۳ \times A_۴) - \mathcal{R}$$

داریم

$$|\mathcal{R}_۱| = ۹۸۰ - ۵۷۶ = ۴۰۴$$

ب) $|\mathcal{R}_۲| = ۴ \times ۴ \times ۶ \times ۳ = ۲۸۸$

۵. الف) $|A \times B| = |A||B| = ۹$

ب) چون هر رابطه از A در B زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است، $۲^۹$ رابطه از A در B وجود دارد.

پ) چون $|A \times A| = ۹$، $۲^{۹}$ رابطهٔ دوتایی در A وجود دارد.

ت) برای هر یک از هفت جفت مرتب دیگر متعلق به $A \times B$ ، دو انتخاب وجود دارد: آن را در رابطه بگنجانیم یا آن را کنار بگذاریم. بنابراین، $۲^{۷}$ رابطه از A در B وجود دارد که شامل $(۱, ۲)$ و $(۱, ۵)$ هستند.

ث) $\binom{۹}{۵}$ ج) $\binom{۹}{۷} + \binom{۹}{۸} + \binom{۹}{۹}$

۶. وقتی A یا B برابر با $\emptyset$ باشد و وقتی $A = B$.

۷. الف) فرض کنیم $A \times B \subseteq C \times D$ و $a \in A$ و $b \in B$. دراین‌صورت $(a,b) \in A \times B$ و چون $A \times B \subseteq C \times D$، داریم $(a,b) \in C \times D$. ولی

$$(a,b) \in C \times D \Longrightarrow a \in C \text{ و } b \in D$$

بنابراین، از $a \in A$ نتیجه می‌شود $a \in C$ و بنابراین، $A \subseteq C$. همین‌طور از $b \in B$ نتیجه می‌شود $b \in D$ و بنابراین، $B \subseteq D$.

برعکس، فرض کنیم $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$ و $(x, y) \in A \times B$. دراین صورت

$$\begin{aligned}(x,y) \in A \times B &\Longrightarrow (x \in A \text{ و } y \in B)\\ &\Longrightarrow \big(x \in C (\text{زیرا } A \subseteq C) \text{ و } y \in D (\text{زیرا } B \subseteq D)\big)\\ &\Longrightarrow (x,y) \in C \times D\end{aligned}$$

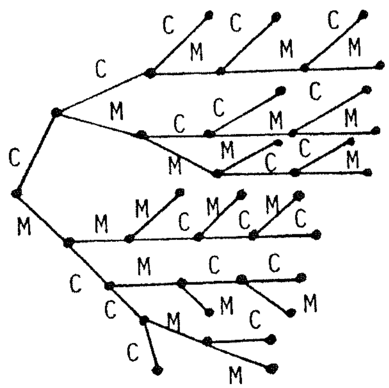
در نتیجه، $A \times B \subseteq C \times D$.

ب) حتی اگر یکی از مجموعه‌های A، B، C یا D تهی باشد، باز هم می‌بینیم که

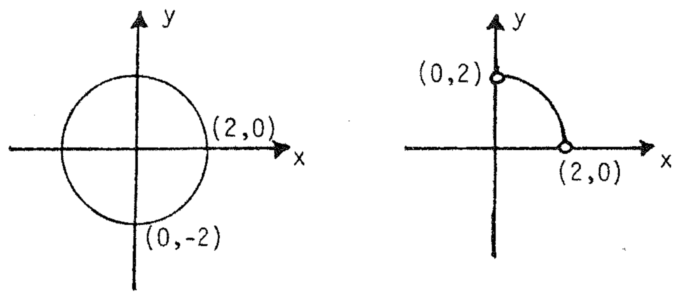
$$[(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)] \Longrightarrow [A \times B \subseteq C \times D]$$

ولی، عکس این مطلب الزاماً درست نیست. مثلاً، فرض کنیم $A = \emptyset$، $B = \{۱, ۲\}$، $C = \{۱, ۲\}$ و $D = \{۱\}$. دراین صورت $A \times B = \emptyset$. درحقیقت، اگر این‌طور نباشد، جفت مرتبی مانند (x, y) در $A \times B$ وجود دارد و این به معنی آن است که مجموعهٔ تهی A شامل عنصری مانند x است. بنابراین، $A \times B = \emptyset \subseteq C \times D$، ولی $B = \{۱, ۲\} \not\subseteq \{۱\} = D$.

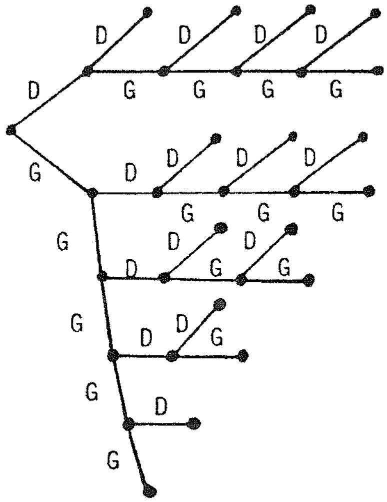
۸.



۹.



۱۰.



۱۱. ب) $A \times (B \cup C) = \{(x,y) | y \in (B \cup C) \text{ و } x \in A\} = \{(x,y) | (y \in C \text{ یا } y \in B) \text{ و } x \in A\}$

$$= \{(x,y) | (y \in C, x \in A) \text{ یا } (y \in B \text{ و } x \in A)\}$$

$$= \{(x,y) | y \in B \text{ و } x \in A\} \cup \{(x,y) | y \in C \text{ و } x \in A\}$$

$$= (A \times B) \cup (A \times C)$$

پ و ت) اثبات هریک از این دو قسمت مشابه اثبات قسمت (ب) است.

۱۲. ۳۸:۱ + ۲ + ۲(۳) + ۲(۳)(۵) = ۳۹

۱۳. $(x,y) \in A \times (B - C) \Longleftrightarrow (y \in B - C \text{ و } x \in A) \Longleftrightarrow \big((y \notin C \text{ و } y \in B) \text{ و } x \in A\big)$

$$\Longleftrightarrow \big((y \in B \text{ و } x \in A) \text{ و } (y \notin C \text{ و } x \in A)\big)$$

$$\Longleftrightarrow \big((x,y) \notin A \times C \text{ و } (x,y) \in A \times B\big)$$

$$\Longleftrightarrow (x,y) \in (A \times B) - (A \times C)$$

۱۴. $|B| = ۴ \implies ۳|B| = ۱۲ \implies ۲^{(۳|B|)} = ۴۰۹۶$

۱۵. الف) (۱) $(۰, ۲) \in \mathcal{R}$ و (۲) اگر $(a, b) \in \mathcal{R}$، آن‌گاه $(a + ۱, b + ۵) \in \mathcal{R}$

ب) از قسمت (۱) در تعریف داریم $(۰, ۲) \in \mathcal{R}$. بنابر قسمت (۲) در تعریف می‌بینیم که

(یک) $(۰, ۲) \in \mathcal{R} \implies (۰ + ۱, ۲ + ۵) = (۱, ۷) \in \mathcal{R}$

(دو) $(۱, ۷) \in \mathcal{R} \implies (۱ + ۱, ۷ + ۵) = (۲, ۱۲) \in \mathcal{R}$

(سه) $(۲, ۱۲) \in \mathcal{R} \implies (۲ + ۱, ۱۲ + ۵) = (۳, ۱۷) \in \mathcal{R}$

(چهار) $(۳, ۱۷) \in \mathcal{R} \implies (۳ + ۱, ۱۷ + ۵) = (۴, ۲۲) \in \mathcal{R}$

۱۶. الف) (۱) $(۲, ۱), (۱, ۱) \in \mathcal{R}$ و (۲) اگر $(a, b) \in \mathcal{R}$، آن‌گاه $(a + ۱, b + ۱)$ و $(a + ۱, b)$ در $\mathcal{R}$ هستند.

ب) با $(۲, ۱) \in \mathcal{R}$، یعنی قسمت (۱) از تعریف، شروع می‌کنیم. دراین صورت بنابر قسمت (۲) می‌بینیم که

(یک) $(۲, ۱) \in \mathcal{R} \implies (۲ + ۱, ۱ + ۱) = (۳, ۲) \in \mathcal{R}$،

(دو) $(۳, ۲) \in \mathcal{R} \implies (۳ + ۱, ۲) = (۴, ۲) \in \mathcal{R}$ و

(سه) $(۴, ۲) \in \mathcal{R} \implies (۴ + ۱, ۲) = (۵, ۲) \in \mathcal{R}$

با $(۱, ۱) \in \mathcal{R}$، یعنی قسمت (۱) از تعریف، شروع می‌کنیم. دراین صورت بنابر قسمت (۲) می‌بینیم که

(یک) $(۱, ۱) \in \mathcal{R} \implies (۱ + ۱, ۱ + ۱) = (۲, ۲) \in \mathcal{R}$،

(دو) $(۲, ۲) \in \mathcal{R} \implies (۲ + ۱, ۲ + ۱) = (۳, ۳) \in \mathcal{R}$،

(سه) $(۳, ۳) \in \mathcal{R} \implies (۳ + ۱, ۳ + ۱) = (۴, ۴) \in \mathcal{R}$.

بند ۲.۵

۱. الف) تابع: $\{۷, ۸, ۱۱, ۱۶, ۲۳, \ldots\} =$ برد

ب) رابطه هست ولی تابع نیست. مثلاً هر دو جفت مرتب $(۴, ۲)$ و $(۴, -۲)$ در این رابطه‌اند.

پ) تابع: مجموعهٔ اعداد حقیقی= برد

ت) رابطه هست ولی تابع نیست. هر دو جفت $(۰, ۱)$ و $(۰, -۱)$ در این رابطه‌اند.

ث) چون $|\mathcal{R}| > ۵$، $\mathcal{R}$ نمی‌تواند تابع باشد.

۲. نمی‌توان این فرمول را برای قلمرو متشکل از همهٔ اعداد حقیقی به‌کاربرد، زیرا $f(\sqrt{۲})$ و $f(-\sqrt{۲})$ تعریف نشده‌اند. چون $\sqrt{۲}, -\sqrt{۲} \notin \mathbf{Z}$، فرمول مذکور تابعی حقیقی با قلمرو $\mathbf{Z}$ تعریف می‌کند.

۳. الف) $\{(۱, x), (۲, x), (۳, x), (۴, x)\}$، $\{(۱, y), (۲, y), (۳, y), (۴, y)\}$،

$\{(۱, z), (۲, z), (۳, z), (۴, z)\}$، $\{(۱, x), (۲, y), (۳, x), (۴, y)\}$،

$\{(۱, x), (۲, y), (۳, z), (۴, x)\}$

ب) $۳^۴$ پ) ۰ ت) $۴^۳$ ث) ۲۴ ج) $۳^۳$ چ) $۳^۲$ ح) $۳^۲$

۴. $|A| = ۷ \implies ۳^{|A|} = ۲۱۸۷$.

۵. الف) $A \cap B = \{(x, y) | y = ۳x \text{ و } y = ۲x + ۱\}$. از $۳x = ۲x + ۱$ نتیجه می‌شود که $x = ۱$. بنابراین، $A \cap B = \{(۱, ۳)\}$.

ب) $B\cap C=\{(x,y)|y=x-۷ \text{ و } y=۳x\}$. از $۳x=x-۷$ نتیجه می‌شود که $۲x=-۷$ و بنابراین، $x=-\frac{۷}{۲}$. در نتیجه، $B\cap C=\left\{\left(-\frac{۷}{۲},۳\left(-\frac{۷}{۲}\right)\right)\right\}=\left\{\left(-\frac{۷}{۲},-\frac{۲۱}{۲}\right)\right\}$.

پ) $\overline{\overline{A}\cup\overline{C}}=\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{C}}=A\cap C=\{(x,y)|y=x-۷ \text{ و } y=۲x+۱\}$. از $۲x+۱=x-۷$ نتیجه می‌شود که $x=-۸$ و بنابراین، $A\cap C=\{(-۸,-۱۵)\}$.

ت) می‌دانیم که $\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{B\cap C}$ و چون $B\cap C=\left\{\left(-\frac{۷}{۲},-\frac{۲۱}{۲}\right)\right\}$، داریم

$$\overline{B}\cup\overline{C}=\mathbf{R}^۲-\left\{\left(-\frac{۷}{۲},-\frac{۲۱}{۲}\right)\right\}=\left\{(x,y)|y\neq-\frac{۲۱}{۲} \text{ یا } x\neq-\frac{۷}{۲}\right\}$$

۶. الف) (یک) $A\cap B=\{(۱,۳)\}$ (دو) $B\cap C=\{\}=\emptyset$
(سه) $\overline{\overline{A}\cup\overline{C}}=\{(-۸,-۱۵)\}$ (چهار) $\overline{B}\cup\overline{C}=\mathbf{Z}^۲=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$

ب) (یک) $A\cap B=\{(۱,۳)\}$ (دو) $B\cap C=\{\}=\emptyset$
(سه) $\overline{\overline{A}\cap\overline{C}}=\emptyset$ (چهار) $\overline{B}\cup\overline{C}=\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$

۷. الف) $\lfloor ۲٫۳-۱٫۶\rfloor=\lfloor ۰٫۷\rfloor=۰$ ب) $\lfloor ۲٫۳\rfloor-\lfloor ۱٫۶\rfloor=۲-۱=۱$
پ) $\lfloor ۲٫۳\rfloor-\lceil ۱٫۶\rceil=۲-۲=۰$ ت) $\lfloor ۳٫۷\rfloor+\lceil ۷٫۳\rceil=۳+۸=۱۱$
ث) $\lceil ۳٫۴\rceil\lfloor ۶٫۲\rfloor=۴\times ۶=۲۴$ ج) $\lfloor ۳٫۴\rfloor\lceil ۶٫۲\rceil=۳\times ۷=۲۱$
چ) $\lfloor ۲\pi\rfloor=۶$ ح) $۲\lfloor \pi\rfloor=۶$

۸. الف) درست
ب) نادرست: فرض کنید $a=۱٫۵$. دراین صورت $\lfloor ۱٫۵\rfloor=۱\neq ۲=\lceil ۱٫۵\rceil$
پ) درست
ت) نادرست: فرض کنید $a=۰٫۵$ و $b=۱$. دراین صورت $\lfloor a\rfloor\lceil b\rceil=۰\times ۱=۰\neq ۱=\lceil ۰٫۵\rceil\lfloor ۱\rfloor$
ث) نادرست: فرض کنید $a=۱٫۵$. دراین صورت $-\lceil a\rceil=-۲\neq -۱=\lceil -a\rceil$
ج) درست

۹. الف) $\ldots\left[-۱,-\frac{۶}{۷}\right)\cup\left[۰,\frac{۱}{۷}\right)\cup\left[۱,\frac{۸}{۷}\right)\cup\left[۲,\frac{۱۵}{۷}\right)\cup\cdots$

ب) $\left[۱,\frac{۸}{۷}\right)$ پ) $\mathbf{Z}$ ت) $\mathbf{R}$

۱۰. $\mathbf{R}$

۱۱. الف)

$$\ldots\bigcup(-۵/۲,-۲]\bigcup(-۳/۲,-۱]\bigcup(-۱/۲,۰]\bigcup(۱/۲,۱]\bigcup(-۳/۲,۲]\bigcup\cdots$$
$$=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}^+}(m-۱/۲,m]$$

ب)

$$\ldots\bigcup(-۷/۳,-۲]\bigcup(-۴/۳,-۱]\bigcup(-۱/۳,۰]\bigcup(۲/۳,۱]\bigcup(۵/۳,۲]\bigcup\ldots$$
$$=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}^+}(m-۱/۳,m]$$

پ)

$$\ldots\bigcup((-۲n-۱)/n,-۲]\bigcup((-n-۱)/n,-۱]\bigcup(-۱/n,۰]\bigcup((n-۱)/n,۱]\bigcup$$
$$((۲n-۱)/n,۲]\bigcup\ldots=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}^+}(m-۱/n,m]$$

۱۲. برهان: (حالت ۱ : $k|n$) به‌ازای عددی مانند $q\in\mathbf{Z}^+$ داریم $n=qk$ و درنتیجه، $\frac{n-۱}{k}=\frac{qk-۱}{k}=q-\frac{۱}{k}$، که در آن $q-۱\leq q-\frac{۱}{k}<q$. بنابراین،

$$\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil=\lceil q\rceil=q=(q-۱)+۱=\left\lfloor\frac{n-۱}{k}\right\rfloor+۱$$

(حالت ۲ : $k\nmid n$) دراین حالت به‌ازای اعدادی مانند $q,r\in\mathbf{Z}^+$، $r<k$، داریم $n=qk+r$ و در نتیجه، $\frac{n}{k}=q+\frac{r}{k}$، که در آن $۱>\frac{r}{k}>۰$. بنابراین، $\frac{n-۱}{k}=q+\frac{r-۱}{k}$، که در آن $۱>\frac{r-۱}{k}\geq ۰$. درنتیجه،

$$\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil=\left\lceil q+\frac{r}{k}\right\rceil=q+۱=\left\lfloor\frac{n-۱}{k}\right\rfloor+۱$$

۱۳. الف) برهان (یک): اگر $a\in\mathbf{Z}^+$، دراین صورت $a=\lceil a\rceil$ و $۱=\lfloor۱\rfloor=\lfloor\lceil a\rceil/a\rfloor$. اگر $a\notin\mathbf{Z}^+$، می‌نویسیم $a=n+c$، که در آن $n\in\mathbf{Z}^+$ و $۰<c<۱$. دراین صورت

$$\lceil a\rceil/a=\frac{n+۱}{n+c}=۱+\frac{۱-c}{n+c}$$

که در آن $۱>\frac{۱-c}{n+c}>۰$. بنابراین، $\lfloor\lceil a\rceil/a\rfloor=\left\lfloor۱+\frac{۱-c}{n+c}\right\rfloor=۱$

برهان (دو): به‌ازای $a\in\mathbf{Z}^+$، $a=\lfloor a\rfloor$ و $۱=\lceil۱\rceil=\lceil\lfloor a\rfloor/a\rceil$. اگر $a\notin\mathbf{Z}^+$، فرض کنید $a=n+c$، که در آن $n\in\mathbf{Z}^+$ و $۰<c<۱$. دراین صورت $\lfloor a\rfloor/a=\frac{n}{n+c}=۱-\frac{c}{n+c}$، که در آن $۱>\frac{c}{n+c}>۰$. در نتیجه، $\lceil\lfloor a\rfloor/a\rceil=\left\lceil۱-\frac{c}{n+c}\right\rceil=۱$.

ب) $a=۰/۱$ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت

$$\text{(یک)}\ ۱\neq ۱۰=\lfloor۱۰\rfloor=\left\lfloor\frac{۱}{۰/۱}\right\rfloor=\lfloor\lceil a\rceil/a\rfloor$$ و

$$\text{(دو)}\ ۱\neq ۰=\left\lceil\frac{۰}{۰/۱}\right\rceil=\lceil\lfloor a\rfloor/a\rceil$$

درحقیقت، به‌ازای هر $۰<a<۱$، (دو) نادرست است، زیرا به‌ازای هر یک از این مقدارها برای a، $\lceil\lfloor a\rfloor/a\rceil=۰$. در حالت (یک)، وقتی $۰<a\leq ۰/۵$، نتیجه می‌شود که $\lceil a\rceil/a\geq ۲$ و

$1 \neq 2 \geq \lfloor \lceil a \rceil / a \rfloor$. ولی به‌ازای $0{,}5 < a < 1$، $\lceil a \rceil / a = \frac{1}{a}$، که در آن $2 > \frac{1}{a} > 1$ و بنابراین، به‌ازای $0{,}5 < a < 1$ داریم $\lfloor \lceil a \rceil / a \rfloor = 1$.

۱۴. الف)

$$a_2 = 2a_{\lfloor 2/2 \rfloor} = 2a_1 = 2$$
$$a_3 = 2a_{\lfloor 3/2 \rfloor} = 2a_1 = 2$$
$$a_4 = 2a_{\lfloor 4/2 \rfloor} = 2a_2 = 4$$
$$a_5 = 2a_{\lfloor 5/2 \rfloor} = 2a_2 = 4$$
$$a_6 = 2a_{\lfloor 6/2 \rfloor} = 2a_3 = 4$$
$$a_7 = 2a_{\lfloor 7/2 \rfloor} = 2a_3 = 4$$
$$a_8 = 2a_{\lfloor 8/2 \rfloor} = 2a_4 = 8$$

ب) برهان (با استفاده از استقرای قوی):

به‌ازای $n = 1$ داریم $a_1 = 1 \leq 1$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت درست است. (به این ترتیب، مرحلهٔ پایهٔ اثبات فراهم می‌شود.)

اکنون درستی این نتیجه را به‌ازای عددی مانند $k \geq 1$ و هر $n = 1, 2, 3, \ldots, k-1, k$ مفروض می‌گیریم. به‌ازای $n = k+1$ داریم $a_{k+1} = 2a_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \leq 2 \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$، که در آن آخرین نابرابری از فرض استقرا به‌دست می‌آید.

وقتی k فرد است، $\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \frac{k+1}{2}$ و داریم $a_{k+1} \leq 2 \left[\frac{k+1}{2}\right] = k+1$. وقتی k زوج است، $\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{k}{2}$ و در اینجا می‌بینیم که $a_{k+1} \leq 2\left(\frac{k}{2}\right) = k \leq k+1$.

در هر حالت، از $a_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \leq \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$ نتیجه می‌شود که $a_{k+1} \leq k+1$. به این ترتیب، مرحلهٔ استقرایی اثبات برقرار می‌شود.

بنابراین، از اصل استقرای قوی نتیجه می‌شود که

$$\forall n \in \mathbf{Z}^+ \qquad a_n \leq n$$

۱۵. الف) یک به‌یک. برد تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح فرد است.

ب) یک به‌یک. $\mathbf{Q} =$ برد

پ) چون $f(0) = f(1)$، تابع f یک به‌یک نیست

$$f \text{ برد} = \{0, \pm 6, \pm 24, \pm 60, \ldots\} = \{n^3 - n | n \in \mathbf{Z}\}$$

ت) یک به‌یک. $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty) =$ برد

ث) یک به‌یک. برد $= [-۱,۱]$

ج) چون $f\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) = f\left(\frac{\pi}{۴}\right)$، تابع f یک به‌یک نیست. برد $f = [۰,۱]$

۱۶. الف) $\{۴,۹\}$ ب) $\{۴,۹\}$ پ) $[۰,۹)$

ت) $[۰,۹)$ ث) $[۰,۴۹]$ ج) $[۹,۱۶) \cup [۲۵,۳۶]$

۱۷. هر توسیع مانند f باید شامل $f(۱)$ و $f(۴)$ باشد. چون $|B| = ۴$، چهار انتخاب برای هر یک از دو عنصر ۱ و ۴ وجود دارد و بنابراین، $۱۶ = ۴^۲$ طریق برای توسیع تابع مفروض g وجود دارد.

۱۸. فرض کنیم $A = \{۱,۲\}$، $B = \{۳,۴\}$ و $f = \{(۱,۳),(۲,۳)\}$. به‌ازای $A_۱ = \{۱\}$ و $A_۲ = \{۲\}$ داریم $f(A_۱ \cap A_۲) = f(\emptyset) = \emptyset$، درحالی که $f(A_۱) \cap f(A_۲) = \{۳\} \cap \{۳\} = \{۳\}$.

۱۹. الف) $f(A_۱ \cup A_۲) = \{y \in B | y = f(x), x \in A_۱ \cup A_۲\} = \{y \in B | y = f(x),$

$x \in A_۱$ یا $x \in A_۲\} = \{y \in B | y = f(x), x \in A_۱\} \cup \{y \in B | y = f(x), x \in A_۲\}$

$= f(A_۱) \cup f(A_۲)$

پ) $y \in f(A_۱) \cap f(A_۲) \Longrightarrow (y = f(x_۱) = f(x_۲), x_۱ \in A_۱, x_۲ \in A_۲)$ چون f یک به‌یک است نتیجه می‌شود $x_۱ = x_۲$ و $y = f(x_۱)$. بنابراین، $y \in f(A_۱ \cap A_۲)$.

۲۰. تعداد توابع یک به‌یک از A در B برابر است با $۶۷۲۰ = \frac{|B|!}{(|B| - ۵)!}$ و در نتیجه، $|B| = ۸$.

۲۱. الف) $f(a_{ij}) = ۱۲(i - ۱) + j$

ب) $f(a_{ij}) = ۱۰(i - ۱) + j$

پ) $f(a_{ij}) = ۷(i - ۱) + j$

۲۲. $g(a_{ij}) = m(j - ۱) + i$

۲۳. الف) (یک) $f(a_{ij}) = n(i - ۱) + (k - ۱) + j$

(دو) $g(a_{ij}) = m(j - ۱) + (k - ۱) + i$

ب) $k + (mn - ۱) \leq r$

۲۴. الف) فقط یک تابع در $S_۱$ وجود دارد، یعنی تابع $f : A \longrightarrow B$، که در آن $f(a) = f(b) = ۱$ و $f(c) = ۲$. بنابراین، $|S_۱| = ۱$.

ب) چون $f(c) = ۳$، دو انتخاب برای هر یک از دو عنصر $f(a)$ و $f(b)$ داریم که عبارت‌اند از ۱ و ۲. در نتیجه، $|S_۲| = ۲^۲$.

پ) با توجه به $f(c) = i + ۱$، i انتخاب برای هر یک از دو عنصر $f(a)$ و $f(b)$ وجود دارد که عبارت‌اند از ۱، ۲، ۳، ...، $i - ۱$، i و بنابراین، $|S_i| = i^۲$.

ت) هر تابع متعلق به $T_۱$ مانند f با دو عنصر x، y در B تعیین می‌شود، که در آن $۱ \leq x < y \leq n + ۱$،

$x = f(a) = f(b)$ و $f(c) = y$. این دو عنصر متعلق به B را می‌توانیم به $\binom{n+1}{2}$ طریق انتخاب کنیم. بنابراین، $|T_1| = \binom{n+1}{2}$.

ث) برای T_2 داریم $f(a) < f(b) < f(c)$ و بنابراین، به سه عنصر متمایز از B نیاز داریم. این سه عنصر را می‌توان به $\binom{n+1}{3}$ طریق انتخاب کرد. استدلال برای T_3 نیز به‌همین ترتیب انجام می‌گیرد.

ج) با توجه به اینکه به‌ازای هر $1 \leq i < j \leq n$ داریم $S_i \cap S_j = \emptyset$، پس $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots \cup S_n$ و از $T_1 \cap T_2 = T_1 \cap T_3 = T_2 \cap T_3 = \emptyset$ نتیجه می‌شود $S = T_1 \cup T_2 \cup T_3$.

چ) با توجه به قسمت (ج) داریم $|S| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{j=1}^{3} |T_j| = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$. بنابراین،

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{2(n+1)(n)(n-1)}{6} = (n+1)(n)\left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{3}\right)$$

$$= (n+1)(n)\left(\frac{3+2n-2}{6}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۲۵. الف)

$$A(1,3) = A(0, A(1,2)) = A(1,2) + 1 = A(0, A(1,1)) + 1 = [A(1,1) + 1] + 1 =$$

$$A(1,1) + 2 = A(0, A(1,0)) + 2 = [A(1,0) + 1] + 2 = A(1,0) + 3 = A(0,1) + 3$$

$$= (1+1) + 3 = 5$$

$$A(2,3) = A(1, A(2,2))$$

$$A(2,2) = A(1, A(2,1))$$

$$A(2,1) = A(1, A(2,0)) = A(1, A(1,1))$$

$$A(1,1) = A(0, A(1,0)) = A(1,0) + 1 = A(0,1) + 1 = (1+1) + 1 = 3$$

$$A(2,1) = A(1,3) = A(0, A(1,2)) = A(1,2) + 1 = A(0, A(1,1))$$

$$= [A(1,1) + 1] + 1 = 5$$

$$A(2,2) = A(1,5) = A(0, A(1,4)) = A(1,4) + 1 = A(0, A(1,3)) + 1$$

$$= A(1,3) + 2 = A(0, A(1,2)) + 2 = A(1,2) + 3 = A(0, A(1,1)) + 3$$

$$= A(1,1) + 4 = 7$$

$$A(2,3) = A(1,7) = A(0, A(1,6)) = A(1,6) + 1 = A(0, A(1,5)) + 1$$

$$= A(0,7) + 1 = (7+1) + 1 = 9$$

ب) چون $A(1,0) = A(0,1) = 2 = 0 + 2$، نتیجهٔ موردنظر در حالت $n = 0$ درست است. اگر درستی این گزارهٔ باز را به‌ازای عددی مانند $k \geq 0$ مفروض بگیریم، خواهیم داشت $A(1,k) = k + 2$.

دراین صورت می‌بینیم که

$$A(۱, k+۱) = A(۰, A(۱, k)) = A(۱, k) + ۱ = (k+۲) + ۱ = (k+۱) + ۲$$

و بنابراین، درستی گزارهٔ مفروض به‌ازای $n = k$ مستلزم درستی آن به‌ازای $n = k + ۱$ است. درنتیجه، بنابر اصل استقرای ریاضی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم $A(۱, n) = n + ۲$.

پ) در اینجا (با توجه به نتیجهٔ قسمت (ب)) می‌بینیم که $A(۲, ۰) = A(۱, ۱) = ۱ + ۲ = ۳$. بنابراین، $A(۲, ۰) = ۳ + ۲ \times ۰$ و گزارهٔ باز مفروض در این حالت درست است.

اکنون فرض کنیم این نتیجه به‌ازای عددی مانند $k \geq ۰$ درست باشد، یعنی فرض کنیم

$$A(۲, k) = ۳ + ۲k$$

دراین صورت برای $k + ۱$ (با توجه به قسمت (ب) و فرض استقرا) می‌بینیم که

$$A(۲, k+۱) = A(۱, A(۲, k)) = A(۲, k) + ۲ = (۳ + ۲k) + ۲ = ۳ + ۲(k+۱)$$

درنتیجه، بنابر اصل استقرای ریاضی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم $A(۲, n) = ۳ + ۲n$.

ت) باز هم ببینیم به‌ازای $n = ۰$ چه روی می‌دهد. چون (با توجه به قسمت (پ)) داریم

$$A(۳, ۰) = A(۲, ۱) = ۳ + ۲(۱) = ۵ = ۲^{۰+۳} - ۳$$

نتیجهٔ موردنظر در این حالت درست است.

اکنون فرض کنیم گزارهٔ باز داده شده به‌ازای عددی مانند $k \geq ۰$ درست باشد، یعنی $A(۳, k) = ۲^{k+۳} - ۳$. دراین صورت (با توجه به قسمت (پ) و فرض استقرا)، به‌ازای $n = k + ۱$ نتیجه می‌گیریم که

$$A(۳, k+۱) = A(۲, A(۳, k)) = ۳ + ۲A(۳, k) = ۳ + ۲(۲^{k+۳} - ۳)$$

و بنابراین، وقتی نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = k$ درست است، به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست خواهد بود. به‌این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم $A(۳, n) = ۲^{n+۳} - ۳$.

بند ۳.۵

۱. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{v, w, x, y, z\}$. دراین صورت،

الف) $f = \{(۱, v), (۲, v), (۳, w), (۴, x)\}$ ب) $f = \{(۱, v), (۲, x), (۳, y), (۴, z)\}$

پ) فرض کنید

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\},\ B = \{w, x, y, z\} \quad \text{و} \quad f = \{(۱, w), (۲, w), (۳, x), (۴, y), (۵, z)\}$$

ت) فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $B = \{w, x, y, z\}$ و $f = \{(۱, w), (۲, x), (۳, y), (۴, z)\}$.

۲. الف) یک به‌یک و پوشاست.

ب) یک به‌یک است ولی پوشا نیست. برد تابع متشکل از همهٔ اعداد صحیح فرد است.

پ) یک به‌یک و پوشاست.

ت) چون $f(1) = f(-1)$، f یک به‌یک نیست. f پوشا هم نیست. برد f مجموعهٔ $\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$ است.

ث) چون $f(-1) = f(0)$، تابع f یک به‌یک نیست. f پوشا هم نیست. برد f مجموعهٔ $\{0, 2, 6, 12, 20, \ldots\}$ است.

ج) f یک به‌یک است ولی پوشا نیست. برد f مجموعهٔ $\{\ldots, -64, -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27, \ldots\}$ است.

۳. الف، ب، پ، ج) یک به‌یک و پوشاست.

ت) نه یک به‌یک است، نه پوشا. برد تابع مجموعهٔ $[0, +\infty)$ است.

ث) نه یک به‌یک است، نه پوشا. برد تابع مجموعهٔ $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ است.

۴. الف) 6^4، $\frac{6!}{2!}$، 0

ب) 4^6، $4!S(6, 4)$، 0

۵. به‌ازای $n = 5$ و $m = 3$ داریم

$$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{5}{5-k}(5-k)^3 = (-1)^0\binom{5}{5}(5)^3 + (-1)^1\binom{5}{4}(4)^3 + (-1)^2\binom{5}{3}(3)^3 +$$
$$(-1)^3\binom{5}{2}(2)^3 + (-1)^4\binom{5}{1}(1)^3 + (-1)^5\binom{5}{0}(0)^3 = 125 - 320 + 270 - 80 + 5 = 0$$

۶. الف)

$$\sum_{i=1}^{5}\binom{5}{i}(i!)S(7, i) = \binom{5}{1}(1!)S(7, 1) + \binom{5}{2}(2!)S(7, 2) + \binom{5}{3}(3!)S(7, 3) +$$
$$\binom{5}{4}(4!)S(7, 4) + \binom{5}{5}(5!)S(7, 5) = (5)(1)(1) + (10)(2)(63) + (10)(6)(301) +$$
$$(5)(24)(350) + (1)(120)(140) = 78125 = 5^7$$

ب) عبارت m^n تعداد طرق توزیع n شیء متمایز را بین m ظرف متمایز به‌دست می‌دهد.

به‌ازای $1 \le i \le m$، فرض کنید i تعداد ظرفهای متمایزی باشد که عملاً به‌کار می‌روند، یعنی ظرفهایی که پس از توزیع n شیء متمایز مفروض خالی نیستند. این تعداد ظرف متمایز را می‌توان به $\binom{m}{i}$ طریق انتخاب کرد. به‌محض در اختیار داشتن i ظرف متمایز، می‌توانیم n شیء مفروض را به $(i!)S(n, i)$ طریق بین این i ظرف متمایز چنان توزیع کنیم که هیچ ظرفی خالی نماند (توجه داریم که اگر $i > n$، $S(n, i) = 0$). دراین صورت $\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}(i!)S(n, i)$ نیز تعداد طرق توزیع n شیء متمایز را بین m ظرف متمایز به‌دست می‌دهد. بنابراین، $m^n = \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}(i!)S(n, i)$.

۷. الف) (یک) $۲!S(۷,۲)$ (دو) $\binom{۵}{۲}[۲!S(۷,۲)]$ (سه) $۳!S(۷,۳)$

(چهار) $\binom{۵}{۳}[۳!S(۷,۳)]$ (پنج) $۴!S(۷,۴)$ (شش) $\binom{۵}{۴}[۴!S(۷,۴)]$

ب) $\binom{n}{k}[k!S(m,k)]$

۸. فرض کنید A مجموعهٔ ترکیبها و B مجموعهٔ دستیاران آزمایشگاهی باشد. دراین صورت تعداد طرق واگذاری وظایف، به‌طوری که هیچ دستیاری بیکار نماند، برابر است با تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ A در مجموعهٔ B. تعداد این نوع توابع $۵!S(۹,۵)$ است.

۹. به‌ازای هر $r \in \mathbf{R}$ دست‌کم یک عدد مانند $a \in \mathbf{R}$ وجود دارد به‌طوری که $a^۵ - ۲a^۲ + a - r = ۰$، زیرا چندجمله‌ای $x^۵ - ۲x^۲ + x - r$ دارای درجهٔ فرد و ضرایب حقیقی است. درنتیجه، f پوشاست. از طرف دیگر، $f(۱) = ۰ = f(۰)$ و بنابراین، f یک به‌یک نیست.

۱۰. الف) $(۴!)S(۷,۴)$

ب) $۴!S(۶,۴)$ + $۳!S(۶,۳)$

(ظرف دو علاوه‌بر گوی آبی، گویهای دیگر هم دارد) (ظرف دو فقط شامل گوی آبی است)

پ) $S(۷,۱) + S(۷,۲) + S(۷,۳) + S(۷,۴)$

۱۱.

m \ n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۹	۱	۲۵۵	۳۰۲۵	۷۷۷۰	۶۹۵۱	۲۶۴۶	۴۶۲	۳۶	۱	
۱۰	۱	۵۱۱	۹۳۳۰	۳۴۱۰۵	۴۲۵۲۵	۲۲۸۲۷	۵۸۸۰	۷۵۰	۴۵	۱

۱۲. الف) چون $۳۷ \times ۳۱ \times ۲۹ \times ۱۷ \times ۱۱ \times ۵ = ۳۱۱۰۰۹۰۵$، می‌بینیم که برای ۳۱۱۰۰۹۰۵، $S(۶,۳) = ۹۰$ تجزیهٔ نامرتب به سه عامل ضرب، به‌طوری که هر یک از آنها بزرگتر از ۱ باشد، وجود دارد.

ب) اگر در قسمت (الف) ترتیب عوامل درنظر گرفته شود، دراین صورت $۳!S(۶,۳) = ۵۴۰$ تجزیه از نوع مطلوب وجود دارد.

پ)
$$\sum_{i=۲}^{۶} S(۶,i) = S(۶,۲) + S(۶,۳) + S(۶,۴) + S(۶,۵) + S(۶,۶)$$
$$= ۳۱ + ۹۰ + ۶۵ + ۱۵ + ۱ = ۲۰۲$$

ت)
$$\sum_{i=۲}^{۶} (i!)S(۶,i) = (۲!)S(۶,۲) + (۳!)S(۶,۳) + (۴!)S(۶,۴) + (۵!)S(۶,۵) + (۶!)S(۶,۶)$$
$$= (۲)(۳۱) + (۶)(۹۰) + (۲۴)(۶۵) + (۱۲۰)(۱۵) + (۷۲۰)(۱) = ۴۶۸۲$$

۱۳. الف) چون $۲۳ \times ۱۹ \times ۱۷ \times ۷ \times ۳ = ۱۵۶۰۰۹$، نتیجه می‌گیریم که $S(۵,۲) = ۱۵$ تجزیهٔ نامرتب به دو عامل ضرب، به‌طوری‌که هر یک از آنها بزرگتر از ۱ باشد، برای ۱۵۶۰۰۹، وجود دارد.

ب) $S(۵,۳) + S(۵,۴) + S(۵,۵) = ۲۵ + ۱۰ + ۱ = ۳۶$

پ) $\sum_{i=۲}^{۵} S(۵,i) = S(۵,۲) + S(۵,۳) + S(۵,۴) + S(۵,۵) = ۱۵ + ۲۵ + ۱۰ + ۱ = ۵۱$

ت) $\sum_{i=۲}^{n} S(n,i)$

۱۴.

```
10  Dim S(12,12)
20  For I = 1 To 12
30        S(I,I) = 1
40  Next I
50  Print "M = : 1"
60  For M = 2 To 12
70        Print "M ="; M; ": 1, ";
80        For N = 2 To M-1
90              S(M,N) = S(M-1, N-1) + N*S(M-1,N)
100             Print S(M,N); ", ";
110        Next N
120        Print " 1"
130  Next M
140  End
```

بند ۴.۵

۱. در اینجا مثلاً می‌بینیم که $f\big(f(a,b),c\big) = f(a,c) = c$، درحالی که $f\big(a,f(b,c)\big) = f(a,b) = a$ و بنابراین، f شرکت‌پذیر نیست.

۲. الف) چون $h(۲,۱) = ۲ \neq \frac{۱}{۲} = h(۱,۲)$، عمل دوتایی h تعویض‌پذیر نیست. همچنین، می‌بینیم که h شرکت‌پذیر هم نیست زیرا

$$h\big(۲,h(۱,۲)\big) = h\left(۲,\frac{۱}{۲}\right) = ۲/(۱/۲) = ۴$$

درحالی‌که

$$h\big(h(۲,۱),۲\big) = h\left(\frac{۲}{۱},۲\right) = h(۲,۲) = \frac{۲}{۲} = ۱$$

ب) فرض کنیم x عنصر همانی h باشد. دراین صورت

$$h(۲,x) = ۲ \Longrightarrow \frac{۲}{x} = ۲ \Longrightarrow x = ۱$$

درحالی‌که

$$h(x,۲) = ۲ \Longrightarrow \frac{x}{۲} = ۲ \Longrightarrow x = ۴$$

بنابراین، این عمل دوتایی (بسته) عنصر همانی ندارد.

۳. الف) $f(x,y) = x + y - xy = y + x - yx = f(y,x)$ و بنابراین، عمل دوتایی مفروض تعویض‌پذیر است.

$$f\big(f(w,x),y\big) = f(w,x) + y - f(w,x)y = (w + x - wx) + y - (w + x - wx)y$$
$$= w + x + y - wx - wy - xy + wxy$$

$$f\big(w, f(x,y)\big) = w + f(x,y) - w \times f(x,y) = w + (x + y - xy) - w(x + y - xy)$$
$$= w + x + y - wx - wy - xy + wxy$$

چون $f\big(f(w,x),y\big) = f\big(w, f(x,y)\big)$، عمل دوتایی (بستهٔ) مفروض شرکت‌پذیر است.

ب و ت) تعویض‌پذیر و شرکت‌پذیرند.

پ) نه تعویض‌پذیر است، نه شرکت‌پذیر.

۴. الف) عنصر همانی $z = ۰$ است.

ت) عنصر همانی $z = ۳$ است.

ب و پ) هیچ‌یک از این دو عمل دوتایی (بسته) عنصر همانی ندارد.

۵. الف) ۲۵ ب) $۵^{۲۵}$ پ) $۵^{۲۵}$ ت) $۵^{۱۰}$

۶. الف) $۵^{۲۲}$ ب) $۵^{۱۵}$

پ) $۵^{۱۵} \times ۳$، زیرا نه a می‌تواند عنصر همانی باشد، نه b.

ت) ۳×۵^{۹}

۷. الف) بله ب) بله پ) خیر

۸. هر عنصر A به‌ازای عددی مانند $۱ \leq i \leq ۵$، به‌صورت ۲^i است و $\gcd(۲^۵, ۲^i) = ۲^i = \gcd(۲^i, ۲^۵)$. بنابراین $۳۲ = ۲^۵$ عنصر همانی برای f است.

۹. الف) $|A| = (۳۲)(۳۸) = ۱۲۱۶$.

ب) عنصر همانی f عبارت است از $p^{۳۱}q^{۳۷}$.

۱۰. به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، فرض می‌کنیم $p_۱$، $p_۲$، …، p_n، n عدد اول متمایز باشند و به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$ فرض می‌کنیم M_i عدد صحیح مثبت ثابتی باشد. اگر $A = \{\prod_{۱ \leq i \leq n} p_i^{e_i} | e_i \in \mathbf{N}, ۰ \leq e_i \leq M_i\}$ عمل دوتایی بستهٔ $f : A \times A \to A$ را با $f(a,b) = \gcd(a,b)$ تعریف کنید.

دراین صورت $|A| = \prod_{i=۱}^{n}(M_i + ۱)$ و عنصر همانی f عبارت است از $\prod_{i=۱}^{n} p_i^{M_i}$.

۱۱. بنابر اصل خوش ترتیبی، A دارای کوچکترین عنصر است و همین عنصر، عنصر همانی f است. اگر A متناهی باشد، دراین صورت A دارای بزرگترین عنصر است و همین عنصر، عنصر همانی g خواهد بود. اگر A نامتناهی باشد، دراین صورت g نمی‌تواند عنصر همانی داشته باشد.

۱۲. الف) (یک) بله (دو) بله (سه) بله، ۰ عنصر همانی است.

ب) (یک) خیر. مثلاً فرض کنید $a = ۱/۷$ و $b = ۲$. دراین صورت $g(a,b) = \lfloor ۱/۷ \rfloor + \lceil ۲ \rceil = ۱ + ۲ = ۳$، درحالی‌که $g(b,a) = \lfloor ۲ \rfloor + \lceil ۱/۷ \rceil = ۲ + ۲ = ۴$.

(دو) فرض کنید $a = b = c = ۱/۱$. دراین صورت

$$g\big(g(a,b),c\big) = g\big(\lfloor a \rfloor + \lceil b \rceil, c\big) = \big(\lfloor a \rfloor + \lceil b \rceil\big) + \lceil c \rceil = (۱ + ۲) + ۲ = ۵$$

درحالی‌که

$$g\big(a, g(b,c)\big) = g\big(a, \lfloor b \rfloor + \lceil c \rceil\big) = \lfloor a \rfloor + \big(\lfloor b \rfloor + \lceil c \rceil\big) = ۱ + (۱ + ۲) = ۴$$

درنتیجه، g شرکت‌پذیر نیست.

(سه) فرض می‌کنیم $x \in \mathbf{R}$ عنصر همانی باشد. دراین صورت به‌ازای هر $a \in \mathbf{R}$، $g(a,x) = a$. ولی به‌ازای $a \in \mathbf{R}$، $g(a,x)$ عددی صحیح است. درنتیجه، g عنصر همانی ندارد.

۱۳. می‌نویسیم $a = m + r$ و $b = n + s$، که در آن $m, n \in \mathbf{Z}$ و $۰ < r, s < ۱$. دراین صورت $h(a,b) = \lfloor a \rfloor + \lceil b \rceil = m + (n + ۱)$ و $h(b,a) = \lfloor b \rfloor + \lceil a \rceil = n + (m + ۱)$. درنتیجه، h تعویض‌پذیر است.

۱۴. الف) $\pi_A(D) = [۰, +\infty)$ $\quad$ $\pi_B(D) = \mathbf{R}$

ب) $\pi_A(D) = \mathbf{R}$ $\quad$ $\pi_B(D) = [-۱, ۱]$

پ) $\pi_A(D) = [-۱, ۱]$ $\quad$ $\pi_B(D) = [-۱, ۱]$

۱۵. الف) ۵ $\quad$ ب) $\{(۲۵, ۲۵, ۶), (۲۵, ۲, ۴), (۶۰, ۴۰, ۲۰), (۲۵, ۴۰, ۱۰)\}$

پ) $A_۱$، $A_۲$

۱۶. الف) ۵

ب) $\{(۱, A), (۱, D), (۱, E), (۲, A), (۲, D), (۲, E)\}$

$\{(۱۰۰۰۰, ۱, ۱۰۰), (۴۰۰, ۱, ۱۰۰), (۳۰, ۱, ۱۰۰),$

$(۴۰۰۰, ۱, ۲۵۰), (۴۰۰, ۱, ۲۵۰), (۱۵, ۱, ۲۵۰)\}$

پ) $A_۱ \times A_۲$، $A_۲ \times A_۵$، $A_۳ \times A_۵$

بند ۵.۵

۱. در اینجا هر لنگه جوراب یک کبوتر و هر رنگ یک لانهٔ کبوتر است.

۲. اگر هر یک از این هشت نفر را یک کبوتر و هر یک از روزهای هفته را یک لانهٔ کبوتر تلقی کنیم، دراین صورت نتیجهٔ موردنظر از اصل لانه کبوتری به‌دست می‌آید.

۳. الف) ۷ $\quad$ ب) ۱۳ $\quad$ پ) $۶(n - ۱) + ۱$

۴. ۴۲

۵. $۲۶^۲ + ۱ = ۶۷۷$

۶. الف) ۱۰۰۱ $\quad$ ب) ۲۰۰۱

پ) فرض می‌کنیم $n \in \mathbf{Z}^+$. کوچکترین مقدار برای $|S|$ (که در آن $S \subset \mathbf{Z}^+$) به‌طوری که بتوان n عنصر مانند $x_۱, x_۲, \ldots, x_n \in S$ چنان یافت که همهٔ این n عدد صحیح در تقسیم بر ۱۰۰۰ باقیماندهٔ یکسان داشته باشند، $۱۰۰۰(n - ۱) + ۱$ است.

۷. الف) به‌ازای هر $x \in \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۰۰\}$ می‌نویسیم $x = ۲^n \times m$، که در آن $n \geq ۰$ و $\gcd(۲, m) = ۱$. برای m، ۱۵۰ امکان وجود دارد: یعنی ۱، ۳، ۵، ...، ۲۹۹. هنگام انتخاب ۱۵۱ عدد از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۰۰\}$، دست‌کم دوتا از آنها باید به‌صورت $x = ۲^s \times m$ و $y = ۲^t \times n$ باشند. اگر $x < y$، دراین صورت $x|y$. در غیر این صورت، $y < x$ و $y|x$.

ب) اگر $n + ۱$ عدد صحیح از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۲n\}$ انتخاب شوند، دست‌کم دو عدد صحیح مانند x و y در این انتخاب وجود دارند به‌طوری که $x|y$ یا $y|x$.

۸. هر انتخاب ۱۰۱ عنصری از مجموعهٔ S باید حاوی دو عدد صحیح متوالی مانند n و $n + ۱$ باشد و می‌دانیم که $\gcd(n, n + ۱) = ۱$.

۹. الف) در اینجا هر یک از اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ...، ۲۵ یک کبوتر و هر یک از ۱۳ مجموعهٔ

$$\{۱, ۲۵\}, \{۲, ۲۴\}, \ldots, \{۱۱, ۱۵\}, \{۱۲, ۱۴\}, \{۱۳\}$$

یک لانهٔ کبوتر تلقی می‌شود. هنگام انتخاب ۱۴ عدد صحیح، هر دو عنصر دست‌کم یکی از این زیرمجموعه‌های دو عنصری انتخاب می‌شوند و در این صورت مجموع آنها برابر با ۲۶ است.

ب) اگر $S = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۲n + ۱\}$، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، در این صورت هر زیرمجموعهٔ $n + ۲$ عنصری از S باید حاوی دو عنصر با مجموع $۲n + ۲$ باشد.

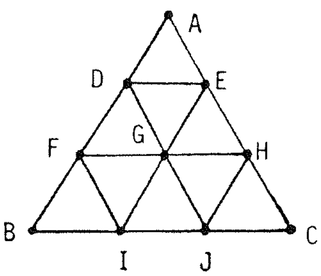
۱۰. مجموعهٔ S را به ۱۴ زیرمجموعهٔ

$$\{۳\}, \{۷, ۱۰۳\}, \{۱۱, ۹۹\}, \{۱۵, ۹۵\}, \ldots, \{۴۳, ۶۷\}, \{۴۷, ۶۳\}, \{۵۱, ۵۹\}, \{۵۵\}$$

تقسیم می‌کنیم. بنابر اصل لانه‌کبوتری، اگر دست‌کم ۱۵ عنصر از S انتخاب کنیم، باید هر دو عنصر دست‌کم یکی از این زیرمجموعه‌های دو عنصری انتخاب شوند و در این صورت مجموع آنها ۱۱۰ است.

۱۱. الف) به‌ازای هر $t \in \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰\}$ داریم $۱ \leq \sqrt{t} \leq ۱۰$. اگر ۱۱ عنصر از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰\}$ انتخاب کنیم، دست‌کم دوتا از آنها مانند x و y باید چنان باشند که $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor\sqrt{y}\rfloor$ و بنابراین، $۰ < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < ۱$.

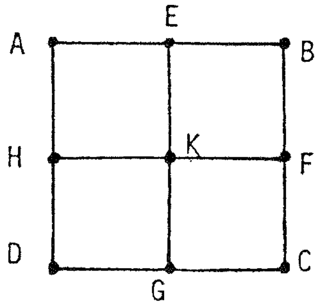
ب) فرض می‌کنیم $n \in \mathbf{Z}^+$، اگر $n + ۱$ عنصر از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n^۲\}$ انتخاب کنیم، در این صورت دست‌کم دوتا از آنها چنان‌اند که $۰ < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < ۱$.



۱۲. در مثلث ABC، هر ضلع را به سه قسمت برابر تقسیم می‌کنیم و، مطابق شکل، نُه مثلث همنهشت می‌سازیم. فرض می‌کنیم $R_۱$ درون مثلث ADE همراه با نقاط پاره‌خط DE به استثنای D و E باشد: ناحیهٔ $R_۲$ درون مثلث DFG همراه با نقاط پاره‌خطهای DG و FG به استثنای D و F است. ناحیه‌های $R_۳$، ...، $R_۹$ نیز به‌همین ترتیب تعریف می‌شوند و درنتیجه، درون ΔABC اجتماع این نه ناحیه است و به‌ازای هر $i \neq j$ داریم $R_i \cap R_j = \emptyset$. در این صورت اگر ۱۰ نقطه درون ΔABC انتخاب کنیم، دست‌کم دوتا از آنها در یکی از R_iها، $۱ \leq i \leq ۹$، قرار دارند و فاصلهٔ این دو نقطه کمتر از $\frac{۱}{۳}$ است.

۱۳. درون مربع مفروض را، مطابق شکل، به چهار مربع همنهشت کوچکتر تقسیم می‌کنیم. طول قطر هر یک از مربعهای کوچکتر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است. فرض می‌کنیم ناحیهٔ $R_۱$ عبارت باشد از درون مربع $AEKH$ همراه با نقاط پاره‌خط EK به‌استثنای نقطهٔ E، ناحیهٔ $R_۲$ درون مربع $EBFK$ همراه با نقاط پاره‌خط FK به‌استثنای نقاط

F و K است. ناحیه‌های $R_۲$ و $R_۳$ نیز به‌همین ترتیب تعریف می‌شوند. دراین صورت اگر پنج نقطه درون مربع $ABCD$ انتخاب کنیم، دست‌کم دوتا از آنها در یکی از R_iها، $۱ \leq i \leq ۴$، قرار دارند و فاصلهٔ این دو نقطه کمتر از $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ (واحد طول) است.



۱۴. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ پنج عنصری از A مانند E می‌بینیم که

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۱۵ \leq s_E \leq ۱۱۵ \leq ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵$$

و بنابراین، ۱۱۶ مقدار ممکن برای مجموعی نظیر s_E وجود دارد. چون $|A| = ۹$، تعداد زیرمجموعه‌های پنج عنصری A برابر است با $\binom{۹}{۵} = ۱۲۶$.

اکنون اگر هر یک از این ۱۲۶ زیرمجموعهٔ پنج عنصری A را یک کبوتر و هر یک از ۱۱۶ مجموع ممکن را یک لانهٔ کبوتر تلقی کنیم، نتیجهٔ موردنظر از اصل لانه کبوتری حاصل می‌شود.

۱۵. همهٔ زیرمجموعه‌هایی از S مانند A را درنظر می‌گیریم که در $۱ \leq |A| \leq ۳$ صدق کنند. چون $|S| = ۵$، تعداد این زیرمجموعه‌ها $\binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۳} = ۲۵$ است. فرض می‌کنیم s_A مجموع عنصرهای متعلق به A را نشان دهد. دراین صورت $۱ \leq s_A \leq ۷ + ۸ + ۹ = ۲۴$. بنابر اصل لانه کبوتری، دست‌کم دو زیرمجموعه از S وجود دارد که مجموع عنصرهایشان یکی است.

۱۶. به‌ازای هر یک از ۴۶ قطعهٔ مستطیل شکل مفروض، جفت مرتب (w_i, l_i) را، که در آن $۱ \leq w_i \leq l_i \leq ۹۰$ و $۱ \leq i \leq ۴۶$، درنظر می‌گیریم. اگر به‌ازای اندیسهایی مانند $۱ \leq i < j \leq ۴۶$ داشته باشیم $w_i = w_j$، بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم که $l_i \leq l_j$. فرض می‌کنیم $R_۱$ مستطیل با اندازه‌های w_i و l_i و $R_۲$ مستطیل با اندازه‌های w_j و l_j باشد. دراین صورت می‌توانیم $R_۲$ را روی $R_۱$ چنان قرار دهیم که $R_۲$ کاملاً $R_۱$ را بپوشاند. حال اگر wها متمایز باشند، می‌توانیم این ۴۶ مستطیل را چنان مرتب کنیم که $۱ \leq w_۱ < w_۲ < \cdots < w_{۴۶} \leq ۹۰$ و $w_{۴۶} \geq ۴۶$. اکنون طولهای متناظر با این مستطیلها را درنظر می‌گیریم. اگر به‌ازای اندیسی مانند $۱ \leq i \leq ۴۵$ داشته باشیم $l_i \leq l_{i+۱}$، در این صورت فرض می‌کنیم $R_۱$ مستطیل (w_i, l_i) و $R_۲$ مستطیل $(w_{i+۱}, l_{i+۱})$ باشد. به این ترتیب، شرط پوشاندن برقرار می‌شود. اگر نابرابری $l_i \leq l_{i+۱}$ به‌ازای هیچ‌یک از iها برقرار نباشد، آن‌گاه داریم $۹۰ \geq l_۱ > l_۲ > l_۳ > \cdots > l_{۴۶} \geq ۴۶$ و در این صورت ۴۶ عدد صحیح متمایز l_i، $۱ \leq i \leq ۴۶$ در مجموعهٔ $A = \{۴۶, ۴۷, ۴۸, \ldots, ۸۹, ۹۰\}$، که در آن $|A| = ۴۵$، وجود خواهد داشت.

۱۷. ۱۱ عدد صحیحی که در مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹\}$ قرار دارند دو به‌دو نسبت

به هم اول‌اند و هیچ زیرمجموعهٔ بزرگتری از $\{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$ این ویژگی را ندارد. درنتیجه، اگر ۱۲ عنصر از $\{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$ انتخاب کنیم، دست‌کم دوتا از آنها نسبت به هم اول نیستند.

۱۸. به‌ازای $1 \le i \le 42$ فرض می‌کنیم x_i تعداد کل نامه‌هایی باشد که این شخص از روز اول تا پایان روز iاُم ارسال کرده است. در این صورت $1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_{42} \le 60$ و $x_1 + 23 < x_2 + 23 < \cdots < x_{42} + 23 \le 83$. اکنون دو مجموعهٔ ۴۲ عنصری $\{x_1, x_2, \ldots, x_{42}\}$ و $\{x_1 + 23, x_2 + 23, \ldots, x_{42} + 23\}$ را داریم که هر یک از آنها از عنصرهای متمایز تشکیل شده است و عنصرهای آنها کمتر از ۱ و بیشتر از ۸۳ نیستند. بنابر اصل لانه کبوتری، دو اندیس مانند $1 \le j < i \le 42$ وجود دارد به‌طوری که $x_i = x_j + 23$. درنتیجه، $x_i - x_j = 23$.

۱۹. الف) چون $|S| \ge 3$، عنصرهایی مانند $x, y \in S$ وجود دارند به‌طوری که یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد. در هر حالت، $x + y$ زوج است.

ب) $5(= 2^2 + 1)$ پ) $9(= 2^3 + 1)$

ت) به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، فرض می‌کنیم $S = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in \mathbf{Z}^+, 1 \le i \le n\}$. اگر $|S| \ge 2^n + 1$، در این صورت S شامل دو nتایی مرتب مانند $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ است به‌طوری که، به‌ازای هر $1 \le i \le n$، $x_i + y_i$ زوج است.

ث) ۵ (مانند قسمت (ب))

۲۰. برهان: $k + 1$ عدد صحیح زیر را درنظر می‌گیریم: (۱)۳، (۲)۳۳، (۳)۳۳۳، $\cdots$ و $(k+1)$۳۳۳۰۰۰۳، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le k + 1$، عدد صحیح iاُم شامل i تا ۳ است. چون $k + 1$ عدد صحیح در اختیار داریم، از الگوریتم تقسیم و اصل لانه کبوتری نتیجه می‌شود که دوتا از این عددهای صحیح، مثلاً a و b، در تقسیم بر k باقیماندهٔ یکسان دارند. فرض می‌کنیم $a = q_1 k + r$، $b = q_2 k + r$ و $a > b$. در این صورت $a - b = (q_1 - q_2)k$ و بنابراین، $k|(a-b)$ و تنها رقمهای عدد صحیح $a - b$، ۰ و ۳ هستند. [یادداشت: عدد صحیح ۳ نقش خاصی ندارد. اگر به‌جای ۳ هر یک از رقمهای ۱، ۲، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ را بگذاریم باز هم نتیجه درست است. ولی نمی‌توانیم این نتیجه را بدون استفاده از رقم ۰ به‌دست آوریم.]

بند ۶.۵

۱.

h پوشاست $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ [به‌ازای $b \in B, d \in D$، عنصرهایی مانند $a \in A, c \in C$ وجود دارند به‌طوری که $h(a, c) = (b, d)$]

[به‌ازای هر $b \in B$ و $d \in D$، عنصرهایی مانند $a \in A, c \in C$ وجود دارند به‌طوری که $f(a) = b$ و $g(c) = d$] $\Longleftrightarrow$ (f, g پوشا هستند)

h یک به‌یک است $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ [به‌ازای هر $a, a_1 \in A, c, c_1 \in C$، $(h(a, c) = h(a_1, c_1) \Longrightarrow a = a_1, c = c_1)$]

[به‌ازای هر $a, a_1 \in A, c, c_1 \in C$، $(f(a) = f(a_1) \Longrightarrow a = a_1), (g(c) = g(c_1) \Longrightarrow c = c_1)$] $\Longleftrightarrow$ (f و g یک به‌یک‌اند)

۲. الف) $(f\circ g)(x)=3x-1$ ، $(g\circ f)(x)=3(x-1)$

$$(g\circ h)(x)=\begin{cases}0 & \text{زوج } x\\ 3 & \text{فرد } x\end{cases}\quad,\quad (h\circ g)(x)=\begin{cases}0 & \text{زوج } x\\ 1 & \text{فرد } x\end{cases}$$

$$\big(f\circ(g\circ h)\big)(x)=f\big((g\circ h)(x)\big)=\begin{cases}-1 & \text{زوج } x\\ 2 & \text{فرد } x\end{cases}$$

$$\big((f\circ g)\circ h\big)(x)=\begin{cases}(f\circ g)(0) & \text{زوج } x\\ (f\circ g)(1) & \text{فرد } x\end{cases}=\begin{cases}-1 & \text{زوج } x\\ 2 & \text{فرد } x\end{cases}$$

ب)

$f^2(x)=f\big(f(x)\big)=x-2$ ؛ $f^3(x)=x-3$ ، $g^2(x)=9x$ ؛ $g^3(x)=27x$ ؛ $h^2=h^3=h^{500}=h$

۳. $g^2(A)=g(T\cap(S\cup A))=T\cap(S\cup[T\cap(S\cup A)]=T\cap[(S\cup T)\cap(S\cup(S\cup A))]=$
$T\cap[(S\cup T)\cap(S\cup A)]=[T\cap(S\cup T)]\cap(S\cup A)=T\cap(S\cup A)=g(A)$

۴. $g\circ f=\{(1,4),(2,6),(3,10),(4,14)\}$.

۵. $9x^2-9x+3=g\big(f(x)\big)=1-(ax+b)+(ax+b)^2=a^2x^2+(2ab-a)x+(b^2-b+1)$
با مقایسهٔ ضرایب توانهای مشابه x داریم $a=3$ و $b=-1$ یا $a=-3$ و $b=2$.

۶. $f\circ g(x)=f(cx+d)=a(cx+d)+b$

$g\circ f(x)=g(ax+b)=c(ax+b)+d$

$f\circ g(x)=g\circ f(x)\iff acx+ad+b=acx+bc+d\iff ad+b=bc+d$

۷. الف) $7!$ تابع دوسویی از A به A وجود دارد که $6!$ تا از آنها در $f(1)=1$ صدق می‌کنند. بنابراین، $7!-6!=6(6!)$ تابع دوسویی مانند $f:A\to A$ وجود دارد به‌طوری که $f(1)\neq 1$.

ب) $n!-(n-1)!=(n-1)(n-1)!$

۸. الف) در اینجا f و g دارای قلمرو مشترک A و حوزهٔ مقادیر مشترک $\mathbf{R}$ هستند و به‌ازای هر $x\in A$ می‌بینیم که

$$g(x)=\frac{2x^2-8}{x+2}=\frac{2(x^2-4)}{x+2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)}=2(x-2)=2x-4=f(x)$$

درنتیجه، $f=g$.

ب) در اینجا مشکلی وجود دارد و $f\neq g$. درحقیقت، به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbf{R}$ مانند A، اگر $-2\in A$، دراین‌صورت g در A معین نیست زیرا $g(-2)=\frac{0}{0}$. [توجه کنید که به‌ازای هر $x\neq -2$، $\frac{x^2-4}{x+2}=x-2$.]

۹. الف) $(b,a)\in(R_1\cup R_2)^c\iff(a,b)\in R_1\cup R_2\iff\big((a,b)\in R_1$ یا $(a,b)\in R_2\big)\iff$
$\big((b,a)\in R_1^c$ یا $(b,a)\in R_2^c\big)\iff(b,a)\in R_1^c\cup R_2^c$

ب) برهان این قسمت مشابه برهان قسمت (الف) است.

پ) به‌ازای هر $(a,b) \in A \times B$،

$$(a,b) \in R_1 \iff (b,a) \in R_1^c \iff (a,b) \in (R_1^c)^c$$

بنابراین، $R_1 = (R_1^c)^c$.

۱۰. الف) $f^{-1} = \{(x,y) | 2y + 3x = 7\}$

ب) $f^{-1} = \{(x,y) | ay + bx = c,\ b \neq 0,\ a \neq 0\}$

پ) $f^{-1} = \{(x,y) | y = x^{1/3}\} = \{(x,y) | x = y^3\}$

ت) در اینجا $f(-1) = f(0) = 0$ و بنابراین، f یک به‌یک نیست. درنتیجه، f وارون‌پذیر نیست.

۱۱. الف) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\ln x - 5)$

ب) به‌ازای $x \in \mathbf{R}^+$،

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{1}{2}(\ln x - 5)\right) = e^{2((1/2)(\ln x - 5)) + 5} = e^{\ln x - 5 + 5}$$
$$= e^{\ln x} = x$$

به‌ازای $x \in \mathbf{R}$،

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(e^{2x+5}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(e^{2x+5}) - 5\right] = \frac{1}{2}(2x + 5 - 5) = x$$

۱۲. الف) $f^{-1}(x) = -x$

ب) $f^{-1}(x,y) = (y,x)$

پ) $f^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{5}, \ln y\right)$

۱۳. $\Longrightarrow$ (هر یک از دو تابع f, g هم یک به‌یک است هم‌پوشا) $\Longrightarrow$ (f, g وارون‌پذیرند)

($g \circ f$ وارون‌پذیر است) $\Longleftarrow$ ($g \circ f$ یک به‌یک و پوشاست)

چون $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_C$ و $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_A$، $f^{-1} \circ g^{-1}$ یک وارون $g \circ f$ است. با توجه به یکتایی وارون، $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

۱۴. الف) $f^{-1}(\{2\}) = \{a \in A | f(a) \in \{2\}\} = \{a \in A | f(a) = 2\} = \{1\}$

ب) $f^{-1}(\{6\}) = \{a \in A | f(a) \in \{6\}\} = \{a \in A | f(a) = 6\} = \{2,3,5\}$

پ) با توجه به $f(5) = f(3) = f(2) = 6$ و $f(6) = f(4) = 8$ داریم

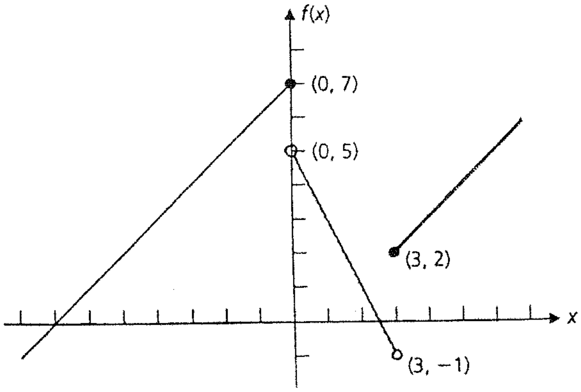
$$f^{-1}(\{6,8\}) = \{a \in A | f(a) \in \{6,8\}\} = \{a \in A | f(a) = 6 \text{ یا } f(a) = 8\} = \{2,3,4,5,6\}$$

ت) با توجه به $f^{-1}(\{10\}) = \emptyset$ داریم $f^{-1}(\{6,8,10\}) = \{2,3,4,5,6\} = f^{-1}(\{6,8\})$

ث) $f^{-1}(\{6,8,10,12\}) = \{2,3,4,5,6,7\}$

ج) $f^{-1}(\{10,12\}) = \{7\}$

.۱۵



الف) $f^{-۱}(-۱۰) = \{x \in \mathbf{R} | x + ۷ = -۱۰ \text{ و } x \leq ۱۰\} = \{-۱۷\}$ ، $f^{-۱}(۰) = \left\{-۷, \frac{۵}{۲}\right\}$، $f^{-۱}(۴) = \left\{-۳, \frac{۱}{۲}, ۵\right\}$، $f^{-۱}(۶) = \{-۱, ۷\}$، $f^{-۱}(۷) = \{۰, ۸\}$ و $f^{-۱}(۸) = \{۹\}$.

ب) (یک)

$$f^{-۱}([-۵, -۱]) = \{x \in \mathbf{R} | -۵ \leq x + ۷ \leq -۱ \text{ و } x \leq ۰\} \cup$$
$$\{x \in \mathbf{R} | -۵ \leq -۲x + ۵ \leq -۱ \text{ و } ۰ < x < ۳\} \cup \{x \in \mathbf{R} | -۵ \leq x - ۱ \leq -۱ \text{ و } ۳ \leq x\} =$$
$$\{x \in \mathbf{R} | -۱۲ \leq x \leq -۸ \text{ و } x \leq ۰\} \cup \{x \in \mathbf{R} | ۳ \leq x \leq ۵ \text{ و } ۰ < x < ۳\}$$
$$\cup \{x \in \mathbf{R} | -۴ \leq x \leq ۰ \text{ و } ۳ \leq x\} = [-۱۲, -۸] \cup \emptyset \cup \emptyset = [-۱۲, -۸]$$

(دو) $f^{-۱}([-۵, ۰]) = [-۱۲, -۷] \cup \left[\frac{۵}{۲}, ۳\right)$

(سه)

$$f^{-۱}([-۲, ۴]) = \{x \in \mathbf{R} | -۲ \leq x + ۷ \leq ۴ \text{ و } x \leq ۰\} \cup$$
$$\{x \in \mathbf{R} | -۲ \leq -۲x + ۵ \leq ۴ \text{ و } ۰ < x < ۳\} \cup$$
$$\{x \in \mathbf{R} | -۲ \leq x - ۱ \leq ۴ \text{ و } ۳ \leq x\} = \{x \in \mathbf{R} | -۹ \leq x \leq -۳ \text{ و } x \leq ۰\} \cup$$
$$\{x \in \mathbf{R} | \frac{۱}{۲} \leq x \leq \frac{۷}{۲} \text{ و } ۰ < x < ۳\} \cup \{x \in \mathbf{R} | -۱ \leq x \leq -۵ \text{ و } ۳ \leq x\} =$$
$$[-۹, -۳] \cup [۱/۲, ۳) \cup [۳, ۵] = [-۹, -۳] \cup [۱/۲, ۵]$$

(چهار) $f^{-۱}((۵, ۱۰)) = (-۲, ۰] \cup (۶, ۱۱)$

(پنج)

$$f^{-۱}([۱۱, ۱۷)) = \{x \in \mathbf{R} | ۱۱ \leq x + ۷ < ۱۷ \text{ و } x \leq ۰\} \cup$$
$$\{x \in \mathbf{R} | ۱۱ \leq -۲x + ۵ < ۱۷ \text{ و } ۰ < x < ۳\} \cup$$

$\{x \in \mathbf{R} | ۱۱ \le x - ۱ < ۱۷ \text{ و } ۳ \le x\} = \{x \in \mathbf{R} | ۴ \le x < ۱۰ \text{ و } x \le ۰\} \cup$

$\{x \in \mathbf{R} | -۶ < x \le -۳ \text{ و } ۰ < x < ۳\} \cup \{x \in \mathbf{R} | ۱۲ \le x < ۱۸ \text{ و } ۳ \le x\} =$

$\emptyset \cup \emptyset \cup [۱۲, ۱۸) = [۱۲, ۱۸)$

۱۶. الف) $\{-۱, ۰, ۱\}$ ب) $\{-۱, ۰, ۱\}$ پ) $[-۱, ۱]$

ت) $(-۱, ۱)$ ث) $[-۱, ۱]$ ج) $[-۲, ۲]$

چ) $[-۳, -۲] \cup [-۱, ۱] \cup [۲, ۳]$

ح) $(-۳, -۲) \cup [-۱, ۰) \cup (۰, ۱] \cup (۲, ۳)$، $[-۲, -۱]$، $[-۵, -۲)$، $[-۱, ۰)$.

۱۷. چون $f^{-1}(\{۶, ۷, ۸\}) = \{۱, ۲\}$، برای هر یک از دو عنصر $f(۱)$ و $f(۲)$ سه انتخاب وجود دارد که عبارت‌اند از ۶، ۷ یا ۸. علاوه‌براین، $۳, ۴, ۵ \notin f^{-1}(\{۶, ۷, ۸\})$ و بنابراین، $۳, ۴, ۵ \in f^{-1}(\{۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲\})$ و برای هر یک از عنصرهای $f(۳)$، $f(۴)$ و $f(۵)$ چهار انتخاب داریم. بنابراین، با توجه به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۳^۲ \times ۴^۳ = ۵۷۶$ تابع مانند $f : A \to B$ وجود دارند که در $f^{-1}(\{۶, ۷, ۸\}) = \{۱, ۲\}$ صدق می‌کنند.

۱۸. الف) $[۰, ۲)$ ب) $[-۱, ۲)$ پ) $[۰, ۱)$

ت) $[۰, ۲)$ ث) $[-۱, ۲)$ ج) $[۰, ۲)$

چ) $[-۱, ۳)$ ح) $[-۱, ۰) \cup [۲, ۴)$

۱۹. الف) برد f مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴, \ldots\} = \mathbf{Z}^+ - \{۱\}$ است.

ب) چون ۱ در برد f قرار ندارد، این تابع پوشا نیست.

پ) به‌ازای هر $x, y \in \mathbf{Z}^+$ داریم

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x + ۱ = y + ۱ \Longrightarrow x = y$$

بنابراین، f یک به‌یک است.

ت) برد g مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ است.

ث) چون $g(\mathbf{Z}^+)$ برابر است با $\mathbf{Z}^+$، یعنی حوزهٔ مقادیر g این تابع پوشاست.

ج) در اینجا $g(۲) = ۱ = g(۱)$ و $۲ \neq ۱$. بنابراین، g یک به‌یک نیست.

چ) به‌ازای هر $x \in \mathbf{Z}^+$ داریم

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x + ۱) = \max\{۱, (x + ۱) - ۱\} = \max\{۱, x\} = x$$

بنابراین، $g \circ f = ۱_{\mathbf{Z}^+}$.

ح)

$$(f \circ g)(۲) = f(\max\{۱, ۱\}) = f(۱) = ۱ + ۱ = ۲$$

$$(f \circ g)(۳) = f(\max\{۱, ۲\}) = f(۲) = ۲ + ۱ = ۳$$

$$(f \circ g)(۴) = f(\max\{۱, ۳\}) = f(۳) = ۳ + ۱ = ۴$$

$$(f \circ g)(۷) = f(\max\{۱, ۶\}) = f(۶) = ۶ + ۱ = ۷$$

$$(f\circ g)(۱۲) = f(\max\{۱, ۱۱\}) = f(۱۱) = ۱۱ + ۱ = ۱۲$$

$$(f\circ g)(۲۵) = f(\max\{۱, ۲۴\}) = f(۲۴) = ۲۴ + ۱ = ۲۵$$

خ) خیر، زیرا توابع f و g وارون یکدیگر نیستند. محاسبات قسمت (ح) ممکن است چنین القا کنند که $f\circ g = ۱_{\mathbf{Z}^+}$، چراکه به‌ازای هر $x \geq ۲$ داریم $(f\circ g)(x) = x$. ولی می‌بینیم که

$$(f\circ g)(۱) = f(\max\{۱, ۰\}) = f(۱) = ۲$$

و بنابراین، $(f\circ g)(۱) \neq ۱$. درنتیجه، $f\circ g \neq ۱_{\mathbf{Z}^+}$.

۲۰. الف) $f(۱,۳) = ۴ = f(۲,۲)$ و $(۱,۳) \neq (۲,۲)$. بنابراین، f یک به‌یک نیست.

$g(۱,۴) = ۴ = g(۲,۲)$ و $(۱,۴) \neq (۲,۲)$. بنابراین، g یک به‌یک نیست.

$h(۱,۲) = ۱ = h(۱,۳)$ و $(۱,۲) \neq (۱,۳)$. بنابراین، h یک به‌یک نیست.

$k(۱,۲) = ۳ = k(۲,۳)$ و $(۱,۳) \neq (۲,۳)$. بنابراین، k یک به‌یک نیست.

ب) $f^{-۱}(-۱) = \emptyset$ و بنابراین، f پوشا نیست.

به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $g(۱,n) = h(n,n) = k(n,n) = n$ و بنابراین، هر سه تابع g، h و k پوشا هستند.

پ) با توجه به نتایج قسمت (الف) می‌بینیم که هیچ‌یک از توابع f، g، h یا k وارون‌پذیر نیست.

ت)

$$f^{-۱}(۳) = \{(۱,۲), (۲,۱)\}$$

$$f^{-۱}(۴) = \{(۱,۳), (۲,۲), (۳,۱)\}$$

$$f^{-۱}(۵) = \{(۱,۴), (۲,۳), (۳,۲), (۴,۱)\}$$

$$g^{-۱}(۴) = \{(۱,۴), (۲,۲), (۴,۱)\}$$

$$g^{-۱}(۶) = \{(۱,۶), (۲,۳), (۳,۲), (۶,۱)\}$$

$$g^{-۱}(۷) = \{(۱,۷), (۷,۱)\}$$

$$g^{-۱}(۸) = \{(۱,۸), (۲,۴), (۴,۲), (۸,۱)\}$$

$$g^{-۱}(۱۶) = \{(۱,۱۶), (۲,۸), (۴,۴), (۸,۲), (۱۶,۱)\}$$

ث) به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ نتیجه می‌شود که $\left|f^{-۱}(n)\right| = n - ۱$.

ج) به‌ازای عدد اول p، $g^{-۱}(p) = \{(۱,p), (p,۱)\}$ و بنابراین، $\left|g^{-۱}(p)\right| = ۲$.

$$g^{-۱}(p^۲) = \{(۱,p^۲), (p,p), (p^۲,۱)\}$$

و درنتیجه، $\left|g^{-۱}(p^۲)\right| = ۳$. به‌طورکلی، به‌ازای $m \in \mathbf{Z}^+$ داریم $\left|g^{-۱}(p^m)\right| = m + ۱$.

چ) $g^{-۱}(p^m q^n) = \{(p^a q^b, p^{m-a} q^{n-b}) \mid a,b \in \mathbf{N}, ۰ \leq a \leq m, ۰ \leq b \leq n\}$ و بنابراین، $\left|g^{-۱}(p^m q^n)\right| = (m+۱)(n+۱)$.

ح) مجموعهٔ $h^{-۱}(۴)$ نامتناهی است، همان‌طورکه، به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $h^{-۱}(n)$ مجموعه‌ای نامتناهی است.

خ) $k^{-1}(4) = \{(a,b) | b \leq a = 4$ یا $a \leq b = 4\}$ و در نتیجه، $|k^{-1}(4)| = 4 + 4 - 1 = 7$. به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ داریم $|k^{-1}(n)| = n + n - 1 = 2n - 1$.

۲۱. الف) $f(\emptyset, \emptyset) = \emptyset = f(\emptyset, \{1\})$ و $(\emptyset, \{1\}) \neq (\emptyset, \emptyset)$. بنابراین، f یک به‌یک نیست.

$g(\{1\}, \{2\}) = \{1, 2\} = g(\{1, 2\}, \{2\})$ و $(\{1, 2\}, \{2\}) \neq (\{1\}, \{2\})$. بنابراین، g یک به‌یک نیست. $h(\{1\}, \{2\}) = \{1, 2\} = h(\{2\}, \{1\})$ و $(\{2\}, \{1\}) \neq (\{1\}, \{2\})$. بنابراین، h یک به‌یک نیست.

ب) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ مانند A داریم $f(A, A) = g(A, A) = h(A, \emptyset) = A$. بنابراین، هر یک از سه تابع f، g و h پوشاست.

پ) با توجه به نتایج قسمت (الف) می‌بینیم که هیچ‌یک از این توابع وارون‌پذیر نیست.

ت) هر یک از مجموعه‌های $f^{-1}(\emptyset)$، $h^{-1}(\emptyset)$، $f^{-1}(\{1\})$، $h^{-1}(\{3\})$، $f^{-1}(\{4, 7\})$ و $h^{-1}(\{5, 9\})$ نامتناهی است.

ث) $g^{-1}(\emptyset) = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ و بنابراین، $\left|g^{-1}(\emptyset)\right| = 1$.

از $g^{-1}(\{2\}) = \{(\emptyset, \{2\}, (\{2\}, \emptyset), (\{2\}, \{2\})\}$ نتیجه می‌شود $\left|g^{-1}(\{2\})\right| = 3$.

$\left|g^{-1}(\{8, 12\})\right| = 9$.

۲۲. اگر f یک به‌یک و $b \in B$ در برد f باشد، دراین‌صورت عنصر یکتایی مانند $a \in A$ وجود دارد به‌طوری که $f(a) = b$ و $\left|f^1(b)\right| = 1$. اگر $b \in B$ در برد f نباشد، دراین‌صورت $\left|f^{-1}(b)\right| = 0$. درنتیجه، به‌ازای هر $b \in B$ داریم $\left|f^{-1}(b)\right| \leq 1$. برعکس، اگر f یک به‌یک نباشد، عنصرهایی مانند $x, y \in A$، $x \neq y$، وجود دارند به‌طوری که $f(x) = f(y) = b$. درنتیجه، $\left|f^{-1}(b)\right| > 1$.

۲۳. الف) $a \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Longleftrightarrow f(a) \in B_1 \cap B_2 \Longleftrightarrow \big(f(a) \in B_1$ و $f(a) \in B_2\big) \Longleftrightarrow$

$\big(a \in f^{-1}(B_1)$ و $a \in f^{-1}(B_2)\big) \Longleftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

پ) $a \in f^{-1}(\overline{B_1}) \Longleftrightarrow f(a) \in \overline{B_1} \Longleftrightarrow f(a) \notin B_1 \Longleftrightarrow a \notin f^{-1}(B_1) \Longleftrightarrow a \in \overline{f^{-1}(B_1)}$

۲۴. الف) (یک) $f(x) = 2x$

(دو) $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$

ب) خیر. مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ متناهی نیست.

۲۵. الف) فرض کنیم $x_1, x_2 \in \mathbf{Z}$ و $f(x_1) = f(x_2)$. در این صورت، یا هر دو عدد $f(x_1)$ و $f(x_2)$ زوج‌اند یا هر دو فرد. اگر هر دو زوج باشند، در این صورت

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow -2x_1 = -2x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

در غیر این صورت، هر دو عدد $f(x_1)$ و $f(x_2)$ فردند و

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Longrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

در نتیجه، تابع f یک به‌یک است.

برای اثبات اینکه f تابعی پوشاست، فرض می‌کنیم $n \in \mathbf{N}$. اگر n زوج باشد، دراین صورت $-\frac{n}{۲} \in \mathbf{Z}$، $-\frac{n}{۲} < ۰$ و $f\left(-\frac{n}{۲}\right) = -۲\left(-\frac{n}{۲}\right) = n$. در حالتی که n فرد است، می‌بینیم که $\frac{n+۱}{۲} \in \mathbf{Z}$، $\frac{n+۱}{۲} > ۰$ و

$$f\left(\frac{n+۱}{۲}\right) = ۲\left(\frac{n+۱}{۲}\right) - ۱ = (n+۱) - ۱ = n$$

بنابراین، f پوشاست.

ب) $f^{-۱} : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{-۱}(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(x+۱) & x = ۱, ۳, ۵, ۷, \ldots \\ -\frac{x}{۲} & x = ۰, ۲, ۴, ۶, \ldots \end{cases}$$

۲۶. از قضیهٔ ۵ ۰ ۱۰ نتیجه می‌شود که !۵ تابع وارون‌پذیر مانند $f : A \to B$ وجود دارد.

۲۷. الف) به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $(g\circ f)(n) = (h\circ f)(n) = (k\circ f)(n) = n$.

ب) نتایج قسمت (الف) قضیهٔ ۵ ۰ ۷ را نقض نمی‌کنند. زیرا با وجود $g\circ f = h\circ f = k\circ f = ۱_{\mathbf{N}}$، ملاحظه می‌کنیم که

(یک) $(f\circ g)(۱) = f(\lfloor ۱/۳ \rfloor) = f(۰) = ۳ \times ۰ = ۰ \neq ۱$ و بنابراین، $f\circ g \neq ۱_{\mathbf{N}}$،

(دو) $(f\circ h)(۱) = f(\lfloor ۲/۳ \rfloor) = f(۰) = ۳ \times ۰ = ۰ \neq ۱$ و بنابراین، $f\circ h \neq ۱_{\mathbf{N}}$؛

(سه) $(f\circ k)(۱) = f(\lfloor ۳/۳ \rfloor) = f(۱) = ۳ \times ۱ = ۳ \neq ۱$ و بنابراین، $f\circ k \neq ۱_{\mathbf{N}}$.

درنتیجه، هیچ‌یک از توابع g، h و k وارون f نیست. (گذشته از این، چون f پوشا نیست، وارون‌پذیر هم نیست.)

۲۸. الف) اگر $c \in C$، عنصری مانند $a \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $(g\circ f)(a) = c$. دراین صورت $g\big(f(a)\big) = c$، که در آن $f(a) \in B$. بنابراین، g پوشاست.

ب) فرض می‌کنیم $x, y \in A$. چون $g\circ f$ یک به‌یک است، داریم

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big) \Longrightarrow (g\circ f)(x) = (g\circ f)(y) \Longrightarrow x = y$$

بند ۷.۵

۱. الف) $f \in O(n)$ ب) $f \in O(۱)$ پ) $f \in O(n^۳)$

ت) $f \in O(n^۲)$ ث) $f \in O(n^۳)$ ج) $f \in O(n^۲)$

چ) $f \in O(n^۲)$

۲. در تعریف ۵ ۰ ۲۳، فرض می‌کنیم $m = ۱$ و $k = ۱$. در این صورت،

$$\forall n \geq k, |f(n)| = n < n + \frac{۱}{n} = |g(n)|$$

بنابراین، $f \in O(g)$.

اکنون فرض می‌کنیم $m = ۲$ و $k = ۱$. در این صورت،

$$\forall n \geq k, |g(n)| = n + \frac{۱}{n} \leq n + n = ۲n = ۲|f(n)|$$

بنابراین، $g \in O(f)$.

۳. الف) به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $۰ \leq \log_۲ n < n$. بنابراین، در تعریف ۲۳۰۵ فرض می‌کنیم $k = ۱$ و $m = ۲۰۰$. در این صورت،

$$|f(n)| = ۱۰۰ \log_۲ n = ۱۰۰ \left(\frac{۱}{۲} \log_۲ n\right) < ۲۰۰ \left(\frac{۱}{۲n}\right) = ۲۰۰|g(n)|$$

بنابراین، $f \in O(g)$.

ب) به‌ازای $n = ۶$ داریم $۲^{۲n} - ۱۰۰۰ = ۲^{۱۲} - ۱۰۰۰ = ۴۰۹۶ - ۱۰۰۰ = ۳۰۹۶ > ۶۴ = ۲^n$. اگر به‌ازای $n = k \geq ۶$، نابرابری $۲^{۲k} - ۱۰۰۰ > ۲^k$ را مفروض بگیریم، می‌بینیم که

$$۲ < ۲^۲ \Longrightarrow ۲(۲^k) < ۲^۲(۲^{۲k} - ۱۰۰۰) < ۲^۲ \times ۲^{۲k} - ۱۰۰۰$$

یا $۲^{k+۱} < ۲^{۲(k+۱)} - ۱۰۰۰$ و بنابراین، به‌ازای هر $n \geq ۶$ داریم $f(n) < g(n)$. بنابراین، اگر در تعریف ۲۳۰۵ فرض کنیم $k = ۶$ و $m = ۱$، می‌بینیم که به‌ازای $n \geq k$ داریم $|f(n)| \leq m|g(n)|$ و در نتیجه $f \in O(g)$.

پ) به‌ازای هر $n \geq ۴$ داریم $n^۲ \leq ۲^n$. (می‌توان با استفاده از استقرای ریاضی برهان دقیقی برای این گزاره به‌دست داد.) اکنون در تعریف ۲۳۰۵ فرض می‌کنیم $k = ۴$ و $m = ۳$. در این صورت، به‌ازای هر $n \geq k$ داریم $|f(n)| = ۳n^۲ \leq ۳(۲^n) < ۳(۲^n + ۲n) = m|g(n)|$ و در نتیجه، $f \in O(g)$.

۴. فرض می‌کنیم $m = ۱۱$ و $k = ۱$. در این صورت،

$$\forall n \geq k,\ |f(n)| = n + ۱۰۰ \leq ۱۱n^۲ = m|g(n)|$$

بنابراین، $f \in O(g)$. از طرف دیگر، به‌ازای هر $m \in \mathbf{R}^+$ و هر $k \in \mathbf{Z}^+$ عدد n را چنان انتخاب می‌کنیم که $n > \max\{k, ۱۰۰ + m\}$. در این صورت

$$n^۲ > (۱۰۰ + m)n = ۱۰۰n + mn > ۱۰۰m + mn = m(۱۰۰ + n) = m|f(n)|$$

و بنابراین، $g \notin O(f)$.

۵. برای اثبات اینکه $f \in O(g)$، در تعریف ۲۳۰۵ فرض می‌کنیم $k = ۱$ و $m = ۴$. در این صورت به‌ازای هر $n \geq k$ داریم

$$|f(n)| = n^۲ + n \leq n^۲ + n^۲ = ۲n^۲ \leq ۲n^۳ = ۴\left(\frac{۱}{۲}\right)(n^۳) = ۴|g(n)|$$

و در نتیجه، f مغلوب g است.

برای اثبات اینکه $g \notin O(f)$، ایدهٔ ارائه شده در مثال ۶۶۰۵ را به‌کار می‌بریم، یعنی ثابت می‌کنیم که

$$\forall m \in \mathbf{R}^+ \forall k \in \mathbf{Z}^+ \exists n \in \mathbf{Z}^+ \left[(n \geq k) \wedge (|g(n)| > m|f(n)|)\right)$$

بنابراین، به‌ازای هر مقدار m و k عدد زوج n را چنان انتخاب می‌کنیم که $n > \max\{k, m\}$. دراین صورت،

$$n = |g(n)| > m = m \times ۱ = m|f(n)|$$

و درنتیجه، $g \notin O(f)$.

۷. به‌ازای هر $n \geq ۱$ داریم $\log_۲ n \leq n$ و بنابراین، اگر در تعریف ۵ $\cdot$ ۲۳ فرض کنیم $k = ۱$ و $m = ۱$، آن‌گاه

$$|g(n)| = \log_۲ n \leq n = m \cdot n = m|f(n)|$$

بنابراین، $g \in O(f)$.

برای اثبات اینکه $f \notin O(g)$، نخست ملاحظه می‌کنیم که $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log_۲ n} = +\infty$. (می‌توان این نتیجه را با استفاده از قاعدهٔ لوپیتال در حساب دیفرانسیل و انتگرال ثابت کرد.) چون $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log_۲ n} = +\infty$، می‌بینیم که به‌ازای هر $m \in \mathbf{R}^+$ و هر $k \in \mathbf{Z}^+$، عددی مانند $n \in \mathbf{Z}^+$ وجود دارد به‌طوری که $\frac{n}{\log_۲ n} > m$ یا

$$|f(n)| = n > m \log_۲ n = m|g(n)|$$

بنابراین، $f \notin O(g)$.

۸.

$$f \in O(g) \Longrightarrow \exists m_۱ \in \mathbf{R}^+ \ \exists k_۱ \in \mathbf{Z}^+ \ \forall n \geq k_۱ |f(n)| \leq m_۱|g(n)|$$
$$g \in O(h) \Longrightarrow \exists m_۲ \in \mathbf{R}^+ \ \exists k_۲ \in \mathbf{Z}^+ \ \forall n \geq k_۲ |g(n)| \leq m_۲|h(n)|$$

بنابراین، به‌ازای هر $n \geq \max\{k_۱, k_۲\}$ داریم

$$|f(n)| \leq m_۱|g(n)| \leq m_۱ m_۲|h(n)|$$

و در نتیجه، $f \in O(h)$.

۹. چون $f \in O(g)$، عددهایی مانند $m \in \mathbf{R}^+$ و $k \in \mathbf{Z}^+$ وجود دارند به‌طوری که، به‌ازای هر $n \geq k$، داریم $|f(n)| \leq m|g(n)|$. دراین صورت، به‌ازای هر $n \geq k$ خواهیم داشت $|f(n)| \leq \left(\frac{m}{|c|}\right) |cg(n)|$ و بنابراین، $f \in O(cg)$.

۱۰. الف) در تعریف ۵ $\cdot$ ۲۳ فرض کنید $k = ۱$ و $m = ۱$.

ب) اگر $h \in O(f)$ و $f \in O(g)$، دراین صورت بنابر تمرین ۸ داریم $h \in O(g)$. به‌همین ترتیب، اگر $h \in O(g)$ و $g \in O(f)$، دراین صورت، باز هم بنابر تمرین ۸، $h \in O(f)$.

پ) این قسمت از قسمتهای (الف) و (ب) نتیجه می‌شود.

بند ۸.۵

۱. الف) $f \in O(n^۲)$ ب) $f \in O(n^۳)$ پ) $f \in O(n^۲)$

ت) $f \in O(\log_۲ n)$ ث) $f \in O(n \log_۲ n)$

۲. الف) $f \in O(n)$ ب) $f \in O(n)$

۳. الف) در قطعه برنامهٔ پاسکال زیر، مقدار عدد صحیح n و مقادیر درایه‌های $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، . . .، $A[n]$ قبلاً تعیین شده‌اند. همچنین، متغیرهای i، max و Location که در اینجا به‌کار رفته‌اند متغیرهایی صحیح‌اند.

```
Begin
    Max := A[1];
    Location := 1;
    If n = 1 then
        Begin
            Writeln ('The first occurrence of the maximum ');
            Write ('entry in the array is at position 1.')
        End;
    If n > 1 then
        Begin
            For i := 2 to n do
                If Max < A[i] then
                    Begin
                        Max := A[i];
                        Location := i
                    End;
                Writeln (' The first occurrence of the maximum ');
                Write (' entry in the array is at position ', i:0, '.')
        End
End;
```

ب) اگر مانند تمرین ۲، تابع پیچیدگی بدترین حالت، یعنی $f(n)$، را برابر با تعداد دفعاتی تعریف کنیم که مقایسهٔ $\text{Max} < A[i]$ اجرا می‌شود، دراین صورت به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ داریم $f(n) = n - ۱$ و در نتیجه، $f \in O(n)$.

۴. الف) در قطعه برنامهٔ پاسکال زیر، مقدار عدد صحیح n و مقادیر درایه‌های $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، . . .، $A[n]$ قبلاً در برنامه تعیین شده‌اند. همچنین، متغیرهای i، Max و Min که در اینجا به‌کار رفته‌اند متغیرهایی صحیح‌اند.

```
Begin
    Min := A[1];
    Max := A[1];
    For i := 2 to n do

        Begin
            If A[i] < Min then
                Min := A[i];
            If A[i] > Max then
                Max := A[i];
        End;
    Writeln ('The minimum value in the array is ', Min :0);
    Write (' and the maximum value is ', Max:0, '.')
End;
```

ب) در اینجا تابع پیچیدگی بدترین حالت، یعنی $f(n)$، را برابر با تعداد مقایسه‌های اجرا شده در حلقهٔ For

تعریف می‌کنیم. درنتیجه، به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ داریم $f(n) = ۲(n - ۱)$ و بنابراین، $f \in O(n)$.

۵. الف) در اینجا پنج جمع و $۲۰ = (۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲)$ ضرب وجود دارد.

ب) در حالت کلی، n جمع و

$$[۲ + ۳ + ۴ + \cdots + n + (n + ۱)] = \frac{(n + ۱)(n + ۲)}{۲} - ۱ = \frac{n(n + ۳)}{۲}$$

ضرب وجود دارد.

۶. الف) برای هر تکرار حلقهٔ For، یک جمع و یک ضرب وجود دارد. بنابراین، روی‌هم پنج جمع و پنج ضرب وجود دارد.

ب) در حالت کلی، n جمع و n ضرب وجود دارد.

۷. برهان: به‌ازای $n = ۱$ می‌بینیم که $a_۱ = ۰ = \lfloor ۰ \rfloor = \lfloor \log_۲ ۱ \rfloor$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت درست است.

اکنون فرض می‌کنیم این نتیجه به‌ازای هر k ، $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، که در آن $k \geq ۱$، درست باشد و حالت مربوط به $n = k + ۱$ را درنظر می‌گیریم.

(یک) $n = k + ۱ = ۲^m$، که در آن $m \in \mathbf{Z}^+$: در این صورت

$$\begin{aligned} a_n &= ۱ + a_{\lfloor n/۲ \rfloor} = ۱ + a_{۲^{m-۱}} = ۱ + \lfloor \log_۲ ۲^{m-۱} \rfloor = ۱ + (m - ۱) \\ &= m = \lfloor \log_۲ ۲^m \rfloor = \lfloor \log_۲ n \rfloor \end{aligned}$$

(دو) $n = k + ۱ = ۲^m + r$، که در آن $m \in \mathbf{Z}^+$ و $۰ < r < ۲^m$: در این صورت $۲^m < n < ۲^{m+۱}$ و بنابراین،

$$۲^{m-۱} < \frac{n}{۲} < ۲^m \quad (۱)$$

$$۲^{m-۱} = \lfloor ۲^{m-۱} \rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor < \lfloor ۲^m \rfloor = ۲^m \quad (۲)$$

$$m - ۱ = \log_۲ ۲^{m-۱} \leq \log_۲ \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor < \log_۲ ۲^m = m \quad (۳)$$

درنتیجه، $\left\lfloor \log_۲ \lfloor n/۲ \rfloor \right\rfloor = m - ۱$ و

$$a_n = ۱ + a_{\lfloor n/۲ \rfloor} = ۱ + \left\lfloor \log_۲ \lfloor n/۲ \rfloor \right\rfloor = ۱ + (m - ۱) = m = \lfloor \log_۲ n \rfloor$$

بنابراین، از اصل استقرای قوی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ داریم $a_n = \lfloor \log_۲ n \rfloor$.

۸. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $a_n = \lceil \log_۲ n \rceil$.

برهان: وقتی $n = ۱$ داریم $a_۱ = ۰ = \lceil ۰ \rceil = \lceil \log_۲ ۱ \rceil$ و به این ترتیب، مرحلهٔ پایه برقرار می‌شود. برای مرحلهٔ استقرایی، فرض می‌کنیم این نتیجه به‌ازای هر k ، $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ (که در آن $k \geq ۱$) درست باشد و آن را به‌ازای $n = k + ۱$ بررسی می‌کنیم.

(یک) $n = k + ۱ = ۲^m$، که در آن $m \in \mathbf{Z}^+$: در این صورت

$$\begin{aligned} a_n &= ۱ + a_{\lceil n/۲ \rceil} = ۱ + a_{۲^{m-۱}} = ۱ + \lceil \log_۲ ۲^{m-۱} \rceil = ۱ + (m - ۱) \\ &= m = \lceil \log_۲ ۲^m \rceil = \lceil \log_۲ n \rceil \end{aligned}$$

(دو) $n = k + ۱ = ۲^m + r$، که در آن $m \in \mathbf{Z}^+$ و $۰ < r < ۲^m$: دراین صورت $۲^m < n < ۲^{m+۱}$

و می‌بینیم که

$$(۱) \quad ۲^{m-۱} < \frac{n}{۲} < ۲^m$$

$$(۲) \quad ۲^{m-۱} = \lceil ۲^{m-۱} \rceil < \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil \leq \lceil ۲^m \rceil = ۲^m$$

$$(۳) \quad m - ۱ = \log_۲ ۲^{m-۱} < \log_۲ \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil \leq \log_۲ ۲^m = m$$

بنابراین، $\left\lceil \log_۲ \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil \right\rceil = m$ و $a_n = ۱ + a_{\lceil n/۲ \rceil} = ۱ + \left\lceil \log_۲ \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil \right\rceil = ۱ + m = \lceil \log_۲ n \rceil$، زیرا

$$۲^m < n < ۲^{m+۱} \Longrightarrow \log_۲ ۲^m = m < \log_۲ n < m + ۱ = \log_۲ ۲^{m+۱}$$

$$\Longrightarrow m < \lceil \log_۲ n \rceil = m + ۱$$

به این ترتیب، از اصل استقرای قوی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ داریم $a_n = \lceil \log_۲ n \rceil$.

تمرینات تکمیلی

۱. الف) (یک) اگر A یا B تهی باشد، دراین صورت $A \times B = \emptyset = A \cap B$ و درنتیجهٔ موردنظر درست است. اگر A و B ناتهی باشند می‌بینیم که

$$(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A) \Longrightarrow \big((x, y) \in B \times A \text{ و } (x, y) \in A \times B\big) \Longrightarrow$$

$$\big((y \in B \text{ و } x \in A) \text{ و } (y \in A \text{ و } x \in B)\big) \Longrightarrow \big(y \in A \cap B \text{ و } x \in A \cap B\big) \Longrightarrow$$

$$(x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B) \text{ و } (x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B) \Longrightarrow$$

$$\big((y \in B \text{ و } y \in A) \text{ و } (x \in B \text{ و } x \in A)\big) \Longrightarrow \big((x, y) \in B \times A \text{ و } (x, y) \in A \times B\big) \Longrightarrow$$

$$(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$$

در نتیجه، $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$

(دو) اگر A یا B تهی باشد، دراین صورت $A \times B = \emptyset = B \times A$ و نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود. اگر A و B ناتهی باشند، فرض می‌کنیم $(x, y) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. دراین صورت

$$(x, y) \in (A \times B) \cup (B \times A) \Longrightarrow \big((x, y) \in (B \times A) \text{ یا } (x, y) \in A \times B\big) \Longrightarrow$$

$$\big((y \in A \text{ و } x \in B) \text{ یا } (y \in B \text{ و } x \in A)\big) \Longrightarrow \big((y \in B \text{ یا } y \in A) \text{ و } (x \in B \text{ یا } x \in A)\big) \Longrightarrow$$

$$x, y \in A \cup B \Longrightarrow (x, y) \in (A \cup B) \times (A \cup B)$$

ب) به‌ازای $\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، فرض می‌کنیم $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۳\}$. دراین صورت

$$(A \cup B) \times (A \cup B) = \{۱, ۲, ۳\} \times \{۱, ۲, ۳\}$$

درحالی‌که $(A \times B) \cup (B \times A) = \{(۱, ۳), (۲, ۳)\} \cup \{(۳, ۱), (۳, ۲)\}$. چون $|(A \cup B) \times (A \cup B)| = ۹$

و $۴ = |(A \times B) \cup (B \times A)|$، $(A \cup B) \times (A \cup B)$ نمی‌تواند زیرمجموعهٔ $(A \times B) \cup (B \times A)$ باشد.

۲. الف) درست ب) نادرست: فرض کنید $A = \{۱,۲\}$، $B = \{x, y\}$ و $f = \{(۱,x),(۲,y)\}$.

پ) نادرست: فرض کنید $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$، $f(x) = ۲x$. ت) درست

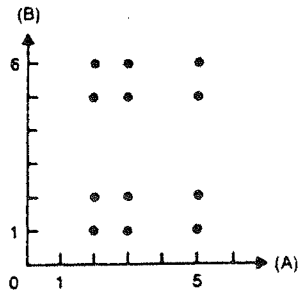
ث) نادرست: فرض کنید $A = \{۱,۲\}$، $B = \{۱,۲,۳\}$، $C = \{۱,۲,۳,۴\}$، $f = \{(۱,۱),(۲,۲)\}$، $g = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$ و $h = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۴)\}$.

ج) نادرست: فرض‌کنید $A = \{۱,۲,۳,۴\}$، $B = \{۵,۶\}$، $A_۱ = \{۱,۲\}$، $A_۲ = \{۲,۳,۴\}$ و $f = \{(۱,۵),(۲,۶),(۳,۵),(۴,۵)\}$. دراین صورت $f(A_۱ \cap A_۲) = f(۲) = \{۶\}$، ولی

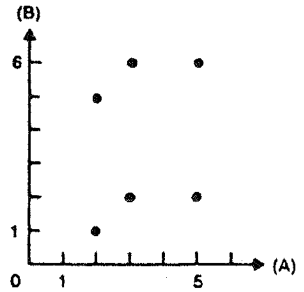
$$f(A_۱) \cap f(A_۲) = \{۵,۶\}$$

چ) درست

۳. الف)



ب)



پ) $۲^{۱۲} - ۴^۳$

۴. $۲^{|A \times B|} = ۲۶۲۱۴۴ \Longrightarrow |A \times B| = ۱۸ \Longrightarrow (|A| = ۳ \text{ و } |B| = ۶) \text{ یا } (|A| = ۲ \text{ و } |B| = ۹)$

۵. الف)

$$(x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Longleftrightarrow (x \in A \cap B \text{ و } y \in C \cap D) \Longleftrightarrow$$

$$\big((x \in A \text{ و } y \in C) \text{ و } (x \in B \text{ و } y \in D)\big) \Longleftrightarrow \big((x,y) \in A \times C \text{ و } (x,y) \in B \times D\big)$$

$$\Longleftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$$

ب)

$$(x,y) \in (A \cup B) \times (C \cup D) \Longleftrightarrow (x \in A \cup B \text{ و } y \in C \cup D) \Longleftrightarrow$$

$$\big((x \in A \text{ یا } x \in B) \text{ و } (y \in C \text{ یا } y \in D)\big) \Longleftrightarrow \big((x \in A \text{ و } y \in C) \text{ یا } (x \in B \text{ و } y \in D) \text{ یا}$$

$$(x \in B \text{ و } y \in C) \text{ یا } (x \in A \text{ و } y \in D)\big) \Longleftrightarrow \big(((x,y) \in A \times C) \text{ یا}$$

$$((x,y) \in B \times D) \text{ یا } ((x,y) \in A \times D) \text{ یا } ((x,y) \in B \times C)\big) \Longleftrightarrow$$

$$(x,y) \in (A \times C) \cup (B \times D) \cup (A \times D) \cup (B \times C)$$

۶. الف) $۵!$ ب) $۴!$

۷. برهان: چون $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$، فقط باید تحقیق کنیم که $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \subseteq \mathcal{R}$. اگر $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \not\subseteq \mathcal{R}$، فرض می‌کنیم $S = \{(m,n) | m,n \in \mathbf{Z}^+ \text{ و } (m,n) \notin \mathcal{R}\}$. از قسمت (۱) در تعریف بازگشتی می‌دانیم که $(۱,۱) \notin S$.

اگر $S \neq \emptyset$ ، دراین صورت می‌توانیم از بین عنصرهای S جفت مرتبی مانند (m, n) چنان انتخاب کنیم که $m + n$ مینیمال باشد. دست‌کم یکی از این دو عدد m و n بزرگتر از ۱ است.

(یک) اگر $m > ۱$، دراین صورت $m - ۱, n \in \mathbf{Z}^+$ و $(m - ۱) + n < m + n$ و بنابراین، $(m - ۱, n) \notin S$. درنتیجه، $(m - ۱, n) \in \mathcal{R}$ و با توجه به قسمت (۲) در تعریف بازگشتی، می‌بینیم که

$$((m - ۱) + ۱, n) = (m, n) \in \mathcal{R}$$

(دو) درغیراین‌صورت، به‌ازای $m = ۱$ داریم $n > ۱$ و درنتیجه، $(n - ۱) \in \mathbf{Z}^+$ و $m + (n - ۱) < m + n$. بنابراین، $(m, n - ۱) \notin S$. پس $(m, n - ۱) \in \mathcal{R}$ و با توجه به قسمت (۲) در تعریف بازگشتی می‌بینیم که $(m, (n - ۱) + ۱) = (m, n) \in \mathcal{R}$. از تناقضهای به‌دست آمده در (یک) و (دو) نتیجه می‌شود $S = \emptyset$ و $\mathcal{R} \supseteq \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$.

۸. برهان: نخست نشان می‌دهیم که نتیجهٔ موردنظر برای قسمت اول تعریف بازگشتی درست است. چون $۱ \geq ۲ = ۱ \times ۲$، می‌بینیم که این نتیجه برای قسمت (۱) درست است. برای تکمیل برهان، باید تحقیق کنیم هر جفت مرتبی متعلق به $\mathcal{R}$ مانند (s, t) که از قسمت (۲) در تعریف بازگشتی نتیجه می‌شود در شرط $۲s \geq t$ صدق می‌کند. سه حالت درنظر می‌گیریم:

(یک) $(a + ۱, b)$ با فرض $(a, b) \in \mathcal{R}$: در اینجا داریم $۲a \geq b$ و چون $a + ۱ \geq a$، درنتیجه، $۲(a + ۱) \geq ۲a \geq b$.

(دو) $(a + ۱, b + ۱)$ با فرض $(a, b) \in \mathcal{R}$: می‌بینیم که

$$۲a \geq b \Longrightarrow ۲a + ۲ \geq b + ۱ \Longrightarrow ۲(a + ۱) \geq b + ۱$$

(سه) $(a + ۱, b + ۲)$ با فرض $(a, b) \in \mathcal{R}$: در این حالت می‌بینیم که

$$۲a \geq b \Longrightarrow ۲a + ۲ \geq b + ۲ \Longrightarrow ۲(a + ۱) \geq b + ۲$$

درنتیجه، به‌ازای هر $(a, b) \in \mathcal{R}$ داریم $۲a \geq b$.

۹. اگر $۰ \leq x < ۱$، دراین صورت $\lfloor x \rfloor = ۰$ و $x^۲ = \frac{۱}{۲}$. بنابراین، $x = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$.

اگر $۱ \leq x < ۲$، دراین صورت $\lfloor x \rfloor = ۱$ و $x^۲ = \frac{۳}{۲}$. بنابراین، $x = \sqrt{\frac{۳}{۲}}$.

به‌ازای $k \in \mathbf{Z}^+$ و $k \geq ۲$، اگر $k \leq x < k + ۱$، دراین صورت $\lfloor x \rfloor = k$ و اگر x در معادلهٔ مفروض صدق کند، داریم $x^۲ = k + \frac{۱}{۲}$. ولی به‌ازای $k \geq ۲$ می‌بینیم که $k(k - ۱) > ۰$ و بنابراین، $k(k - ۱) \geq ۱ > \frac{۱}{۲}$ و $k^۲ - k > \frac{۱}{۲}$. اکنون از $k^۲ > k + \frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود که $x = \sqrt{k + \frac{۱}{۲}} < k$ و نابرابریهای $k \leq x < k + ۱$ را نخواهیم داشت.

سرانجام، فرض می‌کنیم $k \in \mathbf{Z}^+$ و $-k \leq x < -k + ۱$. دراین صورت $x^۲ - \lfloor x \rfloor = x^۲ - (-k) = x^۲ + k$ و از $x^۲ - \lfloor x \rfloor = \frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود که $x^۲ = -k + \frac{۱}{۲} < ۰$. بنابراین، x نمی‌تواند عددی حقیقی باشد.

درنتیجه، فقط دو عدد حقیقی وجود دارند که در معادلهٔ $x^۲ - \lfloor x \rfloor = \frac{۱}{۲}$ صدق می‌کنند و این دو عدد

عبارت‌اند از $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

۱۰. فرض می‌کنیم $n = |A| - |A_1|$. چون $|B|^n$ برابر است با تعداد طرق توسیع f به A و $216 = 6^n = |B|^n$.
بنابراین، $n = 3$ و $|A| = 8$.

۱۱. الف) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{7^5} \doteq 0.15$

ب) برای برنامهٔ کامپیوتری، عنصرهای $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ به‌جای عنصرهای B گذاشته می‌شوند.

```
10   Random
20   Dim F(5)
30   For I = 1 To 5
40         F(I) = Int(Rnd*7 + 1)
50   Next I
60   For J = 2 To 5
70         For K = 1 To J - 1
80                If F(J) = F(K) then GOTO 120
90         Next K
100  Next J
110  GOTO 140
120  C = C + 1
130  GOTO 10
140  C = C + 1
150  Print "After "; C; "generations the resulting"
160  Print "function is one-to-one."
170  Print "The one-to-one function is given as:"
180  For I = 1 To 5
190        Print "("; I; ","; F(I); ")"
200  Next I
210  End
```

۱۲. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ S مانند A، فرض می‌کنیم s_A مجموع عنصرهای A را نشان دهد. فقط آن زیرمجموعه‌های ناتهی S مانند A را که در $|A| \le 5$ صدق کنند درنظر می‌گیریم. $2^7 - 1 - 1 - 7 = 119$ تا از این نوع زیرمجموعه‌ها وجود دارد و در مورد هر یک از اینها داریم $1 \le s_A \le 20 + 21 + 22 + 23 + 24 = 110$. اکنون نتیجهٔ موردنظر از اصل لانه کبوتری به‌دست می‌آید، زیرا ۱۱۹ زیرمجموعه (کبوترها) و ۱۱۰ مجموع ممکن (لانه‌های کبوترها) وجود دارد.

۱۳. به‌ازای هر $1 \le i \le 10$، فرض می‌کنیم x_i تعداد نامه‌هایی باشد که روز iاُم تایپ شده است. دراین صورت $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_8 + x_9 + x_{10} = 84$ یا $x_3 + \cdots + x_8 = 54$. فرض می‌کنیم

$$x_1 + x_2 + x_3 < 25،\ x_2 + x_3 + x_4 < 25،\ \ldots،\ x_8 + x_9 + x_{10} < 25$$

دراین صورت $x_1 + 2x_2 + 3(x_3 + \cdots + x_8) + 2x_9 + x_{10} < 8 \times 25 = 200$ یا $3(x_3 + \cdots + x_8) < 160$.

درنتیجه، $54 = x_3 + \cdots + x_8 < \frac{160}{3} = 53\frac{1}{3}$.

۱۴. اگر رقم یکان دو عنصر از مجموعهٔ $\{x_۱, x_۲, \dots, x_۷\}$ یکی باشد، دراین صورت تفاضل آنها بر ۱۰ بخش‌پذیر است. اگر این‌طور نباشد، هر ده حالت ممکن برای رقم یکان را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$\{۰\}, \{۱, ۹\}, \{۲, ۸\}, \{۳, ۷\}, \{۴, ۶\}, \{۵\}$$

دراین مسأله، این حالتها نقش لانه‌های کبوترها را بازی می‌کنند. وقتی هریک ازکبوترهای مجموعهٔ $\{x_۱, x_۲, \dots, x_۷\}$ به لانه‌ای می‌رود که رقم یکان آن در آن لانه است، دست‌کم یکی از این زیرمجموعه‌های دوعنصری پر می‌شود و دراین صورت مجموع این دو عدد مضرب ۱۰ خواهد بود.

۱۵. برای آنکه $\prod_{k=۱}^{n}(k - i_k)$ فرد باشد باید به‌ازای هر $۱ \le k \le n$، $(k - i_k)$ فرد باشد، یعنی یکی از دو عدد k و i_k باید زوج و دیگری فرد باشد. چون n فرد است، $n = ۲m + ۱$ و در فهرست ۱، ۲، ...، n، m عدد صحیح زوج و $m + ۱$ عدد صحیح فرد وجود دارد. فرض می‌کنیم ۱، ۳، ۵، ...، n کبوترها باشند و $i_۱$، $i_۳$، $i_۵$، ...، i_n لانه‌های کبوترها. حداکثر mتا از لانه‌ها می‌توانند عدد صحیح زوج باشند و بنابراین، به‌ازای دست‌کم یکی از مقادیر ۱، ۳، ۵، ...، n، $(k - i_k)$ باید زوج باشند. درنتیجه، $\prod_{k=۱}^{n}(k - i_k)$ زوج است.

۱۶. الف) پاسخ مطلوب عبارت است از تعداد توابع پوشای $f : A \to B$ که در آن $|A| = ۱۰$ (تعداد کارهای هفتگی) و $|B| = ۳$ (تعداد فرزندان). تعداد این نوع توابع برابر است با $۳!S(۱۰, ۳)$.

ب) $۳!\,S(۹, ۳)$ (فرزند ارشد، علاوه‌بر کوتاه کردن چمن، کارهای دیگری نیز انجام می‌دهد) $+$ $۲!\,S(۹, ۲)$ (فرزند ارشد، فقط چمن را کوتاه می‌کند)

۱۷. فرض می‌کنیم $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n، n شیء متمایز باشند. x_n را در یک ظرف می‌گذاریم. اکنون دو ظرف متمایز وجود دارد. برای هر یک از اشیای $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{n-۱}$، دو انتخاب وجود دارد و به این ترتیب، $۲^{n-۱}$ توزیع به‌دست می‌آید. بین این توزیعها یکی هست که در آن، $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{n-۱}$ در همان ظرف x_n قرار می‌گیرند. اگر این توزیع را حذف کنیم می‌بینیم که $S(n, ۲) = ۲^{n-۱} - ۱$.

۱۸. الف) $\binom{۱۲}{۹}$ ب) $۵!S(۹, ۵)$

پ) $۵!S(۷, ۵)$ (پسر بزرگتر، علاوه‌بر هر دو کتاب دربارهٔ بسکتبال دست‌کم یک کتاب دیگر نیز می‌گیرد) $+$ $۴!S(۷, ۴)$ (پسر بزرگتر، فقط هر دو کتاب دربارهٔ بسکتبال را می‌گیرد)

۱۹. الف و ب) $m!S(n, m)$

۲۰. $S(n, n - ۲)$ تعداد طرق گذاشتن n شیء متمایز در $n - ۲$ ظرف یکسان را، به‌طوری که هیچ ظرفی خالی نماند، نشان می‌دهد. دو حالت پیش می‌آید. یکی از ظرفها سه شیء و هر یک از ظرفهای دیگر یک شیء دارد. این وضعیت به $\binom{n}{۳}$ طریق روی می‌دهد. امکان دیگر این است که دو تا از ظرفها، هر یک حاوی دو شیء و هر

یک از ظرفهای دیگر حاوی یک شیء باشد. این وضعیت به

$$\binom{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}=\frac{n!}{2!2!2!(n-4)!}=3\binom{n}{4}$$

طریق روی می‌دهد.

۲۱. فرض می‌کنیم $m=1$. نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n=1$ درست است. فرض می‌کنیم $f\circ f^k=f^k\circ f$ درست باشد و $f\circ f^{k+1}$ را درنظر می‌گیریم.

$$f\circ f^{k+1}=f\circ\big(f\circ f^k\big)=f\circ\big(f^k\circ f\big)=(f\circ f^k)\circ f=f^{k+1}\circ f$$

بنابراین، به‌ازای هر $n\in\mathbf{Z}^+$ داریم $f\circ f^n=f^n\circ f$. اکنون فرض می‌کنیم به‌ازای $t\geq 1$ داشته باشیم $f^t\circ f^n=f^n\circ f^t$. دراین صورت،

$$\begin{aligned}f^{t+1}\circ f^n&=\big(f\circ f^t\big)\circ f^n=f\circ\big(f^t\circ f^n\big)=f\circ(f^n\circ f^t)=(f\circ f^n)\circ f^t\\&=\big(f^n\circ f\big)\circ f^t=f^n\circ\big(f\circ f^t\big)=f^n\circ f^{t+1}\end{aligned}$$

و بنابراین، به‌ازای هر $m,n\in\mathbf{Z}^+$ داریم $f^m\circ f^n=f^n\circ f^m$.

۲۲. ب) $y\in f\big(\bigcap_{i\in I}A_i\big)\iff\big(y=f(x);x\in\bigcap_{i\in I}A_i\big)\iff\big(y\in f(A_i)$ ، به‌ازای هر $i\in I\big)$

$$\iff y\in\bigcap_{i\in I}f(A_i)$$

پ) بنابر قسمت (ب)، $f\big(\bigcap_{i\in I}A_i\big)\subseteq\bigcap_{i\in I}f(A_i)$. برای اثبات رابطهٔ شمول وارون، فرض می‌کنیم $y\in\bigcap_{i\in I}f(A_i)$. دراین صورت به‌ازای هر $i\in I$ داریم $y\in f(A_i)$ و بنابراین، به‌ازای هر $i\in I$ عنصری مانند $x_i\in A_i$ وجود دارد به‌طوری که $y=f(x_i)$. چون f یک به‌یک است، همهٔ این x_iها، $i\in I$، یک عنصر به‌نام $x\in\bigcap_{i\in I}A_i$ هستند. بنابراین، $y=f(x)\in f\big(\bigcap_{i\in I}A_i\big)$ و بنابراین، $\bigcap_{i\in I}f(A_i)\subseteq f(\bigcap_{i\in I}A_i)$. اکنون نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

برهان قسمت (الف) نیز به‌طور مشابهی انجام می‌گیرد.

۲۳. به‌ازای هر عدد صحیح فرد.

۲۴. الف) $n^{(n\times n)}=n^{(n^2)}$ ب) $n^{(n^3)}$ پ) $n^{(n^k)}$

ت) چون $|A|=n$، برای هر انتخاب k عنصری (با مجاز بودن تکرار) از مجموعهٔ n عنصری A، n امکان وجود دارد. $r=\binom{n+k-1}{k}$ انتخاب ممکن و n^r عمل kتایی تعویض‌پذیر در A وجود دارد.

۲۵.

$$x<y\implies \underset{(\text{زیرا } f \text{ صعودی است})}{f(x)<f(y)}\implies \underset{(\text{زیرا } g \text{ صعودی است})}{g\big(f(x)\big)<g\big(f(y)\big)}$$

بنابراین، $g\circ f$ صعودی است.

۲۶. الف) هر دو تابع $\chi_{A\cap B}$ و $\chi_A\times\chi_B$ دارای قلمرو $\mathcal{U}$ و حوزهٔ مقادیر $\{0,1\}$ هستند. به‌ازای هر $x\in\mathcal{U}$،

$$\chi_{A\cap B}(x)=1\iff x\in A\cap B\iff(x\in A \text{ و } x\in B)\iff\big(\chi_A(x)=1 \text{ و } \chi_B(x)=1\big)$$

همچنین،

$$\chi_{A\cap B}(x) = 0 \iff x \notin A\cap B \iff (x \notin A \text{ یا } x \notin B)$$
$$\iff \left(\chi_A(x) = 0 \text{ یا } \chi_B(x) = 0\right) \iff \chi_A \times \chi_B(x) = 0$$

بنابراین، $\chi_{A\cap B} = \chi_A \times \chi_B$.

ب) برهان این قسمت مشابه برهان قسمت (الف) است.

پ) $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 \iff x \in \overline{A} \iff \chi_A(x) = 0 \iff (1-\chi_A)(x) = 1.$

همچنین،

$$\chi_{\overline{A}}(x) = 0 \iff x \notin A \iff x \in \overline{A} \iff \chi_A(x) = 1 \iff \left(1-\chi_A(x)\right) = 0$$

بنابراین، $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$.

۲۷.
$$f\circ g = \{(x,z),(y,y),(z,x)\},\ g\circ f = \{(x,x),(y,z),(z,y)\}$$
$$f^{-1} = \{(x,z),(y,x),(z,y)\},\ g^{-1} = \{(x,y),(y,x),(z,z)\}$$
$$(g\circ f)^{-1} = \{(x,x),(y,z),(z,y)\} = f^{-1}\circ g^{-1}$$
$$g^{-1}\circ f^{-1} = \{(x,z),(y,y),(z,x)\}$$

۲۸. الف) $f^{-1}(8) = \{x | 5x+3 = 8\} = \{1\}$

ب)
$$|x^2+3x+1| = 1 \implies (x^2+3x+1 = -1 \text{ یا } x^2+3x+1 = 1) \implies$$
$$(x^2+3x+2 = 0 \text{ یا } x^2+3x = 0) \implies$$
$$\left((x+2)(x+1) = 0 \text{ یا } x(x+3) = 0\right) \implies$$
$$(x = -1,-2 \text{ یا } x = 0,-3)$$

بنابراین، $g^{-1}(1) = \{-3,-2,-1,0\}$.

پ) $\left\{-\frac{8}{5}, -\frac{8}{3}\right\}$

۲۹. با این شرایط می‌دانیم که $f^{-1}(\{6,7,9\}) = \{2,4,5,6,9\}$. درنتیجه،

(یک) برای هر یک از عنصرهای $f(1)$، $f(3)$ و $f(7)$ دو انتخاب داریم که عبارت‌اند از ۴ یا ۵؛

(دو) برای هر یک از عنصرهای $f(8)$ و $f(10)$ دو انتخاب داریم که عبارت‌اند از ۸ یا ۱۰؛

(سه) برای هر یک از عنصرهای $f(2)$، $f(4)$، $f(5)$، $f(6)$ و $f(9)$ سه انتخاب داریم که عبارت‌اند از ۶، ۷ یا ۹.

بنابراین، با توجه به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، تعداد توابعی که در این شرایط صدق می‌کنند برابر است با $2^3 \times 2^2 \times 3^5 = 7776$.

۳۰. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $b_n = n$.

برهان: وقتی $n = 1$ داریم $b_1 = 1$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت درست است. به‌ازای $n = 2$

می‌بینیم که $b_2 = b_{\lfloor 2/2 \rfloor} + b_{\lceil 2/2 \rceil} = b_1 + b_1 = 1 + 1 = 2$ و به این ترتیب، نتیجهٔ موردنظر در این حالت نیز برقرار می‌شود. برای تکمیل برهان، فرض می‌کنیم نتیجه به‌ازای هر k ، $n = 1, 2, 3, \ldots$ $(k \geq 2)$ درست باشد و آن را به‌ازای $n = k + 1$ و $k \geq 3$ بررسی می‌کنیم.

(یک) اگر n زوج باشد، در این صورت به‌ازای عددی مانند $t \in \mathbf{Z}^+$، $n = 2t$ و

$$b_n = b_{2t} = b_{\lfloor 2t/2 \rfloor} + b_{\lceil 2t/2 \rceil} = b_t + b_t = t + t = 2t = n$$

(دو) اگر n فرد باشد، دراین صورت به‌ازای عددی مانند $r \in \mathbf{Z}^+$، $n = 2r + 1$ و

$$b_n = b_{2r+1} = b_{\lfloor (2r+1)/2 \rfloor} + b_{\lceil (2r+1)/2 \rceil} = b_r + b_{r+1} = r + (r + 1) = 2r + 1 = n$$

بنابراین، از اصل استقرای قوی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ داریم $b_n = n$.

۳۱. الف) $(\pi \circ \sigma)(x) = (\sigma \circ \pi)(x) = x$

ب) $n \geq 2$، $\pi^n(x) = x - n$ و $\sigma^n(x) = x + n$.

پ) به‌ازای $n \geq 2$، $\pi^{-n}(x) = x + n$ و $\sigma^{-n}(x) = x - n$.

۳۲. چون $f = f^1$ و $(f^{-1})^1 = f^{-1}$، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = 1$ درست است. فرض می‌کنیم این نتیجه به‌ازای $n = k$ درست باشد، یعنی فرض می‌کنیم $(f^k)^{-1} = (f^{-1})^k$. با توجه به تمرین ۲۱، به‌ازای $n = k + 1$ داریم

$$\begin{aligned}(f^{k+1})^{-1} = (f \circ f^k)^{-1} = (f^k)^{-1} \circ f^{-1} = (f^{-1})^k \circ (f^{-1})^1 = (f^{-1})^1 \circ (f^{-1})^k \\ = (f^{-1})^{k+1}\end{aligned}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۳۳. الف) $\tau(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)$

ب) $k = 2 : \tau(2) = \tau(3) = \tau(5) = 2$

$k = 3 : \tau(2^2) = \tau(3^2) = \tau(5^2) = 3$

$k = 4 : \tau(6) = \tau(8) = \tau(10) = 4$

$k = 5 : \tau(2^4) = \tau(3^4) = \tau(5^4) = 5$

$k = 6 : \tau(12) = \tau(18) = \tau(20) = 6$

پ) به‌ازای هر $k > 1$ و هر عدد اول مانند p، $\tau^{-1}(k) = (p^{k-1})$.

ت) فرض می‌کنیم

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$$

و

$$b = q_1^{f_1} q_2^{f_2} \cdots q_t^{f_t}$$

که در آن p_1، p_2، ...، p_k، q_1، q_2، ...، q_t، $k+t$ عدد اول متمایزند و e_1، e_2، ...، e_k، f_1، f_2، ...، f_t به $\mathbf{Z}^+$ تعلق دارند. دراین صورت

$$\begin{aligned}\tau(ab) &= (e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_k+1)(f_1+1)(f_2+1)\cdots(f_t+1)\\ &= \left[(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_k+1)\right]\left[(f_1+1)(f_2+1)\cdots(f_t+1)\right]\\ &= \tau(a)\tau(b)\end{aligned}$$

۳۴.
$$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = \frac{a\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+b}{c\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)-a} =$$

$$\frac{a(ax+b)+b(cx-a)}{c(ax+b)-a(cx-a)} = \frac{a^2x+ab+bcx-ab}{acx+bc-acx+a^2} = \frac{a^2x+bcx}{a^2+bc} = x$$

۳۵. الف) در اینجا هشت عدد اول متمایز وجود دارد و هر زیرمجموعه مانند A که در ویژگی بیان شده صدق کند توزیعی از هشت شیء متمایز متعلق به $X = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ در چهار ظرف یکسان است، به‌طوری که هیچ ظرفی خالی نماند. تعداد این نوع توزیعها $S(8,4)$ است.

ب) $S(n,m)$

۳۶. تابع $f:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$ را با $f(n)=\frac{1}{n}$ تعریف کنید.

۳۷. الف) فرض می‌کنیم $m=1$ و $k=1$. دراین صورت به‌ازای هر $n\ge k$ داریم

$$|f(n)|\le 2 < 3 \le |g(n)| = m|g(n)|$$

و بنابراین، $f\in O(g)$.

ب) فرض می‌کنیم $m=4$ و $k=1$. دراین صورت به‌ازای هر $n\ge k$ داریم

$$|g(n)|\le 4 = 4\times 1 \le 4|f(n)| = m|f(n)|$$

و بنابراین، $g\in O(f)$.

۳۸. الف)
$$f\in O(f_1) \Longrightarrow \exists m_1\in\mathbf{R}^+\exists k_1\in\mathbf{Z}^+\ \forall n\ge k_1 |f(n)|\le m_1|f_1(n)|$$
$$g\in O(g_1) \Longrightarrow \exists m_2\in\mathbf{R}^+\exists k_2\in\mathbf{Z}^+\ \forall n\ge k_2 |g(n)|\le m_2|g_1(n)|$$

فرض می‌کنیم $m=\max\{m_1,m_2\}$. دراین صورت به‌ازای هر $n\ge\max\{k_1,k_2\}$ داریم

$$|(f+g)(n)| = |f(n)+g(n)| = |f(n)|+|g(n)| \le m_1|f_1(n)|+m_2|g_1(n)| \le$$
$$m(|f_1(n)|+|g_1(n)| = m|f_1(n)+g_1(n)| = m|(f_1+g_1)(n)|$$

و بنابراین، $(f+g)\in O(f_1+g_1)$.

ب) توابع $f,f_1,g,g_1:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$ را با ضابطه‌های $f(n)=n$، $f_1(n)=1-n$، $g(n)=1$ و $g_1(n)=n$ درنظر بگیرید.

۳۹. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که اگر $\log_a n = r$، آن‌گاه $n = a^r$ و

$$\log_b n = \log_b(a^r) = r\log_b a = (\log_b a)(\log_b n)$$

اکنون فرض می‌کنیم $m = (\log_b a)$ و $k = ۱$. در این صورت به‌ازای هر $n \geq k$ داریم

$$|g(n)| = \log_b n = (\log_b a)(\log_a n) = m|f(n)|$$

و بنابراین، $g \in O(f)$.

سرانجام، با فرض $m = (\log_b a)^{-۱} = \log_a b$، می‌بینیم که به‌ازای هر $k = ۱$ داریم

$$|f(n)| = \log_a n = (\log_a b)(\log_b n) = m|g(n)|$$

بنابراین، $f \in O(g)$.

۶

زبانها، ماشینهای متناهی‌الحالت

بند ۱.۶

۱. الف) ۱۲۵،۲۵ ب) $\sum_{i=۰}^{۵} ۵^i = ۳۹۰۶$

۲. الف) $۴^۲$ ب) $\binom{۵}{۲}(۳^۳)$ پ) $۳^۵$ ت) $۳^۵ + \binom{۵}{۲}۳^۳ + \binom{۵}{۴}۳$

۳. ۱۲

۴. الف) ۰ ب) ۰ پ) ۱ ت) ۲
ث) ۳ ج) ۴ چ) ۱ ح) ۰

۵. $\sum_{i=۱}^{۴} ۵^i$

۶. ۱۰۰ زیررشته به طول ۱ : $x_۱$، $x_۲$،...، $x_{۱۰۰}$؛ ۹۹ زیررشته به طول ۲ : $x_۱x_۲$، $x_۲x_۳$، ...، $x_{۹۹}x_{۱۰۰}$، ...؛ و ۱ زیررشته به طول ۱۰۰ : $x_۱x_۲\ldots x_{۱۰۰}$ وجود دارد. بنابراین، روی‌هم

$$۱۰۰ + ۹۹ + \cdots + ۱ = \sum_{i=۱}^{۱۰۰} i = \frac{۱۰۰ \times ۱۰۱}{۲} = ۵۰۵۰$$

زیررشتهٔ ناتهی وجود دارد.

۷. الف) $\{۰۰, ۱۱, ۰۰۰, ۱۱۱, ۰۰۰۰, ۱۱۱۱\}$
ب) $\{۰, ۱\}$
پ) $\sum^* - \{\lambda, ۰۰, ۱۱, ۰۰۰, ۱۱۱, ۰۰۰۰, ۱۱۱۱\}$
ت) $\{۰, ۱, ۰۰, ۱۱\}$
ث) $\{۰۰, ۰۱, ۱۰, ۱۱\} = \{w \mid \|w\| = ۲\}$
ج) $\sum^*$
چ) $\sum^* - \{۰, ۱, ۰۰, ۱۱\} = \{\lambda, ۰۱, ۱۰\} \cup \{w \mid \|w\| \geq ۳\}$
ح) $\sum^* - \{\lambda, ۰, ۱, ۰۰, ۰۱, ۱۰, ۱۱, ۰۰۰, ۱۱۱, ۰۰۰۰, ۱۱۱۱\}$
خ) $\sum^* - \{\lambda, ۰, ۱, ۰۰, ۱۱, ۰۰۰, ۱۱۱, ۰۰۰۰, ۱۱۱۱\}$

۸. الف) $AB = \{1000, 101, 1100, 111\}$

ب) $BA = \{0010, 0011, 110, 111\}$

پ) $A^3 = \{101010, 101011, 101110, 111010, 101111, 111011, 111110, 111111\}$

ت) $B^2 = \{0000, 001, 100, 11\}$

۹. الف) با توجه به $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ می‌بینیم که

$x \in AC \Longrightarrow$ (عنصرهایی مانند $a \in A$ و $c \in C$ وجود دارند به‌طوری که، $x = ac$) $\Longrightarrow x \in BD$

ب) اگر $A\emptyset \neq \emptyset$، فرض می‌کنیم $x \in A\emptyset$. در این صورت

$x \in A\emptyset \Longrightarrow$ (عنصرهایی مانند $y \in A$ و $z \in \emptyset$ وجود دارند به‌طوری که $x = yz$)

ولی $z \in \emptyset$ غیرممکن است. بنابراین، $A\emptyset = \emptyset$. [به همین ترتیب، $\emptyset A = \emptyset$.]

۱۰. الف) $AB = \{xy, xyx\}$ ب) $BA = \{xy, xxy\}$ پ) $B^3 = \{\lambda, x, x^2, x^3\}$

ت) $B^+ = \{x^n\}|n \in \mathbf{Z}^+\}$ ث) $A^* = \{\lambda, xy, xyxy, \dots\} = \{\lambda\} \cup \{(xy)^n | n \in \mathbf{Z}^+\}$

۱۱. این وضعیت فقط وقتی روی می‌دهد که $A = \{\lambda\}$.

۱۲. الف) بله ب) بله پ) بله

ت) بله ث) خیر ج) بله

۱۳. الف) در اینجا A^* از همهٔ رشته‌های به طول زوج مانند x تشکیل شده است به‌طوری که اگر $x \neq \lambda$، آن‌گاه x با ۰ شروع و به ۱ ختم می‌شود و نمادهای ۰ و ۱ یک در میان قرارگرفته‌اند.

ب) در این حالت، A^* دقیقاً شامل رشته‌هایی است که هر یک از آنها از $3n$ تا ۰، $n \in \mathbf{N}$، ساخته شده است.

پ) در اینجا رشته‌ای مانند x به A^* تعلق دارد اگر و فقط اگر

(یک) x رشته‌ای متشکل از n تا ۰، $n \in \mathbf{N}$، باشد یا

(دو) x با ۰ شروع و به ۰ ختم شود و دست‌کم یک ۱ داشته باشد، ولی ۱ های متوالی نداشته باشد.

ت) در این حالت، A^* از رشته‌های زیر تشکیل شده است:

(یک) هر رشتهٔ متشکل از n تا ۱، $n \in \mathbf{N}$، و

(دو) هر رشته‌ای که با ۱ شروع شود و دست‌کم یک ۰ داشته باشد، ولی ۰های متوالی نداشته باشد.

۱۴. پنج انتخاب ممکن وجود دارد:

(۱) $A = \{\lambda\}$، $B = \{01, 000, 0101, 0111, 01000, 010111\}$،

(۲) $A = \{01, 000, 0101, 0111, 01000, 010111\}$، $B = \{\lambda\}$،

(۳) $A = \{0\}$، $B = \{1, 00, 101, 111, 1000, 10111\}$،

(۴) $A = \{0, 010\}$، $B = \{1, 00, 111\}$ و

(۵) $A = \{\lambda, 01\}$، $B = \{01, 000, 0111\}$.

۱۵. فرض می‌کنیم $\sum$ الفبایی باشد که در آن $\emptyset \neq A \subseteq \sum^*$. اگر $|A| = 1$ و $x \in A$، در این صورت $xx = x$،

زیرا $A = A^2$. ولی

$$\|xx\| = 2\|x\| = \|x\| \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = \lambda$$

اگر $|A| > 1$، فرض می‌کنیم $x \in A$ در $\|x\| > 0$ صدق کند و $\|x\|$ مینیمال باشد. دراین صورت از $x \in A^2$ نتیجه می‌شود که به‌ازای عنصرهایی مانند $y, z \in A$ داریم $x = yz$. چون $\|x\| = \|y\| + \|z\|$، اگر $\|y\| > 0$ و $\|z\| > 0$، دراین صورت هریک از دو عنصر y و z، ضمن تعلق به A، طولی کمتر از طول $\|x\|$ دارد. درنتیجه، یکی از دو مقدار $\|y\|$ یا $\|z\|$ برابر با ۰ است و بنابراین، $\lambda \in A$.

۱۶. الف) p_a، s_a، r

ب) r و d پوشا هستند، $s_a(\sum^*) = \sum^*\{a\}, p_a(\sum^*) = \{a\}\sum^*$

پ) r وارون‌پذیر است و $r^{-1} = r$

ت) ۲۵؛ ۱۲۵؛ اگر n زوج باشد $5^{\frac{n}{2}}$ و اگر n فرد باشد $5^{\frac{n+1}{2}}$.

ث) $(dop_a)(x) = x = (rodoros_a)(x)$

ج) $r^{-1}(B) = \{ea, ia, oa, oo, oie, uuoie\}$، $p_a^{-1}(B) = \{e, i, o\}$، $s_a^{-1}(B) = \emptyset$ و

$$|d^{-1}(B)| = |\bigcup_{x \in B} d^{-1}(x)| = \sum_{x \in B} d^{-1}(x) = \sum_{x \in B} 5 = 6 \times 5 = 30$$

۱۷. الف) اگر $A = A^2$، دراین صورت با استفاده از استقرای ریاضی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ داریم $A = A^n$. بنابراین، $A = A^+$. بنابر تمرین ۱۵ می‌دانیم که از $A = A^2$ نتیجه می‌شود $\lambda \in A$ و بنابراین، $A = A^*$.

۱۸. قضیهٔ ۶ ۰ ۱ (ب):

$$\begin{aligned}
&x \in (AB)C \Longleftrightarrow (x = (ab)c\text{، } c \in C \text{ و } b \in B\text{، } a \in A \text{ به‌ازای عنصرهایی مانند}) \Longleftrightarrow \\
&x = (a_1a_2\cdots a_l b_1b_2\cdots b_m)(c_1c_2\cdots c_n), (a_i \in A, 1 \leq i \leq l, b_j \in B, \\
&1 \leq j \leq m, c_k \in C, 1 \leq k \leq n) \Longleftrightarrow x = a_1a_2\cdots a_l b_1b_2\cdots b_m c_1c_2\cdots c_n, \\
&(a_i \in A, 1 \leq i \leq l, b_j \in B, 1 \leq j \leq m, c_k \in C, 1 \leq k \leq n) \\
&\Longleftrightarrow x = (a_1a_2\cdots a_l)(b_1b_1\cdots b_m c_1c_2\cdots c_n), (a_i \in A, \\
&1 \leq i \leq l, b_j \in B, 1 \leq j \leq m, c_k \in C, 1 \leq k \leq n) \Longleftrightarrow \\
&x \in A(BC)
\end{aligned}$$

بنابراین، $(AB)C = A(BC)$.

قضیهٔ ۶ ۰ ۲ (ب): به‌ازای هر $a \in A$ داریم $a = \lambda a$، که در آن $\lambda \in B^*$. بنابراین، $A \subseteq B^*A$.

قضیهٔ ۶ ۰ ۲ (ج): با توجه به قضیهٔ ۶ ۰ ۲ (الف) داریم $A^* \subseteq A^*A^*$. برعکس،

$$\begin{aligned}
&x \in A^*A^* \Longleftrightarrow \\
&(x = yz \text{، که در آن } y = a_1a_2\cdots a_m\text{، } z = a'_1a'_2\cdots a'_n\text{، } a_i, a'_j \in A\text{، } 1 \leq i \leq m\text{، } 1 \leq j \leq n)
\end{aligned}$$

بنابراین، $x \in A^*$ و بنابراین، $A^*A^* \subseteq A^*$. اکنون نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود.

چون $(A^*)^* = \bigcup_{n=0}^{\infty}(A^*)^n$، پس $A^* \subseteq (A^*)^*$. برعکس، اگر $x \in (A^*)^*$، در این صورت $x = x_1x_2\cdots x_n$ که در آن، به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i \in A^*$. ولی به‌ازای هر i داریم $x_i = a_{i1}a_{i2}\cdots a_{iki}$ که در آن $a_{ij} \in A$، $1 \leq j \leq k_i$. بنابراین، $x \in A^*$ و بنابراین، $(A^*)^* \subseteq A^*$. در نتیجه، $(A^*)^* = A^*$.

توجه کنید که $(A^*)^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A^*)^n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}(A^*)^n = (A^*)^*$. اگر $x \in (A^*)^*$، در این صورت $x = x_1x_2\cdots x_n$، که در آن، به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i \in A^*$. به این ترتیب،

$$x = a_{11}a_{12}\cdots a_{1k_1}a_{21}a_{22}\cdots a_{2k_2}\cdots a_{n_1}\cdots a_{nk_n} \in A^* \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(A^*)^n = (A^*)^+$$

و بنابراین، $(A^*)^* = (A^*)^+$.

چون $A^+ \subseteq A^*$، بنابر قسمت (ت) از این قضیه داریم $(A^+)^* \subseteq (A^*)^*$. به‌ازای $x \in (A^*)^*$، اگر $x = \lambda$، در این صورت $x \in (A^+)^*$. اگر $x \neq \lambda$، در این صورت مانند آنچه دیدیم

$$x = a_{11}a_{12}\cdots a_{1k_1}a_{21}\cdots a_{2k_2}\cdots a_{n_1}a_{n_2}\cdots a_{nk_n} \in A^+ \subseteq (A^+)^n$$

و نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود.

۱۹. بنابر تعریف ۶۰۱۱، $AB = \{ab | b \in B \text{ و } a \in A\}$. چون امکان دارد که به‌ازای عنصرهایی مانند $a_1, a_2 \in A$ و $b_1, b_2 \in B$، به‌طوری که $a_1 \neq a_2$ و $b_1 \neq b_2$، داشته باشیم $a_1b_1 = a_2b_2$، پس $|AB| \leq |A \times B| = |A||B|$.

۲۰. بنابر قضیهٔ ۶۰۲ (ت)، از $A \subseteq B^*$ نتیجه می‌شود $A^* \subseteq (B^*)^*$. ولی بنابر قضیهٔ ۶۰۲ (ج) داریم $(B^*)^* = B^*$. بنابراین، $A^* \subseteq B^*$.

۲۱. الف) $x \in A(\cup_{i\in I}B_i) \iff$ (به‌ازای عنصرهایی مانند $a \in A$ و $b \in \cup_{i\in I}B_i$، $x = ab$) $\iff$

(به‌ازای عنصری مانند $a \in A$ و $x = ab$، که در آن $i \in I$، $b \in B_i$) $\iff$

(به‌ازای عنصری مانند $i \in I$، $x \in AB_i$) $\iff x \in \cup_{i\in I}AB_i$

ب) برهان این قسمت مانند برهان قسمت (الف) است.

۲۲. الف) $\{y\}^*x\{y\}^*$ ب) $\{y\}^*x\{y\}^*x\{y\}^*$ پ) $x\{x,y\}^*$

ت) $\{x,y\}^*yxy$ ث) $(x\{x,y\}^*) \cup (\{x,y\}^*yxy)$

ج) $[(x\{x,y\}^*) \cup (\{x,y\}^*yxy)] - [x\{x,y\}^*yxy$

۲۳. الف) طول واژه‌های ۱۰۰ و ۱۱۰ برابر با ۳ است و هر دو در A قرار دارند. طول واژه‌های ۱۱۰۰۰ و ۱۱۱۰۰ برابر با ۵ است و آنها نیز در A قرار دارند.

ب) از مرحلهٔ (۱) می‌دانیم که $1 \in A$. اگر مرحلهٔ (۲) را سه بار به‌کار ببریم، می‌بینیم که

(یک) $1 \in A \implies 011 \in A$؛

(دو) $011 \in A \implies 00111 \in A$؛

(سه) $00111 \in A \implies 0001111 \in A$.

پ) اگر ۰۰۰۰۱۱۱۱ در A باشد، در این صورت با توجه به مرحلهٔ (۲) می‌بینیم که این واژه باید از ۰۰۰۱۱۱ (متعلق به A) پدید آمده باشد. به همین ترتیب،

(۰۱ در A است) $\Longrightarrow$ (۰۰۱۱ در A است) $\Longrightarrow$ (۰۰۰۱۱۱ در A است)

ولی A حاوی هیچ واژه‌ای به طول ۲ نیست (در حقیقت، A حاوی هیچ واژه‌ای به طول زوج نیست).

۲۴. الف) (۱) برای مرحلهٔ پایه با λ که متعلق به A است شروع می‌کنیم.

(۲) بنابر فرایند بازگشتی، اگر x واژه‌ای در A باشد، در این صورت $x0$ و $x1$ نیز واژه‌هایی از A هستند.

ب) می‌بینیم که

$$\lambda \in A \Longrightarrow \lambda 1 = 1 \in A \Longrightarrow 01 \in A \Longrightarrow 001 \in A \Longrightarrow 0011 \in A \Longrightarrow 00111 \in A$$

که در آن، هر پنج استلزام از قسمت (۲) در تعریف ارائه شده در قسمت (الف) نتیجه می‌شوند.

۲۵. الف)

مراحل	دلایل
۱. $()$ در A است	قسمت (۱) از تعریف بازگشتی
۲. $(())$ در A است	مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲ـ دو) از تعریف
۳. $()(())$ در A است	مراحل ۱ و ۲ و قسمت (۲ـ یک) از تعریف

ب)

مراحل	دلایل
۱. $()$ در A است	قسمت (۱) از تعریف بازگشتی
۲. $(())$ در A است	مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲ـ دو) از تعریف
۳. $()(())$ در A است	مراحل ۱ و ۲ و قسمت (۲ـ یک) از تعریف
۴. $()()(())$ در A است	مراحل ۱ و ۳ و قسمت (۲ـ یک) از تعریف

پ)

مراحل	دلایل
۱. $()$ در A است	قسمت (۱) از تعریف بازگشتی
۲. $()()$ در A است	مرحلهٔ (۱) و قسمت (۲ـ یک) از تعریف
۳. $(()())$ در A است	مراحل ۲ و قسمت (۲ـ دو) از تعریف
۴. $(()())()$ در A است	مراحل ۱ و ۳ و قسمت (۲ـ یک) از تعریف

۲۶. الف) (۱) $\lambda \in A$ و

(۲) اگر $x \in A$، در این صورت هر یک از رشته‌های زیر نیز در A است:

(یک) $x1$ (دو) $1x$ (سه) $00x$ (چهار) $x00$ (پنج) $0x0$

[و هیچ رشتهٔ دیگری از ۰ها و ۱ها در A نیست.]

ب) (۱) $0, 01, 10 \in A$ و

(۲) اگر $x \in A$، در این صورت $1x$ و $x1$ نیز در A هستند.

[و هیچ رشتهٔ دیگری از ۰ها و ۱ها در A نیست.]

پ) (۱) $\lambda \in A$ و

(۲) به‌ازای $x \in A$، رشته‌های $۱x$ و $x۰$ نیز در A هستند.

۲۷. (۱) $\lambda \in A$، به‌ازای هر $s \in \sum$ داریم $s \in A$ و

(۲) به‌ازای هر $x \in A$ و $s \in \sum$، رشتهٔ sxs نیز در A است.

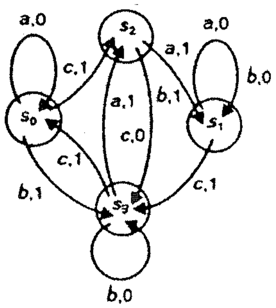
[هیچ رشتهٔ دیگری از $\sum^*$ در A نیست.]

بند ۲.۶

۱. الف) $s_۱$ ،۰۰۱۰۱۰۱ ب) $s_۱$ ،۰۰۰۰۰۰۰ $s_۰$ ،۰۰۱۰۰۰۰۰۰

۲. به‌خاطر اولین خروجی ۱، وقتی سومین ورودی خوانده می‌شود باید در حالت $s_۲$ باشیم. بنابراین، سه ورودی اول باید ۱، ۰ و ۱ باشند. برای به دست آوردن دومین خروجی ۱، وقتی پنجمین ورودی خوانده می‌شود باید در حالت $s_۲$ باشیم. بنابراین، دو ورودی دیگر باید ۰ و ۱ باشند. در نتیجه، $x = ۱۰۱۰۱$.

۳. الف) ۰۱۰۱۱۰ ب)



۴. $S = \{s_i | ۰ \leq i \leq ۵\}$ به‌طوری که در حالت s_i، ماشین وارد شدن $۵i$ سنت را به یاد می‌آورد.

$$I = \{۲۵\text{سنتی}, ۱۰\text{سنتی}, ۵\text{سنتی}, \mathrm{B}, \mathrm{W}\}$$

$$O = \{۲۵\text{سنتی}, ۲۰\text{سنتی}, ۱۵\text{سنتی}, ۱۰\text{سنتی}, ۵\text{سنتی}, \mathrm{n}, \mathrm{RB}, \mathrm{C}\}$$

	ω					ν				
	W	B	۲۵ سنتی	۱۰ سنتی	۵ سنتی	W	B	۲۵ سنتی	۱۰ سنتی	۵ سنتی
$s_۰$	n	n	n	n	n	$s_۰$	$s_۰$	$s_۵$	$s_۲$	$s_۱$
$s_۱$	n	n	۵ سنتی	n	n	$s_۱$	$s_۱$	$s_۵$	$s_۳$	$s_۲$
$s_۲$	n	n	۱۰ سنتی	n	n	$s_۲$	$s_۲$	$s_۵$	$s_۴$	$s_۳$
$s_۳$	n	n	۱۵ سنتی	n	n	$s_۳$	$s_۳$	$s_۵$	$s_۵$	$s_۴$
$s_۴$	n	n	۲۰ سنتی	۵ سنتی	n	$s_۴$	$s_۴$	$s_۵$	$s_۵$	$s_۵$
$s_۵$	RB	C	۲۵ سنتی	۱۰ سنتی	۵ سنتی	$s_۰$	$s_۰$	$s_۵$	$s_۵$	$s_۵$

۵. الف) s_2 ،۰۱۰۰۰۰ ب) s_2 ،(s_1)۱۰۰۰۰۰ s_2 ،(s_2)۰۰۰۰۰۰ s_2 ،(s_3)۱۱۰۰۱۰

پ)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_0	s_1	۰	۰
s_1	s_1	s_2	۱	۱
s_2	s_2	s_2	۰	۰
s_3	s_0	s_3	۰	۱
s_4	s_2	s_3	۰	۱

ت) s_1 ث) $x = ۱۰۱$ (x یکتاست).

۶. الف) این ماشین (با یک خروجی ۱) هر ۰ را (در رشتهٔ ورودی‌ای مانند x) که ۰ دیگری قبل از آن باشد تشخیص می‌دهد.

ب) حالت s_1 به‌خاطر می‌آورد که دست‌کم یک ۰ از رشتهٔ ورودی‌ای مانند x فراهم شده است.

پ) $B = \{۰۰\}, A = \{۱\}^*$

۷. الف) (یک) ۱۵ (دو) $۳^{۱۵}$ (سه) $۲^{۱۵}$ ب) $۶^{۱۵}$

۸. الف) ورودی ۰ ۱ ۱ ۰ ۱ ۱ ۱ ۰ ۱ ۱

خروجی ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰

ب)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_0	s_1	۰	۰
s_1	s_1	s_2	۰	۰
s_2	s_2	s_3	۰	۰
s_3	s_3	s_4	۰	۰
s_4	s_4	s_5	۰	۰
s_5	s_5	s_6	۰	۱

پ) به‌ازای (۱) $x = ۱۱۱۱۱۰۱$، (۲) $x = ۱۱۱۱۰۱۱$، (۳) $x = ۱۱۱۰۱۱۱$ و (۴) $x = ۱۱۰۱۱۱۱$، (۵) $x = ۱۰۱۱۱۱۱$ و (۶) $x = ۰۱۱۱۱۱۱$، داریم $\omega(x, s_0) = ۰۰۰۰۰۰۱$.

ت) این ماشین در هر ورودی مانند x، وقوع ششمین ۱، دوازدهمین ۱، ... را تشخیص می‌دهد.

۹. الف)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_2	s_1	۰	۰
s_1	s_3	s_2	۰	۰
s_2	s_3	s_2	۰	۱
s_3	s_3	s_3	۰	۰
s_4	s_5	s_3	۰	۰
s_5	s_5	s_3	۱	۰

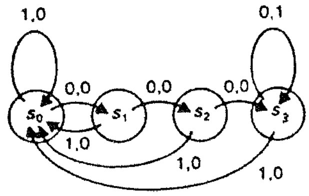
ب) فقط دو امکان وجود دارد: $x =$ ۱۱۱۱ یا $x =$ ۰۰۰۰.

پ) $A = \{۱۱۱\}\{۱\}^* \cup \{۰۰۰\}\{۰\}^*$.

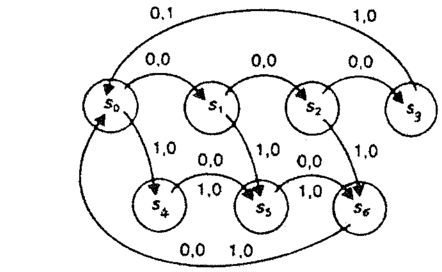
ت) $A = \{۱۱۱۱۱\}\{۱\}^* \cup \{۰۰۰۰۰\}\{۰\}^*$.

بند ۳.۶

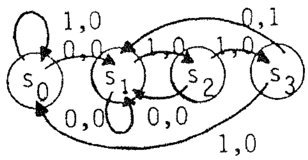
۱. الف)

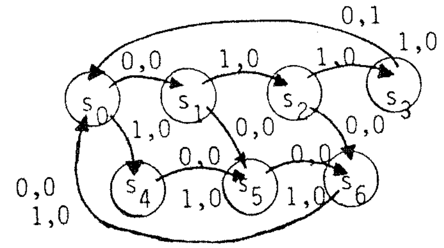


ب)

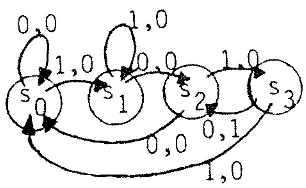


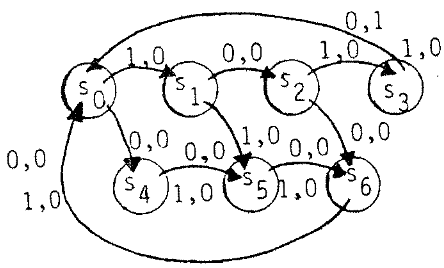
۲. (۰۱۱۰)



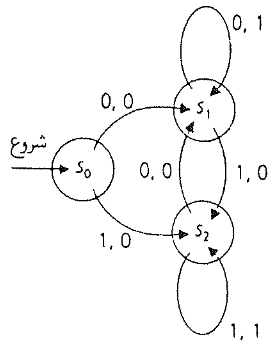


(۱۰۱۰)

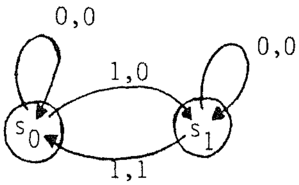




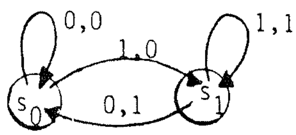
.۳



.۴



۵. الف)



ب) (یک) ورودی ۱۱۱
خروجی ۰۱۱
(دو) ورودی ۱۰۱۰
خروجی ۰۱۰۱
(سه) ورودی ۰۰۰۱۱
خروجی ۰۰۰۰۱

پ) این ماشین یک ۰ و به دنبال آن، نخستین $n - 1$ نماد موجود در n نماد رشتهٔ ورودی x را در خروجی قرار می‌دهد. بنابراین، این ماشین یک ماشین تأخیر یک واحدی است.

ت) این ماشین همان وظایف ماشین شکل ۱۳۰۶ را انجام می‌دهد (و فقط دو حالت دارد).

۶. فرض کنیم برعکس چنین ماشینی وجود داشته و تعداد حالتهای آن n، $n \in \mathbf{Z}^+$، باشد. رشتهٔ ورودی $0^{n+1}1^n$ را درنظر می‌گیریم. در این صورت انتظار داریم که خروجی $0^{n+1}1^n$ باشد. به‌تدریج که ۰های این رشتهٔ ورودی پردازش می‌شوند، $n + 1$ حالت s_1، s_2، ...، s_n و s_{n+1} را از تابع ν به‌دست می‌آوریم. درنتیجه، بنابر اصل لانه کبوتری، دو حالت s_i و s_j وجود دارند به‌طوری که $i < j$، ولی $s_i = s_j$. بنابراین، اگر حالتهای s_m، $i + 1 \leq m \leq j$، را همراه با ورودیهای ۰ آنها حذف کنیم، این ماشین دنبالهٔ $0^{n+1-(j-i)}1^n$ را، که در آن $n + 1 - (j - i) \leq n$، تشخیص خواهد داد. ولی رشتهٔ $0^{n+1-(j-i)}1^n$ به A تعلق ندارد.

۷. الف) حالتهای گذرا عبارت‌اند از s_0 و s_1. حالت s_2 یک حالت چاهکی است. $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$، $\{s_2\}$ و

$\{s_2, s_3, s_5\}$ (همراه با تحدیدهای متناظر تابع مفروض ν) زیرماشینها هستند. زیرماشینهای قویاً همبند عبارت‌اند از $\{s_4\}$ و $\{s_2, s_3, s_5\}$.

ب) حالتهای s_2 و s_3 حالتهای گذرا هستند. تنها حالت چاهکی حالت s_4 است. مجموعهٔ $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ حالتهای یک زیرماشین را به‌دست می‌دهد. $\{s_0, s_1\}$ و $\{s_4\}$ زیرماشینهای قویاً همبند را به‌دست می‌دهند.

۸. هریک از دنباله‌های ۱۱۰ یا ۱۱۱ یک دنبالهٔ انتقال از s_2 به s_5 است.

تمرینات تکمیلی

۱. الف) درست	ب) درست	پ) درست
ت) نادرست	ث) درست	ج) درست
چ) درست	ح) درست	

۲. خیر. فرض کنید $x \in \sum$، که در آن $A = \{x, xx\}$ و $B = \{x\}$. دراین صورت، $A^* = B^* = \{x^n | n \geq 0\}$، ولی $A \nsubseteq B$.

۳. فرض کنید $x \in \sum$ و $A = \{x\}$. دراین صورت $A^2 = \{x^2\}$ و $(A^2)^* = \{\lambda, x^2, x^4, \ldots\}$. ولی $A^* = \{\lambda, x, x^2, \ldots\}$، $(A^*)^2 = A^*$. بنابراین، $(A^*)^2 \neq (A^2)^*$.

۴. الف)

$$x \in A\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) \iff \big(x = ab \text{، که در آن } a \in A \text{ و به‌ازای هر } i \in I \text{، } b \in B_i\big)$$
$$\iff \big(\text{به‌ازای هر } i \in I \text{، } x \in AB_i\big)$$
$$\implies x \in \bigcap_{i\in I}(AB_i)$$

بنابراین، $A\big(\bigcap_{i\in I} B_i\big) \subseteq \bigcap_{i\in I} AB_i$. برای اثبات اینکه این شمول می‌تواند شمول سره باشد، فرض کنید $I = \mathbf{N}$ و به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، فرض کنید $B_n = \{y\}$ هرگاه n زوج و $B_n = \{xy\}$ هرگاه n فرد باشد (x و y دو عنصر متعلق به $\sum$ هستند). دراین صورت $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} B_n = \emptyset$ و بنابراین، به‌ازای هر زبان مانند A داریم $A\big(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} B_n\big) = \emptyset$. فرض می‌کنیم $A = \{\lambda, x\}$. دراین صورت، به‌ازای n زوج داریم $AB_n = \{y, xy\}$ و به‌ازای n فرد داریم $AB_n = \{xy, xxy\}$ و در نتیجه، $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} AB_n = \{xy\}$.

ب) برهانی برای $\big(\bigcap_{i\in I} B_i\big)A \subseteq \bigcap_{i\in I} B_iA$ مشابه برهان قسمت (الف) است. برای اثبات اینکه این شمول می‌تواند شمول سره باشد، فرض کنید $A = \{\lambda, x\}$، $I = \mathbf{N}$، $B_n = \{y\}$ هرگاه n زوج و $B_n = \{yx\}$ هرگاه n فرد باشد (x و y دو عنصر متعلق به $\sum$ هستند).

۵. O_{02}: اگر از s_0 شروع کنیم می‌توانیم به‌ازای هر ورودی متعلق به $\{1, 00\}^*$ به s_0 بازگردیم. برای اینکه کار در حالت s_2 خاتمه یابد یک ورودی ۰ لازم است. بنابراین، $O_{02} = \{1, 00\}^*\{0\}$.

$O_{10} : \{1\}\{1, 00\}^* \cup \{10\}\{1, 00\}^*$ ، $O_{00} : \{1, 00\}^* - \{\lambda\}$ ، $O_{11} : \emptyset$ ، $O_{22} : \{0\}\{1, 00\}^*\{0\}$

۶. الف)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_0	s_1	۰	۰
s_1	s_1	s_2	۰	۰
s_2	s_2	s_3	۰	۰
s_3	s_3	s_0	۰	۱

ب) این ماشین وقوع هر چهارمین ۱ در هر رشتهٔ ورودی مانند x را (با خروجی ۱) تشخیص می‌دهد.

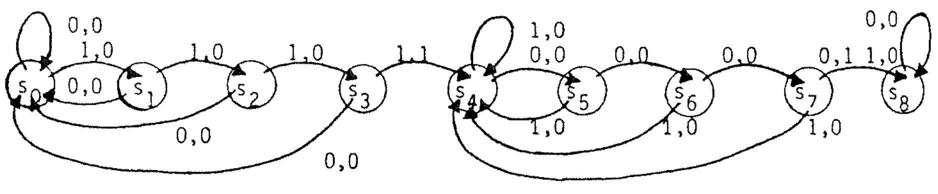
پ) $۷۲ = \binom{۸}{۰} + \binom{۸}{۴} + \binom{۸}{۸}$. (جمعوند اول برای دنبالهٔ متشکل از هشت تا ۱، جمعوند دوم برای دنباله‌های متشکل از چهار تا ۱ و چهار تا ۰ و جمعوند آخر برای دنبالهٔ متشکل از هشت تا ۰ است.)

به‌ازای $||x|| = ۱۲$، $۹۹۲ = \binom{۱۲}{۰} + \binom{۱۲}{۴} + \binom{۱۲}{۸} + \binom{۱۲}{۱۲}$ تا از این نوع دنباله‌ها وجود دارد.

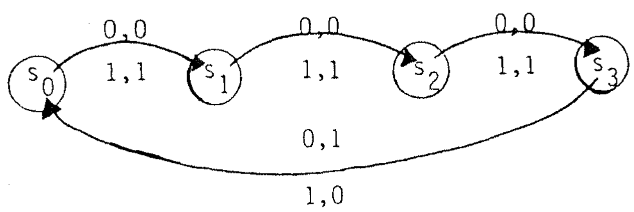
۷. الف) بنابر اصل لانه کبوتری، نخستین حالتی مانند s وجود دارد که دوبار روی می‌دهد. فرض می‌کنیم y رشتهٔ خروجی حاصل از اولین برخورد با s و قبل از برخورد دوم با آن باشد. در این صورت، خروجی از این لحظه به بعد عبارت است از $yyy\cdots$.

ب) n پ) n

۸.



۹.



۱۰. $x = ۱۱۰$

۱۱. فرض می‌کنیم بتوان چنین ماشینی ساخت و فرض می‌کنیم این ماشین n حالت، $n \in \mathbf{Z}^+$، داشته باشد. می‌خواهیم به‌ازای رشتهٔ ورودی $۰^n۱^{n+۱}$، خروجی $۰^{۲n}۱$ باشد. ولی، به‌تدریج که ۱ های این رشتهٔ ورودی پردازش می‌شوند $n+۱$ حالت s_1، s_2، ...، s_n و s_{n+1} را از تابع ν به‌دست می‌آوریم. در نتیجه، بنابر اصل لانه کبوتری،

دو حالت مانند s_i و s_j وجود دارد به‌طوری که $i < j$، ولی $s_j = s_i$. بنابراین، اگر $j - i$ حالت s_{i+1}، s_{i+2}، ...، s_j و ۱هایی را که ورودیهای متناظر آنها بودند حذف کنیم، می‌بینیم که این ماشین دنبالهٔ $A \notin 0^n 1^{n+1-(j-1)}$ را شناسایی می‌کند.

.۱۲

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_1	s_2	۰	۱
s_1	s_2	s_1	۱	۰
s_2	s_2	s_2	۱	۰
s_3	s_1	s_0	۰	۱

در اینجا جدول ω به این ترتیب از جدول ۱۵۰۶ به‌دست می‌آید که در ستونهای متناظر با ۰ و ۱، به‌جای هر ۰، ۱ (و به‌جای هر ۱، ۰) می‌گذاریم.

.۱۳ الف)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
(s_0, s_3)	(s_0, s_4)	(s_1, s_3)	۱	۱
(s_0, s_4)	(s_0, s_3)	(s_1, s_4)	۰	۱
(s_1, s_3)	(s_1, s_3)	(s_2, s_4)	۱	۱
(s_1, s_4)	(s_1, s_4)	(s_2, s_3)	۱	۱
(s_2, s_3)	(s_2, s_3)	(s_0, s_4)	۱	۱
(s_2, s_4)	(s_2, s_4)	(s_0, s_3)	۱	۰

ب) $\omega((s_0, s_3), 1101) = 1111$، M_1 در حالت s_0 و M_2 در حالت s_4 است.

۱۴. برنامهٔ زیر خروجی متناظر با رشتهٔ ورودی ۱۰۰۰۰۱۱۰۰۰ را تعیین می‌کند.

```
10   Dim A(3,2), B(3,2)
20   Mat Read A,B
30   Data 2,1,3,1,3,1,0,0,0,0,1,1
40   Dim P(100), S(100)
50   Read N
60   For I = 1 to N
70        Read X
80        If I <> 1 Then 120
90        If X = 0 Then P(1) = B(1,1) Else P(1) = B(1,2)
100       If X = 0 Then S(1) = A(1,1) Else S(1) = A(1,2)
110       Go To 140
120       Y = X + 1
```

```
130        P(I) = B(S(I-1)Y) : S(I) = A(S(I-1),Y)
140    Next I
150    Data 10,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0
160    Print "The output is";
170    For I = To N-1
180            Print P(I);
190    Next I
200    Print P(N)
210    Print "The machine is now in state"; S(N)
220    End
```

۷
رابطه‌ها: دومین برخورد

بند ۱.۷

۱. الف) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

ب) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2)\}$

پ) $\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$

۲. ۹–، ۲–، ۵، ۱۲ و ۱۹

۳. الف) فرض می‌کنیم $f_1, f_2, f_3 \in F$ عبارت باشند از $f_1(n) = n + 1$، $f_2(n) = 5n$ و $f_3(n) = 4n + \frac{1}{n}$.

ب) فرض می‌کنیم $g_1, g_2, g_3 \in F$ عبارت باشند از $g_1(n) = 3$، $g_2(n) = \frac{1}{n}$ و $g_3(n) = \sin n$.

۴. الف) رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ A

(یک) بازتابی است هرگاه $\forall x \in A (x,x) \in \mathcal{R}$.

(دو) متقارن است هرگاه $\forall x, y \in A\big[(x,y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (y,x) \in \mathcal{R}\big]$.

(سه) تراياست هرگاه $\forall x, y, z \in A\big[(x,y),\ (y,z) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x,z) \in \mathcal{R}\big]$.

(چهار) پاد متقارن است هرگاه $\forall x, y \in A[(x,y),(y,x) \in \mathcal{R} \Longrightarrow x = y]$.

ب) رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ A

(یک) بازتابی نیست هرگاه $\exists x \in A (x,x) \notin \mathcal{R}$.

(دو) متقارن نیست هرگاه $\exists x, y \in A\big[(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,x) \notin \mathcal{R}\big]$.

(سه) ترایا نیست هرگاه $\exists x, y, z \in A\big[(x,y),(y,z) \in \mathcal{R} \wedge (x,z) \notin \mathcal{R}\big]$.

(چهار) پادمتقارن نیست هرگاه $\exists x, y \in A\big[(x,y),(y,x) \in \mathcal{R} \wedge x \neq y\big]$.

۵. الف) بازتابی، پادمتقارن و ترایا

ب) ترایا

پ) بازتابی، متقارن و ترایا

ت) متقارن

ث) (زوج): بازتابی، متقارن و ترایا. (فرد): متقارن

ج) (زوج): بازتابی، متقارن و ترایا. (فرد): متقارن

چ) متقارن　　　ح) بازتابی و متقارن　　　خ) بازتابی و ترایا

د) اگر x زوج باشد، $x^۳$، $x^۲$ و $x^۲ + x^۳$ نیز زوج‌اند. اگر x فرد باشد، می‌بینیم که $x^۳$ و $x^۲$ هر دو فردند و بنابراین، $x^۲ + x^۳$ زوج است. در نتیجه، به‌ازای هر $x \in \mathbf{Z}^+$ داریم $x\mathcal{R}x$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است.

اکنون فرض می‌کنیم $x, y \in \mathbf{Z}^+$ و $x\mathcal{R}y$. دراین صورت

$$x\mathcal{R}y \Longrightarrow (\text{زوج است } x^۳ + y^۲) \Longrightarrow ((\text{فردند } y^۲ \text{ و } x^۳) \text{ یا } (\text{زوج‌اند } y^۲ \text{ و } x^۳)) \Longrightarrow$$
$$((\text{هر دو فردند } y, x) \text{ یا } (\text{هر دو زوج‌اند } y, x)) \Longrightarrow ((\text{زوج است } y^۳ + x^۲) \text{ یا } (\text{زوج است } y^۳ + x^۲))$$
$$\Longrightarrow y\mathcal{R}x$$

در نتیجه، $\mathcal{R}$ متقارن است.

چون $۱\mathcal{R}_۲$ و $۳\mathcal{R}_۱$، ولی $۳ \neq ۱$، رابطهٔ مفروض پادمتقارن نیست. سرانجام، فرض می‌کنیم $w, x, y \in \mathbf{Z}^+$ و $w\mathcal{R}x$ و $x\mathcal{R}y$. با توجه به محاسبات قبلی می‌دانیم که

$$(w\mathcal{R}x) \wedge (x\mathcal{R}y) \Longrightarrow (\text{و } y \text{ و } w\text{ یا هر سه زوج‌اند یا هر سه فرد} \text{ ، } x) \Longrightarrow$$
$$(\text{در هر حالت، } w^۲ + y^۲ \text{ زوج است}) \Longrightarrow w\mathcal{R}y$$

بنابراین، این رابطه ترایاست.

۶. رابطهٔ قسمت (الف) یک ترتیب جزئی است. رابطه‌های قسمتهای (پ)، (ث ـ زوج)، (ج ـ زوج) و (د) رابطهٔ هم‌ارزی هستند.

۷. الف) به‌ازای هر $x \in A$، $(x,x) \in \mathcal{R}_۱$ و $(x,x) \in \mathcal{R}_۲$. بنابراین، $(x,x) \in \mathcal{R}_۱ \cap \mathcal{R}_۲$ و $\mathcal{R}_۱ \cap \mathcal{R}_۲$ بازتابی است.

ب) همهٔ این نتایج درست‌اند. مثلاً اگر $\mathcal{R}_۱$ و $\mathcal{R}_۲$ هر دو ترایا باشند و اگر $(x,y),(y,z) \in \mathcal{R}_۱ \cap \mathcal{R}_۲$، دراین صورت $(x,y),(y,z) \in \mathcal{R}_۱$ و $(x,y),(y,z) \in \mathcal{R}_۲$ و بنابراین، (با توجه به ویژگی ترایایی) $(x,z) \in \mathcal{R}_۱, (x,z) \in \mathcal{R}_۲$. در نتیجه، $(x,z) \in \mathcal{R}_۱ \cap \mathcal{R}_۲$. [اثبات ویژگیهای تقارن و پادتقارن نیز به همین ترتیب انجام می‌گیرد.]

۸. الف) به‌ازای هر $x \in A$، $(x,x) \in \mathcal{R}_۱$. همین‌طور $\mathcal{R}_۲ \subseteq \mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$. بنابراین، اگر $\mathcal{R}_۱$ یا $\mathcal{R}_۲$ بازتابی باشد، $\mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$ نیز بازتابی است.

ب) (یک) اگر $x, y \in A$ و $(x,y) \in \mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$، بدون کاستن از کلیت برهان فرض می‌کنیم $(x,y) \in \mathcal{R}_۱$. دراین صورت

$$(\text{متقارن} \mathcal{R}_۱ \text{ و } (x,y) \in \mathcal{R}_۱) \Longrightarrow (y,x) \in \mathcal{R}_۱ \Longrightarrow (y,x) \in \mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$$

بنابراین، $\mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$ متقارن است.

(دو) نادرست: فرض کنید $A = \{۱, ۲\}$، $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۱), (۱, ۲)\}$ و $\mathcal{R}_۲ = \{(۲, ۱)\}$. دراین صورت،

$$(۱, ۲), (۲, ۱) \in \mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$$

و $۲ \neq ۱$. بنابراین، $\mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$ پادمتقارن نیست.

(سه) نادرست: فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳\}$، $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۱), (۱, ۲)\}$ و $\mathcal{R}_۲ = \{(۲, ۳)\}$. دراین صورت $(۱, ۲), (۲, ۳) \in \mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$، ولی $(۱, ۳) \notin \mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$. بنابراین، $\mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$ ترایا نیست.

۹. الف) درست

ب) نادرست: فرض کنید $A = \{۱, ۲\}$ و $\mathcal{R} = \{(۱, ۲), (۲, ۱)\}$

پ) (یک) بازتابی: درست

(دو) متقارن: نادرست. فرض کنید $A = \{۱, ۲\}$، $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۱)\}$ و $\mathcal{R}_۲ = \{(۱, ۱), (۱, ۲)\}$.

(سه) پاد متقارن و ترایا: نادرست. فرض کنید $A = \{۱, ۲\}$، $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۲)\}$ و $\mathcal{R}_۲ = \{(۱, ۲), (۲, ۱)\}$.

ت) (یک) بازتابی: نادرست. فرض کنید $A = \{۱, ۲\}$، $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۱)\}$ و $\mathcal{R}_۲ = \{(۱, ۱), (۲, ۲)\}$.

(دو) متقارن: نادرست. فرض کنید $A = \{۱, ۲\}$، $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۲)\}$ و $\mathcal{R}_۲ = \{(۱, ۲), (۲, ۱)\}$.

(سه) پادمتقارن: درست

(چهار) ترایا: نادرست. فرض کنید

$$A = \{۱, ۲\}$$
$$\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۲), (۲, ۱)\}$$
$$\mathcal{R}_۲ = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۱), (۲, ۲)\}$$

ث) درست

۱۰. الف) $۲^{۱۲}$ ب) $(۲^۴)(۲^۶) = ۲^{۱۰}$ پ) $۲^۶$

ت) $۲^{۱۱}$ ث) $(۲^۴)(۲^۵) = ۲^۹$ ج) $۲^۴ \times ۳^۶$

چ) $۲^۴ \times ۳^۵$ ح) $۲^۲$ خ) ۱

۱۱. الف) $۹ = \binom{۳}{۲}\binom{۳}{۲} = \binom{۲+۲-۱}{۲}\binom{۲+۲-۱}{۲}$

ب) $۱۸ = \binom{۴}{۲}\binom{۳}{۲} = \binom{۳+۲-۱}{۲}\binom{۲+۲-۱}{۲}$

پ) $۳۰ = \binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲} = \binom{۴+۲-۱}{۲}\binom{۲+۲-۱}{۲}$

ت) $۶۰ = \binom{۵}{۲}\binom{۴}{۲} = \binom{۴+۲-۱}{۲}\binom{۳+۲-۱}{۲}$

ث) $۸۱ = ۳^۴ = \binom{۳}{۲}^۴ = \binom{۲+۲-۱}{۲}^۴$

ج) چون $۱۳۸۶۰ = ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱$، نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{R}$ حاوی

$$\binom{۳+۲-۱}{۲}^۲\binom{۲+۲-۱}{۲}^۳ = \binom{۴}{۲}^۲\binom{۳}{۲}^۳ = ۳۶ \times ۲۷ = ۹۷۲$$

جفت مرتب است.

۱۲. چون

$$\begin{aligned}
۵۸۸۰ &= \binom{۶+۲-۱}{۲}\binom{۴+۲-۱}{۲}\binom{(k+۱)+۲-۱}{۲} = \binom{۷}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{k+۲}{۲} \\
&= ۲۱ \times ۱۰ \times \frac{(k+۲)(k+۱)}{۲}
\end{aligned}$$

می‌بینیم که $(k+۲)(k+۱) = ۵۶$ و $k = ۶$.

برای $n = p_1^5 p_2^3 p_3^6$، $(۵+۱)(۳+۱)(۶+۱) = ۶ \times ۴ \times ۷ = ۱۶۸$ مقسوم‌علیه صحیح مثبت وجود دارد. بنابراین، $|A| = ۱۶۸$.

۱۳. ممکن است عنصری مانند $a \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هیچ‌یک از عنصرهای $b \in B$ نه $(a,b) \in \mathcal{R}$ و نه $(b,a) \in \mathcal{R}$.

۱۴. n جفت مرتب به‌صورت (x,x)، $x \in A$، وجود دارد. از هر یک از $\frac{n^۲-n}{۲}$ مجموعهٔ $\{(x,y)(y,x)\}$، متشکل از دوجفت مرتب که در آن $x,y \in A$ و $x \neq y$، یک عنصر انتخاب می‌کنیم. در نتیجه، مقدار ماکسیمم $n + \frac{n^۲-n}{۲} = \frac{n^۲+n}{۲}$ به‌دست می‌آید.

تعداد رابطه‌های پادمتقارنی که می‌توانند به این اندازه باشند برابر است با $۲^{(n^۲-n)/۲}$.

۱۵. $r - n$ تعداد عنصرهایی از $\mathcal{R}$ است که به‌صورت (a,b)، $a \neq b$، هستند. چون $\mathcal{R}$ متقارن است، $r - n$ زوج است.

۱۶. الف) $x\mathcal{R}y$ هرگاه $x < y$.

ب) مثلاً، فرض می‌کنیم $\mathcal{R}$ در شرایط (دو) و (سه) صدق کند. چون $\mathcal{R} \neq \emptyset$، فرض می‌کنیم به‌ازای $x,y \in A$ داشته باشیم $(x,y) \in \mathcal{R}$. چون $\mathcal{R}$ متقارن است، پس $(y,x) \in \mathcal{R}$. در این صورت، بنابر ویژگی ترایایی، داریم $(x,x) \in \mathcal{R}$ (و $(y,y) \in \mathcal{R}$). ولی اگر $(x,x) \in \mathcal{R}$، رابطهٔ $\mathcal{R}$ غیر بازتابی نیست.

پ) $۲^{(n^۲-n)}$، $۲^{n^۲} - ۲ \times ۲^{(n^۲-n)}$.

بند ۲.۷

۱.

$$S \circ \mathcal{R} = \{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۴)\} \qquad \mathcal{R} \circ S = \{(۱,۳),(۱,۴)\}$$
$$S^۲ = S^۳ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴)\} \qquad \mathcal{R}^۲ = \mathcal{R}^۳ = \{(۱,۴),(۲,۴),(۴,۴)\}$$

۲. فرض می‌کنیم $x \in A$. چون $\mathcal{R}$ بازتابی است، $(x,x) \in \mathcal{R}$. بنابراین،

$$(x,x) \in \mathcal{R}, (x,x) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x,x) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}^۲$$

۳. $(a,d) \in (\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲) \circ \mathcal{R}_۳ \Longrightarrow$ (به ازای عنصری مانند $c \in C$، $(a,c) \in \mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲$ و $(c,d) \in \mathcal{R}_۳$)

$\Longrightarrow$ (به‌ازای عنصرهایی مانند $b \in B$ و $c \in C$ داریم $(a,b) \in \mathcal{R}_۱$، $(b,c) \in \mathcal{R}_۲$ و $(c,d) \in \mathcal{R}_۳$)

$\Longrightarrow$ ($(a,b) \in \mathcal{R}_۱$ و $(b,d) \in \mathcal{R}_۲ \circ \mathcal{R}_۳$) $\Longrightarrow (a,d) \in \mathcal{R}_۱ \circ (\mathcal{R}_۲ \circ \mathcal{R}_۳)$

بنابراین، $(\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲) \circ \mathcal{R}_۳ \subseteq \mathcal{R}_۱ \circ (\mathcal{R}_۲ \circ \mathcal{R}_۳)$

۴. الف)

$$(x,z) \in \mathcal{R}_1\circ(\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3) \iff \big((y,z) \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \text{ و } (x,y) \in \mathcal{R}_1 \text{ ، } y \in B \text{ بهازای عنصری مانند}\big)$$

$$\iff \Big(\big((y,z) \in \mathcal{R}_3 \text{ و } (x,y) \in \mathcal{R}_1\big) \text{ یا } \big((y,z) \in \mathcal{R}_2 \text{ و } (x,y) \in \mathcal{R}_1\big) \text{ ، } y \in B \text{ بهازای عنصری مانند}\Big)$$

$$\implies \big((x,z) \in \mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_3 \text{ یا } (x,z) \in \mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2\big) \iff (x,z) \in (\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2) \cup (\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_3)$$

بنابراین، $\mathcal{R}_1\circ(\mathcal{R}_2\circ\mathcal{R}_3) \subseteq (\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2) \cup (\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_3)$. برای اثبات رابطهٔ شمول وارون، می‌بینیم که

$$(x,z) \in (\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2) \cup (\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_3) \implies \big((x,z) \in \mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_3 \text{ یا } (x,z) \in \mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2\big)$$

بدون کاستن ازکلیت برهان فرض می‌کنیم $(x,z) \in \mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2$. دراین صورت عنصری مانند $y \in B$ وجود دارد به‌طوری‌که $(x,y) \in \mathcal{R}_1$ و $(y,z) \in \mathcal{R}_2$. ولی از $(y,z) \in \mathcal{R}_2$ نتیجه می‌شودکه $(y,z) \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$. بنابراین، $(x,z) \in \mathcal{R}_1\circ(\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3)$ و نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

ب) برهان این قسمت مشابه برهان قسمت (الف) است. برای اثبات اینکه این شمول می‌تواند شمول سره باشد، فرض‌کنید $A = B = C = \{1,2,3\}$، $\mathcal{R}_1 = \{(1,2),(1,1)\}$، $\mathcal{R}_2 = \{(2,3)\}$ و $\mathcal{R}_3 = \{(1,3)\}$. دراین صورت $\mathcal{R}_1\circ(\mathcal{R}_2\circ\mathcal{R}_3) = \mathcal{R}_1\circ\emptyset = \emptyset$ ، ولی $(\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2)\circ(\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_3) = \{(1,3)\}$.

۵. نتیجهٔ مطلوب از اصل لانه کبوتری به‌دست می‌آید. در اینجا، کبوترها عبارت‌اند از همهٔ $2^{n^2} + 1$ عدد صحیح بین ۰ و 2^{n^2}، به انضمام ۰ و 2^{n^2}، و لانه‌های کبوترها عبارت‌اند از همهٔ 2^{n^2} رابطه‌ای که در A وجود دارند.

۶. فرض کنید $S = \{(1,1),(1,2),(1,4)\}$ و $T = \{(2,1),(2,2),(1,4)\}$.

۷. دراینجا برای هر a_{ii}، $1 \le i < 6$، دوانتخاب وجود دارد. برای هر جفت a_{ij} و a_{ji}، $1 \le i < j \le 6$، دوانتخاب وجود دارد و تعداد این نوع جفتها $15 = \frac{36-6}{2}$ است. در نتیجه، $2^{21} = (2^{15})(2^6)$ تا از این نوع ماتریسها وجود دارد.

۸. به‌ازای هر ۰ در E ، ماتریس F می‌تواند ۰ یا ۱ داشته باشد (درایه‌های دیگر F ، ۱ هستند) چون در E شش ۰ داریم، 2^6 ماتریس ممکن مانند F وجود دارد.

۹. درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم از ماتریس $M(\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2)$ را درنظر می‌گیریم. اگر این درایه ۱ باشد، دراین صورت عنصری مانند $b_k \in B$ ، $1 \le k \le n$، وجود دارد به‌طوری که $(a_i,b_k) \in \mathcal{R}_1$ و $(b_k,c_j) \in \mathcal{R}_2$. در نتیجه، درایهٔ سطر kاُم ماتریس $M(\mathcal{R}_1)$ برابر با ۱ و درایهٔ سطر kاُم و ستون jاُم ماتریس $M(\mathcal{R}_2)$ برابر با ۰ است. بنابراین، درایهٔ سطر i اُم و ستون jاُم $M(\mathcal{R}_1)\cdot M(\mathcal{R}_2)$ برابر با ۰ است.

اگر درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم از ماتریس $M(\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2)$ برابر با ۰ باشد، دراین صورت به‌ازای هر $1 \le k \le n$، $(a_i,b_k) \notin \mathcal{R}_1$ یا $(b_k,c_j) \notin \mathcal{R}_2$. این به معنی آن است که در ماتریسهای $M(\mathcal{R}_1)$ و $M(\mathcal{R}_2)$، اگر درایهٔ سطر iاُم و ستون kاُم ماتریس $M(\mathcal{R}_1)$ برابر با ۱ باشد، آن‌گاه درایهٔ سطر kاُم و ستون jاُم و $M(\mathcal{R}_2)$ برابر با ۰ است. بنابراین، درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم $M(\mathcal{R}_1)\cdot M(\mathcal{R}_2)$ برابر با ۰ است.

۱۰. الف) اگر $M(\mathcal{R}) = 0$، دراین صورت به‌ازای هر $x,y \in A$، $(x,y) \notin \mathcal{R}$. بنابراین، $\mathcal{R} = \emptyset$. برعکس، اگر $M(\mathcal{R}) \neq 0$، دراین صورت عنصرهایی مانند $x,y \in A$ وجود دارند به‌طوری که $x\mathcal{R}y$. بنابراین، $(x,y) \in \mathcal{R}$ و $\mathcal{R} \neq \emptyset$.

پ) به‌ازای $m = 1$ داریم $M(\mathcal{R}^1) = M(\mathcal{R}) = [M(\mathcal{R})]^1$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت درست است. اگر درستی این گزاره را به‌ازای $m = k$ مفروض بگیریم، خواهیم داشت $M(\mathcal{R})^k = [M(\mathcal{R})]^k$.
اکنون حالت $m = k + 1$ را درنظر می‌گیریم. با توجه به تمرین ۹ داریم

$$M(\mathcal{R}^{k+1}) = M(\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^k) = M(\mathcal{R}) \cdot M(\mathcal{R}^k) = M(\mathcal{R}) \cdot [M(\mathcal{R})]^k = [M(\mathcal{R})]^{k+1}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $m \geq 1$ درست است.

۱۱. الف) در $M = (m_{ij})_{n\times n}$، به‌ازای هر $x \in A$ داریم

$\mathcal{R}$ بازتابی $\iff$ (به‌ازای هر $x \in A$، $(x,x) \in \mathcal{R}$) $\iff$ $m_{xx} = 1$)

$$\iff I_n \leq M$$

ب) $\mathcal{R}$ متقارن $\iff [\forall x, y \in A, (x,y) \in \mathcal{R} \implies (y,x) \in \mathcal{R}] \iff$

[به‌ازای هر $x, y \in A$، اگر در M داشته باشیم $m_{xy} = 1$، آن‌گاه در M داریم $m_{xy} = 1$]

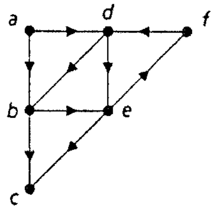
$$\iff M = M^{tr}$$

۱۲.

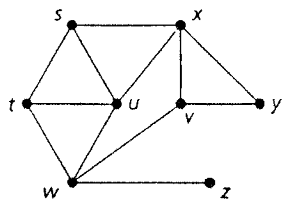
```
10! THIS PROGRAM MAY BE USED TO DETERMINE IF A RELATION
20! ON A SET OF SIZE N, WHERE N <= 20, IS AN
30! EQUIVALENCE RELATION. WE ASSUME WITHOUT LOSS OF
40! GENERALITY THAT THE ELEMENTS ARE 1,2,3,...,N.
50!
60  INPUT "N ="; N
70  PRINT "INPUT THE RELATION MATRIX FOR THE RELATION"
80  PRINT "BEING EXAMINED BY TYPING A(I,J) = 1 FOR EACH"
90  PRINT "1 <=I <=N, 1 <=J <=N, WHERE (I,J) IS IN"
100 PRINT "THE RELATION. WHEN ALL THE ORDERED PAIRS HAVE"
110 PRINT "BEEN ENTERED TYPE 'CONT' "
120 STOP
130 DIM A(20,20), C(20,20), D(20,20)
140 FOR K = 1 TO N
150       T = T + A(K,K)
160 NEXT K
170 IF T = N THEN &
            PRINT "R IS REFLEXIVE"; X = 1: GO TO 190
180 PRINT "R IS NOT REFLEXIVE"
190  FOR I = 1 TO N
200       FOR J = I + 1 TO N
210             IF A(I,J) <> A(J,I) THEN GO TO 260
220       NEXT J
230 NEXT I
```

```
240 PRINT "R IS SYMMETRIC": Y = 1
250 GO TO 270
260 PRINT "R IS NOT SYMMETRIC"
270 MAT C = A
280 MAT D = A*C
290 FOR I = 1 TO N
300     FOR J = 1 TO N
310         IF D(I,J) > 0 AND A(I,J) = 0 THEN GO TO 360
320     NEXT J
330 NEXT I
340 PRINT "R IS TRANSITIVE"; Z = 1
350 GO TO 370
360 PRINT "R IS NOT TRANSITIVE"
370 IF X + Y + Z = 3 THEN &
            PRINT "R IS AN EQUIVALENCE RELATION" &
    ELSE PRINT "R IS NOT AN EQUIVALENCE RELATION"
380 END
```

۱۳. الف)



ب)



۱۴. الف) درست   ب) درست   پ) درست   ت) نادرست

۱۵. (یک)

$$\mathcal{R} = \{(a,b),(b,a),(a,e),(e,a),(b,c),(c,b),(b,d),$$
$$(d,b),(b,e),(e,b),(d,e),(e,d),(d,f),(f,d)\}$$

$$M(\mathcal{R}) = \begin{array}{c} \\ (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \\ (e) \\ (f) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (a) & (b) & (c) & (d) & (e) & (f) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

در قسمتهای (دو)، (سه) و (چهار) نیز سطرها و ستونهای ماتریس رابطه مانند قسمت (یک) اندیسگذاری می‌شوند.

(دو) $\mathcal{R} = \{(a,b),(b,e),(d,b),(d,c),(e,f)\}$

$$M(\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

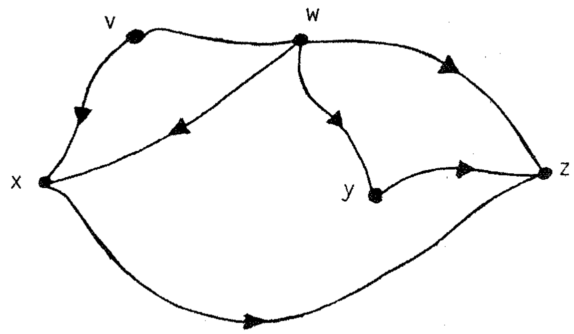
(سه) $\mathcal{R} = \{(a,a),(a,b),(b,a),(c,d),(d,c),(d,e),(e,d),(d,f),(f,d),(e,f),(f,e)\}$

$$M(\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(چهار) $\mathcal{R} = \{(b,a),(b,c),(c,b),(b,e),(c,d),(e,d)\}$

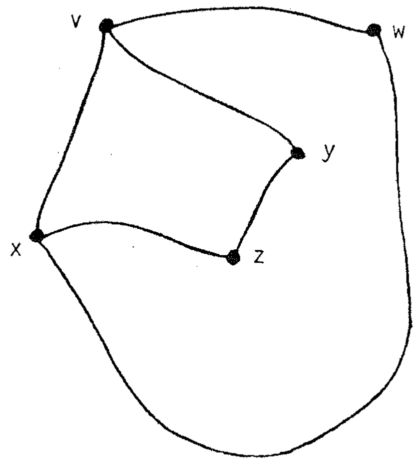
$$M(\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۶. الف) $\mathcal{R} = \{(v,w),(v,x),(w,v),(w,x)(w,y),(w,z),(x,z),(y,z)\}$



ب)

$\mathcal{R} = \{(v,w),(v,x),(v,y),(w,v),(w,x),(x,v),(x,w),(x,z),(y,v),(y,z),(z,x),(z,y)\}$



۱۷. به‌ازای هر $v \in V$، اگر سطر متناظر با v در M و ستون متناظر با v در M فقط از ۰ تشکیل شده باشند، دراین‌صورت درگراف سودار G، v یک رأس تنهاست.

۱۸. الف) (یک) $\binom{۷}{۲}$

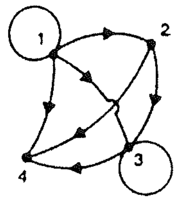
(دو) هر مسیر سودار متناظر با زیرمجموعه‌ای از $\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ است. این مجموعه $۲^۵$ زیرمجموعه دارد و در نتیجه، $۲^۵$ مسیر سودار در G رأس ۱ را به رأس ۷ وصل می‌کنند.

ب) (یک) $|E| = \binom{n}{۲}$

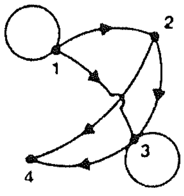
(دو) $۲^{n-۲}$ مسیر سودار در G وجود دارند که ۱ را به n وصل می‌کنند.

(سه) $۲^{b-a-۱} = ۲^{[((b-a)+۱)-۲]}$ مسیر سودار در G وجود دارند که a را به b وصل می‌کنند.

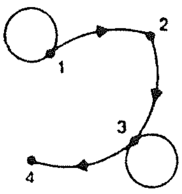
۱۹. $\mathcal{R}^{۳}$ و $\mathcal{R}^{۴}$:



$\mathcal{R}^{۲}$:



$\mathcal{R}$:



۲۰. $۲^{۲۵}$، $۲^{۱۵} = (۲^{۵})(۲^{۱۰})$

۲۱. $۲^{۲۵}$، $۲^{۱۵} = (۲^{۵})(۲^{۱۰})$

۲۲. $\binom{۶}{۲}$، $\binom{۷}{۲}$، $\binom{n}{۲}$

۲۳. الف)

$\mathcal{R}_{۱}$:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$\mathcal{R}_{۲}$:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

ب) اگر رابطهٔ هم‌ارزی $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ متناهی A مفروض باشد، عنصرهای A را چنان فهرست می‌کنیم که عنصرهایی که به یک ردهٔ هم‌ارزی [بند ۷ ۰ ۴ (جلد دوم، فصل ۷) را ببینید] تعلق دارند مجاور باشند. دراین صورت، ماتریس رابطه دارای بلوکهای مربعی، متشکل از درایه‌های ۱، در امتداد قطر اصلی است.

۲۴. الف) $k \in \mathbf{Z}^+$. دراین صورت $\mathcal{R}^{۱۲k} = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶),(۷,۷)\}$ و $\mathcal{R}^{۱۲k+۱} = \mathcal{R}$. کوچکترین مقدار $n > ۱$ به‌طوری که $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}$ عبارت است از ۱۳ $= n$، به‌ازای همهٔ مضربهای ۱۲، گرافها فقط از طوقه تشکیل شده‌اند. به‌ازای $n = ۳$ داریم $(۵,۵),(۶,۶),(۷,۷) \in \mathcal{R}^{۳}$ و این کوچکترین توانی از $\mathcal{R}$ است که دست‌کم یک طوقه دارد.

ب) وقتی $n = ۲$، می‌بینیم که $(۱,۱)$ و $(۲,۲)$ در $\mathcal{R}$ هستند. به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$،

$$\mathcal{R}^{۳۰k} = \{(x,x) | x \in \mathbf{Z}^+, ۱ \leq x \leq ۱۰\}$$

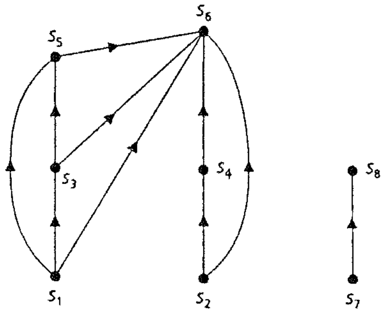
و $\mathcal{R}^{۳۰k+۱} = \mathcal{R}$. بنابراین، $\mathcal{R}^{۳۱}$ کوچکترین توانی از $\mathcal{R}$ است که در $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}$ $(n > ۱)$ صدق می‌کند.

پ) فرض می‌کنیم $\mathcal{R}$ رابطه‌ای در مجموعهٔ A باشد، که در آن $|A| = m$. فرض می‌کنیم G گراف سودار وابسته به $\mathcal{R}$ باشد. در این صورت هر مؤلفهٔ G دور سوداری مانند C_i با m_i رأس است، که در آن $۱ \leq i \leq k$. (بنابراین، $m_۱ + m_۲ + \cdots + m_k = m$) اگر $t = \min\{m_i | ۱ \leq i \leq k\}$، دراین صورت $\mathcal{R}^t$ کوچکترین

توانی از $\mathcal{R}$ است که در آن طوقه‌ها ظاهر می‌شوند.

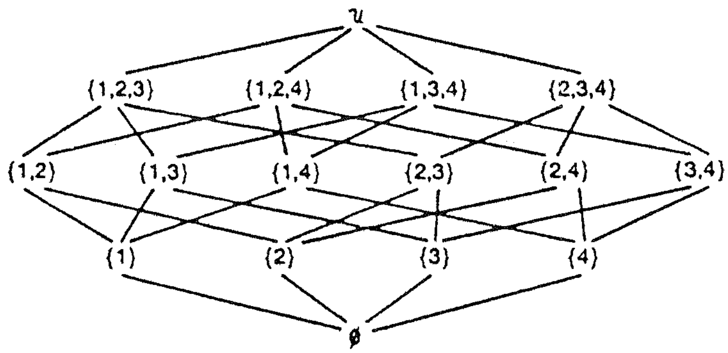
فرض می‌کنیم s کوچکترین مضرب مشترک $m_۱$، $m_۲$، ...، m_k باشد. دراین صورت به‌ازای هر $r \in \mathbf{Z}^+$، $\mathcal{R}^{rs}$ رابطهٔ همانی (یعنی رابطهٔ برابری) در A است و $\mathcal{R}^{rs+۱} = \mathcal{R}$. کوچکترین توانی از $\mathcal{R}$ که برابر با خود $\mathcal{R}$ باشد برابر است با $s + ۱$.

.۲۵

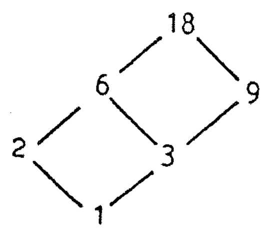


بند ۳.۷

.۱



.۲



۳. به‌ازای هر $a \in A$ و $b \in B$، $a\mathcal{R}_۱ a$ و $b\mathcal{R}_۲ b$ و بنابراین، $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$. بنابراین، $\mathcal{R}$ بازتابی است. از طرف دیگر،

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d), (c,d)\mathcal{R}(a,b) \Longrightarrow$$
$$\left(d\mathcal{R}_۲ b \text{ ، } b\mathcal{R}_۲ d \text{ و } c\mathcal{R}_۱ a \text{ ، } a\mathcal{R}_۱ c\right) \Longrightarrow \left(b = d \text{ و } a = c\right) \Longrightarrow$$
$$(a,b) = (c,d) \Longrightarrow (\mathcal{R} \text{ پادمتقارن است})$$

سرانجام،

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d), (c,d)\mathcal{R}(e,f) \Longrightarrow$$
$$\left(d\mathcal{R}_۲ f \text{ ، } b\mathcal{R}_۲ d \text{ و } c\mathcal{R}_۱ e \text{ ، } a\mathcal{R}_۱ c\right) \Longrightarrow \left(b\mathcal{R}_۲ f \text{ و } a\mathcal{R}_۱ e\right) \Longrightarrow$$
$$(a,b)\mathcal{R}(e,f) \Longrightarrow \left(\mathcal{R} \text{ ترایاست}\right)$$

درنتیجه، $\mathcal{R}$ ترتیب جزئی است.

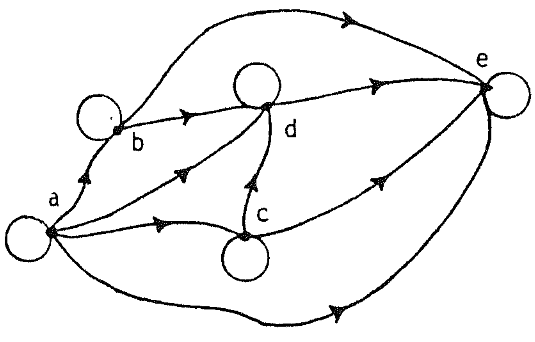
۴. خیر. فرض می‌کنیم $A = B = \{۱, ۲\}$ و هریک از دو رابطهٔ $\mathcal{R}_۱$ و $\mathcal{R}_۲$ رابطهٔ معمولی «کوچکتر از یا برابر با» باشد. دراین صورت $\mathcal{R}$ ترتیب جزئی است، ولی ترتیب تام نیست زیرا نمی‌توانیم (۲ ,۱) و (۱ ,۲) را با هم مقایسه کنیم.

۵. $\{۱,۲,۳\} > \{۲,۳\} > \{۱,۳\} > \{۱,۲\} > \{۳\} > \{۲\} > \{۱\} > \emptyset$. (امکانات دیگری هم وجود دارد.)

۶. الف)

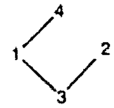
$$M(\mathcal{R}) = \begin{array}{c} \\ (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \\ (e) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (a) & (b) & (c) & (d) & (e) \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \end{array}$$

ب)



پ) $a < b < c < d < e$ یا $a < c < b < d < e$

۷. الف) ب) $۴ > ۱ > ۲ > ۳$ یا $۴ > ۲ > ۱ > ۳$ پ) ۲



۸. اگر $\mathcal{R}$ ترتیب جزئی باشد، دراین صورت $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}^c \subseteq \{(a,a)|a\in A\}$، زیرا با توجه به ویژگی پادتقارن $\mathcal{R}$ داریم

$$(a,b)\in\mathcal{R}\cap\mathcal{R}^c \Longrightarrow b\mathcal{R}a, a\mathcal{R}b \Longrightarrow a=b$$

رابطهٔ شمول وارون از ویژگی بازتابی $\mathcal{R}$ نتیجه می‌شود. برعکس، از $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}^c = \{(a,a)|a\in A\}$ نتیجه می‌شود که $\mathcal{R}$ هم بازتابی است هم پادتقارن. چون $\mathcal{R}$ بنابر فرض ترایاست، پس $\mathcal{R}$ ترتیب جزئی است.

۹. فرض می‌کنیم $a_۱ \in A$. اگر عنصری مانند $a\in A$، $a \neq a_۱$ و $a\mathcal{R}a_۱$، وجود نداشته باشد، دراین صورت $a_۱$ مینیمال است. در غیراین صورت، عنصری مانند $a_۲\in A$، $a_۲\neq a_۱$ و $a_۲\mathcal{R}a_۱$، وجود دارد. اگر عنصری غیر از $a_۲$ مانند $a\in A$ وجود نداشته باشد که در $a\mathcal{R}a_۲$ صدق کند، دراین صورت $a_۲$ مینیمال است. در غیراین صورت، عنصری مانند $a_۳\in A$ وجود دارد به‌طوری که $a_۳\neq a_۲$، $a_۳\neq a_۱$، $a_۳\mathcal{R}a_۲$ و $a_۲\mathcal{R}a_۱$. ($a_۳\neq a_۱$، زیرا اگر این‌طور نباشد، آن‌گاه $a_۱\mathcal{R}a_۲$ و $a_۲\mathcal{R}a_۱$. چون $\mathcal{R}$ پادمتقارن است، نتیجه می‌گیریم که $a_۱ = a_۲$.) چون A متناهی است، این فرایند با عنصری مانند $a_n\in A$ به‌طوری که به‌ازای هر $a\in A$ داریم $a\neq a_n$ و $(a,a_n)\notin\mathcal{R}$)، پایان می‌پذیرد. بنابراین، a_n مینیمال است.

۱۰. فرض می‌کنیم $x,y\in A$ و هر دو کوچکترین عنصر A باشند. دراین صورت $x\mathcal{R}y$، زیرا x کوچکترین عنصر است و $y\mathcal{R}x$، زیرا y کوچکترین عنصر است. چون $\mathcal{R}$ پاد متقارن است داریم $x=y$.

۱۱. فرض می‌کنیم هر یک از دو عنصر x و y بزرگترین کران پایین باشد. در این صورت $x\mathcal{R}y$، زیرا x یک کران پایین و y یک بزرگترین کران پایین است. با استدلال مشابهی داریم $y\mathcal{R}x$. چون $\mathcal{R}$ پادمتقارن است، $x=y$. [اثبات برای lub نیز به‌همین ترتیب انجام می‌گیرد.]

۱۲. فرض کنید $\mathcal{U} = \{۱,۲,۳,۴\}$. فرض کنید A گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های سرهٔ $\mathcal{U}$ باشد که با رابطهٔ شمول جزئاً مرتب شده است. دراین صورت هر یک از مجموعه‌های $\{۱,۲,۳\}$، $\{۱,۲,۴\}$، $\{۱,۳,۴\}$ و $\{۲,۳,۴\}$ عنصر ماکسیمال A است.

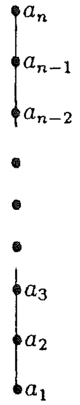
۱۳. فرض کنید $\mathcal{U} = \{۱,۲\}$ و $A=\mathcal{P}(\mathcal{U})$. فرض کنید $\mathcal{R}$ رابطهٔ شمول باشد. دراین صورت $(A,\mathcal{R})$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب است ولی تماماً مرتب نیست. فرض کنید $B=\{\emptyset,\{۱\}\}$. دراین صورت $(B\times B)\cap\mathcal{R}$ یک ترتیب تام است.

۱۴. به‌ازای هر دو رأس $x,y\in A$، $x\neq y$، یا یالی به‌صورت (x,y) وجود دارد یا یالی به‌صورت (y,x)، ولی نه هر دو. علاوه‌براین، اگر (x,y) و (y,z) دو یال G باشند، (x,z) نیز یالی از G است. سرانجام، در هر رأس گراف یک طوقه وجود دارد.

۱۵. $n+\binom{n}{۲}$

۱۶. $n+\binom{n}{۲}$

۱۷. الف) هر n عنصر A در امتداد یک خط قائم مرتب می‌شوند. در حقیقت، اگر $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ که در آن $a_۱\mathcal{R}a_۲\mathcal{R}a_۳\mathcal{R}\cdots\mathcal{R}a_n$، دراین صورت می‌توان نمودار را به‌صورت زیر رسم کرد:



ب) $n!$

۱۸. الف) فرض کنیم $a \in A$ مینیمال باشد. دراین صورت به‌ازای $x \in A$، از $x\mathcal{R}a$ نتیجه می‌شود که $x = a$. بنابراین، اگر $M(\mathcal{R})$ ماتریس رابطه‌ای $\mathcal{R}$ باشد، ستون مربوط به 'a'، جز یک ۱ برای جفت مرتب (a, a)، تماماً از ۰ تشکیل شده است.

پ) فرض‌کنیم $b \in A$ بزرگترین عنصر باشد. دراین صورت ستون مربوط به 'b' در $M(\mathcal{R})$ تماماً از ۱ تشکیل شده است. اگر $c \in A$ کوچکترین عنصر باشد، دراین صورت سطر مربوط به 'c'، در $M(\mathcal{R})$ تماماً از ۱ تشکیل شده است.

۱۹.

	lub	glb		lub	glb		lub	glb
الف)	$\{۱, ۲\}$	$\emptyset$	پ)	$\{۱, ۲\}$	$\emptyset$	ث)	$\{۱, ۲, ۳\}$	$\emptyset$
ب)	$\{۱, ۲, ۳\}$	$\emptyset$	ت)	$\{۱, ۲, ۳\}$	$\{۱\}$	ج)	$\{۱, ۲, ۳\}$	$\emptyset$

۲۰. الف) (یک) فقط یکی از این نوع کرانهای بالا وجود دارد که عبارت است از $\{۱, ۲, ۳\}$.

(دو) در اینجا کرانهای بالا به صورت $\{۱, ۲, ۳, x\}$ هستند که در آن $x \in \mathcal{U}$ و $۴ \leq x \leq ۷$. بنابراین، ۴ تا از این نوع کرانهای بالا وجود دارد.

(سه) $\binom{۴}{۲}$ کران بالا برای B وجود دارد که هر یک از آنها حاوی ۵ عنصر از $\mathcal{U}$ است.

ب) $۱۶ = ۲^۴ = \binom{۴}{۴} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۱} + \binom{۴}{۰}$

پ) $\mathrm{lub}B = \{۱, ۲, ۳\}$

ت) فقط یکی و آن هم $\emptyset$ است.

ث) $\mathrm{glb}B = \emptyset$

۲۱. به‌ازای هر $a \in \mathbf{Z}$ داریم $a\mathcal{R}a$، زیرا $a - a = ۰$ و ۰ یک عدد صحیح نامنفی زوج است. بنابراین، $\mathcal{R}$ بازتابی

است. اگر $a, b, c \in \mathbf{Z}$ و $a\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}c$، دراین صورت به‌ازای دو عدد مانند $m, n \in \mathbf{N}$، $a - b = ۲m$ و $b - c = ۲n$ درنتیجه، $a - c = (a - b) + (b - c) = ۲(m + n)$،که در آن $m + n \in \mathbf{N}$. بنابراین، $a\mathcal{R}c$ و $b\mathcal{R}a$. دراین صورت هم $a - b$ عدد صحیح نامنفی است هم $b - a$. چون این امر فقط وقتی روی می‌دهد که $a - b = b - a$، می‌بینیم که

$$[a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a] \Longrightarrow a = b$$

و بنابراین، $\mathcal{R}$ پادمتقارن است.

درنتیجه، $\mathcal{R}$ یک ترتیب جزئی برای $\mathbf{Z}$ است، ولی این ترتیب یک ترتیب تام نیست. مثلاً، $۲, ۳ \in \mathbf{Z}$، ولی نه $۲\mathcal{R}۳$ برقرار است نه $۳\mathcal{R}۲$، زیرا نه $۱-$ عدد صحیح زوج نامنفی است نه ۱.

۲۲. همهٔ عنصرهای ۱۰۰۱، ۱۰۰۲، ...، ۱۹۹۹، ۲۰۰۰ ماکسیمال‌اند و بنابراین، دقیقاً ۱۰۰۰ عنصر ماکسیمال وجود دارد.

۲۳. الف) عنصر x عنصر مینیمال برای هر یک از دو رابطهٔ ترتیب جزئی

$$\mathcal{R}_۲ = \{(x, x), (y, y), (x, y)\} \text{ و } \mathcal{R}_۱ = \{(x, x), (y, y)\}$$

در A است.

ب) در اینجا عنصر x عنصر مینیمال برای هر یک از ده ترتیب جزئی در B است که در زیر می‌آیند:

$$\mathcal{R}_۱ = \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$$
$$\mathcal{R}_۲ = \{(x, x), (y, y), (z, z), (y, z)\}$$
$$\mathcal{R}_۳ = \{(x, x), (y, y), (z, z), (z, y)\}$$
$$\mathcal{R}_۴ = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y)\}$$
$$\mathcal{R}_۵ = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, z)\}$$
$$\mathcal{R}_۶ = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$$
$$\mathcal{R}_۷ = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$$
$$\mathcal{R}_۸ = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, z), (z, y), (x, y)\}$$
$$\mathcal{R}_۹ = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$$
$$\mathcal{R}_{۱۰} = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, z), (y, z)\}$$

۲۴. الف) به‌ازای هر $(a, b) \in A$، $a = a$ و $b \leq b$ و بنابراین، $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$. پس این رابطه ویژگی بازتابی دارد. اگر $(a, b), (c, d) \in A$ و اگر $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ و $(c, d)\mathcal{R}(a, b)$، دراین صورت با فرض $a \neq c$ می‌بینیم که

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Longrightarrow a < c$$
$$(c, d)\mathcal{R}(a, b) \Longrightarrow c < a$$

درنتیجه، $a < a$. بنابراین، $a = c$. اکنون می‌بینیم که

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Longrightarrow b \leq d$$
$$(c,d)\mathcal{R}(a,b) \Longrightarrow d \leq b$$

و بنابراین، $b = d$. بنابراین، از $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ و $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$ نتیجه می‌شود که $(a,b) = (c,d)$. پس این رابطه ویژگی پادتقارن دارد. سرانجام، فرض کنیم $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$ و $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ و $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$. دراین‌صورت،

(یک) $a < c$ یا (دو) $a = c$ و $b \leq d$؛ و

(یک′) $c < e$ یا (دو′) $c = e$ و $d \leq f$.

درنتیجه،

(یک″) $a < e$ یا (دو″) $a = e$ و $b \leq f$. پس $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$ و رابطهٔ $\mathcal{R}$ ترایاست.

آنچه در بالا آمد نشان می‌دهد که $\mathcal{R}$ یک ترتیب جزئی در A است.

ب و پ) فقط یک عنصر مینیمال وجود دارد و آن هم $(۰,۰)$ است. این عنصر کوچکترین عنصر برای این ترتیب جزئی نیز هست.

عنصر $(۱,۱)$ تنها عنصر ماکسیمال برای این ترتیب جزئی است. این عنصر بزرگترین عنصر نیز هست.

ت) این ترتیب جزئی یک ترتیب تام است. می‌بینیم که

$$(۰,۰)\mathcal{R}(۰,۱)\mathcal{R}(۱,۰)\mathcal{R}(۱,۱)$$

۲۵. الف) ویژگیهای بازتابی، پادتقارن و ترایایی مانند تمرین قبلی ثابت می‌شوند.

ب و پ) در اینجا $(۰,۰)$ کوچکترین عنصر (و تنها عنصر مینیمال) است. عنصر $(۲,۲)$ بزرگترین عنصر (و تنها عنصر ماکسیمال) است.

ت) باز هم در اینجا یک ترتیب تام داریم، زیرا

$$(۰,۰)\mathcal{R}(۰,۱)\mathcal{R}(۰,۲)\mathcal{R}(۱,۰)\mathcal{R}(۱,۱)\mathcal{R}(۱,۲)\mathcal{R}(۲,۰)\mathcal{R}(۲,۱)\mathcal{R}(۲,۲)$$

۲۶. در اینجا $|X| = n + ۱$، $|A| = (n+۱)^۲$ و $|\mathcal{R}| = (n+۱)^۲ + \binom{(n+۱)^۲}{۲}$.

۲۷. الف) نادرست. فرض‌کنید $\mathcal{U} = \{۱,۲\}$ و $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$ و فرض کنید $\mathcal{R}$ رابطهٔ شمول باشد. دراین صورت $(A,\mathcal{R})$ یک مشبکه است، که درآن به‌ازای هر $S,T \in A$، $\mathrm{lub}\{S,T\} = S \cup T$ و $\mathrm{glb}\{S,T\} = S \cap T$. چون $\{۱\}$ و $\{۲\}$ قابل مقایسه با یکدیگر نیستند، $(A,\mathcal{R})$ یک مجموعهٔ تماماً مرتب نیست.

ب) اگر $(A,\mathcal{R})$ یک مجموعهٔ تماماً مرتب باشد، دراین صورت به‌ازای هر $x,y \in A$ داریم $x\mathcal{R}y$ یا $y\mathcal{R}x$. اگر $x\mathcal{R}y$، آن‌گاه $\mathrm{lub}\{x,y\} = y$ و $\mathrm{glb}\{x,y\} = x$. در نتیجه، $(A,\mathcal{R})$ یک مشبکه است.

۲۸. چون A متناهی است، بنابر قضیهٔ ۳۰۷ مجموعهٔ A عنصر ماکسیمال دارد، اگر x,y $(x \neq y)$ دو عنصر ماکسیمال باشند، دراین صورت با توجه به $x\mathcal{R}\mathrm{lub}\{x,y\}$ و $y\mathcal{R}\mathrm{lub}\{x,y\}$، $\mathrm{lub}\{x,y\}$ باید برابر با x یا y باشد. فرض می‌کنیم $\mathrm{lub}\{x,y\} = x$. دراین صورت داریم $y\mathcal{R}x$ و بنابراین، y نمی‌تواند عنصر ماکسیمال

باشد. بنابراین، A فقط یک عنصر ماکسیمال دارد که آن را x می‌نامیم. اکنون به‌ازای هر $a \in A$، $a \neq x$، اگر $\text{lub}\{a, x\} \neq x$، آن‌گاه ماکسیمال بودن a نقض می‌شود. بنابراین، به‌ازای هر $a \in A$ داریم $a\mathcal{R}x$ و بنابراین، x بزرگترین عنصر A است. [اثبات وجود کوچکترین عنصر نیز به همین ترتیب انجام می‌گیرد.]

۲۹. الف) a ب) a پ) c ت) e
ث) z ج) e چ) v

$(A, \mathcal{R})$ یک مشبکه است که z بزرگترین عنصر (و تنها عنصر ماکسیمال) و a کوچکترین عنصر (و تنها عنصر مینیمال) آن است.

۳۰. الف) بله ب) خیر پ) خیر ت) خیر
ث) بله ج) بله چ) بله

بند ۴.۷

۱. الف) گردایهٔ متشکل از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ افرازی برای A است.

ب) گرچه $A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup A_۴$، ولی $A_۱ \cap A_۲ \neq \emptyset$. بنابراین، گردایهٔ متشکل از $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ افرازی برای A نیست.

پ) گردایهٔ متشکل از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ افرازی برای A است.

۲. الف) برای آنکه ۸ در یکی از سه مجموعهٔ $A_۱$، $A_۲$ یا $A_۳$ قرارگیرد، سه انتخاب وجود دارد. بنابراین، سه افراز برای A وجود دارند که در شرایط مفروض صدق می‌کنند.

ب) با فرض $۷ \in A_۱$ دو امکان و با فرض $۸ \in A_۱$ نیز دو امکان دیگر داریم، بنابراین، با این شرایط چهار افراز برای A وجود دارد.

پ) اگر ۷ و ۸ را در مجموعهٔ واحدی از این افراز قرار دهیم سه امکان به‌دست می‌آوریم. در غیر این صورت، سه انتخاب برای قرار دادن ۷ در مجموعه‌های این افراز و دو انتخاب برای قرار دادن ۸ داریم و در نتیجه، شش افراز دیگر در شرایط بیان‌شده صدق می‌کنند. بنابر قاعده‌های مجموع و حاصل‌ضرب، روی‌هم $۹ = ۶ + ۳ = (۲)(۳) + ۳$ تا از این نوع افرازها وجود دارد.

۳. $\mathcal{R} = \{(۱,۱), (۱,۲), (۲,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۳,۴), (۴,۳), (۴,۴), (۵,۵)\}$

۴. الف) $[۲] = \{۱, ۲\} = [۱]$ و $\{۳\} = [۳]$

ب) $A = \{۱, ۲\} \cup \{۳\} \cup \{۴, ۵\} \cup \{۶\}$

۵. $\mathcal{R}$ ترایا نیست، زیرا $۱\mathcal{R}۲$ و $۲\mathcal{R}۳$، ولی $۱\not{\mathcal{R}}۳$.

۶. الف) به‌ازای هر $(x, y) \in A$، از $x = x$ نتیجه می‌شود $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ و بنابراین، $\mathcal{R}$ بازتابی است. اگر $(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲) \in A$ و $(x_۱, y_۱)\mathcal{R}(x_۲, y_۲)$، دراین صورت $x_۱ = x_۲$. بنابراین، $x_۲ = x_۱$ و $(x_۲, y_۲)\mathcal{R}(x_۱, y_۱)$. به این ترتیب، $\mathcal{R}$ متقارن است. سرانجام، فرض می‌کنیم عناصر $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۳, y_۳)$ متعلق به A به‌گونه‌ای باشند که $(x_۱, y_۱)\mathcal{R}(x_۲, y_۲)$ و $(x_۲, y_۲)\mathcal{R}(x_۳, y_۳)$.

می‌بینیم که

$$(x_۲,y_۲)\mathcal{R}(x_۳,y_۳) \Longrightarrow x_۲ = x_۳ \quad \text{و} \quad (x_۱,y_۱)\mathcal{R}(x_۲,y_۲) \Longrightarrow x_۱ = x_۲$$

از $x_۱ = x_۲$ و $x_۲ = x_۳$ نتیجه می‌شود که $x_۱ = x_۳$ و بنابراین، $(x_۱,y_۱)\mathcal{R}(x_۳,y_۳)$. پس $\mathcal{R}$ تراياست.

ب) هر ردهٔ هم‌ارزی برابر است با مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های واقع بر یک خط قائم. دراین صورت، گردایهٔ این خطهای قائم افرازی برای صفحهٔ حقیقی است.

۷. الف) به‌ازای هر $(x,y) \in A$، می‌بینیم که

$$x + y = x + y \Longrightarrow (x,y)\mathcal{R}(x,y)$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}(x_۱,y_۱)\mathcal{R}(x_۲,y_۲) &\Longrightarrow x_۱ + y_۱ = x_۲ + y_۲ \Longrightarrow x_۲ + y_۲ = x_۱ + y_۱ \\ &\Longrightarrow (x_۲,y_۲)\mathcal{R}(x_۱,y_۱)\end{aligned}$$

سرانجام،

$$\begin{aligned}(x_۱,y_۱)\mathcal{R}(x_۲,y_۲), (x_۲,y_۲)\mathcal{R}(x_۳,y_۳) &\Longrightarrow x_۱ + y_۱ = x_۲ + y_۲, x_۲ + y_۲ = x_۳ + y_۳ \\ &\Longrightarrow x_۱ + y_۱ = x_۳ + y_۳ \Longrightarrow (x_۱,y_۱)\mathcal{R}(x_۳,y_۳)\end{aligned}$$

چون $\mathcal{R}$ بازتابی، متقارن و تراياست، پس یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

ب) $[(۱,۳)] = \{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$ ، $[(۲,۴)] = \{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$
$[(۱,۱)] = \{(۱,۱)\}$

پ)

$$\begin{aligned}A = &\{(۱,۱)\} \cup \{(۱,۲),(۲,۱)\} \cup \{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\} \cup \\ &\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\} \cup \{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\} \cup \\ &\{(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲)\} \cup \{(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳)\} \cup \{(۴,۵),(۵,۴)\} \cup \{(۵,۵)\}\end{aligned}$$

۸. الف) به‌ازای هر $a \in A$، $a - a = ۳ \times ۰$ و بنابراین، $\mathcal{R}$ بازتابی است. به‌ازای $a, b \in A$ می‌بینیم که

$$a - b = ۳c, c \in \mathbf{Z} \Longrightarrow b - a = ۳(-c), -c \in \mathbf{Z}$$

و بنابراین، $a\mathcal{R}b \Longrightarrow b\mathcal{R}a$. پس $\mathcal{R}$ متقارن است. اگر $a, b, c \in A$ به‌گونه‌ای باشند که $a\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}c$، دراین صورت، به‌ازای دو عدد مانند $m, n \in \mathbf{Z}$ داریم $a - b = ۳m$ و $b - c = ۳n$. پس

$$(a - b) + (b - c) = ۳m + ۳n \Longrightarrow a - c = ۳(m + n)$$

و بنابراین، $a\mathcal{R}c$. درنتیجه، $\mathcal{R}$ تراياست.

ب) $[۱] = [۴] = [۷] = \{۱,۴,۷\}$، $[۲] = [۵] = \{۲,۵\}$ و $[۳] = [۶] = \{۳,۶\}$.
$A = \{۱,۴,۷\} \cup \{۲,۵\} \cup \{۳,۶\}$.

۹. الف) به‌ازای هر $(a,b) \in A$ داریم $ab = ab$ و بنابراین، $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$. پس $\mathcal{R}$ بازتابی است. برای اثبات اینکه $\mathcal{R}$ متقارن است، فرض می‌کنیم $(a,b),(c,d) \in A$ و $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$. دراین‌صورت

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Longrightarrow ad = bc \Longrightarrow cb = da \Longrightarrow (c,d)\mathcal{R}(ab)$$

و بنابراین، $\mathcal{R}$ متقارن است. سرانجام، فرض می‌کنیم $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$ و $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ و $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$. دراین صورت از $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ نتیجه می‌شود که $ad = bc$ و از $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$ نتیجه می‌شود که $cf = de$. بنابراین $adf = bcf = bde$. چون $d \neq ۰$، داریم $af = be$. ولی از $af = be$ نتیجه می‌شود $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$. بنابراین، $\mathcal{R}$ تراباست.

از آنچه در بالا گذشت نتیجه می‌شود که $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در A است.

ب) $\{(۲,۱۴)\} = [(۲,۱۴)]$، $\{(-۳,-۹),(-۱,-۳),(۴,۱۲)\} = [(-۳,-۹)]$ و

$$[(۴,۸)] = \{(-۲,-۴),(۱,۲),(۳,۶),(۴,۸)\}$$

پ) در این افراز پنج ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد. در حقیقت،

$$A = [(-۴,-۲۰)] \cup [(-۳,-۹)] \cup [(-۲,-۴)] \cup [(-۱,-۱۱)] \cup [(۲,۱۴)]$$

۱۰. الف) به‌ازای هر $x \in \mathbf{Z}^+$ داریم $\frac{x}{x} = ۱ = ۲^۰$. پس $x\mathcal{R}x$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است. اکنون فرض می‌کنیم $x,y \in \mathbf{Z}^+$ و $x\mathcal{R}y$. دراین صورت به‌ازای عددی مانند $n \in \mathbf{Z}$ داریم $\frac{x}{y} = ۲^n$. در نتیجه، $\frac{y}{x} = ۲^{-n}$ که در آن $-n \in \mathbf{Z}$. پس $y\mathcal{R}x$ و $\mathcal{R}$ متقارن است. سرانجام، فرض می‌کنیم $x,y,w \in \mathbf{Z}^+$ و $x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}w$. دراین صورت به‌ازای دو عدد مانند $n,m \in \mathbf{Z}$ داریم $\frac{x}{y} = ۲^n$ و $\frac{y}{w} = ۲^m$. بنابراین،

$$\frac{x}{w} = \left(\frac{x}{y}\right) \Big/ \left(\frac{y}{w}\right) = \frac{۲^n}{۲^m} = ۲^{n-m}$$

که در آن $n - m \in \mathbf{Z}$. پس $x\mathcal{R}w$ و $\mathcal{R}$ تراباست. در نتیجه، $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در $\mathbf{Z}^+$ است.

ب) دراینجا داریم $[۴] = [۲] = [۱]$ و بنابراین، فقط دو ردهٔ هم‌ارزی متمایز وجود دارد که عبارت‌اند از $[۱]$ و $[۳]$.

پ) در این حالت داریم $[۴۸] = [۲۴] = [۶]$ و $[۴۲] = [۲۱]$. درنتیجه، چهار ردهٔ هم‌ارزی متمایز وجود دارد که عبارت‌اند از: $[۶]$، $[۷]$، $[۲۱]$ و $[۳۵]$.

۱۱. الف) به‌ازای هر $X \subseteq A$ داریم $B \cap X = B \cap X$. پس $X\mathcal{R}X$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است. اگر $X,Y \subseteq A$، دراین صورت

$$X\mathcal{R}Y \Longrightarrow X \cap B = Y \cap B \Longrightarrow Y \cap B = X \cap B \Longrightarrow Y\mathcal{R}X$$

و بنابراین، $\mathcal{R}$ متقارن است. سرانجام، اگر $W,X,Y \subseteq A$ و $W\mathcal{R}X$ و $X\mathcal{R}Y$، دراین صورت $W \cap B = X \cap B$ و $X \cap B = Y \cap B$. بنابراین، $W \cap B = Y \cap B$ و بنابراین، $W\mathcal{R}Y$. پس $\mathcal{R}$ تراباست. درنتیجه، $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در $\mathcal{P}(A)$ است.

ب) $\{\emptyset,\{۳\}\} \cup \{\{۱\},\{۱,۳\}\} \cup \{\{۲\},\{۲,۳\}\} \cup \{\{۱,۲\},\{۱,۲,۳\}\}$

پ) $[X] = \{\{۱, ۳\}, \{۱, ۳, ۴\}, \{۱, ۳, ۵\}, \{۱, ۳, ۴, ۵\}\}$

ت) ۸ ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد (برای هر زیرمجموعهٔ B یک رده).

۱۲. الف) به‌ازای هر $a \in \mathbf{Z}^+$ می‌بینیم که $\operatorname{lcm}(a, ۱۶) = \operatorname{lcm}(a, ۱۶)$. پس $\mathcal{R}$ بازتابی است. همچنین، اگر $a, b \in \mathbf{Z}^+$، دراین صورت

$$a\mathcal{R}b \Longrightarrow \operatorname{lcm}(a, ۱۶) = \operatorname{lcm}(b, ۱۶) \Longrightarrow \operatorname{lcm}(b, ۱۶) = \operatorname{lcm}(a, ۱۶) \Longrightarrow b\mathcal{R}a$$

پس این رابطه متقارن است. سرانجام، به‌ازای هر $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ می‌بینیم که

$$a\mathcal{R}b \text{ و } b\mathcal{R}c \Longrightarrow \big(\operatorname{lcm}(a, ۱۶) = \operatorname{lcm}(b, ۱۶) \text{ و } \operatorname{lcm}(b, ۱۶) = \operatorname{lcm}(c, ۱۶)\big)$$
$$\Longrightarrow \operatorname{lcm}(a, ۱۶) = \operatorname{lcm}(c, ۱۶) \Longrightarrow a\mathcal{R}c$$

درنتیجه، $\mathcal{R}$ ترایاست.

مطالب بالا ثابت می‌کنند که $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

ب)

$$[۱] = \{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶\}$$
$$[۲] = [۱]$$
$$[۳] = \{۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸\}$$
$$[۱۰] = \{۱۰, ۲۰, ۴۰, ۸۰, ۱۶۰\}$$
$$[۱۶] = [۱]$$
$$[۲۵] = \{۲۵, ۵۰, ۱۰۰, ۲۰۰, ۴۰۰\}$$
$$[۳۲] = \{۳۲\}$$
$$[۳۳] = \{۳۳, ۶۶, ۱۳۲, ۲۶۴, ۵۲۸\}$$
$$[۴۸] = \{۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸\}$$
$$[۶۴] = \{۶۴\}$$

۱۳. الف) $\binom{۶}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)$. ضریب $\left(\frac{۱}{۲}\right)$ به این سبب لازم است که هر زیرمجموعهٔ سه عنصری فقط برای یکی از این نوع رابطه‌های هم‌ارزی به‌کار می‌رود، نه دو تا. مثلاً، اگر $\{a, b, c\}$ انتخاب شود افراز $\{a, b, c\} \cup \{d, e, f\}$ را به‌دست می‌آوریم که متناظر با یک رابطهٔ هم‌ارزی است. از طرف دیگر، انتخاب $\{d, e, f\}$ همان افراز و رابطهٔ هم‌ارزی متناظر را به‌دست می‌دهد.

ب) $۴\binom{۶}{۳} = [۳ + ۱]\binom{۶}{۳}$. پس از انتخاب سه تا از عنصرها، می‌توانیم ۳ عنصر دیگر را به طرق زیر افرازکنیم:

(یک) ۱ طریق برای افراز آنها به سه ردهٔ هم‌ارزی یک عنصری یا

(دو) ۳ طریق برای افراز آنها به یک ردهٔ هم‌ارزی یک عنصری و یک ردهٔ دو عنصری.

پ) $\binom{۶}{۲}[۱+۱] = ۲\binom{۶}{۲}$

ت) $\binom{۱}{۲}\binom{۶}{۳} + ۴\binom{۶}{۳} + ۲\binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۶}$

۱۴. الف) $۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$

ب) $\sum_{i=۱}^{۵} S(۵, i) = ۱ + ۱۵ + ۲۵ + ۱۰ + ۱ = ۵۲$

پ) $۱۰۲۴ - ۵۲ = ۹۷۲$

ت) $S(۵, ۲) = ۱۵$.

ث) $\sum_{i=۱}^{۴} S(۴, i) = ۱ + ۷ + ۶ + ۱ = ۱۵$

ج) $\sum_{i=۱}^{۳} S(۳, i) = ۱ + ۳ + ۱ = ۵$

چ) $\sum_{i=۱}^{۳} S(۳, i) = ۱ + ۳ + ۱ = ۵$

ح) $\left(\sum_{i=۱}^{۳} S(۳, i)\right) - \left(\sum_{i=۱}^{۲} S(۲, i)\right) = ۳$

۱۵. ۳۰۰

۱۶. الف) امکان‌پذیر نیست. بازتابی بودن $\mathcal{R}$ مستلزم $|\mathcal{R}| \geq ۷$ است.

ب) $\mathcal{R} = \{(x, x) | x \in \mathbf{Z}, ۱ \leq x \leq ۷\}$.

پ) امکان‌پذیر نیست. متقارن بودن $\mathcal{R}$ مستلزم زوج بودن $|\mathcal{R}| - ۷$ است.

ت) $\mathcal{R} = \{(x, x) | x \in \mathbf{Z}, ۱ \leq x \leq ۷\} \cup \{(۱, ۲), (۲, ۱)\}$

ث) $\mathcal{R} = \{(x, x) | x \in \mathbf{Z}, ۱ \leq x \leq ۷\} \cup \{(۱, ۲), (۲, ۱)\} \cup \{(۳, ۴), (۴, ۳)\}$

ج و ح) امکان‌پذیر نیست، زیرا $r - ۷$ فرد است.

چ و خ) امکان‌پذیر نیست. ملاحظهٔ پایانی بند ۷ ۰ ۴ را ببینید.

۱۷. فرض می‌کنیم $\{A_i\}_{i \in I}$ افرازی برای مجموعهٔ A باشد. $\mathcal{R}$ را در A به این ترتیب تعریف می‌کنیم که $x\mathcal{R}y$ هرگاه به‌ازای اندیسی مانند $i \in I$ داشته باشیم $x, y \in A_i$. به‌ازای هر $x \in A$ اندیسی مانند $i \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $x, x \in A_i$. پس $x\mathcal{R}x$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است.

$$x\mathcal{R}y \Longrightarrow (x, y \in A_i \text{ ، به‌ازای اندیسی مانند } i \in I)$$
$$\Longrightarrow (y, x \in A_i \text{ ، به‌ازای اندیسی مانند } i \in I)$$
$$\Longrightarrow y\mathcal{R}x$$

و بنابراین، $\mathcal{R}$ متقارن است. اگر $x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}z$، در این صورت به‌ازای دو اندیس مانند $i, j \in I$ داریم $x, y \in A_i$ و $y, z \in A_j$. چون $A_i \cap A_j$ شامل y است، بنابر قضیهٔ ۷ ۰ ۶ (پ) داریم $A_i = A_j$ و بنابراین، $i = j$. پس $x, z \in A_i$. درنتیجه، $x\mathcal{R}z$ و $\mathcal{R}$ ترایاست.

۱۸. فرض می‌کنیم $P = \bigcup_{i \in I} A_i$ افرازی برای A باشد. در این صورت $E = \bigcup_{i \in I}(A_i \times A_i)$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است و $f(E) = P$. بنابراین، f پوشاست.

اکنون فرض می‌کنیم $E_۱$ و $E_۲$ دو رابطهٔ هم‌ارزی در A باشند. اگر $E_۱ \neq E_۲$، دراین صورت عنصرهایی مانند $x, y \in A$ وجود دارند به‌طوری‌که $(x, y) \in E_۱$ و $(x, y) \notin E_۲$. بنابراین، اگر $f(E_۱) = P_۱ = \bigcup_{i \in I} A_i$

و $\bigcup_{j\in J} A_j = P_2 = f(E_2)$، در این صورت

$$(x,y)\in E_1 \Longrightarrow \exists i\in I x,y\in A_i$$

درحالی که

$$(x,y)\notin E_2 \Longrightarrow \forall j\in J(x\notin A_j \vee y\notin A_j)$$

در نتیجه، $P_1\neq P_2$ و f یک به‌یک است.

بند ۵.۷

۱. الف) $P_1:\{s_1,s_4\},\{s_2,s_3,s_5\}$

$(\nu(s_1,0)=s_4)E_1(\nu(s_4,0)=s_1)$ ولی $(\nu(s_1,1)=s_1)\not E_1(\nu(s_4,1)=s_2)$ و بنابراین، $s_1\not E_2 s_4$.

$(\nu(s_2,1)=s_3)\not E_1(\nu(s_3,1)=s_4)$ و بنابراین، $s_2\not E_2 s_3$.

$(\nu(s_2,0)=s_3)E_1(\nu(s_5,0)=s_3)$ و $(\nu(s_2,1)=s_3)E_1(\nu(s_5,1)=s_3)$ و بنابراین، $s_2E_2s_5$. از $s_2\not E_2 s_3$ و $s_2E_2s_5$ نتیجه می‌شود که $s_3\not E_2 s_5$.

بنابراین، P_2 با

$$P_2:\{s_1\},\{s_2,s_5\},\{s_3\},\{s_4\}$$

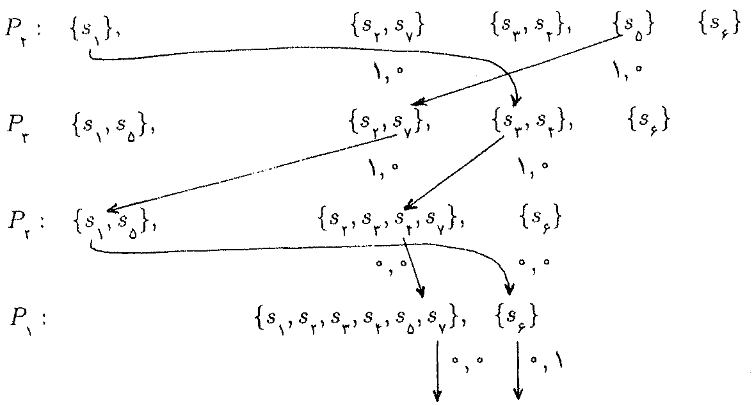
بیان می‌شود. به‌ازای $x=0,1$ داریم $(\nu(s_2,x)=s_3)E_2(\nu(s_5,x)=s_3)$. پس $s_2E_3s_5$ و $P_3=P_2$.

در نتیجه، حالتهای s_2 و s_5 هم‌ارزند.

ب) حالتهای s_2 و s_5 هم‌ارزند.

پ) حالتهای s_2 و s_7 هم‌ارزند. s_3 و s_4 هم‌ارزند.

۲. الف)



در نتیجه، ۱۱۰۰ یک دنبالهٔ ممیز است، زیرا $\omega(s_1,1100)=0000\neq 0001=\omega(s_5,1100)$.

ب) ۱۰۰ پ) ۰۰

۳. الف) s_1 و s_7 هم‌ارزند. s_4 و s_5 هم‌ارزند.

ب) (یک) ۰۰۰۰ (دو) ۰ (سه) ۰۰

	ν		ω	
M :	۰	۱	۰	۱
$s_۱$	$s_۴$	$s_۱$	۱	۰
$s_۲$	$s_۱$	$s_۲$	۱	۰
$s_۳$	$s_۶$	$s_۱$	۱	۰
$s_۴$	$s_۳$	$s_۴$	۰	۰
$s_۶$	$s_۲$	$s_۱$	۱	۰

تمرینات تکمیلی

۱. الف) نادرست. فرض کنید $A = \{۱, ۲\}$، $I = \{۱, ۲\}$، $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۱)\}$ و $\mathcal{R}_۲ = \{(۲, ۲)\}$، دراین صورت $\bigcup_{i\in I} \mathcal{R}_i$ بازتابی است، درحالی که نه $\mathcal{R}_۱$ بازتابی است نه $\mathcal{R}_۲$. ولی، برعکس، اگر به‌ازای هر (درواقع، به‌ازای دست‌کم یک) $i \in I$، $\mathcal{R}_i$ بازتابی باشد، دراین صورت $\bigcup_{i\in I} \mathcal{R}_i$ بازتابی است.

ب) درست. درحقیقت

$$\Longleftrightarrow \text{(به‌ازای هر } a \in A\text{، } (a,a) \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i) \Longleftrightarrow (\text{بازتابی است } \bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i)$$

$$((a,a) \in \mathcal{R}_i \text{ ، } i \in I \text{ و هر } a \in A \text{ به‌ازای هر}) \Longleftrightarrow (\text{به‌ازای هر } i \in I \text{ ، } \mathcal{R}_i \text{ بازتابی است})$$

۲. (یک) الف) نادرست. فرض کنید $A = \{۱, ۲\}$، $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۲)\}$ و $\mathcal{R}_۲ = \{(۲, ۱)\}$. دراین صورت $\mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$ متقارن است، درحالی که نه $\mathcal{R}_۱$ متقارن است نه $\mathcal{R}_۲$.

ولی، برعکس، اگر هر $\mathcal{R}_i$، $i \in I$، متقارن باشد و $(x, y) \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{R}_i$، دراین صورت به‌ازای اندیسی مانند $i \in I$، $(x, y) \in \mathcal{R}_i$. چون $\mathcal{R}_i$ متقارن است، $(y, x) \in \mathcal{R}_i$. بنابراین $(y, x) \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{R}_i$ و $\bigcup_{i\in I} \mathcal{R}_i$ متقارن است.

ب) اگر $(x, y) \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i$، دراین صورت به‌ازای هر $i \in I$ داریم $(x, y) \in \mathcal{R}_i$. چون هر $\mathcal{R}_i$ متقارن است، به‌ازای هر $i \in I$ داریم $(y, x) \in \mathcal{R}_i$. بنابراین، $(y, x) \in \bigcap_{i\in J} \mathcal{R}_i$ و $\bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i$ متقارن است.

ولی عکس این گزاره نادرست است. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳\}$

$$\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۲), (۲, ۱), (۱, ۳)\}$$

و $\mathcal{R}_۲ = \{(۱, ۲), (۲, ۱)(۳, ۲)\}$. دراین صورت $\mathcal{R}_۱$ و $\mathcal{R}_۲$ هیچ‌کدام متقارن نیستند، ولی $\mathcal{R}_۱ \cap \mathcal{R}_۲ = \{(۱, ۲), (۲, ۱)\}$ متقارن است.

(سه) الف) فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳\}$، $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۲)\}$ و $\mathcal{R}_۲ = \{(۲, ۱)\}$. دراین صورت هم $\mathcal{R}_۱$ تراyاست هم $\mathcal{R}_۲$، ولی $\mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲$ ترایا نیست.

برعکس، با فرض $A = \{۱, ۲, ۳\}$، $\mathcal{R}_۱ = \{(۱, ۳)\}$ و $\mathcal{R}_۲ = \{(۱, ۲), (۲, ۳)\}$، گرچه $\mathcal{R}_۲$ ترایا نیست ولی $\mathcal{R}_۱ \cup \mathcal{R}_۲ \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۱, ۳)\}$ ترایاست.

ب) اگر $(x,y),(y,z) \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i$ ، در این صورت به‌ازای هر $i \in I$ داریم $(x,y),(y,z) \in \mathcal{R}_i$. چون هر $\mathcal{R}_i$، $i \in I$، تراپاست پس $(x,y) \in \mathcal{R}_i$. بنابراین، $(x,z) \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i$ و $\bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i$ تراپاست.

ولی، برعکس، با فرض $\mathcal{R}_۱ = \{(۲,۳)\}$ و $\{(۱,۲),(۱,۲)\}$ و $\mathcal{R}_۲ = \{(۱,۲)\}$، $\mathcal{R}_۱$ ترایا نیست، درحالی که رابطهٔ $\mathcal{R}_۱ \cap \mathcal{R}_۲ = \{(۱,۲)\}$ تراپاست.

(دو) نتایج مربوط به قسمت (دو) نیز به‌طور مشابهی بررسی می‌شوند.

۳. از $(a,c) \in \mathcal{R}_۲ \circ \mathcal{R}_۱$ نتیجه می‌شود که به‌ازای عنصری مانند $b \in A$ داریم $(a,b) \in \mathcal{R}_۲$ و $(b,c) \in \mathcal{R}_۱$. چون $\mathcal{R}_۱$ و $\mathcal{R}_۲$ متقارن‌اند، $(b,a) \in \mathcal{R}_۲$ و $(c,b) \in \mathcal{R}_۱$ و بنابراین، $(c,a) \in \mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲ \subseteq \mathcal{R}_۲ \circ \mathcal{R}_۱$. از $(c,a) \in \mathcal{R}_۲ \circ \mathcal{R}_۱$ نتیجه می‌شود که به‌ازای عنصری مانند $d \in A$ داریم $(c,d) \in \mathcal{R}_۲$ و $(d,a) \in \mathcal{R}_۱$. در این صورت با توجه به متقارن بودن $\mathcal{R}_۱$ و $\mathcal{R}_۲$، $(d,c) \in \mathcal{R}_۲$ و $(a,d) \in \mathcal{R}_۱$ و در نتیجه، $(a,c) \in \mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲$. به این ترتیب، $\mathcal{R}_۲ \circ \mathcal{R}_۱ \subseteq \mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲$ و نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

۴. نادرست: فرض کنید

$$A = \{۱,۲\}$$

$$\mathcal{R} = \{(۱,۲),(۲,۱)\}$$

در این صورت

$$\mathcal{R}^۲ = \{(۱,۱),(۲,۲)\}$$

بنابراین، $\mathcal{R}^۲$ بازتابی است، درحالی که $\mathcal{R}$ بازتابی نیست.

۵.

$$(c,a) \in (\mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲)^c \Longleftrightarrow (a,c) \in \mathcal{R}_۱ \circ \mathcal{R}_۲ \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow$ (به‌ازای عنصری مانند $b \in B$، $(a,b) \in \mathcal{R}_۱$ و $(b,c) \in \mathcal{R}_۲$)

$$(c,a) \in \mathcal{R}_۲^c \circ \mathcal{R}_۱^c$$

۶. الف) بازتابی و متقارن.

ب) رابطهٔ هم‌ارزی است. رده‌های هم‌ارزی عبارت‌اند از

$$[k] = \{k + ۷n | n \in \mathbf{Z}\}, \qquad ۰ \le k \le ۶$$

و $\mathbf{Z} = [۰] \cup [۱] \cup \cdots \cup [۶]$.

ج) رابطهٔ هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزی عبارت‌اند از

$$[(۱,۱)] = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\}$$

$$[(۱,۲)] = \{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$$

$$[(۱,۳)] = \{(۱,۳),(۳,۱),(۲,۴),(۴,۲)\}$$

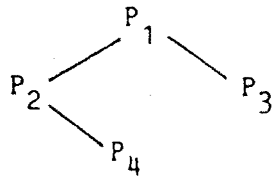
$$[(۱,۴)] = \{(۱,۴),(۴,۱)\}$$

و $A = [(۱,۱)] \cup [(۱,۲)] \cup (۱,۳)] \cup [(۱,۴)]$.

۷. فرض کنید $\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $A = \mathcal{P}(\mathcal{U}) - \{\mathcal{U}, \emptyset\}$. مجموعهٔ A نسبت به رابطهٔ شمول یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است که دارای پنج عنصر مینیمال $\{x\}$، $۱ \leq x \leq ۵$، است ولی کوچکترین عنصر ندارد. همچنین، A دارای پنج عنصر ماکسیمال است که عبارت‌اند از زیرمجموعه‌های ۴ عنصری $\mathcal{U}$، ولی بزرگترین عنصر ندارد.

۸. الف) اگر P افرازی برای A باشد، دراین‌صورت $P \leq P$ و بنابراین، $\mathcal{R}$ بازتابی است. به‌ازای افرازهای P_i و P_j برای A، اگر $P_i \leq P_j$ و $P_j \leq P_i$، دراین‌صورت $P_i = P_j$ و $\mathcal{R}$ پادمتقارن است. سرانجام، اگر P_i، P_j و P_k سه افراز برای A باشند و $P_i\mathcal{R}P_j$ و $P_j\mathcal{R}P_k$، دراین‌صورت $P_i \leq P_j$ و $P_j \leq P_k$. بنابراین، هر ردهٔ متعلق به P_i در رده‌ای از P_k قرار دارد و در نتیجه، $P_i \leq P_k$. به این ترتیب، $\mathcal{R}$ تراپاست و در نتیجه، ترتیب جزئی است.

ب)



۹. $n = ۱۰$

۱۰.

$$[(۱, ۱)] = \{(۱, ۱)\}$$
$$[(۲, ۲)] = \{(۱, ۴), (۲, ۲), (۴, ۱)\}$$
$$[(۳, ۲)] = \{(۱, ۶), (۲, ۳), (۳, ۲), (۶, ۱)\}$$
$$[۴, ۳)] = \{(۲, ۶), (۳, ۴), (۴, ۳), (۶, ۲)\}$$

۱۱. الف) اگر $f \in F$، به‌ازای هر $n \geq ۱$ داریم $|f(n)| \leq ۱|f(n)|$. بنابراین، $f\mathcal{R}f$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است. از طرف دیگر، اگر $f, g \in F$، دراین‌صورت

$$f\mathcal{R}g \Longrightarrow \big(g \in O(f) \text{ و } f \in O(g)\big) \Longleftrightarrow \big(f \in O(g) \text{ و } g \in O(f)\big) \Longrightarrow g\mathcal{R}f$$

و بنابراین، $\mathcal{R}$ متقارن است. سرانجام، فرض می‌کنیم $f, g, h \in F$ به گونه‌ای باشند که $f\mathcal{R}g$ و $g\mathcal{R}h$. دراین‌صورت اعدادی مانند $k_۱, k_۲ \in \mathbf{Z}^+$ و $m_۱, m_۲ \in \mathbf{R}^+$ وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $n \geq k_۱$، $|f(n)| \leq m_۱|g(n)|$ و به‌ازای هر $n \geq k_۲$، $|g(n)| \leq m_۲|h(n)|$. در نتیجه، به‌ازای هر $n \geq \max\{k_۱, k_۲\}$ داریم

$$|f(n)| \leq m_۱|g(n)| \leq m_۱m_۲|h(n)|$$

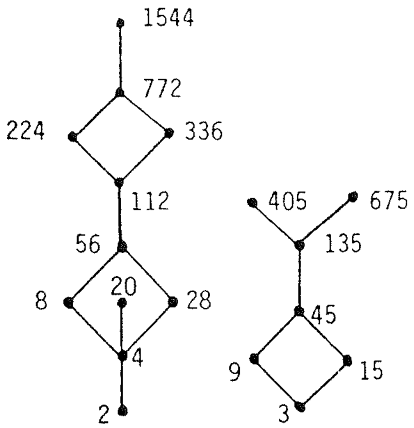
و بنابراین، $f \in O(h)$. به همین ترتیب، داریم $h \in O(f)$. بنابراین، $f\mathcal{R}h$ و $\mathcal{R}$ تراپاست.

ب) به‌ازای هر $f \in F$، f مغلوب خودش است. بنابراین، $[f]S[f]$ و S بازتابی است. از طرف دیگر، اگر $[g], [h] \in F'$ به گونه‌ای باشند که $[g]S[h]$ و $[h]S[g]$، دراین‌صورت (مانند قسمت (الف)) داریم $g\mathcal{R}h$

و $[h] = [g]$. درنتیجه، S پادمتقارن است. سرانجام، اگر $[f], [g], [h] \in F'$ چنان باشند که $[f]S[g]$ و $[g]S[h]$، دراین صورت f مغلوب g و g مغلوب h است. بنابراین، مانند قسمت (الف)، f مغلوب h است. در نتیجه، $[f]S[h]$ و این نشان می‌دهد که S ترایاست.

پ) فرض کنید $f, f_1, f_2 \in F$ عبارت باشند از $f(n) = n$، $f_1(n) = n + 3$ و $f_2(n) = 2 - n$. دراین صورت، $(f_1 + f_2)(n) = 5$ و $f_1 + f_2 \notin [f]$، زیرا f مغلوب $f_1 + f_2$ نیست.

۱۲. ۴ طریق برای مرتب‌سازی توپولوژیکی نمودار حاوی ۳ وجود دارد. برای نمودار بزرگتر ۴ طریق برای مرتب‌سازی توپولوژیکی ۸، ۲۸، ۵۶، ۱۱۲، ۲۲۴، ۳۳۶، ۷۷۲ و ۱۵۴۴ وجود دارد. این هشت عدد نه مکان برای قرار دادن ۲۰ تعیین می‌کنند. بنابراین، ۳۶ طریق برای مرتب‌سازی توپولوژیکی نمودار بزرگتر وجود دارد. در هر یک از این ۳۶ طریق، ۱۱ عددی که در نمودار بزرگتر قرار دارند ۱۲ مکان به‌دست می‌دهند که می‌توان آنها را، با مجاز بودن تکرار، برای هفت عدد متعلق به نمودار کوچکتر انتخاب کرد. بنابراین، $\binom{18}{7} = \binom{12+7-1}{7}$ انتخاب ممکن و $\binom{18}{7}(4)(36)$ مرتب‌سازی توپولوژیکی ممکن وجود دارد.



۱۳.

الف)

فهرست مجاورت		فهرست اندیسی	
۱	۲	۱	۱
۲	۳	۲	۲
۳	۱	۳	۳
۴	۴	۴	۵
۵	۵	۵	۶
۶	۳	۶	۸
۷	۵		

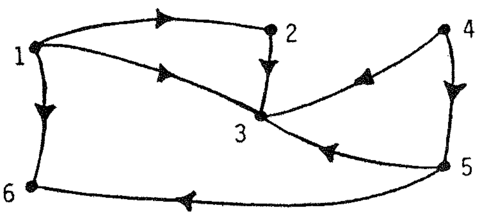
ب)

فهرست مجاورت		فهرست اندیسی	
۱	۲	۱	۱
۲	۳	۲	۲
۳	۱	۳	۳
۴	۵	۴	۴
۵	۴	۵	۵
		۶	۶

پ)

فهرست مجاورت		فهرست اندیسی	
۱	۲	۱	۱
۲	۳	۲	۲
۳	۱	۳	۳
۴	۴	۴	۶
۵	۵	۵	۷
۶	۱	۶	۸
۷	۴		

.۱۴



۱۵. الف) به‌ازای هر $v \in V$ داریم $v = v$ و بنابراین، $v\mathcal{R}v$. اگر $v\mathcal{R}w$، دراین صورت مسیری از v به w وجود دارد. چون گراف G بی‌سوست، هر مسیری که از v به w وصل شود مسیری از w به v نیز محسوب می‌شود. بنابراین، $w\mathcal{R}v$ و $\mathcal{R}$ متقارن است. سرانجام، اگر $v\mathcal{R}w$ و $w\mathcal{R}x$، دراین صورت زیرمجموعه‌ای از یالهای واقع در مسیر v به w و w به x مسیری از v به x است. به این ترتیب $\mathcal{R}$ ترایاست و در نتیجه، $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

ب) رده‌های هم‌ارزی این افراز عبارت‌اند از مؤلفه‌های (همبند) G.

۱۶. الف)

$$P_{۱} : \{s_{۱}, s_{۳}, s_{۷}\}, \{s_{۲}, s_{۴}, s_{۵}, s_{۶}, s_{۸}\}$$
$$P_{۲} : \{s_{۱}, s_{۳}, s_{۷}\}, \{s_{۲}, s_{۵}, s_{۸}\}, \{s_{۴}, s_{۶}\}$$
$$p_{۳} : \{s_{۱}\}, \{s_{۳}, s_{۷}\}, \{s_{۲}, s_{۵}, s_{۸}\}, \{s_{۴}\}, \{s_{۶}\}$$
$$P_{۴} = P_{۳}$$

M :	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
$s_{۱}$	$s_{۳}$	$s_{۶}$	۱	۰
$s_{۲}$	$s_{۳}$	$s_{۳}$	۰	۰
$s_{۳}$	$s_{۳}$	$s_{۲}$	۱	۰
$s_{۴}$	$s_{۲}$	$s_{۳}$	۰	۰
$s_{۶}$	$s_{۴}$	$s_{۱}$	۰	۰

ب)

$$P_{۳} : \{s_{۱}\}, \{s_{۳}, s_{۷}\}, \{s_{۲}, s_{۵}, s_{۸}\}, \{s_{۴}\}, \{s_{۶}\}$$

۰, ۰ ۰, ۰

$$P_{۲} : \{s_{۱}, s_{۳}, s_{۷}\}, \{s_{۲}, s_{۵}, s_{۸}\}, \{s_{۴}, s_{۶}\}$$

۰, ۰ ۰, ۰

$$P_{۱} : \{s_{۱}, s_{۳}, s_{۷}\}, \quad \{s_{۲}, s_{۴}, s_{۵}, s_{۶}, s_{۸}\}$$

۰, ۱ ۰, ۰

بنابراین، $\omega(s_6, 000) = 000 \neq 001 = \omega(s_2, 000)$ و در نتیجه، ۰۰۰ یک رشتهٔ ممیز برای s_2 و s_6 است.

۱۷. یکی از ترتیبهای ممکن، ترتیب

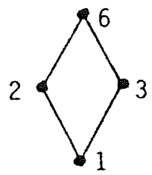
۱۰, ۳, ۸, ۶, ۷, ۹, ۱, ۴, ۵, ۲

است که در آن، برنامهٔ ۱۰ قبل از همه و برنامهٔ ۲ بعد از همه اجرا می‌شود.

۱۸. الف) (یک) $n = ۲$:

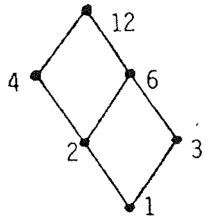
(دو) $n = ۴$:

(سه) $n = ۶$:



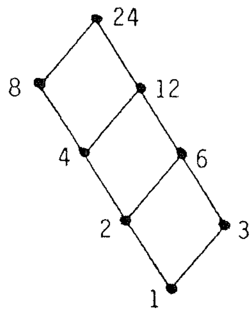
(چهار) $n = ۸$:

(پنج) $n = ۱۲$:

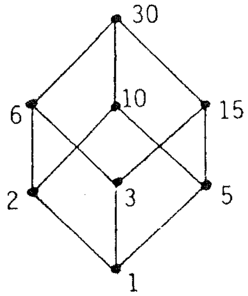


(شش) $n = ۱۶$:

(هفت) $n = ۲۴$:



(هشت) $n = ۳۰$:



(نه) $n = ۳۲$:

ب) به‌ازای $۲ \leq n \leq ۳۵$، می‌توان n را به یکی از نه صورت زیر نوشت: (یک) p، (دو) p^2، (سه) pq، (چهار)

$p^۳$، (پنج) $p^۲q$، (شش) $p^۲$، (هفت) $p^۳q$، (هشت) pqr و (نه) $p^۵$، که در آن p، q و r سه عدد اول متمایزند.
هر یک از ساختارهای قسمت (الف) نمودار هاسهٔ یکی از این نمایشهاست.
برای $n = ۳۶ = ۲^۲ \times ۳^۲$ باید ساختار جدیدی بسازیم.

پ) عکس این مطلب نادرست است. $\tau(۳۰) = ۸ = \tau(۲۴)$، ولی نمودارهای هاسهٔ (هفت) و (هشت) از قسمت (الف) یکی نیستند.

ت) این مطلب از تعریف gcd و lcm و نتیجهٔ مثال ۴۲۰۴ حاصل می‌شود.

۱۹. الف) $|A| = ۲^۵ = ۳۲$

پ) شش ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد (برای هر یک از وزنهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رده). تعداد عنصرهای هر یک از رده‌های هم‌ارزی عبارت است از:
وزن ۰ : $\binom{۵}{۰}$، وزن ۱ : $\binom{۵}{۱}$، وزن ۲ : $\binom{۵}{۲}$، وزن ۳ : $\binom{۵}{۳}$، وزن ۴ : $\binom{۵}{۴}$ و وزن ۵ : $\binom{۵}{۵}$.

ت) عدد n، $n \in \mathbf{Z}^+$، را به‌جای ۵ بگذارید. در این صورت $n + ۱$ ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد (برای هر یک از وزنهای ۰، ۱، ۲، ...، n یک رده). اگر $۰ \leq k \leq n$، $\binom{n}{k}$ تا از عنصرهای A در ردهٔ هم‌ارزی مربوط به وزن k قرار دارند.

۲۰. الف) اگر $C \subseteq \mathcal{U}$، در این صورت $۰ \leq |C| \leq ۳$. به‌ازای $۰ \leq k \leq ۳$، $\binom{۳}{k}$ تا زیرمجموعه از $\mathcal{U}$ مانند C وجود دارد به‌طوری که $|C| = k$. هر یک از این Cها، ۲^k زیرمجموعه مانند $B \subseteq C$ به‌دست می‌دهد. بنابراین، رابطهٔ $\mathcal{R}$ شامل

$$\binom{۳}{۰}۲^۰ + \binom{۳}{۱}۲^۱ + \binom{۳}{۲}۲^۲ + \binom{۳}{۳}۲^۳ = (۱ + ۲)^۳ = ۳^۳$$
$$= ۲۷$$

جفت مرتب است.

ب) اگر $\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، آن‌گاه تعداد جفتهای مرتب متعلق به $\mathcal{R}$ برابر است با

$$\binom{۴}{۰}۲^۰ + \binom{۴}{۱}۲^۱ + \binom{۴}{۲}۲^۲ + \binom{۴}{۳}۲^۳ + \binom{۴}{۴}۲^۴ = (۱ + ۲)^۴ = ۳^۴$$
$$= ۸۱$$

پ) اگر
$$\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$$
که در آن $n \geq ۱$، آن‌گاه ۳^n جفت مرتب در رابطهٔ $\mathcal{R}$ وجود دارد.

۲۱. چون $|\mathcal{U}| = n$، پس $|\mathcal{P}(\mathcal{U})| = ۲^n$. بنابراین، $۴^n = (۲^n)(۲^n)$ جفت مرتب به صورت (A, B) وجود دارد به‌طوری‌که $A, B \subseteq \mathcal{U}$. با توجه به تمرین ۲۰ (در بالا)، ۳^n جفت مرتب به‌صورت (A, B) وجود دارد به‌طوری که $A \subseteq B$. [یادداشت: اگر $(A, B) \in \mathcal{R}$، آن‌گاه (B, A) نیز در $\mathcal{R}$ است.] بنابراین، $۳^n + ۳^n - ۲^n$ جفت مرتب مانند (A, B) وجود دارد به‌طوری‌که $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ یا هر دو. ۲^n را به این سبب کم می‌کنیم که ۲^n جفت مرتبی را که به صورت (A, B)، $A = B$، هستند دوبار به حساب آورده‌ایم. به این ترتیب، تعداد جفتهای مرتب

متعلق به این رابطه برابر است با

$$۴^n - (۲ \times ۳^n - ۲^n) = ۴^n - ۲ \times ۳^n + ۲^n$$

۲۲. الف) ۲^m ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد (برای هر زیرمجموعهٔ B یک رده).

ب) ۲^{n-m}

۲۳. الف) (یک) $BRARC$،

(دو) $BRCRF$

$BRARCRF$ یک زنجیر ماکسیمال است. شش تا از این نوع زنجیرهای ماکسیمال وجود دارد.

ب) در اینجا $۱۱\mathcal{R}۳۸۵$ زنجیر ماکسیمالی به طول ۲ است، درحالی که $۲\mathcal{R}۶\mathcal{R}۱۲$ زنجیر ماکسیمالی به طول ۳ است. طول بزرگترین زنجیر این مجموعهٔ جزئاً مرتب برابر با ۳ است.

پ) (یک) $\emptyset \subseteq \{۱\} \subseteq \{۱,۲\} \subseteq \{۱,۲,۳\} \subseteq \mathcal{U}$

(دو) $\emptyset \subseteq \{۲\} \subseteq \{۲,۳\} \subseteq \{۱,۲,۳\} \subseteq \mathcal{U}$

$۲۴ = !۴$ تا از این نوع زنجیرهای ماکسیمال وجود دارد.

ت) $n!$

۲۴. اگر $c_۱$ عنصر مینیمالی از $(A,\mathcal{R})$ نباشد، دراین صورت عنصری مانند $a \in A$ وجود دارد به‌طوری که $a\mathcal{R}c_۱$. ولی این امر ماکسیمال بودن زنجیر $(C,\mathcal{R}')$ را نقض می‌کند.

اثبات ماکسیمال بودن c_n در $(A,\mathcal{R})$ نیز به همین ترتیب انجام می‌گیرد.

۲۵. فرض کنیم $a_۱\mathcal{R}a_۲\mathcal{R}\cdots\mathcal{R}a_{n-۱}\mathcal{R}a_n$ یک طولانیترین زنجیر (ماکسیمال) $(A,\mathcal{R})$ باشد. دراین صورت a_n عنصر ماکسیمالی از $(A,\mathcal{R})$ و $a_۱\mathcal{R}a_۲\mathcal{R}\cdots\mathcal{R}a_{n-۱}$ زنجیر ماکسیمالی در $(B,\mathcal{R}')$ است. بنابراین، طول هر طولانیترین زنجیر در $(B,\mathcal{R}')$ دست‌کم $n-۱$ است. اگر در $(B,\mathcal{R}')$ زنجیری به طول n مانند $b_۱\mathcal{R}'b_۲\mathcal{R}'\cdots\mathcal{R}'b_n$ وجود داشته باشد، دراین صورت این زنجیر، زنجیری به طول n در $(A,\mathcal{R})$ نیز هست. بنابراین، b_n باید عنصر ماکسیمالی از $(A,\mathcal{R})$ باشد و این با $b_n \in B$ تناقض دارد.

۲۶. الف) $\{۲,۳,۵\}$؛ $\{۵,۶,۷,۱۱\}$؛ $\{۲,۳,۵,۷,۱۱\}$.

ب) $\{\{۱,۲\},\{۳,۴\}\}$، $\{\{۱,۲,۳\},\{۲,۳,۴\}\}$؛ ۴.

پ) مجموعهٔ M متشکل از همهٔ عنصرهای ماکسیمال $(A,\mathcal{R})$ را درنظر می‌گیریم. اگر این مجموعه پادزنجیر نباشد، دو عنصر مانند $a,b \in M$ وجود دارند به‌طوری که $a\mathcal{R}b$ یا $b\mathcal{R}a$. بدون کاستن از کلیت برهان، فرض می‌کنیم $a\mathcal{R}b$. اگر این‌طور باشد، در این صورت a عنصر ماکسیمالی از $(A,\mathcal{R})$ نیست. بنابراین، $M,(M\times M)\cap\mathcal{R})$ پادزنجیری در $(A,\mathcal{R})$ است.

اثبات مربوط به مجموعهٔ همهٔ عنصرهای مینیمال نیز به همین ترتیب انجام می‌گیرد.

۲۷. اگر $n = ۱$، دراین صورت به‌ازای هر $x,y \in A$، اگر $x \neq y$، آن‌گاه $x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}x$. بنابراین، $(A,\mathcal{R})$ یک پادزنجیر است و نتیجهٔ موردنظر به‌دست می‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم این نتیجه به‌ازای $n = k \geq 1$ درست باشد و فرض می‌کنیم $(A, \mathcal{R})$ مجموعهٔ جزئاً مرتبی باشد که در آن، طول هر بزرگترین زنجیر $k + 1$ است. اگر M مجموعهٔ همهٔ عنصرهای ماکسیمال $(A, \mathcal{R})$ باشد، دراین صورت $M \neq \emptyset$ و M پادزنجیری از $(A, \mathcal{R})$ است. همچنین، بنابر تمرین ۲۵ که در بالا آمد، $(A - M, \mathcal{R}')$ با فرض $\mathcal{R}' = \big((A - M) \times (A - M)\big) \cap \mathcal{R}$ مجموعهٔ جزئاً مرتبی است که در آن طول هر بزرگترین زنجیر برابر با k است. بنابر فرض استقرا، افرازی متشکل از k پادزنجیر به‌صورت $A - M = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$ وجود دارد. در نتیجه، $A = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k \cup M$ افرازی متشکل از $k + 1$ پادزنجیر است.

قسمت دوم

موضوعات دیگر در شمارش

۸

اصل شمول و طرد

بند ۱.۸

۱. الف) عدد n بر ۲ بخش‌پذیر است: $c_۱$

عدد n بر ۳ بخش‌پذیر است: $c_۲$

عدد n بر ۵ بخش‌پذیر است: $c_۳$

$$N(c_۱) = \left\lfloor \frac{۲۰۰۰}{۲} \right\rfloor = ۱۰۰۰ \text{،} \quad N(c_۲) = \left\lfloor \frac{۲۰۰۰}{۳} \right\rfloor = ۶۶۶ \text{،} \quad N(c_۳) = \left\lfloor \frac{۲۰۰۰}{۵} \right\rfloor = ۴۰۰$$

$$N(c_۱c_۲) = \left\lfloor \frac{۲۰۰۰}{۲ \times ۳} \right\rfloor = ۳۳۳ \text{،} \quad N(c_۲c_۳) = \left\lfloor \frac{۲۰۰۰}{۳ \times ۵} \right\rfloor = ۱۳۳ \text{،} \quad N(c_۱c_۳) = \left\lfloor \frac{۲۰۰۰}{۲ \times ۵} \right\rfloor = ۲۰۰$$

و $N(c_۱c_۲c_۳) = \left\lfloor \dfrac{۲۰۰۰}{۲ \times ۳ \times ۵} \right\rfloor = ۶۶$

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳) = ۲۰۰۰ - (۱۰۰۰ + ۶۶۶ + ۴۰۰) + (۳۳۳ + ۲۰۰ + ۱۳۳) - ۶۶ = ۵۳۴$$

ب) فرض می‌کنیم $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ مانند قسمت (الف) باشند. فرض می‌کنیم $c_۴$ این شرط را نشان دهد که n بر ۷ بخش‌پذیر است. در این صورت $N(c_۴) = ۲۸۵$، $N(c_۱c_۴) = ۱۴۲$، $N(c_۲c_۴) = ۹۵$، $N(c_۳c_۴) = ۵۷$، $N(c_۱c_۲c_۴) = ۴۷$، $N(c_۱c_۳c_۴) = ۲۸$، $N(c_۲c_۳c_۴) = ۱۹$ و $N(c_۱c_۲c_۳c_۴) = ۹$. بنابراین،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴) = ۲۰۰۰ - (۱۰۰۰ + ۶۶۶ + ۴۰۰ + ۲۸۵) + (۳۳۳ + ۲۰۰ + ۱۳۳ + ۱۴۲ + ۹۵ + ۵۷) - (۶۶ + ۴۷ + ۲۸ + ۱۹) + ۹ = ۴۵۸$$

پ) $۵۳۴ - ۴۵۸ = ۷۶$

۲. $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۹$

الف) $x_i \geq ۰$، $۱ \leq i \leq ۴$. $\binom{۲۲}{۱۹} = \binom{۴+۱۹-۱}{۱۹}$

ب) به‌ازای $1 \leq i \leq 4$ فرض می‌کنیم $c_i : x_i \geq 84$. در این صورت

$$N(c_i) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 : \binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11}, 1 \leq i \leq 4$$

$$N(c_i c_j) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 : \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3}, 1 \leq i < j \leq 4$$

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = N - S_1 + S_2 = \binom{22}{19} - 4\binom{14}{11} + 6\binom{6}{3}$$

پ) تعداد جوابهای $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$، که در آن $0 \leq x_1 \leq 5$، $0 \leq x_2 \leq 6$، $3 \leq x_3 \leq 7$ و $3 \leq x_4 \leq 8$، برابر است با تعداد جوابهای $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$، که در آن $0 \leq x_1 \leq 5$، $0 \leq x_2 \leq 6$، $0 \leq x_3 \leq 4$ و $0 \leq x_4 \leq 5$. به‌ازای هر $1 \leq i \leq 4$ شرط c_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_1 : x_1 \geq 6 \text{ ،} c_2 : x_2 \geq 7 \text{ ،} c_3 : x_3 \geq 5 \text{ و } c_4 : x_4 \geq 6$$

در این صورت $\binom{16}{13} = \binom{4+13-1}{13} = N$،

$$N(c_1), N(c_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 : \binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$$

$$N(c_2) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 : \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6}$$

$$N(c_3) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 : \binom{4+8-1}{8} = \binom{11}{8}$$

$$N(c_1 c_2) = 1$$

$$N(c_1 c_3) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 : \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2}$$

$$N(c_1 c_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 : \binom{4+1-1}{1} = \binom{4}{1}$$

$$N(c_2 c_3) = \binom{4}{1}, N(c_2 c_4) = 1, N(c_3 c_4) = \binom{5}{2}$$

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = \binom{16}{13} - \left[2\binom{10}{7} + \binom{9}{6} + \binom{11}{8}\right] + 2\left[1 + \binom{4}{1} + \binom{5}{2}\right]$$

۳. فرض می‌کنیم c_1 بر این شرط دلالت کند که این ۱۱ حرف شامل دو حضور متوالی جفت IN باشد. شرطهای c_2، c_3، c_4، c_5 و c_6 را نیز، به ترتیب، برای حضور جفتهای متوالی NI، IO، OI، NO و ON تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$N = S_0 = \frac{11!}{(2!)^3}$$

$$N(c_۱) = \frac{۹!}{(۲!)^۲},\ S_۱ = \binom{۶}{۱}\left[\frac{۹!}{(۲!)^۲}\right]$$

$$N(c_۱c_۲) = N(c_۱c_۳) = N(c_۱c_۶) = N(c_۲c_۴) = N(c_۲c_۵) = N(c_۳c_۴) = N(c_۳c_۵) = N(c_۴c_۶) =$$

$$N(c_۵c_۶) = ۰, N(c_۱c_۴) = \frac{۷!}{۲!}, S_۲ = ۶ \times \frac{۷!}{۲!}, S_۳ = S_۴ = S_۵ = S_۶ = ۰$$

در نتیجه، تعداد ترتیبهایی که در شرطهای مفروض صدق می‌کنند برابر است با

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴\bar{c}_۵\bar{c}_۶) = S_۰ - S_۱ + S_۲ = \frac{۱۱!}{(۲!)^۳} - \binom{۶}{۱}\left[\frac{۹!}{(۲!)^۲}\right] + ۶ \times \frac{۷!}{۲!}$$
$$= ۴۹۸۹۶۰۰ - ۵۴۴۳۲۰ + ۱۵۱۲۰ = ۴۴۶۰۴۰۰$$

۴. تعداد جوابهای صحیح $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۹$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $۱ \le i \le ۴$ داشته باشیم $-۵ \le x_i \le ۱۰$، برابر است با تعداد جوابهای صحیح $y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۳۹$، $۰ \le y_i \le ۱۵$. به‌ازای هر $۱ \le i \le ۴$، فرض می‌کنیم $c_i : y_i \ge ۱۶$ دراین صورت

$$N(c_i),\ ۱ \le i \le ۴ : y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۲۳ : \binom{۴ + ۲۳ - ۱}{۲۳} = \binom{۲۶}{۲۳}$$

$$N(c_ic_j),\ ۱ \le i < j \le ۴ : y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۷ : \binom{۴ + ۷ - ۱}{۷} = \binom{۱۰}{۷}$$

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴) = \binom{۴۲}{۳۹} - \binom{۴}{۱}\binom{۲۶}{۲۳} + \binom{۴}{۲}\binom{۱۰}{۷}$$

۵. فرض می‌کنیم x (در مبنای ۱۰) به‌صورت $x_۱x_۲\ldots x_۷$ نوشته شود. دراین صورت، پاسخ مسأله عبارت است از تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۷ = ۳۱$، که درآن به‌ازای هر $۱ \le i \le ۷$ داریم $۰ \le x_i \le ۹$.

اگر $۱ \le j \le ۷$، فرض می‌کنیم c_j بر این شرط دلالت کند که $x_۱$، $x_۲$، …، $x_۷$ یک جواب صحیح $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۷ = ۳۱$ است که درآن به‌ازای هر $۱ \le i \le ۷$، $x_i \ge ۰$ ولی $x_j > ۹$ (یا $x_j \ge ۱۰$).

$N(c_۱)$ تعداد جوابهای صحیح $y_۱ + x_۲ + x_۳ + \cdots + x_۷ = ۲۱$ است، که درآن $y_۱ \ge ۰$ و به‌ازای هر $۲ \le i \le ۷$، $x_i \ge ۰$. دراین صورت $N(c_۱) = \binom{۲۷}{۲۱}$ و $S_۱ = \binom{۷}{۱}\binom{۲۷}{۲۱}$.

$N(c_۱c_۲)$ تعداد جوابهای صحیح $y_۱ + y_۲ + x_۳ + \cdots + x_۷ = ۱۱$ است، که در آن $y_۱, y_۲ \ge ۰$ و به‌ازای هر $۳ \le i \le ۷$، $x_i \ge ۰$. می‌بینیم که $N(c_۱c_۲) = \binom{۱۷}{۱۱}$ و $S_۲ = \binom{۷}{۲}\binom{۱۷}{۱۱}$. به‌همین ترتیب، ملاحظه می‌کنیم که $S_۳ = \binom{۷}{۳}\binom{۷}{۱}$ و $S_۴ = S_۵ = S_۶ = S_۷ = ۰$. چون $N = S_۰ = \binom{۳۷}{۳۱}$، پس

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\ldots\bar{c}_۷) = \binom{۳۷}{۳۱} - \binom{۷}{۱}\binom{۲۷}{۲۱} + \binom{۷}{۲}\binom{۱۷}{۱۱} - \binom{۷}{۳}\binom{۷}{۱}$$

۶. الف) در اینجا در جستجوی تعداد جوابهای صحیح (نامنفی)

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + \cdots + y_{۱۲} = ۸۰$$

هستیم که در آن، به‌ازای هر $۱ \le i \le ۱۲$، $۰ \le y_i \le ۱۵$. برای تعیین نتیجهٔ مطلوب، اصل شمول و طرد

را به‌کار می‌بریم. به‌ازای $1 \le j \le 12$، فرض می‌کنیم c_j بر شرط زیر دلالت کند:

y_1، y_2، y_3، …، y_{12} یک جواب صحیح نامنفی برای $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{12} = 80$ است، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 12$، $y_i \ge 0$ ولی $y_j > 15$. داریم $S_0 = \binom{91}{80}$.

$N(c_1)$ تعداد جوابهای صحیح (نامنفی) $y_1' + y_2 + y_3 + \cdots + y_{12} = 64$ است. بنابراین، $N(c_1) = \binom{12+64-1}{64} = \binom{75}{64}$ و $S_1 = \binom{12}{1}\binom{76}{64}$.

$N(c_1c_2)$ تعداد جوابهای صحیح (نامنفی) $y_1' + y_2' + y_3 + \cdots + y_{12} = 48$ است. درنتیجه، $N(c_1c_2) = \binom{12+48-1}{48} = \binom{59}{48}$ و $S_2 = \binom{12}{2}\binom{59}{48}$.

به‌همین ترتیب می‌بینیم که

$$N(c_1c_2c_3) = \binom{12+32-1}{32} = \binom{43}{32} \qquad S_3 = \binom{12}{3}\binom{43}{32}$$

$$N(c_1c_2c_3c_4) = \binom{12+16-1}{16} = \binom{27}{16} \qquad S_4 = \binom{12}{4}\binom{27}{16}$$

$$N(c_1c_2c_3c_4c_5) = \binom{12+0-1}{0} = \binom{11}{0} \qquad S_5 = \binom{12}{5}\binom{11}{0}$$

و $S_6 = S_7 = S_8 = \cdots = S_{11} = S_{12} = 0$.

بنابراین، پاسخ مطلوب عبارت است از

$$\binom{91}{80} - \binom{12}{1}\binom{75}{64} + \binom{12}{2}\binom{59}{48} - \binom{12}{3}\binom{43}{32} + \binom{12}{4}\binom{27}{16} - \binom{12}{5}\binom{11}{0}$$

ب) در اینجا با واحدهای ۵ امتیازی سر و کار داریم. بنابراین، در جستجوی تعداد طرقی برای امتیاز دادن هستیم که در آن، به هر پرسش دست‌کم ۲ امتیاز (از ۵ امتیاز)، ولی نه بیشتر از ۵ امتیاز، داده شود. به این ترتیب، پاسخ مطلوب عبارت است از تعداد جوابهای صحیح (نامنفی) $z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_{12} = 16$ که در آن، به‌ازای هر $1 \le i \le 12$ داریم $0 \le z_i \le 3$ (۱۶، تعداد واحدهای ۵ امتیازی است). با محاسبه‌ای نظیر محاسبهٔ قسمت (الف) می‌بینیم که پاسخ مطلوب عبارت است از

$$\binom{12+16-1}{16} - \binom{12}{1}\binom{12+12-1}{12} + \binom{12}{2}\binom{12+8-1}{8} - \binom{12}{3}\binom{12+4-1}{4} + \binom{12}{4}\binom{12+0-1}{0}$$

$$= \binom{27}{16} - \binom{12}{1}\binom{23}{12} + \binom{12}{2}\binom{19}{8} - \binom{12}{3}\binom{15}{4} + \binom{12}{4}\binom{11}{0}$$

۷. برای هر یک از توزیعهای این ۱۵ نهال !۱۵ ترتیب وجود دارد. درنتیجه، برای پاسخ دادن به این پرسش باید تعداد جوابهای صحیح مثبت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ را، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ داریم $1 \le x_i \le 4$، بدانیم.

تعداد این جوابها برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10$، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ داریم $0 \le y_i \le 3$. [در اینجا به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ قرار داده‌ایم $x_i = y_i + 1$.]

به‌ازای $1 \le i \le 5$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10$، $y_i \ge 4$ (یا $y_i > 3$) و به‌ازای هر $1 \le j \le 5$ و $j \ne i$، $y_j \ge 0$. در این صورت $N(c_1)$ تعداد جوابهای صحیح نامنفی $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 6$ است. [در اینجا $y_1 = z_1 + 4$ و به‌ازای هر $2 \le i \le 5$، $z_i = y_i$.] این تعداد برابر است با $\binom{10}{6} = \binom{5+6-1}{6}$ و بنابراین، $S_1 = \binom{5}{1}\binom{10}{6}$.

اگر $1 \le i < j \le 5$، $N(c_ic_j)$ تعداد جوابهای صحیح نامنفی $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 2$ است. [در اینجا، $y_i = w_i + 4$، $y_j = w_j + 4$ و به‌ازای هر $1 \le k \le 5$ و $k \ne i, j$، $w_k = y_k$.]
این تعداد برابر است با $\binom{6}{2} = \binom{5+2-1}{2}$ و بنابراین، $S_2 = \binom{5}{2}\binom{6}{2}$.
محاسبات مشابهی نشان می‌دهد که $S_3 = S_4 = S_5 = 0$ و بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = S_0 - S_1 + S_2 = \binom{5+10-1}{10} - \binom{5}{1}\binom{10}{6} + \binom{5}{2}\binom{6}{2}$$
$$= \binom{14}{10} - \binom{5}{1}\binom{10}{6} + \binom{5}{2}\binom{6}{2}$$

در نتیجه، گل‌فروش می‌تواند ۲۵ نهال را با توجه به شرطهای مفروض به

$$(15!)\left[\binom{14}{10} - \binom{5}{1}\binom{10}{6} + \binom{5}{2}\binom{6}{2}\right]$$

طریق بچیند.

۸. پاسخ مطلوب عبارت است از تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ داریم $0 \le x_i \le 3$. به‌ازای $1 \le i \le 4$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که x_1، x_2، x_3، x_4 جوابی است که در آن $x_i \ge 4$. در این صورت $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = \binom{12}{9} - \binom{4}{1}\binom{8}{5} + \binom{4}{2}\binom{4}{1}$.

۹. فرض می‌کنیم c_1 بر این امر دلالت کند که ترتیب مورد بحث شامل الگوی spin است. همین‌طور فرض می‌کنیم c_2، c_3 و c_4، به ترتیب، شرطهای مربوط به الگوهای game، path و net باشند. در این صورت، $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = 26! - [3(23!) + 24!] - (20! + 21!)$.

۱۰. فرض می‌کنیم a، b، c، d، e و f این شش روستا را نشان دهند. به‌ازای هر $1 \le i \le 6$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که سیستمی از جاده‌های دو طرفه به ترتیب، موجب تنهایی روستای a، b، c، d، e و f می‌شود. در این صورت

$N(c_1) = 2^{10}$، $S_1 = \binom{6}{1}2^{10}$، $N(c_1c_2) = 2^6$، $S_2 = \binom{6}{2}2^6$، $N(c_1c_2c_3) = 2^3$، $S_3 = \binom{6}{3}2^3$، $N(c_1c_2c_3c_4) = 2^1$، $S_4 = \binom{6}{4}2^1$، $N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 2^0$، $S_5 = \binom{6}{5}2^0$ و $S_6 = 1$.

بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5\bar{c}_6) = 2^{15} - \binom{6}{1}2^{10} + \binom{6}{2}2^6 - \binom{6}{3}2^3 + \binom{6}{4}2^1 - \binom{6}{5}2^0 + \binom{6}{6}(1)$$

۱۱. $\left[6^8 - \binom{6}{1}5^8 + \binom{6}{2}4^8 - \binom{6}{3}3^8 + \binom{6}{4}2^8 - \binom{6}{5}\right] / 6^8$

۱۲. $10^9 - \binom{3}{1}(9^9) + \binom{3}{2}(8^9) - \binom{3}{3}(7^9)$

۱۳. فرض می‌کنیم شرطهای c_1، c_2 و c_3 عبارت باشند از

c_1: هر سه x باهم‌اند، c_2: هر سه y باهم‌اند؛ c_3: هر سه z با هم‌اند. دراین صورت،

$$N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = \frac{7!}{(3!)^2}, N = \frac{9!}{(3!)^3}$$

به‌ازای هر $1 \le i < j \le 3$، $N(c_i c_j) = \frac{5!}{3!}$ و $N(c_1 c_2 c_3) = 3!$. بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3) = \frac{9!}{(3!)^3} - 3 \times \frac{7!}{(3!)^2} + 3 \times \frac{5!}{3!} - 3!$$

۱۴. در اینجا می‌خواهیم تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$ را به‌دست آوریم، که در آن به‌ازای $i = 1, 2, 3, 4$، $1 \le x_i \le 20$.

این تعداد با تعداد جوابهای صحیح

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 46 \qquad (*)$$

که در آن به‌ازای هر $i = 1, 2, 3, 4$، $0 \le y_i \le 19$، یکی است.

فرض می‌کنیم S مجموعهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ (*) باشد که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ داریم $y_i \ge 0$. دراین صورت $N = S_0 = |S| = \binom{4+46-1}{46} = \binom{49}{46}$. شرطهای c_1، c_2، c_3 و c_4 را دربارهٔ عنصرهای S به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به‌ازای هر $i = 1, 2, 3, 4$ شرط c_i براین امر دلالت دارد که $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S$، ولی $y_i > 19$ (یا $y_i \ge 20$).

دراین صورت

$$N(c_i) = \binom{4+26-1}{26} = \binom{29}{26}, \quad 1 \le i \le 4$$

$$N(c_i c_j) = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6}, \quad 1 \le i < j \le 4$$

$$N(c_i c_j c_k) = 0, \quad 1 \le i < j < k \le 4$$

و $N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 0$. درنتیجه،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = \binom{49}{46} - \binom{4}{1}\binom{29}{26} + \binom{4}{2}\binom{9}{6}$$

$$= 18424 - 4 \times 3654 + 6 \times 84 = 4312$$

بنابراین، احتمال اینکه این انتخاب شامل دست‌کم یک نفر از هر یک از چهار گروه باشد برابر است با $4312/\binom{49}{46} = \frac{4312}{18424} \doteq 0{,}234$.

۱۵. در اینجا باید تعداد جوابهای صحیح

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

را، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ داریم $1 \le x_i \le 6$، بیابیم.

اگر $1 \le i \le 5$، فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که y_1، y_2، y_3، y_4 و y_5 جوابی برای $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 15$ است به‌طوری که به‌ازای هر $1 \le j \le 5$ و $j \ne i$ داریم $y_j \ge 0$، ولی $y_i \ge 6$. در این صورت تعداد جوابهای صحیح

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 15$$

که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ داریم $0 \le y_i \le 5$، برابر است با $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5)$.

در اینجا N تعداد جوابهای صحیح نامنفی $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 15$ را نشان می‌دهد. این تعداد برابر است با $\binom{5+15-1}{15} = \binom{19}{15}$. [بنابراین، $S_0 = \binom{19}{15}$.]

برای تعیین $N(c_1)$ باید تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 9$$

را، که در آن به‌ازای هر $i \ne 1$ داریم $z_i = y_i$ و $y_1 = z_1 + 6$، بیابیم. در نتیجه، $N(c_1) = \binom{5+9-1}{9} = \binom{13}{9}$ و $S_1 = \binom{5}{1}\binom{13}{9}$.

برای $N(c_1c_2)$ باید تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 3$$

را، که در آن به‌ازای هر $i = 3, 4, 5$ داریم $w_i = y_i$ و $y_1 = w_1 + 6$ و $y_2 = w_2 + 6$، تعیین کنیم. این تعداد برابر است با $\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3}$ و درنتیجه، $S_2 = \binom{5}{2}\binom{7}{3}$.

چون $S_3 = S_4 = S_5 = 0$، پس

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = S_0 - S_1 + S_2 = \binom{19}{15} - \binom{5}{1}\binom{13}{9} + \binom{5}{2}\binom{7}{3}$$

$$= 3876 - 5 \times 715 + 10 \times 35$$

$$= 3876 - 3575 + 350 = 651$$

در اینجا فضای نمونه‌ای عبارت است از $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid 1 \le x_i \le 6 ،\ 1 \le i \le 5 \ \text{به‌ازای هر}\}$.
چون $|S| = 6^5 = 7776$، پس احتمال اینکه مجموع پنج پرتاب برابر با ۲۰ شود عبارت است از

$$\frac{651}{7776} \doteq 0.08372$$

۱۶. به‌ازای هر $1 \le i \le 7$، فرض می‌کنیم c_i بر این وضعیت دلالت کند که دوست iاُم ریحانه با او بر سر میز ناهار

بوده است. در این صورت

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\cdots\bar{c}_۷) = ۸۴ - \binom{۷}{۱}(۳۵) + \binom{۷}{۲}(۱۶) - \binom{۷}{۳}(۸) + \binom{۷}{۴}(۴) - \binom{۷}{۵}(۲) + \binom{۷}{۶}(۱) - \binom{۷}{۷}(۰) = ۰$$

درنتیجه، ریحانه همیشه با دوستی بر سر میز ناهار بوده است.

۱۷. الف) ۳۲ ب) ۹۶ پ) ۳۲۰۰

۱۸. الف) $۵۱۸۶ = ۲ \times ۲۵۹۳$ و ۲۵۹۲ = $\phi(۵۱۸۶) = ۵۱۸۶ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۲۵۹۲}{۲۵۹۳}$.

ب) $۵۱۸۷ = ۳ \times ۷ \times ۱۳ \times ۱۹$ و بنابراین،

$$\phi(۵۱۸۷) = ۵۱۸۷ \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۶}{۷} \times \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۱۸}{۱۹} = ۲ \times ۶ \times ۱۲ \times ۱۸ = ۲۵۹۲$$

پ) $۵۱۸۸ = ۲^۲ \times ۱۲۹۷$ و ۲۵۹۲ = $\phi(۵۱۸۸) = ۵۱۸۸ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۲۹۶}{۱۲۹۷}$. بنابراین،

$$\phi(۵۱۸۶) = \phi(۵۱۸۷) = \phi(۵۱۸۸)$$

۱۹. الف) $۲^{n-۱}$ ب) $۲^{n-۱}(p-۱)$

۲۰. از $\phi(n)$ فرد نتیجه می‌شود که $n = ۲$.

۲۱. الف) $\phi(۶۰۰۰) = \phi(۲^۴ \times ۳ \times ۵^۳) = ۶۰۰۰\left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۳}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۵}\right) = ۱۶۰۰$

ب) $۶۰۰۰ - ۱۶۰۰ - ۱ = ۴۳۹۹$ (عدد ۱ را به‌خاطر ۶۰۰۰ کم کرده‌ایم.)

۲۲. برهان: $\phi(n^m) = (n^m)\prod_{p|n^m}\left(۱ - \frac{۱}{p}\right)$. ولی به‌ازای هر عدد اول مانند p، از لم ۴ ۰ ۳ نتیجه می‌شود که اگر $p|n^m$، آن‌گاه $p|n$. بنابراین،

$$\phi(n^m) = (n^m)\prod_{p|n^m}\left(۱ - \frac{۱}{p}\right) = (n^{m-۱})\left[n\prod_{p|n}\left(۱ - \frac{۱}{p}\right)\right] = n^{m-۱}\phi(n)$$

۲۳. $\phi(۱۷) = \phi(۳۲) = \phi(۴۸) = ۱۶$.

۲۴. برای آنکه $\phi(n)$ توانی از ۲ باشد باید یکی از حالتهای زیر پیش آید:

(۱) $n = ۲^k$، که در آن $k \geq ۱$،

(۲) $n = p_۱p_۲\ldots p_t$، که در آن $t \geq ۱$ و به‌ازای هر $۱ \leq i \leq t$ عدد اول p_i به‌صورت $۲^{k_i} + ۱$ است، یا

(۳) $n = ۲^kp_۱p_۲\ldots p_t$، که در آن $k \geq ۱$، $t \geq ۱$ و به‌ازای هر $۱ \leq i \leq t$ عدد اول p_i به‌صورت $۲^{k_i} + ۱$ است.

۲۵. اگر عدد ۴ عدد $\phi(n)$ را بشمارد، در این صورت یکی از حالتهای زیر باید روی دهد:

(۱) n بر ۸ بخش‌پذیر باشد،

(۲) n بر دو (یا بیشتر از دو) عدد اول فرد متمایز بخش‌پذیر باشد،

(۳) n بر یک عدد اول فرد p (مانند ۵، ۱۳ و ۱۷) بخش‌پذیر باشد و عدد ۴ عدد $p - ۱$ را بشمارد، و

(۴) n بر ۴ (و نه بر ۸) و دست‌کم بر یک عدد اول فرد بخش‌پذیر باشد.

۲۶. (۱) قطعه برنامهٔ زیر را بعد از سطر Read(n) درج کنید:

```
If n = 2 then
    Writeln ('For n = 2 there is only one number that is less
        than 2 and relatively prime to it.')
Else
    Begin
```

(۲) سطر زیر را درج کنید:

```
Writeln (' and relatively prime to it.')
```

۲۷. الف) اگر عدد n بر عدد اولی مانند p بخش‌پذیر باشد، اجرای حلقهٔ While عدد n را به حاصل‌ضرب همهٔ عاملهای p موجود در n تقسیم می‌کند. حلقهٔ اول برای $p = ۲$ است. حلقهٔ بعدی برای $p = ۳$ و حلقهٔ سوم برای عددهای اول $p > ۳$ است.

ب) هنگام کارکردن با عددهای اول، بعد از $p = ۵$، دیگر بررسی عددهای صحیح زوج به‌عنوان نامزدهای احتمالی برای عددهای اول معنی ندارد.

بند ۲.۸

۱. $E_۰ = ۷۶۸$، $E_۱ = ۲۰۵$، $E_۲ = ۴۰$، $E_۳ = ۱۰$، $E_۴ = ۰$ و $E_۵ = ۱$.

$$\sum_{i=۰}^{۵} E_i = ۱۰۲۴ = N$$

۲. الف) فرض‌کنیم $c_۱$ براین شرط دلالت‌کندکه درترتیبی از ARRANGEMENT هر دو A کنار هم‌اند. شرطهای $c_۲$، $c_۳$ و $c_۴$ را نیز، به ترتیب، برای هر دو E، هر دو N و هر دو R تعریف می‌کنیم. $N = \frac{۱۱!}{(۲!)^۴} = ۲۴۹۴۸۰۰$. به‌ازای $۱ \le i \le ۴$، $N(c_i) = \frac{۱۰!}{(۲!)^۳} = ۴۵۳۶۰۰$. به‌ازای $۱ \le i < j \le ۴$، $N(c_ic_j) = \frac{۹!}{(۲!)^۲} = ۹۰۷۲۰$. به‌ازای $۱ \le i < j < k \le ۴$، $N(c_ic_jc_k) = \frac{۸!}{۲!} = ۲۰۱۶۰$. $N(c_۱c_۲c_۳c_۴) = ۷! = ۵۰۴۰$.

$$S_۱ = \binom{۴}{۱}(۴۵۳۶۰۰) = ۱۸۱۴۴۰۰ \qquad S_۲ = \binom{۴}{۲}(۹۰۷۲۰) = ۵۴۴۳۲۰$$
$$S_۳ = \binom{۴}{۳}(۲۰۱۶۰) = ۸۰۶۴۰ \qquad S_۴ = \binom{۴}{۴}(۵۰۴۰) = ۵۰۴۰$$

(یک) $E_۲ = S_۲ - \binom{۳}{۱}S_۳ + \binom{۴}{۲}S_۴ = ۵۴۴۳۲۰ - (۳)(۸۰۶۴۰) + (۶)(۵۰۴۰) = ۳۳۲۶۴۰$

(دو) $L_۲ = S_۲ - \binom{۲}{۱}S_۳ + \binom{۳}{۱}S_۴ = ۳۹۸۱۶۰$

ب) (یک) $E_۳ = S_۳ - \binom{۴}{۱}S_۴ = ۶۰۴۸۰$ (دو) $L_۳ = S_۳ - \binom{۳}{۲}S_۴ = ۶۵۵۲۰$

۳. فرض می‌کنیم $c_۱$ به وقوع Eهای متوالی در ترتیب دلالت کند. $c_۲$، $c_۳$، $c_۴$ و $c_۵$ را به‌طور مشابهی، به ترتیب، برای N ها، Oها، Rها و Sهای متوالی تعریف می‌کنیم.

الف) $N(c_۱)=\frac{۱۳!}{(۲!)^۴}$، $S_۱=\binom{۵}{۱}\left[\frac{۱۳!}{(۲!)^۴}\right]$

$N(c_۱c_۲)=\frac{۱۲!}{(۲!)^۳}$، $S_۲=\binom{۵}{۲}\left[\frac{۱۲!}{(۲!)^۳}\right]$

$N(c_۱c_۲c_۳)=\frac{۱۱!}{(۲!)^۲}$، $S_۳=\binom{۵}{۳}\left[\frac{۱۱!}{(۲!)^۲}\right]$

$N(c_۱c_۲c_۳c_۴)=\frac{۱۰!}{۲!}$، $S_۴=\binom{۵}{۴}\left(\frac{۱۰!}{۲!}\right)$

$S_۵ = ۹! = N(c_۱c_۲c_۳c_۴c_۵)$. بنابراین، $N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴\bar{c}_۵) = ۱۲۸۶۰۴۶۷۲۰$.

ب) $E_۲ = S_۲ - \binom{۳}{۱}S_۳ + \binom{۴}{۲}S_۴ - \binom{۵}{۳}S_۵ = ۳۵۰۱۷۹۲۰۰$

پ) $L_۳ = S_۳ - \binom{۳}{۲}S_۴ + \binom{۴}{۲}S_۵ = ۷۴۷۵۳۲۸۰$

۴. به‌ازای $۱ \le i \le ۷$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که i در برد f قرار ندارد. در این صورت تعداد توابعی مانند $f : A \to B$ که در آن $|f(A)| = ۴$ برابر است با

$$E_۳ = S_۳ - \binom{۴}{۱}S_۴ + \binom{۵}{۲}S_۵ - \binom{۶}{۳}S_۶ + \binom{۷}{۴}S_۷ = \binom{۷}{۳}۴^{۱۰} - \binom{۴}{۱}\binom{۷}{۴}۳^{۱۰}$$
$$+ \binom{۵}{۲}\binom{۷}{۵}۲^{۱۰} - \binom{۶}{۳}\binom{۷}{۶}۱^{۱۰} + \binom{۷}{۴}\binom{۷}{۷}۰^{۱۰} = ۲۸۶۴۸۲۰۰$$

یادداشت: با استفاده از اعداد استرلینگ نوع دوم، نتیجه عبارت است از $\binom{۷}{۴}۴!S(۱۰,۴) = ۲۸۶۴۸۲۰۰$.

$$L_۳ = S_۳ - \binom{۳}{۲}S_۴ + \binom{۴}{۲}S_۵ - \binom{۳}{۲}S_۶ + \binom{۶}{۲}S_۷$$
$$= \binom{۷}{۳}۴^{۱۰} - \binom{۳}{۲}\binom{۷}{۴}۳^{۱۰} + \binom{۴}{۲}\binom{۷}{۵}۲^{۱۰} - \binom{۵}{۲}\binom{۷}{۶}۱^{۱۰}$$

۵. در اینجا $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. با استفاده از ایده‌های قسمت اول برای به‌دست آوردن $|f(A)| = ۲$ به $E_۲$ و برای به‌دست آوردن $|f(A)| \ge ۲$ به $L_۲$ نیاز داریم.

۶. به‌ازای $۱ \le i \le ۱۰$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که حرف iاُم در جای عادی خود قرار گیرد. در این صورت $N(c_۱c_۲c_۳c_۴) = ۶!$ و $S_۴ = \binom{۱۰}{۴}(۶!)$. به‌همین ترتیب، به‌ازای هر $۵ \le i \le ۱۰$، $S_i = \binom{۱۰}{i}(i!)$.

$$E_۴ = S_۴ - \binom{۵}{۱}S_۵ + \binom{۶}{۲}S_۶ - \binom{۷}{۳}S_۷ + \binom{۸}{۴}S_۸ - \binom{۹}{۵}S_۹ + \binom{۱۰}{۶}S_{۱۰}$$

$$L_۴ = S_۴ - \binom{۴}{۳}S_۵ + \binom{۵}{۳}S_۶ - \binom{۶}{۳}S_۷ + \binom{۷}{۳}S_۸ - \binom{۸}{۳}S_۹ + \binom{۹}{۳}S_{۱۰}$$

۷. الف) فرض می‌کنیم $c_۱$ برنبودن کارت سفید، $c_۲$ برنبودن کارت آبی، $c_۳$ برنبودن کارت قرمز و $c_۴$ برنبودن کارت سیاه دلالت کنند. در این صورت، به‌ازای $۱ \leq i \leq ۴$ داریم $N(c_i) = \binom{۳۹}{۱۳}$، به‌ازای $۱ \leq i < j \leq ۴$ داریم $N(c_ic_j) = \binom{۲۶}{۱۳}$، به‌ازای $۱ \leq i < j < k \leq ۴$ داریم $N(c_ic_jc_k) = \binom{۱۳}{۱۳}$ و $N(c_۱c_۲c_۳c_۴) = ۰$. بنابراین،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴) = \binom{۵۲}{۱۳} - \binom{۴}{۱}\binom{۳۹}{۱۳} + \binom{۴}{۲}\binom{۲۶}{۱۳} - \binom{۴}{۳}\binom{۱۳}{۱۳}$$

احتمال اینکه این ۱۳ کارت شامل دست‌کم یک کارت از هر رنگ باشد برابر است با $\dfrac{N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴)}{\binom{۵۲}{۱۳}}$.

ب) $E_۱ = S_۱ - \binom{۲}{۱}S_۲ + \binom{۳}{۲}S_۳ - \binom{۴}{۳}S_۴ = \binom{۴}{۱}\binom{۳۹}{۱۳} - ۲\binom{۴}{۲}\binom{۲۶}{۱۳} + ۳\binom{۴}{۳}\binom{۱۳}{۱۳} - ۰$

احتمال اینکه دقیقاً یکی از رنگها نباشد برابر است با $E_۱/\binom{۵۲}{۱۳}$.

پ) $E_۲ = S_۲ - \binom{۳}{۱}S_۳ = \binom{۴}{۲}\binom{۲۶}{۱۳} - ۳\binom{۴}{۳}\binom{۱۳}{۱۳}$. احتمال اینکه دقیقاً دو تا از رنگها نباشند برابر است با $E_۲/\binom{۵۲}{۱۳}$.

۸. ب) $E_{t-۱} = S_{t-۱} - tS_t$ ، $L_{t-۱} = L_t + E_{t-۱}$

پ) $L_{t-۱} = L_t + E_{t-۱} = S_t + S_{t-۱} - tS_t = S_{t-۱} - (t-۱)S_t = S_{t-۱} - \binom{t-۱}{t-۲}S_t$

ت) $L_m = L_{m+۱} + E_m$

ث) $L_t = S_t$ ، $L_{t-۱} = S_{t-۱} - \binom{t-۱}{t-۲}S_t$

فرض می‌کنیم

$$L_{k+۱} = S_{k+۱} - \binom{k+۱}{k}S_{k+۲} + \binom{k+۲}{k}S_{k+۳} - \cdots + (-۱)^{t-k-۱}\binom{t-۱}{k}S_t$$

$$L_k = L_{k+۱} + E_k = \left[S_{k+۱} - \binom{k+۱}{k}S_{k+۲} + \binom{k+۲}{k}S_{k+۳} - \cdots + (-۱)^{t-k-۱}\binom{t-۱}{k}S_t\right] + \left[S_k - \binom{k+۱}{۱}S_{k+۱} + \binom{k+۲}{۲}S_{k+۲} - \cdots + (-۱)^{t-k}\binom{t}{t-k}S_t\right]$$

به‌ازای $۱ \leq r \leq t-k$، ضریب S_{k+r} برابر است با

$$(-۱)^{r-۱}\binom{k+r-۱}{k} + (-۱)^r\binom{k+r}{r} = (-۱)^{r-۱}\left[\frac{(k+r-۱)!}{k!(r-۱)!} - \frac{(k+r)!}{k!r!}\right] =$$

$$(-۱)^{r-۱}\left[\frac{r(k+r+۱)! - (k+r)!}{k!r!}\right] = (-۱)^{r-۱}\frac{(k+r-۱)!(-k)}{k!r!}$$

$$= (-۱)^r\binom{k+r-۱}{k-۱}$$

درنتیجه، $L_k = S_k - \binom{k}{k-1}S_{k+1} + \binom{k+1}{k-1}S_{k+2} - \cdots + (-1)^{t-k}\binom{t-1}{k-1}S_t$.

بند ۳.۸

۱. به‌ازای $1 \le i \le 5$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که $2i$ در مکان $2i$ است.
دراین‌صورت، $N = 10!$، به‌ازای هر $1 \le i \le 5$ داریم $N(c_i) = 9!$، به‌ازای هر $1 \le i < j \le 5$ داریم

$$N(c_ic_j) = 8! \text{ ، } \dots \text{ ، } N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 5!$$

بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = 10! - \binom{5}{1}9! + \binom{5}{2}8! - \binom{5}{3}7! + \binom{5}{4}6! - \binom{5}{5}5!$$

۲. الف) فقط دو پریش با این ویژگی وجود دارد: ۲۳۱۵۴ و ۳۱۲۵۴
ب) در اینجا چهار تا از این نوع پریشها وجود دارد:
(یک) ۲۳۱۵۴۶ (دو) ۲۳۱۶۴۵ (سه) ۳۱۲۵۴۶ (چهار) ۳۱۲۶۴۵

۳. تعداد پریشهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ برابر است با

$$5!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 5!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 5 \times 4 \times 3 - 5 \times 4 + 5 - 1$$
$$= 60 - 20 + 5 - 1 = 44$$

۴. $7! = 5040$ جایگشت برای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ وجود دارد. بین این جایگشتها، تعداد پریشها برابر است با

$$7!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right) = 1854$$

درنتیجه، $5040 - 1854 = 3186$ جایگشت برای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ داریم که پریش نیستند.

۵. الف) $7! - d_7 \; (d_7 \doteq (7!)e^{-1})$ ب) $d_{26} \doteq (26!)e^{-1}$

۶. الف) $(d_4)^2 = 9^2 = 81$ تا از این نوع پریشها وجود دارد.
ب) در این حالت $(4!)^2 = 24^2 = 576$ پریش به‌دست می‌آوریم.

۷. فرض می‌کنیم $n = 5 + m$. در این صورت $44(d_m) = d_5 \times d_m = 11660$ و بنابراین، $d_m = 265 = d_6$.
درنتیجه، $n = 11$.

۸. الف) $(4!)d_4 \doteq (4!)^2e^{-1}$ ب و پ) $\dfrac{2 \times 3^2 \times 6}{(4!)^2e^{-1}}$

۹. $(10!)d_{10} \doteq (10!)^2(e^{-1})$

۱۰. الف) (یک) $\dfrac{dn}{n!}$ (دو) $\dfrac{n(d_{n-1})}{n!}$ (سه) $1 - \dfrac{d_n}{n!}$ (چهار) $\dfrac{\binom{n}{r}d_{n-r}}{n!}$
ب) (یک) e^{-1} (دو) e^{-1} (سه) $1 - e^{-1}$ (چهار) $\dfrac{1}{r!} \times e^{-1}$

۱۱. الف) $(d_{10})^2$

ب) به‌ازای $1 \leq i \leq 10$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که نفر iاُم وسایل خود را بگیرد. دراین صورت $N = (10!)^2$، به‌ازای $1 \leq i \leq 10$ داریم $N(c_i) = (9!)^2$، به‌ازای $1 \leq i < j \leq 10$ داریم $N(c_i c_j) = (8!)^2$ و غیره. بنابراین،

$$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \cdots \bar{c}_{10}) = (10!)^2 - \binom{10}{1}(9!)^2 + \binom{10}{2}(8!)^2 - \cdots + (-1)^{10}\binom{10}{0}(0!)^2$$

۱۲. الف) $(12!)d_{12}$ ب) $(12!)\binom{12}{6}d_6$

۱۳. به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، تعداد کل جایگشتهای ۱، ۲، ۳، . . .، n برابر است با $n!$. هر یک از این جایگشتها شامل k عنصر است که پریشان شده‌اند (یعنی، k عنصر مانند x_1، x_2، . . .، x_k در $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ وجود دارد به‌طوری که x_1 در مکان x_1 نیست، x_2 در مکان x_2 نیست، . . . و x_k در مکان x_k نیست) و شامل $n - k$ عنصر است که ثابت نگاه داشته شده‌اند (مقصود هر $n - k$ عنصر y_1، y_2، . . .، y_{n-k} متعلق به $\{1, 2, 3, \ldots, n\} - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ است که چنان‌اند که y_1 در مکان y_1 است، y_2 در مکان y_2 است، . . .، و y_{n-k} در مکان y_{n-k} است).

این $n - k$ عنصر ثابت را می‌توان به $\binom{n}{n-k}$ طریق انتخاب کرد و سپس k عنصر دیگر می‌توانند به d_k طریق پریشان شوند. بنابراین، $\binom{n}{n-k}d_k = \binom{n}{k}d_k$ جایگشت برای ۱، ۲، ۳، . . .، n وجود دارد که در هر یک از آنها $n - k$ عنصر ثابت‌اند (و k عنصر پریشان شده‌اند). وقتی k از ۰ تا n تغییر می‌کند همهٔ $n!$ جایگشت مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ را با توجه به تعداد k عنصر پریشان شدهٔ آنها به‌دست می‌آوریم. در نتیجه،

$$n! = \binom{n}{0}d_0 + \binom{n}{1}d_1 + \binom{n}{2}d_2 + \cdots + \binom{n}{n}d_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k$$

۱۴. الف) به‌ازای $1 \leq i \leq n - 1$ فرض می‌کنیم c_i بر وقوع الگوی $i(i + 1)$ در ترتیب خطی دلالت کند. دراین صورت،

$$N(c_i) = (n-1)!, \ 1 \leq i \leq n-1$$

$$N(c_i c_j) = (n-2)!, \ 1 \leq i < j \leq n-1$$

$$N(c_i c_j c_k) = (n-3)!, \ 1 \leq i < j < k \leq n-1, \ldots,$$

$$N(c_1 c_2 \cdots c_{n-1}) = (n-(n-1))!$$

$$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \cdots \bar{c}_{n-1}) = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)!$$
$$- \binom{n-1}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)! + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}(n-(n-1))!$$

ب)

$$d_n + d_{n-1} = \left[n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!\right] + \left[(n-1)! - \binom{n-1}{1}(n-2)! + \binom{n-1}{2}(n-3)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}((n-1)-(n-1))!\right]$$

ضریب $(n-k)!$ در $d_n + d_{n-1}$ برابر است با

$$\begin{aligned}(-1)^k\binom{n}{k} + (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1} &= (-1)^{k-1}[[(n-1)!/[(k-1)!(n-k)!]] \\ &\quad - [n!/[k!(n-k)!]] \\ &= (-1)^{k-1}[[k(n-1)! - n!]/[k!(n-k)!]] \\ &= (-1)^{k-1}(n-1)![(k-n)/[k!(n-k)!]] \\ &= (-1)^k (n-1)!/[k!(n-k-1)!] = (-1)^k\binom{n-1}{k}\end{aligned}$$

۱۵. $\binom{n}{0}(n-1)! - \binom{n}{1}(n-2)! + \binom{n}{2}(n-3)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(0!) + (-1)^n\binom{n}{n}$

۱۶. الف) $\frac{11088}{10!} \doteq 0{,}003$ ب) $\frac{13264}{10!} \doteq 0{,}004$

بندهای ۴.۸ و ۵.۸

۱. این نتایج از شمردن مکانهای ممکن برای تعداد رخهای مطلوب در هر یک از صفحات شطرنجی، به‌دست می‌آیند.

۲. صفحه‌ای شطرنجی درنظر بگیرید که از ۱۰ مربع واقع در امتداد یک قطر تشکیل شده است به‌طوری که در هر سطر و هر ستون فقط یک مربع وجود دارد.

۳. الف)
$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1}8x + \binom{8}{2}(8\times 7)x^2 + \binom{8}{3}(8\times 7\times 6)x^3 + \binom{8}{4}(8\times 7\times 6\times 5)x^4 + \cdots + \binom{8}{8}(8!)x^8 = \sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}P(8,i)x^i$$

ب) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}P(n,i)x^i$

۴. $r(C_1, x) = 1 + 4x + 3x^2 = r(C_2, x)$

۵. الف) (یک) $(1+2x)^3$ (دو) $1 + 8x + 14x^2 + 4x^3$

(سه) $1 + 9x + 25x^2 + 21x^3$ (چهار) $1 + 8x + 16x^2 + 7x^3$

ب) اگر صفحهٔ C از n پله تشکیل شده باشد و هر پله دارای k بلوک باشد، دراین صورت $r(C,x) = (1+kx)^n$.

۶. این k مکان سطری را به $\binom{m}{k}$ طریق می‌توان انتخاب کرد. به‌تدریج که از سطر ۱ به سطر ۲، ... به سطر m می‌رویم، برای نخستین سطری که رخ دارد n انتخاب ستونی وجود دارد. برای دومین سطر از این نوع $n-1$

انتخاب ستونی وجود دارد، ...، و سرانجام برای سطر حاوی رخ kاُم $n-k+1$ انتخاب ستونی وجود دارد. درنتیجه، k رخ را می‌توان به

$$\binom{m}{k}(n)(n-1)\cdots(n-k+1)=(k!)\binom{m}{k}\binom{n}{k}$$

طریق روی C مرتب کرد به‌طوری که هیچ‌یک نتواند دیگری را بزند.

.۷

	FORTRAN	Pascal	PL/1	BASIC	APL
(۱) نفر اول					
(۲) نفر دوم					
(۳) نفر سوم					
(۴) نفر چهارم					
(۵) نفر پنجم					

$$r(C,x)=(1+4x+3x^2)(1+4x+2x^2)=1+8x+21x^2+20x^3+6x^4$$

به‌ازای $1 \leq i \leq 5$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که زبانی به نفر iاُم نسبت داده شده است که او می‌خواهد از آن اجتناب کند. در این صورت

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5)=5!-8(4!)+21(3!)-20(2!)+6(1!)=20$$

۸. عامل ضرب (!۶) به این سبب لازم است که دنباله‌های مرتب را می‌شمریم.

۹. الف) ۲۰ ب) $\frac{3}{10}$

۱۰. $r(C,x)=(1+4x+2x^2)\cdot(1+3x+x^2)\cdot(1+x)$

$$=1+8x+22x^2+25x^3+12x^4+2x^5$$

	۱	۵	۲	۴	۶	۳
۱						
۵						
۳						
۴						
۲						
۶						

به‌ازای $1 \leq i \leq 6$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که پس از شش بار ریختن تاسها، هر شش مقدار روی هر دو تاس قرمز و سبز بنشینند، ولی عدد i روی تاس قرمز با عددی از تاس سبز جفت شود که جزء عددهای ممنوعه است. در این صورت

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_6)=[6!-8(5!)+22(4!)-25(3!)+12(2!)-2(1!)+0(0!)]=160$$

احتمال اینکه هریک از شش مقدار روی هر دو تاس قرمز و سبز نشسته باشد برابر است با $0{,}00024 \doteq \frac{6!\times 160}{(28)^6}$.

	$M_۱$	$M_۳$	$M_۶$	$M_۲$	$M_۴$	$M_۵$
$W_۱$						
$W_۳$						
$W_۲$						
$W_۴$						

۱۱. $r(C,x) = (۱ + ۵x + ۴x^۲)(۱ + ۴x + ۳x^۲)$
$= ۱ + ۹x + ۲۷x^۲ + ۳۱x^۳ + ۱۲x^۴$

به‌ازای $۱ \leq i \leq ۴$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که هر یک از این چهار مهره، به استثنای مهرهٔ iاُم، با پیچ مناسبی جفت شده باشد. دراین صورت

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴) = (۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳) - ۹(۵ \times ۴ \times ۳) + ۲۷(۴ \times ۳) - ۳۱(۳) + ۱۲ = ۶۳$$

تمرینات تکمیلی

۱. فقط باید مقسوم‌علیه‌های ۲، ۳ و ۵ را بررسی کنیم. فرض می‌کنیم $c_۱$ بخش‌پذیری بر ۲، $c_۲$ بخش‌پذیری بر ۳ و $c_۳$ بخش‌پذیری بر ۵ را نشان دهند. در این صورت،

$$N = ۵۰۰, \qquad N(c_۱) = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۲} \right\rfloor = ۲۵۰, \qquad N(c_۲) = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۳} \right\rfloor = ۱۶۶$$

$$N(c_۳) = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۵} \right\rfloor = ۱۰۰, \qquad N(c_۱c_۲) = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۶} \right\rfloor = ۸۳, \qquad N(c_۱c_۳) = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۱۰} \right\rfloor = ۵۰$$

$$N(c_۲c_۳) = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۱۵} \right\rfloor = ۳۳, \qquad N(c_۱c_۲c_۳) = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۳۰} \right\rfloor = ۱۶$$

بنابراین،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳) = ۵۰۰ - (۲۵۰ + ۱۶۶ + ۱۰۰) + (۸۳ + ۵۰ + ۳۳) - ۱۶ = ۱۳۴$$

۲. فرض می‌کنیم $n = n_۱n_۲n_۳n_۴n_۵n_۶$، که در آن به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۶$ داریم $۰ \leq n_i \leq ۹$. در پی آنیم که $n_۱ + n_۲ + n_۳ + n_۴ + n_۵ + n_۶ \leq ۳۷$. بنابراین، پاسخ این مسأله عبارت است از تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$n_۱ + n_۲ + n_۳ + n_۴ + n_۵ + n_۶ + n_۷ = ۳۷$$

که در آن به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۶$ داریم $۰ \leq n_i \leq ۹$ و $۰ \leq n_۷ \leq ۳۷$.

به‌ازای $۱ \leq i \leq ۶$ شرط c_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $n_۱$، $n_۲$، $n_۳$، $n_۴$، $n_۵$، $n_۶$، $n_۷$ یک جواب صحیح نامنفی

$$n_۱ + n_۲ + \cdots + n_۷ = ۳۷$$

است، ولی $n_i > ۹$ (یا $n_i \geq ۱۰$).

$$S_۰ = N = \binom{۷ + ۳۷ - ۱}{۳۷} = \binom{۴۳}{۳۷}$$

$N(c_1)$ تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_7=27$ است (که در اینجا $x_1+10=n_1$ و به‌ازای هر $2 \le i \le 7$، $x_i=n_i$). بنابراین، $N(c_1)=\binom{7+27-1}{27}=\binom{33}{27}$ و $S_1=\binom{6}{1}\binom{33}{27}$. $N(c_1c_2)$ تعداد جوابهای صحیح نامنفی $y_1+y_2+y_3+\cdots+y_7=17$ است (که در اینجا $y_1+10=n_1$، $y_2+10=n_2$ و به‌ازای هر $3 \le i \le 7$، $y_i=n_i$). این تعداد برابر است با $\binom{23}{17}=\binom{7+17-1}{17}$ و بنابراین، $S_2=\binom{6}{2}\binom{23}{17}$.

$N(c_1c_2c_3)$ برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_7=7$، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 3$ داریم $z_i+10=n_i$ و به‌ازای هر $4 \le i \le 7$ داریم $z_i=n_i$. بنابراین، $N(c_1c_2c_3)=\binom{7+7-1}{7}=\binom{13}{7}$ و $S_3=\binom{6}{3}\binom{13}{7}$.

چون $S_4=S_5=S_6=0$، پاسخ مسأله عبارت است از

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\cdots\bar{c}_6)=S_0-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5+S_6$$

$$=\binom{43}{37}-\binom{6}{1}\binom{33}{27}+\binom{6}{2}\binom{23}{17}-\binom{6}{3}\binom{13}{7}=930931$$

۳. برای هر توزیع این ۲۴ توپ (بین چهار قفسهٔ مفروض) $\frac{24!}{(6!)^4}$ ترتیب ممکن وجود دارد. بنابراین، باید بدانیم با توجه به شرطهای مفروض به چند طریق می‌توان این توپها را توزیع کرد. تعداد طرق توزیع برابر است با تعداد جوابهای صحیح

$$x_1+x_2+x_3+x_4=24$$

که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ داریم $2 \le x_i \le 7$.

این هم برابر است با تعداد جوابهای صحیح

$$y_1+y_2+y_3+y_4=16$$

که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ داریم $0 \le y_i \le 5$. [در اینجا به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ قرار داده‌ایم $x_i=y_i+2$.] به‌ازای هر $1 \le i \le 4$ شرط c_i را به این صورت تعریف می‌کنیم که y_1، y_2، y_3 و y_4 یک جواب

$$y_1+y_2+y_3+y_4=16$$

است، که در آن $y_i > 5$ (یا $y_i \ge 6$) و به‌ازای هر $1 \le j \le 4$ به‌طوری که $j \ne i$، $y_j \ge 0$. در این صورت، مثلاً $N(c_1)$ تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$w_1+w_2+w_3+w_4=10$$

است. [در اینجا $w_1+6=y_1$ و به‌ازای هر $i=2,3,4$، $w_i=y_i$.] بنابراین، $N(c_1)=\binom{4+10-1}{10}=\binom{13}{10}$ و $S_1=\binom{4}{1}\binom{13}{10}$. استدلالهای مشابهی نشان می‌دهند که $N(c_1c_2)=\binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}$، $S_2=\binom{4}{2}\binom{7}{4}$ و $S_3=S_4=0$. در نتیجه، تعداد توزیعها با توجه به شرطهای مفروض عبارت است از

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4)=\binom{19}{16}-\binom{4}{1}\binom{13}{10}+\binom{4}{2}\binom{7}{4}$$

و این ۲۴ توپ را می‌توان در قفسه‌ها به

$$\frac{۲۴!}{(۶!)^۴}\left[\binom{۱۹}{۱۶}-\binom{۴}{۱}\binom{۱۳}{۱۰}+\binom{۴}{۲}\binom{۷}{۴}\right]$$

طریق مرتب کرد.

۴. الف) دراینجا $S=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰۰۰\}$ و $N=S_۰=۱۰۰۰$. شرطهای $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$ را دربارهٔ عنصرهای S به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$c_۱$: $n\in S$ و n مجذورکامل است

$c_۲$: $n\in S$ و n مکعب کامل است

$c_۳$: $n\in S$ و n توان چهارم کامل است

دراین صورت $N(c_۱)=۳۱$، $N(c_۲)=۱۰$، $N(c_۳)=۵$، $N(c_۱c_۲)=۳$، $N(c_۱c_۳)=N(c_۳)=۵$، $N(c_۲c_۳)=۱$ و $N(c_۱c_۲c_۳)=N(c_۲c_۳)=۱$. درنتیجه،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳)=S_۰-S_۱+S_۲-S_۳=۱۰۰۰-(۳۱+۱۰+۵)+(۳+۵+۱)-۱$$
$$=۱۰۰۰-۴۶+۹-۱=۹۶۲$$

ب) این بار $S=\{۱,۲,۳,\dots,۳۰۰۰\}$ و $N=S_۰=۳۰۰۰$. دراین قسمت، شرطهای $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ دربارهٔ عنصرهای S به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$c_۱$: $n\in S$ و n مجذورکامل است

$c_۲$: $n\in S$ و n مکعب کامل است

$c_۳$: $n\in S$ و n توان پنجم کامل است

دراین صورت، $N(c_۱)=۵۴$، $N(c_۲)=۱۴$، $N(c_۳)=۴$، $N(c_۱c_۲)=۳$، $N(c_۱c_۳)=۲$، $N(c_۲c_۳)=۱$ و $N(c_۱c_۲c_۳)=۱$. درنتیجه،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳)=S_۰-S_۱+S_۲-S_۳=۳۰۰۰-(۵۴+۱۴+۴)+(۳+۲+۱)-۱$$
$$=۳۰۰۰-۷۲+۶-۱=۲۹۳۳$$

۵. به‌ازای هر $۱\le i\le ۷$ فرض می‌کنیم شرط c_i بر وقوع الگوی $i(i+۱)$ دلالت کند. شرط وقوع الگوی ۸۱ را با $c_۸$ نشان می‌دهیم. به‌ازای $۱\le i\le ۸$ داریم $N(c_i)=۷!$، به‌ازای $۱\le i<j\le ۸$ داریم $N(c_ic_j)=۶!$ و غیره. بنابراین،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\cdots\bar{c}_۸)=۸!-\binom{۸}{۱}۷!+\binom{۸}{۲}۶!-\binom{۸}{۳}۵!+\cdots+(-۱)^۷\binom{۸}{۷}۱!=۱۴۸۳۲$$

۶. الف) دیوارهای اتاق را (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) با ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نشان‌گذاری می‌کنیم. فرض می‌کنیم شرط c_1 بر این دلالت کند که دیوارهای ۱ و ۲ یک رنگ دارند. شرط c_2 بر این دلالت می‌کند که دیوارهای ۲ و ۳ یک رنگ دارند. به همین ترتیب، شرطهای c_3 و c_4 را تعریف می‌کنیم، درحالی که شرط c_5 بر این دلالت می‌کند که دیوارهای ۵ و ۱ یک رنگ دارند. اکنون می‌بینیم که $N = k^5$، به‌ازای هر $1 \leq i \leq 5$ داریم $N(c_i) = k^4$، به‌ازای هر $1 \leq i < j \leq 5$ داریم $N(c_i c_j) = k^3$، به‌ازای هر $1 \leq i < j < \ell \leq 5$ داریم $N(c_i c_j c_\ell)k^2$، به‌ازای هر $1 \leq i < j < \ell < m \leq 5$ داریم $N(c_i c_j c_\ell c_m) = k$ و $N(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5) = k$. بنابراین،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = k^5 - \binom{5}{1}k^4 + \binom{5}{2}k^3 - \binom{5}{3}k^2 + \binom{5}{4}k - \binom{5}{5}k$$

ب) به‌ازای $k = 1, 2$، نتیجهٔ بالا برابر با ۰ است. به‌ازای $k = 3$، نتیجهٔ بالا برابر با ۳۰ است.

پ) تعداد طرق رنگ‌آمیزی دیوارهای یک اتاق شش دیواری، به‌طوری‌که هر دو دیوار مجاور رنگ متفاوتی داشته باشند، برابر است با

$$k^6 - \binom{6}{1}k^5 + \binom{6}{2}k^4 - \binom{6}{3}k^3 + \binom{6}{4}k^2 - \binom{6}{5}k + \binom{6}{6}k$$

این نتیجه به‌ازای $k = 1$ برابر با ۰ و به‌ازای $k = 2$ برابر با ۲ است.

۷. به‌ازای $1 \leq i \leq 5$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که در یک ترتیب مفروض، دو همشهری iاُم کنار هم بنشینند. دراین صورت $N = 9!$، $N(c_1) = 2(8!)$، $S_1 = \binom{5}{1}(2)(8!)$، $N(c_1 c_2) = 2^2(7!)$ و $S_2 \binom{5}{2}(2^2)(7!)$. [فرض کنیم X و Y، به‌ترتیب، دو همشهری اول و دوم و E، F ، G، H، I و J شش نفر دیگر را نشان دهند. می‌توانیم X، Y، E، F، G، H ، I و J را به $7!$ طریق روی یک دایره مرتب کنیم. چون هر یک از دو طرف X و Y یک زوج را نشان می‌دهد، $(2^2)(7!)$ طریق برای نشاندن این ۱۰ نفر پشت میز وجود دارد به‌طوری که هم دو همشهری اول کنار هم باشند (که به دو طریق صورت می‌گیرد) و هم دو همشهری دوم (این هم به دو طریق صورت می‌گیرد).$N(c_1 c_2 c_3) = 2^3(6!)$]، $S_3 = \binom{5}{3}(2^3)(6!)$، $N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 2^4(5!)$، $S_4 = \binom{5}{4}(2^4)(5!)$ و $N(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5) = 2^5(4!)$. درنتیجه،

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = 9! - \binom{5}{1}(2)(8!) + \binom{5}{2}(2^2)(7!) - \binom{5}{3}(2^3)(6!) + \binom{5}{4}(2^4)(5!)$$
$$- \binom{5}{5}(2^5)(4!)$$

۸. $E_m = S_m - \binom{m+1}{m}S_{m+1} + \binom{m+2}{m}S_{m+2} - \cdots + (-1)^{i-m}\binom{i}{m}S_i - \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m}S_n$. $S_i = \binom{n}{i}\binom{s}{r}\binom{s-r}{r}\binom{s-2r}{r}\cdots\binom{s-(i-1)r}{r}(n-i)^{s-ir}$، که در آن $\binom{n}{i}$ تعداد طرق انتخاب i ظرف (از n ظرف متمایز ممکن) را، که هر یک از آنها دقیقاً حاوی r عنصر باشد، نشان می‌دهد. به‌ازای هر یک از i ظرف متمایز، حاصل‌ضرب $\binom{s}{r}\binom{s-r}{r}\cdots\binom{s-(i-1)r}{r}$ تعداد طرق انتخاب r شیء متمایز را نشان می‌دهد. سرانجام،

حضور عامل $(n-i)^{s-ir}$ به این سبب است که هر یک از $s-ir$ شیء دیگر را می‌توانیم از هر یک از $n-i$ ظرف دیگر انتخاب کنیم. ملاحظه می‌شود که

$$\binom{s}{r}\binom{s-r}{r}\binom{s-۲r}{r}\cdots\binom{s-(i-۱)r}{r}=\frac{s!}{(s-ir)!(r!)^i}$$

$$(-۱)^{i-m}\binom{i}{m}S_i=(-۱)^{i-m}\binom{i}{m}\binom{n}{i}\frac{s!}{(s-ir)!(r!)^i}(n-i)^{s-ir}$$

$$=(-۱)^{i-m}\frac{i!}{m!(i-m)!}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{s!}{(s-ir)!(r!)^i}(n-i)^{s-ir}$$

$$=(-۱)^m\frac{n!s!}{m!}\left[(-۱)^i(n-i)^{s-ir}/(i-m)!(n-i)!(s-ir)!(r!)^i\right]$$

و $E_m=(-۱)^m\frac{n!s!}{m!}\sum_{i=m}^{n}(-۱)^i\frac{(n-i)^{s-ir}}{(i-m)!(n-i)!(s-ir)!(r!)^i}$.

۹. تعداد کل ترتیبها برابر است با $T=\frac{۱۳!}{(۲!)^۵}$.

الف) $S_۳=\binom{۵}{۳}\left[\frac{۱۰!}{(۲!)^۲}\right]$، $S_۴=\binom{۵}{۴}\left(\frac{۹!}{۲!}\right)$، $S_۵=\binom{۵}{۵}(۸!)$ و

$$E_۳=\left[S_۳-\binom{۴}{۱}S_۴+\binom{۵}{۲}S_۵\right]\Big/T$$

ب) $E_۴=\left[S_۴-\binom{۵}{۱}S_۵\right]$ و $E_۵=S_۵$ پاسخ مطلوب برابر است با $[T-(E_۴+E_۵)]/T$.

۱۰. فرض می‌کنیم $c_۱$ بر این شرط دلالت کند که در ترتیب مفروض، هر چهار w کنار هم باشند. شرطهای $c_۲$، $c_۳$ و $c_۴$ را نیز به همین ترتیب برای هر چهار x، هر چهار y و هر چهار z تعریف می‌کنیم. می‌بینیم که $N=\frac{۱۶!}{(۴!)^۴}$، به‌ازای هر $۱\le i\le ۴$ داریم $N(c_i)=\frac{۱۳!}{(۴!)^۳}$، به‌ازای هر $۱\le i<j\le ۴$ داریم $N(c_ic_j)=\frac{۱۰!}{(۴!)^۲}$، به‌ازای هر $۱\le i<j<k\le ۴$ داریم $N(c_ic_jc_k)=\frac{۷!}{۴!}$ و $N(c_۱c_۲c_۳c_۴)=۴!$. بنابراین،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴)=\frac{۱۶!}{(۴!)^۴}-\binom{۴}{۱}\left[\frac{۱۳!}{(۴!)^۳}\right]+\binom{۴}{۲}\left[\frac{۱۰!}{(۴!)^۲}\right]-\binom{۴}{۳}\left(\frac{۷!}{۴!}\right)+\binom{۴}{۴}(۴!)$$

۱۱. الف) $\binom{n-m}{r-m}=\binom{n-m}{n-r}$

ب) فرض می‌کنیم $A=\{x_۱,x_۲,\ldots,x_m,y_{m+۱},\ldots,y_n\}$. به‌ازای هر $۱\le i\le m$ فرض می‌کنیم c_i بر این شرط دلالت کند که r عنصر، $r\ge m$، از A انتخاب شده است و x_i در این انتخاب حضور ندارد. دراین صورت $N=\binom{n}{r}$، به‌ازای هر $۱\le i\le m$ داریم $N(c_i)=\binom{n-۱}{r}$ و $S_۱=\binom{m}{۱}\binom{n-۱}{r}$، به‌ازای هر $۱\le i<j\le m$ داریم $N(c_ic_j)=\binom{n-۲}{r}$ و $S_۲=\binom{m}{۲}\binom{n-۲}{r}$ و غیره. بنابراین،

$$\binom{n-m}{n-r} = N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_m) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{n-i}{r}$$

۱۲. الف) شرطهای c_i، $1 \leq i \leq 5$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

c_1 : a و b یک رنگ دارند

c_2 : b و c یک رنگ دارند

c_3 : b و e یک رنگ دارند

c_4 : c و e یک رنگ دارند

c_5 : c و d یک رنگ دارند

دراین صورت $N = \lambda^5$، به‌ازای هر $1 \leq i \leq 5$ داریم $N(c_i) = \lambda^4$، به‌ازای هر $1 \leq i < j \leq 5$ داریم $N(c_ic_j) = \lambda^3$، $N(c_2c_3c_4) = \lambda^3$ و به‌ازای اندیسهای دیگر $1 \leq i < j < k \leq 5$ داریم $N(c_ic_jc_k) = \lambda^2$، $N(c_1c_2c_3c_4) = N(c_2c_3c_4c_5) = \lambda^2$،

$$N(c_1c_2c_3c_5) = N(c_1c_2c_4c_5) = N(c_1c_3c_4c_5) = \lambda$$

و $N(c_1c_2c_3c_4c_5) = \lambda$. بنابراین

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 10\lambda^3 - (\lambda^3 + 9\lambda^2) + (2\lambda^2 + 3\lambda) - \lambda = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 9\lambda^3 - 7\lambda^2 + 2\lambda$$

این نتیجه به‌ازای $\lambda = 1, 2$ برابر با ۰ است. وقتی $\lambda = 3$، این نتیجه مثبت است و بنابراین عدد رنگی برابر با ۳ است.

ب) گرافی رسم کنید که هر رأس آن متناظر با یکی از اتاقها باشد. اگر دو اتاق درگاه مشترکی داشته باشند یالی بین رأسهای متناظر آنها وصل کنید.

به این ترتیب، گراف شکل ۱۴۰۸ (الف) حاصل می‌شود و پاسخ مطلوب عبارت است از

$$6^5 - 5(6^4) + 9(6^3) - 7(6^2) + 2(6) = 3000$$

۱۳. برهان:

الف) اگر n زوج باشد، بنابر قضیهٔ بنیادی حساب (قضیهٔ ۱۱۰۴) می‌توانیم بنویسیم $n = 2^k m$، که در آن $k \geq 1$ و m فرد است. در این صورت $2n = 2^{k+1}m$ و

$$\phi(2n) = (2^{k+1})\left(1 - \frac{1}{2}\right)\phi(m) = 2^k\phi(m) = 2(2^k)\left(\frac{1}{2}\right)\phi(m)$$
$$= 2\left[2^k\left(1 - \frac{1}{2}\right)\phi(m)\right] = 2\left[\phi(2^k m)\right] = 2\phi(n)$$

ب) وقتی n فرد است می‌بینیم که $\phi(2n) = (2n)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$، که در این حاصل‌ضرب،

همهٔ عددهای اول فردی به‌کار رفته‌اند که n را می‌شمارند. (اگر $n = ۱$، آن‌گاه $\prod_{p|n}\left(۱-\frac{۱}{p}\right)$ برابر با ۱ است.) ولی

$$(۲n)\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\prod_{p|n}\left(۱-\frac{۱}{p}\right) = n\prod_{p|n}\left(۱-\frac{۱}{p}\right) = \phi(n)$$

۱۴. برهان: فرض می‌کنیم $a = p_۱^{m_۱}p_۲^{m_۲}\dots p_t^{m_t}$ و $b = p_۱^{n_۱}p_۲^{n_۲}\dots p_t^{n_t}$، که در آن $p_۱$، $p_۲$، …، p_t اعداد اول متمایزند و $m_۱, m_۲, \dots, m_t, n_۱, n_۲, \dots, n_t \in \mathrm{N}$. در این صورت،

$$c = \gcd(a,b) = p_۱^{\min\{m_۱,n_۱\}}p_۲^{\min\{m_۲,n_۲\}}\cdots p_t^{\min\{m_t,n_t\}}$$

بنابراین،

$$\phi(ab)\phi(c) = \left[p_۱^{m_۱+n_۱}p_۲^{m_۲+n_۲}\cdots p_t^{m_t+n_t}\left(۱-\frac{۱}{p_۱}\right)\left(۱-\frac{۱}{p_۲}\right)\cdots\left(۱-\frac{۱}{p_t}\right)\right]$$
$$\prod_{\substack{۱\le i\le t\\ \min\{m_i,n_i\}\neq ۰}} p_i^{\min\{m_i,n_i\}}\left(۱-\frac{۱}{p_i}\right)$$

و

$$\phi(a)\phi(b)c = \left[\prod_{\substack{۱\le i\le t\\ m_i\neq ۰}} p_i^{m_i}\left(۱-\frac{۱}{p_i}\right)\right]\left[\prod_{\substack{۱\le i\le t\\ n_i\neq ۰}} P_i^{n_i}\left(۱-\frac{۱}{p_i}\right)\right]\left[\prod_{۱\le i\le t} p_i^{\min\{m_i,n_i\}}\right]$$

به‌ازای $۱ \le i \le t$ تحقیق می‌کنیم که $\phi(ab)\phi(c)$ و $\phi(a)\phi(b)c$ حاوی عاملهای یکسانی متشکل از عدد اول p_i هستند. در این صورت ثابت خواهد شد که $\phi(ab)\phi(c) = \phi(a)\phi(b)c$. حالتهای زیر را درنظر می‌گیریم:

(۱) $\min\{m_i,n_i\} = ۰$: فرض می‌کنیم $n_i > m_i = ۰$. (برای $m_i > n_i = ۰$ نیز استدلال مشابهی خواهیم داشت.) در این صورت در $\phi(ab)\phi(c)$، عامل $p_i^{n_i}\left(۱-\frac{۱}{p_i}\right)$ و در $\phi(a)\phi(b)c$، عامل $p_i^{n_i}\left(۱-\frac{۱}{p_i}\right)$ را می‌یابیم.

(۲) $\min\{m_i,n_i\} = m_i > ۰$: (برای $۰ < n_i \le m_i$ نیز استدلال مشابهی خواهیم داشت.) در اینجا در $\phi(ab)\phi(c)$، جملهٔ $p_i^{m_i+n_i}\left(۱-\frac{۱}{p_i}\right)p_i^{m_i}\left(۱-\frac{۱}{p_i}\right)$ و در $\phi(a)\phi(b)c$، جملهٔ

$$p_i^{m_i}\left(۱-\frac{۱}{p_i}\right)p_i^{n_i}\left(۱-\frac{۱}{p_i}\right)p_i^{m_i} = p_i^{m_i+n_i}\left(۱-\frac{۱}{p_i}\right)p_i^{m_i}\left(۱-\frac{۱}{p_i}\right)$$

را می‌یابیم.

۹

توابع مولد

بند ۱.۹

۱. تعداد جوابهای صحیح معادلات مفروض برابر است با

الف) ضریب x^{20} در $(1+x+x^2+\cdots+x^7)^2$.

ب) ضریب x^{20} در $(1+x+x^2+\cdots+x^{20})^2(1+x^2+x^4+\cdots+x^{20})^2$ یا در

$$(1+x+x^2+\cdots)^2(1+x^2+x^4+\cdots)^2$$

پ) ضریب x^{30} در $(x^2+x^3+x^4)(x^3+x^4+\cdots+x^8)^2$.

ت) ضریب x^{30} در $(1+x+x^2+\cdots+x^{30})^3(1+x^2+x^4+\cdots+x^{30})(x+x^3+x^5+\cdots+x^{29})$
یا در $(1+x+x^2+\cdots)^3(1+x^2+x^4+\cdots)(x+x^3+x^5+\cdots)$

۲. الف) $(1+x+x^2+\cdots+x^{35})^5$ یا $(1+x+x^2+\cdots)^5$

ب) $(x+x^2+\cdots+x^{35})^5$ یا $x^5(1+x+x^2+\cdots)^5$

پ) $(x^2+x^3+\cdots+x^{35})^5$ یا $x^{10}(1+x+x^2+\cdots)^5$

ت) $(1+x+x^2+\cdots+x^{25})^2(x^{10}+x^{11}+\cdots+x^{35})$ یا $(1+x+x^2+\cdots)^2(x^{10}+x^{11}+x^{12}+\cdots)$

ث) $(1+x+x^2+\cdots+x^{15})^3(x^{10}+x^{11}+\cdots+x^{25})^2$ یا $(1+x+x^2+\cdots)^3(x^{10}+x^{11}+\cdots)^2$

۳. الف) تابع مولد عبارت است از $(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10})^6$ یا $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^6$. [در هر مورد، تعداد طرق انتخاب ۱۰ مهره برابر است با ضریب x^{10}.]

ب) تابع مولد عبارت است از $(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^r)^n$ یا $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$. [در هر مورد، تعداد طرق انتخاب r شیء برابر است با ضریب x^r.]

۴. الف) عامل اول تعداد سکه‌های یک تومانی و عامل دوم تعداد سکه‌های پنج تومانی را به‌دست می‌دهد.

ب) $f(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x^{10}+x^{20}+\cdots)$

۵. $c_1+c_2+c_3+c_4=20,\ \ -3\le c_1,c_2,\ \ -5\le c_3\le 5,\ \ 0\le c_4$

$$(3+c_1)+(3+c_2)+(5+c_3)+c_4=31$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=31\ ,\ 0\le x_1,x_2,x_4\ ,\ 0\le x_3\le 10$$

درنتیجه، پاسخ مطلوب عبارت است از ضریب x^{31} در تابع مولد $(1+x+x^2+\cdots)^3(1+x+x^2+\cdots+x^{10})$.

۶. الف) $(1+ax)(1+bx)(1+cx)\cdots(1+rx)(1+sx)(1+tx)$

ب) $(1+ax+a^2x^2+a^3x^3)(1+bx+b^2x^2+b^3x^3)\cdots(1+tx+t^2x^2+t^3x^3)$

بند ۲.۹

۱. الف) $(1+x)^8$ ب) $8(1+x)^7$ پ) $(1+x)^{-1}$ ت) $\dfrac{x^3}{1-x}$

ث) $\dfrac{6x^3}{1+x}$ ج) $(1-x^2)^{-1}$ چ) $(1-2x)^{-1}$ ح) $\dfrac{x^2}{1-ax}$

۲. الف) $-27,54,-36,8,0,0,0,\cdots$ ب) $0,0,0,0,1,1,1,1,1,\cdots$

پ) $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}=x^3[1+x^2+x^4+x^6+\cdots]=x^3+x^5+x^7+x^9+\cdots$. بنابراین، $f(x)$ دنبالهٔ ۰، ۰، ۰، ۱، ۰، ۱، ۰، ۱، ۰، ۱، $\cdots$ را تولید می‌کند.

ت) $f(x)=\dfrac{1}{1+3x}=1+(-3x)+(-3x)^2+(-3x)^3+\cdots$. بنابراین، $f(x)$ دنبالهٔ ۱، -3، 3^2، -3^3، $\cdots$ را تولید می‌کند.

ث) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}=\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)\left[1+\left(\dfrac{x}{3}\right)+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{x}{3}\right)^3+\cdots\right]$

بنابراین، $f(x)$ دنبالهٔ $\frac{1}{3}$، $\left(\frac{1}{3}\right)^2$، $\left(\frac{1}{3}\right)^3$، $\left(\frac{1}{3}\right)^4$، $\cdots$ را تولید می‌کند.

ج) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+3x^7-11=(1+x+x^2+x^3+\cdots)+3x^7-11$. بنابراین، $f(x)$ دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، $\cdots$ را تولید می‌کند، که در آن $a_0=-10$، $a_7=4$ و به‌ازای هر $i\neq 0,7$، $a_i=1$.

۳. الف) $g(x)=f(x)-a_3x^3+3x^3$

ب) $g(x)=f(x)-a_3x^3+3x^3-a_7x^7+7x^7$

پ) $g(x)=2f(x)-2a_1x+x-2a_3x^3+3x^3$

ت) $g(x)=2f(x)+\dfrac{5}{1-x}+(1-2a_1-5)x+(3-2a_3-5)x^3+(7-2a_7-5)x^7$

۴. $\binom{15}{5}(3^5)(2^{10})$

۵. الف) $\binom{-15}{7}(-1)^7=(-1)^7\binom{15+7-1}{7}(-1)^7=\binom{21}{7}$

ب) $\binom{-n}{7}(-1)^7=(-1)^7\binom{n+7-1}{7}(-1)^7=\binom{n+6}{7}$

۶. $\binom{-6}{8}(-1)^8=(-1)^8\binom{6+8-1}{8}(-1)^8=\binom{13}{8}$

۷. $\binom{-5}{10}(-1)^{10}-\binom{5}{1}\binom{-5}{5}(-1)^5+\binom{5}{2}\binom{-5}{0}=\binom{14}{10}-\binom{5}{1}\binom{9}{5}+\binom{5}{2}$

۸. الف) $\binom{n}{7}+\binom{n}{6}+\binom{n}{5}$ ب) $\binom{n}{8}+\binom{n}{7}+\binom{n}{6}$

پ) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r-2}$

۹. الف) 0

ب) $\binom{-3}{12}(-1)^{12}-5\binom{-3}{14}(-1)^{14}=\binom{14}{12}-5\binom{16}{14}$

پ) $\binom{-4}{15}(-1)^{15}+\binom{4}{1}\binom{-4}{14}(-1)^{14}+\binom{4}{2}\binom{-4}{13}(-1)^{13}+\binom{4}{3}\binom{-4}{12}(-1)^{12}+$

$$\binom{4}{4}\binom{-4}{11}(-1)^{11}=\binom{18}{15}+\binom{4}{1}\binom{17}{14}+\binom{4}{2}\binom{16}{13}+\binom{4}{3}\binom{15}{12}+\binom{14}{11}$$

۱۰. الف) $(x^3+x^4+\cdots)^4=x^{12}(1+x+x^2+\cdots)^4=x^{12}(1-x)^{-4}$. ضریب x^{12} در $(1-x)^{-4}$ برابر است با $\binom{-4}{12}(-1)^{12}=(-1)^{12}\binom{4+12-1}{12}(-1)^{12}=\binom{15}{12}$.

ب) $(x^3+x^4+\cdots+x^9)^4=x^{12}(1+x+x^2+\cdots+x^6)^4$. ضریب x^{12} در

$$\left[\frac{(1-x)^7}{1-x}\right]^4=(1-x^7)^4(1-x)^{-4}=[1-4x^7+\cdots+x^{28}]$$

$$\left[\binom{-4}{0}+\cdots+\binom{-4}{5}(-x)^5+\cdots+\binom{-4}{12}(-x)^{12}+\cdots\right]$$

برابر است با

$$(-4)\binom{-4}{5}(-1)^5+\binom{-4}{12}(-1)^{12}=(4)(-1)^5\binom{8}{5}+\binom{15}{12}=\binom{15}{12}-4\binom{8}{5}$$

۱۱. هر بستهٔ ۲۵تایی از پاکتها را یک واحد تلقی می‌کنیم. دراین‌صورت، پاسخ مسأله عبارت است از ضریب x^{120} در $(x^6+x^7+\cdots+x^{39}+x^{40})^4=x^{24}(1+x+\cdots+x^{34})^4$. این ضریب برابر است با ضریب x^{96} در

$$\left(\frac{1-x^{35}}{1-x}\right)^4=(1-x^{35})^4(1-x)^{-4}=[1-4x^{35}+6x^{70}-\cdots+x^{140}]$$

$$\left[\binom{-4}{0}+\cdots+\binom{-4}{26}(-x)^{26}+\cdots+\binom{-4}{61}(-x)^{61}+\cdots+\binom{-4}{96}(-x)^{96}+\cdots\right]$$

درنتیجه، پاسخ مطلوب برابر است با $\binom{-4}{96}(-1)^{96}-4\binom{-4}{61}(-1)^{61}+6\binom{-4}{26}(-1)^{26}=\binom{99}{96}-4\binom{64}{61}+6\binom{29}{26}$

۱۲. الف) ضریب x^{24} در

$$(x^2+x^3+\cdots)^5=x^{10}(1+x+x^2+\cdots)^5=x^{10}(1-x)^{-5}$$

$$=x^{10}\left[\binom{-5}{0}+\binom{-5}{1}(-x)+\binom{-5}{2}(-x)^2+\cdots\right]$$

برابر است با $\binom{-5}{12}(-1)^{12} = (-1)^{12}\binom{5+12-1}{12}(-1)^{12} = \binom{18}{12}$. این عدد برابر است با تعداد طرق توزیع ۲۴ بطری از یک نوع نوشابه بین این افراد به‌طوری که هر یک از آنها دست‌کم دو بطری بگیرد. چون دو نوع نوشابه وجود دارد، این دو صندوق نوشابه را می‌توان، با توجه به شرطهای مفروض، به $\binom{18}{12}^2$ طریق توزیع کرد.

ب) ضریب x^{22} در $(x^2 + x^3 + \cdots)^5$ برابر است با $\binom{13}{9}$ و پاسخ مطلوب $\binom{13}{9}\binom{18}{12}$ است.

.۱۳

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{12} = x^{12}\left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^{12}$$

$$= x^{12}(1 - x^6)^{12}\left[\binom{-12}{0} + \binom{-12}{1}(-x) + \binom{-12}{2}(-x)^2 + \cdots\right]$$

پاسخ مطلوب عددی است که صورت آن برابر است با ضریب x^{18} در

$$(1 - x^6)^{12}\left[\binom{12}{0} + \binom{-12}{1}(-x) + \cdots\right] = \left[1 - \binom{12}{1}x^6 + \binom{12}{2}x^{12} - \binom{12}{3}x^{18}\right.$$

$$\left.+ \cdots + x^{72}\right]\left[\binom{-12}{0} + \binom{-12}{1}(-x) + \cdots\right]$$

و این ضریب برابر است با

$$\binom{-12}{18}(-1)^{18} - \binom{12}{1}\binom{-12}{12}(-1)^{12} + \binom{12}{2}\binom{-12}{6}(-1)^6 - \binom{12}{3}\binom{-12}{0}$$

$$= \binom{29}{18} - \binom{12}{1}\binom{23}{12} + \binom{12}{2}\binom{17}{6} - \binom{12}{3}$$

پاسخ نهایی از تقسیم نتیجهٔ اخیر بر 6^{12}، یعنی بر اندازهٔ فضای نمونه‌ای، به‌دست می‌آید.

.۱۴ $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^8(x^5 + x^{10})^2 = x^{26}(1 + x + x^2 + x^3)^8(1 + x^5)^2$ و ازاین‌رو، ضریب x^{12} را در

$$\left(\frac{1 - x^4}{1 - x}\right)^8(1 + 2x^5 + x^{10}) = (1 - x^4)^8(1 - x)^{-8}(1 + 2x^5 + x^{10}) =$$

$$\left[1 + \binom{8}{1}(-x^4) + \binom{8}{2}(-x^4)^2 + \cdots + (-x^4)^8\right]\left[\binom{-8}{0} + \binom{-8}{1}(-x)\right.$$

$$\left.+ \binom{-8}{2}(-x)^2 + \cdots\right](1 + 2x^5 + x^{10})$$

لازم داریم. این ضریب برابر است با

$$\left[\binom{-8}{14}(-1)^{14} + 2\binom{-8}{9}(-1)^9 + \binom{-8}{4}(-1)^4\right] - \binom{8}{1}\left[\binom{-8}{10}(-1)^{10} +\right.$$

$$2\binom{-8}{5}(-1)^5 + \binom{-8}{0}\Bigg] + \binom{8}{2}\Bigg[\binom{-8}{6}(-1)^6 + 2\binom{-8}{1}(-1)\Bigg] - \binom{8}{3}$$
$$\Bigg[\binom{-8}{2}(-1)^2\Bigg] = \Bigg[\binom{21}{14} + 2\binom{16}{9} + \binom{11}{4}\Bigg] - \binom{8}{1}\Bigg[\binom{17}{10} + 2\binom{12}{5} +$$
$$\binom{7}{0}\Bigg] + \binom{8}{2}\Bigg[\binom{13}{6} + 2\binom{8}{1}\Bigg] - \binom{8}{3}\binom{9}{2}$$

سپس این نتیجه را بر $(2^2)(4^8)$، یعنی اندازهٔ فضای نمونه‌ای، تقسیم می‌کنیم تا احتمال مطلوب تعیین شود.

۱۵. در اینجا ضریب x^n را در

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2(1+x^2+x^4+\cdots) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

لازم داریم. با استفاده از تجزیه به کسرهای ساده می‌بینیم که

$$\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{(1/8)}{1+x} + \frac{(1/8)}{1-x} + \frac{(1/4)}{(1-x)^2} + \frac{(1/2)}{(1-x)^3}$$

ضریب x^n در این عبارت برابر است با

$$(-1)^n\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4}\right)\binom{-2}{n}(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)\binom{-3}{n}(-1)^n$$
$$= \frac{1}{8}\left[1+(-1)^n\right] + \left(\frac{1}{4}\right)\binom{n+1}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)\binom{n+2}{n}$$

۱۶. برای مدادها ضریب x^{12} را در $(x+x^2+\cdots)(x^2+x^3+\cdots)^3 = x^7\left(\frac{1}{1-x}\right)^4$ لازم داریم. این ضریب برابر است با ضریب x^5 در $(1-x)^{-4}$، که عبارت است از $\binom{-4}{5}(-1)^5 = \binom{8}{5}$. برای خودکارها ضریب x^{16} را در $(x^3+x^4+\cdots)(1+x+x^2+\cdots+x^5)^3 = \left(\frac{x^3}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3$ لازم داریم. این ضریب برابر است با ضریب x^{13} در

$$(1-x^6)^3(1-x)^{-4} = \left[1-\binom{3}{1}x^6+\binom{3}{2}x^{12}-x^{18}\right]\left[\binom{-4}{0}+\binom{-4}{1}(-x)+\cdots\right]$$

که عبارت است از

$$\binom{-4}{13}(-1)^{13} - \binom{3}{1}\binom{-4}{7}(-1)^7 + \binom{3}{2}\binom{-4}{1}(-1) = \binom{16}{13} - \binom{3}{1}\binom{10}{7} + \binom{3}{2}\binom{4}{1}$$

بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، تعداد کل توزیعها، با توجه به شرایط داده شده، برابر است با

$$\binom{8}{5}\left[\binom{16}{13} - \binom{3}{1}\binom{10}{7} + \binom{3}{2}\binom{4}{1}\right]$$

۱۷.
$$(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1}=\left[1-(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\right]^{-1}$$
$$=1+\underbrace{(x+x^2+\cdots+x^6)}_{\text{یک بار کشیدن}}+\underbrace{(x+x^2+\cdots+x^6)^2}_{\text{دوبار کشیدن}}+\underbrace{(x+x^2+\cdots+x^6)^3}_{\text{سه‌بار کشیدن}}+\cdots$$

در این عبارت، ۱ معرف این است که هیچ مهره‌ای را از کیسه بیرون نکشیده‌ایم.

۱۸.
$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=\left[\binom{-1/2}{0}+\binom{-1/2}{1}(-4x)+\binom{-1/2}{2}(-4x)^2+\cdots\right]$$

ضریب x^n عبارت است از

$$\binom{-1/2}{n}(-4)^n=$$
$$\frac{((-1/2)-n+1)((-1/2)-n+2)\cdots((-1/2)-1)(-1/2)}{n!}(-4)^n=$$
$$\frac{(1+2n-2)(1+2n-4)\cdots(1+2)(1)}{n!}(2)^n=$$
$$\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(5)(3)(1)}{n!}(2)^n=$$
$$\frac{[(2n-1)(2n-3)\cdots(5)(3)(1)](2^n)(n!)}{n!n!}=\frac{(2n)!}{n!n!}=\binom{2n}{n}$$

۱۹. الف) تفاضلها عبارت‌اند از ۱ − ۳، ۳ − ۶، ۶ − ۸، ۸ − ۱۵ و ۱۵ − ۱۵، یعنی ۲، ۳، ۲، ۷ و ۰. بنابراین، $2+3+2+7+0=14$.

ب) $\{3,5,8,15\}$ پ) $\{1+a,1+a+b,1+a+b+c,1+a+b+c+d\}$

۲۰. با استفاده از ایده‌های مثال ۱۵.۰۹، یکی از این نوع زیرمجموعه‌ها را درنظر می‌گیریم:

$$1\le 1<3<6<10<15<30<42\le 50$$

این زیرمجموعه تفاضلهای ۰، ۲، ۳، ۴، ۵، ۱۵، ۱۲ و ۸ را، که مجموعشان ۴۹ است، به‌دست می‌دهد.

یکی دیگر از این نوع زیرمجموعه‌ها عبارت است از

$$1\le 7<9<15<21<32<43<50\le 50$$

که تفاضلهای ۶، ۲، ۶، ۶، ۱۱، ۱۱، ۷ و ۰ را، که باز هم مجموعشان ۴۹ است، به‌دست می‌دهد.

این ملاحظات تناظر یک به‌یکی را بین این نوع زیرمجموعه‌ها و جوابهای صحیح

$$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_8=49$$

که در آن $c_1,c_8\ge 0$ و به‌ازای هر $2\le i\le 7$ داریم $c_i\ge 2$، القا می‌کند. تعداد این جوابها برابر است با ضریب x^{49} در تابع مولد

$$(1+x+x^2+\cdots)(x^2+x^3+\cdots)^6(1+x+x^2+\cdots)=\frac{1}{(1-x)^2}\left[\frac{x^{12}}{(1-x)^6}\right]=\frac{x^{12}}{(1-x)^8}$$

بنابراین، پاسخ مطلوب برابر است با ضریب $x^{۳۷}$ در $(۱-x)^{-۸}$، که عبارت است از

$$\binom{-۸}{۳۷}(-۱)^{۳۷} = (-۱)^{۳۷}\binom{۸+۳۷-۱}{۳۷}(-۱)^{۳۷} = \binom{۴۴}{۳۷}$$

۲۱.
$$\begin{aligned} c_k = \sum_{i=۰}^{k} i(k-i)^۲ &= \sum_{i=۰}^{k} i(k^۲-۲ki+i^۲) = k^۲\sum_{i=۰}^{k} i - ۲k\sum_{i=۰}^{k} i^۲ + \sum_{i=۰}^{k} i^۳ \\ &= k^۲[k(k+۱)/۲] - ۲k[k(k+۱)(۲k+۱)/۶] + [(k^۲)(k+۱)^۲/۴] \\ &= (k^۴+k^۳)/۲ - (k^۲)(k+۱)(۲k+۱)/۳ + (k^۲)(k+۱)^۲/۴ \\ &= (۱/۱۲)[۶k^۴+۶k^۳-۴k^۲(۲k^۲+۳k+۱)+۳k^۲(k^۲+۲k+۱)] \\ &= (۱/۱۲)[k^۴-k^۲] = (۱/۱۲)(k^۲)(k^۲-۱) \end{aligned}$$

۲۲. الف) (یک) $c_۰ = a_۰b_۰ = ۱$، $c_۱ = a_۰b_۱ + a_۱b_۰ = ۲$، $c_۲ = a_۰b_۲ + a_۱b_۱ + a_۲b_۰ = ۳$ و $c_۳ = a_۰b_۳ + a_۱b_۲ + a_۲b_۱ + a_۳b_۰ = ۴$.

(دو) $c_۰ = ۱$، $c_۱ = ۳$، $c_۲ = ۷$ و $c_۳ = ۱۵$.

(سه) $c_۰ = ۱$، $c_۱ = ۲$، $c_۲ = ۳$ و $c_۳ = ۴$.

ب) (یک) $c_n = n+۱$

(دو) $c_n = ۱+۲+۲^۲+\cdots+۲^n = ۲^{n+۱}-۱$

(سه) $c_۰ = ۱$، $c_۱ = ۲$، $c_۲ = ۳$ و به‌ازای هر $n \geq ۳$، $c_n = ۴$.

۲۳. الف) $\sum_{i=۰}^{\infty} c_i x^i = (۱+x+x^۲+x^۳+x^۴)(۰+x+۲x^۲+۳x^۳+\cdots)$، که در آن $c_۰ = ۰$، $c_۱ = ۱$، $c_۲ = ۱+۲ = ۳$، $c_۳ = ۱+۲+۳ = ۶$، $c_۴ = ۱+۲+۳+۴ = ۱۰$ و به‌ازای هر $n \geq ۵$، $c_n = n+(n-۱)+(n-۲)+(n-۳)+(n-۴) = ۵n-۱۰$.

ب) $(۱+x)^{-۲} = \frac{۱}{(۱+x)^۲} = (۱-x+x^۲-x^۳+\cdots)(۱-x+x^۲-x^۳+\cdots)$، که عبارت است از تابع مولد دنبالهٔ $\binom{-۲}{۰}$، $\binom{-۲}{۱}$، $\binom{-۲}{۲}$، $\binom{-۲}{۳}$، .... بنابراین، پیچش دو دنبالهٔ مفروض دنبالهٔ $c_۰$، $c_۱$، $c_۲$، ... است، که در آن

$$c_n = \binom{-۲}{n} = (-۱)^n\binom{۲+n-۱}{n} = (-۱)^n\binom{n+۱}{n} = (-۱)^n(n+۱), n \in \mathbf{N}$$

[این دنباله عبارت است از دنبالهٔ یک در میان مثبت و منفی ۱، ۲−، ۳، ۴−، ۵، ۶−، ۷، ....]

پ)
$$\begin{aligned} (۱+x+x^۲+x^۳)(۰+x+۲x^۲+۳x^۳) &= ۰+x+(۱+۲)x^۲ \\ &+ (۱+۲+۳)x^۳ + (۱+۲+۳)x^۳ \\ &+ (۱+۲+۳)x^۴ + (۲+۳)x^۵ + ۳x^۶ \end{aligned}$$

بنابراین، دنبالهٔ ۰، ۱، ۳، ۶، ۶، ۵، ۳، ۰، ۰، ۰، ۰۰۰ پیچش دنباله‌های ۱، ۱، ۱، ۱، ۰، ۰، ۰، ۰۰۰ و ۰، ۱، ۲، ۳، ۰، ۰، ۰، ۰۰۰ است.

بند ۳.۹

۱. ۷، ۶ + ۱، ۵ + ۲، ۵ + ۱ + ۱، ۴ + ۳، ۴ + ۲ + ۱، ۴ + ۱ + ۱ + ۱، ۳ + ۳ + ۱، ۳ + ۲ + ۲، ۳ + ۲ + ۱ + ۱، ۳ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱، ۲ + ۲ + ۲ + ۱، ۲ + ۲ + ۱ + ۱ + ۱، ۲ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ و ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱.

۲. الف) $f(x) = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^4}\right)\left(\frac{1}{1-x^6}\right)\cdots = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2i})}$

ب) $g(x) = (1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{2i})$

پ) $h(x) = (1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{2i-1})$

۳. تعداد افرازهایی از ۶ که از ۱، ۲ و ۳ تشکیل شده‌اند برابر با ۷ است.

۴. الف) $\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\left(\frac{1}{1-t^3}\right)\left(\frac{1}{1-t^5}\right)\left(\frac{1}{1-t^7}\right)$

ب) $\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\left(\frac{t^{12}}{1-t^3}\right)\left(\frac{t^{20}}{1-t^5}\right)\left(\frac{t^{35}}{1-t^7}\right)$

پ) $(t^4+t^6+t^8)(t^{12}+t^{15}+\cdots+t^{21})(t^{35}+t^{40}+\cdots+t^{50})(t^{70}+t^{77}+t^{84}+\cdots)$

۵. الف و ب)

$$(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)(1+x^6+x^{12}+\cdots)\cdots = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i}}$$

۶. الف) $f(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^5)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{10})\cdots$

$$= \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i+x^{2i}+\cdots+x^{5i}) = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-x^{6i}}{1-x^i}$$

ب) $\prod_{i=1}^{12}(1+x^i+x^{2i}+\cdots+x^{5i}) = \prod_{i=1}^{12}\frac{1-x^{6i}}{1-x^i}$

۷. فرض می‌کنیم $f(x)$ تابع مولد تعداد افرازهایی از n باشد، که در آنها هیچ جمعوندی دوبار دیده نمی‌شود. فرض می‌کنیم $g(x)$ تابع مولد تعداد افرازهایی از n باشد، که در آنها هیچ جمعوندی بر ۳ بخش‌پذیر نیست:

$$g(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^7}\cdots$$

$$f(x) = (1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8)\cdots$$

$$= \frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^{12}}{1-x^4}\cdots = g(x)$$

۸. فرض می‌کنیم $f(x)$ تابع مولد تعداد افرازهایی از n باشد، که در آنها هیچ جمعوندی بر ۴ بخش‌پذیر نیست. $g(x)$ را

تابع مولد تعداد افرازهایی از n می‌گیریم، که در آنها هیچ جمعوند زوجی تکرار نمی‌شود (جمعوندهای فرد می‌توانند تکرار شوند).

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^6}\cdot\frac{1}{1-x^7}\cdot\frac{1}{1-x^9}\cdots$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{1-x}\cdot(1+x^2)\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot(1+x^4)\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot(1+x^6)\cdots\\
&= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^{12}}{1-x^6}\cdot\frac{1}{1-x^7}\cdot\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\cdots\\
&= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^6}\cdot\frac{1}{1-x^7}\cdot\frac{1}{1-x^9}\cdots = f(x)
\end{aligned}$$

۹. نتیجهٔ مطلوب از تناظر یک به یک موجود بین مجموعهٔ نمودارهای فررزکه دارای جمعوندهای (سطرهای) نابیشتر از m هستند و مجموعهٔ نمودارهای ترانهاده (که باز هم هر یک از اینها نمودار فررز است) که m جمعوند (سطر) دارند به‌دست می‌آید.

۱۰. نمودار فررز را برای افرازی از $2n$ به n جمعوند (سطر) درنظر بگیرید. ستون اول متشکل از نقطه‌ها را حذف کنید. نتیجهٔ این عمل یک نمودار فررز برای افرازی از n است. این تناظر تناظری یک به‌یک است و از اینجا نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

بند ۴.۹

۱. الف) e^{-x} ب) e^{2x} پ) e^{-ax}

ت) e^{a^2x} ث) ae^{a^2x} ج) xe^{2x}

۲. الف) $f(x) = 3e^{3x} = 3\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(3x)^i}{i!}$. بنابراین، $f(x)$ تابع مولد نمایی دنبالهٔ ۳، 3^2، 3^3، ... است.

ب) $f(x) = 6e^{5x} - 3e^{2x} = 6\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(5x)^i}{i!} - 3\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2x)^i}{i!}$. بنابراین، $f(x)$ تابع مولد نمایی دنبالهٔ زیر است:

$$3, 24, 138, \ldots, 6(5^n) - 3(2^n), \ldots$$

پ) $1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, \ldots$

ت) $1, 9, 14, -10, 2^4, 2^5, 2^6, \ldots$

ث) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} i!\left(\frac{x^i}{i!}\right)$. بنابراین، $f(x)$ تابع مولد نمایی دنبالهٔ !۰، !۱، !۲، !۳، ... است.

ج) $f(x) = 3[1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots] + \sum_{i=0}\frac{x^i}{i!}$. بنابراین، $f(x)$ تابع مولد نمایی دنبالهٔ زیر است:

$$4, 7, 25, 145, \ldots, (3n!)2^n + 1, \ldots$$

۳. الف) $g(x) = f(x) + [3 - a_3](x^3/3!)$

ب) $g(x) = f(x) + [-۱ - a_۲](x^۳/۳!) = e^{۵x} - (۱۲۶x^۳)/۳!$

پ) $g(x) = ۲f(x) + [۲ - ۲a_۱](x^۱/۱!) + [۴ - ۲a_۲](x^۲/۲!)$

ت) $g(x) = ۲f(x) + ۳e^x + [۲ - ۲a_۱ - ۳](x^۱/۱!) + [۴ - ۲a_۲ - ۳](x^۲/۲!) + [۸ - ۲a_۳ - ۳](x^۳/۳!)$

۴. الف) $\binom{۴}{۴}e^x + \binom{۴}{۳}e^x - \binom{۴}{۲}e^{۲x} + \binom{۴}{۱}e^{۳x} - e^{۴x} = (e^x - ۱)^۴ = \left(x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots\right)^۴$ ضریب $\frac{x^{۱۲}}{۱۲!}$ در $(e^x - ۱)^۴$ برابر است با $\binom{۴}{۳}۱^{۱۲} - \binom{۴}{۲}۲^{۱۲} + \binom{۴}{۱}۳^{۱۲} - ۴^{۱۲}$.

ب) چند تابع پوشا از $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۲\}$ در $B = \{$سیاه، آبی، سفید، قرمز$\}$ وجود دارد؟

پ) $f(x) = \left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots\right)^۲ \left(۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots\right)^۲ = e^{۲x}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{۲}\right)^۲$

$$= \left(\frac{۱}{۴}\right)(e^{۲x})(e^{۲x} + ۲ + e^{-۲x}) = \frac{۱}{۴}(e^{۴x} + ۲e^{۲x} + ۱)$$

بنابراین، ضریب $\frac{x^{۱۲}}{۱۲!}$ برابر است با $\frac{۱}{۴}\left[۴^{۱۲} + ۲(۲^{۱۲})\right]$ و این عدد، تعداد پیامهایی را به‌دست می‌دهد که در آنها هم تعداد پرچمهای آبی زوج است و هم تعداد پرچمهای سیاه.

$$g(x) = (۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\cdots)^۲ \left(x + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots\right)^۲ = e^{۲x}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}(e^{۴x} - ۲e^{۲x} + ۱)$$

ضریب $\frac{x^{۱۲}}{۱۲!}$ در $g(x)$ برابر است با $\frac{۱}{۴}\left[۴^{۱۲} - ۲(۲^{۱۲})\right]$ و این عدد، تعداد پیامهایی را به‌دست می‌دهد که در آنها هم تعداد پرچمهای آبی فرد است هم تعداد پرچمهای سیاه. درنتیجه، تعداد پیامهایی که در آنها تعداد کل پرچمهای آبی و سیاه زوج است برابر است با

$$\frac{۱}{۴}\left[۴^{۱۲} + ۲(۲^{۱۲})\right] + \frac{۱}{۴}\left[۴^{۱۲} - ۲(۲^{۱۲})\right] = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۴^{۱۲})$$

۵. الف) $(۱ + x)^۲ \left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!}\right)^۲$

ب) $(۱ + x)\left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!}\right)\left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!}\right)^۲$

پ) $(۱ + x)^۳ \left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!}\right)^۴$

۶. $(۱ + x)\left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!}\right)\left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!}\right)\left(\frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!}\right)$

۷. پاسخ مطلوب برابر است با ضریب $\frac{x^{۲۵}}{۲۵!}$ در $\left(\frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots + \frac{x^{۱۰}}{۱۰!}\right)^۴$

۸. $h(x) = f(x)g(x) = c_۰ + c_۱x + c_۲\left(\frac{x^۲}{۲!}\right) + c_۳\left(\frac{x^۳}{۳!}\right) + \cdots$، که در آن

$$c_n\left(\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{i=۰}^{n}\left(\frac{a_i x^i}{i!}\right)\left(\frac{b_{n-i}x^{n-i}}{(n-i)!}\right)=\left[\sum_{i=۰}^{n}\frac{a_i b_{n-i}}{i!(n-i)!}\right]x^n$$

$$=\left[\sum_{i=۰}^{n}\left[\frac{n!}{i!(n-i)!}\right]a_i b_{n-i}\right]\frac{x^n}{n!}=\left[\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}a_i b_{n-i}\right]\frac{x^n}{n!}$$

۹. الف) $\frac{۱}{۲}\times\frac{۳^{۲۰}+۱}{۳^{۲۰}}$ ب) $\frac{۱}{۴}\times\frac{۳^{۲۰}+۳}{۳^{۲۰}}$ پ) $\frac{۱}{۲}\times\frac{۳^{۲۰}-۱}{۳^{۲۰}}$

ت) $\frac{۱}{۲}\times\frac{۳^{۲۰}-۱}{۳^{۲۰}}$ ث) $\frac{۱}{۲}\times\frac{۳^{۲۰}+۱}{۳^{۲۰}}$

۱۰. الف)

$$f(x)=\left(x+\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots\right)\cdot(e^x)(e^x)$$

$$=\frac{۱}{۲}(e^x-۱)(e^{۲x})=\frac{۱}{۲}(e^x-۱)(e^{۳x}-e^x)=\frac{۱}{۲}(e^{۴x}-e^{۳x}-e^{۲x}+e^x)$$

پاسخ مطلوب برابر است با ضریب $\frac{x^{۲۰}}{۲۰!}$ در $f(x)$ و این ضریب عبارت است از

$$\frac{۱}{۲}(۴^{۲۰}-۳^{۲۰}-۲^{۲۰}+۱)$$

ب) $$g(x)=\left(۱+x+\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۴}{۴!}+\cdots\right)^۴=\left(e^x-\frac{x^۲}{۲}\right)^۴$$

$$=e^{۴x}-\binom{۴}{۱}e^{۳x}\left(\frac{x^۲}{۲}\right)+\binom{۴}{۲}e^{۲x}\left(\frac{x^۲}{۲}\right)^۲-\binom{۴}{۳}e^{x}\left(\frac{x^۲}{۲}\right)^۳+\left(\frac{x^۲}{۲}\right)^۴$$

ضریب $\frac{x^{۲۰}}{۲۰!}$ در $g(x)$ برابر است با

$$۴^{۲۰}-\binom{۴}{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)(۳^{۱۸})(۲۰)(۱۹)+\binom{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۴}\right)۲^{۱۶}(۲۰)(۱۹)(۱۸)(۱۷)-\binom{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۸}\right)$$

پ) $$h(x)=\left(۱+x+\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۴}{۴!}+\cdots\right)^۴=\left(e^x-\frac{x^۲}{۲}\right)^۴$$

$$=e^{۴x}-\binom{۴}{۱}e^{۳x}\left(\frac{x^۳}{۶}\right)+\binom{۴}{۲}e^{۲x}\left(\frac{x^۳}{۶}\right)^۲-\binom{۴}{۳}e^{x}\left(\frac{x^۳}{۶}\right)^۳+\left(\frac{x^۳}{۶}\right)^۴$$

ضریب $\frac{x^{۲۰}}{۲۰!}$ در $h(x)$ برابر است با

$$۴^{۲۰}-\binom{۴}{۱}\left(\frac{۱}{۶}\right)(۳^{۱۷})(۲۰)(۱۹)(۱۸)+\binom{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۶}\right)^۲(۲^{۱۴})(۲۰)(۱۹)(۱۸)(۱۷)(۱۶)(۱۵)$$

$$-\binom{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳\left(\frac{۲۰!}{۱۱!}\right)$$

ت) ضریب $\frac{x^{20}}{20!}$ در $\left(\frac{x^2}{2!}\right)$ $(e^x)^3\left(1+\frac{x^2}{2!}\right)=e^{3x}+e^{3x}$ برابر است با

$$3^{20}+\frac{1}{2}(3^{18})(20)(19)$$

۱۱. الف) $\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^4\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)$

ب)

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3\left[(x)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)+\left(\frac{x^2}{2!}\right)\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^3}{3!}\right)\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)+\left(\frac{x^4}{4!}\right)\left(\frac{x^5}{5!}\right)\right]$$

بند ۵.۹

۱. $f(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ مولد $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ است. $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=0^2+1^2\times x+2^2\times x^2+3^2\times x^3+\cdots$،

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right]=1^3+2^3\times x+3^3\times x^2+\cdots،$$

$$x\left(\frac{d}{dx}\right)\left[\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right]=0^3+1^3\times x+2^3\times x^2+3^3\times x^3+\cdots$$

درنتیجه،

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right]=\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$$

و بنابراین، $\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^5}$ مولد $0^3, 0^3+1^3, 0^3+1^3+2^3, \ldots$ است و ضریب x^n برابر است با $\sum_{i=0}^{n} i^3$.

$$(x^3+4x^2+x)(1-x)^{-5}=(x^3+4x^2+x)\left[\binom{-5}{0}+\binom{-5}{1}(-x)+\binom{-5}{2}(-x)^2+\cdots\right]$$

در اینجا ضریب x^n برابر است با

$$\binom{-5}{n-3}(-1)^{n-3}+4\binom{-5}{n-2}(-1)^{n-2}+\binom{-5}{n-1}(-1)^{n-1}$$
$$=\binom{n+1}{n-3}+4\binom{n+2}{n-2}+\binom{n+3}{n-1}$$
$$=(1/4!)[(n+1)(n)(n-1)(n-2)$$
$$+4(n+2)(n+1)(n)(n-1)+(n+3)(n+2)(n+1)(n)]$$
$$=[(n+1)(n)/4!](6n^2+6n)=(1/4)(n+1)(n)(n^2+n)$$
$$=[(n+1)(n)/2]^2$$

۲. الف)
$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots =$$
$$(d/dx)[1/(1-x)] = 1/(1-x)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$
$$(d/dx)[1/(1-x)^2] = 2(1-x)^3 = 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2x + 4\cdot 3x^2 + 5\cdot 4x^3 + \cdots$$
$$2x^2/(1-x)^3 = 0\cdot(-1) + 1\cdot 0x + 2\cdot 1x^2 + 3\cdot 2x^3 + 4\cdot 3x^4 + \cdots$$

ب) با توجه به قسمت (الف)، $\dfrac{2x^2}{(1-x)^4}$ مولد دنبالهٔ a_n، $n \geq 0$، است، که در آن $a_n = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)$.

$$\frac{2x^2}{(1-x)^4} = 2x^2(1-x)^{-4} = 2x^2\left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(-x) + \binom{-4}{2}(-x)^2 + \cdots\right]$$

ضریب x^n برابر است با $\dfrac{2(n+1)n(n-1)}{3!} = 2\binom{n+1}{n-2} = 2\binom{-4}{n-2}(-1)^{n-2}$.

یادداشت:
$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{6}[(2n+1)-3] = \frac{2(n+1)n(n-1)}{3!}$$

۳.
$$(1-x)f(x) = (1-x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2)x^3 + \cdots$$

بنابراین، $(1-x)f(x)$ تابع مولد دنبالهٔ a_0، $a_1 - a_0$، $a_2 - a_1$، $a_3 - a_2$، $\cdots$ است.

۴. تابع $(1+x)f(x)$ مولد دنبالهٔ a_0، $a_0 + a_1$، $a_1 + a_2$، $a_2 + a_3$، $\ldots$ است. برای دنبالهٔ a_0، $a_0 + a_1$، $a_0 + a_1 + a_2$، $a_1 + a_2 + a_3$، $a_2 + a_3 + a_4$، $\ldots$ تابع مولد عبارت است از $(1 + x + x^2)f(x)$.

۵.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i - a_n\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i - a_n\right)x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)/(1-x) - f(x)$$
$$= [f(x) - f(x)(1-x)]/(1-x) = xf(x)/(1-x)$$

۶. $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \left(\dfrac{1}{x-1}\right)[(a_0 - a_0) + (a_1x - a_1) + (a_2x^2 - a_2) + \cdots]$. به‌ازای $n \geq 0$، $\dfrac{a_nx^n - a^n}{x-1} = \dfrac{a_n(x^n - 1)}{x-1} = a_n(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$. بنابراین،

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = a_1 + a_2(x+1) + a_3(x^2 + x + 1) + a_4(x^3 + x^2 + x + 1) + \cdots$$

درنتیجه، به‌ازای هر $n \geq 0$ ضریب x^n برابر است با $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$.

۷. چون e^x تابع مولد 1، 1، $\frac{1}{2!}$، $\frac{1}{3!}$، $\ldots$ است، $\dfrac{e^x}{1-x}$ مولد دنبالهٔ a_0، a_1، a_2، $\cdots$ است، که در آن $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$.

تمرینات تکمیلی

۱. الف) $\dfrac{6}{1-x}+\dfrac{1}{(1-x)^2}$ ب) $\dfrac{1}{1-ax}$

پ) $\dfrac{1}{1-(1+a)x}$ ت) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-ax}$

۲. فرض کنیم $f(x)=(x^5+x^8+x^{11}+x^{14}+x^{17})^{10}=x^{50}(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})^{10}$، ضریب x^{83} در $f(x)$ برابر است با ضریب x^{33} در

$$\left(\frac{1-x^{15}}{1-x^3}\right)^{10}=(1-x^{15})^{10}(1-x^3)^{-10}=\left[1-\binom{10}{1}x^{15}+\binom{10}{2}x^{30}-\cdots+x^{150}\right]\times$$
$$\left[\binom{-10}{0}+\binom{-10}{1}(-x^3)+\binom{-10}{2}(-x^3)^2+\cdots\right]$$

این ضریب برابر است با

$$\binom{-10}{11}(-1)^{11}-\binom{10}{1}\binom{-10}{6}(-1)^6+\binom{10}{2}\binom{-10}{1}(-1)^1$$
$$=\binom{20}{11}-\binom{10}{1}\binom{15}{6}+\binom{10}{2}\binom{10}{1}$$

۳. تابع مولد برای هر نوع فشنگ عبارت است از $(x^2+x^3+\cdots+x^7)^4=x^8(1+x+x^2+\cdots+x^5)^4$. ضریب x^{12} در

$$(1-x^6)^4(1-x)^{-4}=\left[1-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-\cdots\right]\left[\binom{-4}{0}+\binom{-4}{1}(-x)\right.$$
$$\left.+\binom{-4}{2}(-x)^2+\cdots\right]$$

برابر است با $\binom{-4}{12}(-1)^{12}-\binom{4}{1}\binom{-4}{6}(-1)^6+\binom{4}{2}\binom{-4}{0}=\binom{15}{12}-\binom{4}{1}\binom{9}{6}+\binom{4}{2}$. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، پاسخ مطلوب عبارت است از $\left[\binom{15}{12}-\binom{4}{1}\binom{9}{6}+\binom{4}{2}\right]^2$.

۴. $f(x)=(1+x+x^3+x^5+\cdots)(1+x^2+x^6+x^{10}+\cdots)\cdots=\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i+x^{3i}+x^{5i}+\cdots)$.

۵. فرض کنیم $f(x)$ تابع مولد تعداد افرازهایی از n باشد، که در آنها هیچ جمعوند زوجی تکرار نمی‌شود (ولی جمعوندهای فرد می‌توانند تکرار شوند). $g(x)$ تابع مولد تعداد افرازهایی از n است، که در آنها هیچ جمعوندی بیشتر از سه بار حضور ندارد. دراین‌صورت،

$$g(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6+x^9)\cdots$$
$$=\left[(1+x)(1+x^2)\right]\left[(1+x^2)(1+x^4)\right]\left[(1+x^3)(1+x^6)\right]\cdots$$
$$=\left[(1-x^2)/(1-x)\right](1+x^2)\left[(1-x^4)/(1-x^2)\right](1+x^4)\left[(1-x^6)/(1-x^3)\right](1+x^6)\cdots$$

$$= [1/(1-x)](1+x^2)[1/(1-x^3)](1+x^4)[1/(1-x^5)](1+x^6)\cdots$$
$$= (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(1+x^4)(1+x^5+x^{10}$$
$$+x^{15}+\cdots)(1+x^6)\cdots = f(x)$$

۶. نتیجهٔ موردنظر برابر است با ضریب $\frac{x^{10}}{10!}$ در

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^4 = (e^x-x)^4 = e^{4x} - \binom{4}{1}xe^{3x} + \binom{4}{2}x^2e^{2x} - \binom{4}{3}x^3e^x + \binom{4}{4}x^4$$

این ضریب عبارت است از

$$4^{10} - \binom{4}{1}(10)(3^9) + \binom{4}{2}(10)(9)(2^8) - \binom{4}{3}(10)(9)(8)$$

۷. الف)

$$(1-2x)^{-5/2} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-5/2)((-5/2)-1)((-5/2)-2)\cdots((-5/2)-r+1)}{r!}(-2x)^r$$
$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(5)(7)(9)\cdots(3+2r)}{r!}x^r$$

بنابراین، $g(x)$ تابع مولد نمایی برای ۱، ۵، (۷)۵، (۹)(۷)۵، ... است.

ب) $$(1-ax)^b = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(b)(b-1)(b-2)\cdots(b-r+1)}{r!}(-ax)^r$$
$$= 1 - abx + b(b-1)a^2x^2/2! + \cdots$$

درنتیجه، با مقایسهٔ ضرایب توانهای مشابه x می‌بینیم که $-ab = 7$، $b(b-1)a^2 = 7 \times 11$ و به این ترتیب داریم $a = 4$ و $b = -\frac{7}{4}$.

۸. به‌ازای هر افراز n، سطری از $n+k$ نقطه بالای سطر اول در نمودار فررز آن بگذارید. نتیجهٔ این عمل، نمودار فررز برای افرازی از $2n+k$ است، که در آن $n+k$ بزرگترین جمعوند است. از این تناظر یک به‌یک تساوی $P_1 = P_2$ حاصل می‌شود. ترانهش نمودار فررز برای هر افرازی از P_2، نمودار فررز برای افرازی از P_3 را به‌دست می‌دهد و برعکس. اکنون می‌توان نتیجهٔ موردنظر را با توجه به این دو نکته به‌دست آورد.

۹. به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$. اگر از هر دو طرف مشتق بگیریم، می‌بینیم که

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

به‌ازای $x = 1$ داریم

$$n(1+1)^{n-1} = n(2^{n-1}) = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

۱۰. $f(x) = (1+x)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6+x^9)\cdots(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\cdots+x^{k^2})\cdots$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k^2} x^i\right)$$

۱۱. الف) ضریب x^{20} در $(x+x^2+\cdots)^{12} = x^{12}(1+x+x^2+\cdots)^{12}$ برابر است با ضریب x^8 در

$$(1+x+x^2+\cdots)^{12} = (1-x)^{-12}$$

که این هم عبارت است از

$$\binom{-12}{8}(-1)^8 = (-1)^8\binom{12+8-1}{8}(-1)^8 = \binom{19}{8}$$

ب) ضریب x^{10} در $(x+x^2+\cdots)^6 = x^6(1+x+x^2+\cdots)^6$ برابر است با $\binom{9}{4} = (-1)^4\binom{-6}{4}$.
احتمال وقوع چنین توزیعی $\binom{9}{4}\binom{9}{4}/\binom{19}{8}$ است.

۱۲. عدد m، $0 \le m \le n$ را ثابت می‌گیریم. m شیء را می‌توان به $k(k+1)\cdots(k+m-1)$ طریق مرتب کرد. چون $\binom{n}{m}$ طریق برای انتخاب این m شیء وجود دارد، تعداد طرق انتخاب m شیء از n شیء و گذاشتن آنها در ظرفها به‌صورتی که مشخص شده است برابر است با $\binom{n}{m}(k)(k+1)\cdots(k+m-1)$.

$$\frac{e^x}{(1-x)^k} = \left[1+x+\left(\frac{x^2}{2!}\right)+\left(\frac{x^3}{3!}\right)+\cdots\right]\times$$
$$\left[\binom{-k}{0}+\binom{-k}{1}(-x)+\binom{-k}{2}(-x)^2+\cdots\right]$$

ضریب $\frac{x^n}{n!}$ در $e^x(1-x)^{-k}$ برابر است با

$$\binom{-k}{0}+\binom{-k}{1}(-1)(n)+\binom{-k}{2}(-1)^2(n)(n-1)+\cdots+\binom{-k}{n-1}(-1)^{n-1}\left(\frac{n!}{1!}\right)$$
$$+\binom{-k}{n}(-1)^n\left(\frac{n!}{0!}\right) = \sum_{m=0}^{n}\binom{-k}{m}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!}$$
$$= \sum_{m=0}^{n}\binom{m+k-1}{m}\frac{n!}{(n-m)!}$$

و

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(k)(k+1)\cdots(k+m-1) = \sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(m+k-1)!}{(k-1)!}$$
$$= \sum_{m=0}^{n}\frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!}\frac{n!}{(n-m)!} = \sum_{m=0}^{n}\binom{m+k-1}{m}\frac{n!}{(n-m)!}$$

۱۰

روابط بازگشتی

بند ۱.۱۰

۱. الف) به‌ازای $n \geq ۱$، $a_n = ۵a_{n-۱}$ و $a_۰ = ۲$. پ) به‌ازای $n \geq ۱$، $a_n = \frac{۱}{۳}a_{n-۱}$ و $a_۰ = ۱$.

ب) به‌ازای $n \geq ۱$، $a_n = -۳a_{n-۱}$ و $a_۰ = ۶$. ت) به‌ازای $n \geq ۱$، $a_n = \frac{۲}{۵}a_{n-۱}$ و $a_۰ = ۷$.

۲. الف) $a_{n+۱} = ۱٫۵a_n$ و درنتیجه، به‌ازای هر $n \geq ۰$، $a_n = (۱٫۵)^n a_۰$.

ب) $۴a_n = ۵a_{n-۱}$ و درنتیجه، به‌ازای هر $n \geq ۰$، $a_n = (۱٫۲۵)^n a_۰$.

پ) $۳a_{n+۱} = ۴a_n$، $۳a_۱ = ۱۵ = ۴a_۰$، $a_۰ = \frac{۱۵}{۴}$ و بنابراین، به‌ازای هر $n \geq ۰$

$$a_n = \left(\frac{۴}{۳}\right)^n a_۰ = \left(\frac{۴}{۳}\right)^n \left(\frac{۱۵}{۴}\right) = ۵\left(\frac{۴}{۳}\right)^{n-۱}$$

ت) $a_n = \frac{۳}{۲}a_{n-۱}$، $a_n = \left(\frac{۳}{۲}\right)^n a_۰$، $۸۱ = a_۴ = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۴ a_۰$. بنابراین، $a_۰ = ۱۶$ و به‌ازای هر $n \geq ۰$، $a_n = ۱۶\left(\frac{۳}{۲}\right)^n$.

۳. به‌ازای هر $n \geq ۰$، $a_{n+۱} - da_n = ۰$. بنابراین، $a_n = d^n a_۰$. از $\frac{۱۵۳}{۴۹} = a_۳ = d^۳ a_۰$ و $\frac{۱۳۷۷}{۲۴۰۱} = a_۵ = d^۵ a_۰$ نتیجه می‌شود که $\frac{a_۵}{a_۳} = d^۲ = \frac{۹}{۴۹}$ و $d = \pm\frac{۳}{۷}$.

۴. به‌ازای $n \geq ۰$، $a_{n+۱} = a_n + ۲٫۵a_n$.

$a_n = (۳٫۵)^n a_۰ = (۳٫۵)^n ۱۰۰۰$. به‌ازای $n = ۱۲$ داریم $a_n = (۳٫۵)^{۱۲}(۱۰۰۰) \doteq ۳۳۷۹۲۲۰۵۰۸$.

۵. $P_n = ۱۰۰(۱ + ۰٫۰۱۵)^n$، $P_۰ = ۱۰۰$.

از $۲۰۰ = ۱۰۰(۱٫۰۱۵)^n$ نتیجه می‌شود که $(۱٫۰۱۵)^n = ۲$

$$(۱٫۰۱۵)^{۲۶} \doteq ۱٫۹۸۳۵ \,, \qquad (۱٫۰۱۵)^{۲۷} \doteq ۲٫۰۱۳۳$$

بنابراین، شخص موردنظر باید $۱۴۱ = (۳)(۴۷)$ ماه منتظر بماند تا پولش دو برابر بشود.

۶. $P_n = P_\circ(1/02)^n$.

$7218/27 = P_\circ(1/02)^{60}$ و بنابراین، $P_\circ = (7218/27)(1/02)^{-60} = 220000$

۷. الف) $19 + 18 + 17 + \cdots + 10 = 145$

ب) $9 + 8 + 7 + \cdots + 1 = 45$

۸. الف) فرض می‌کنیم به‌ازای $i = k$، که در آن $1 \le k \le n-2$، هیچ تعویضی (برای نخستین بار) در اجرای حلقهٔ داخلی For صورت نگیرد. تا اینجا تعداد اجراهای انجام گرفته برابر است با $(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-k)$. اگر کار را ادامه دهیم و حلقهٔ داخلی For را به‌ازای $k+1 \le i \le n-1$ اجرا کنیم، $\frac{1}{2}(n-k-1)(n-k) = 1+2+3+\cdots+[n-(k+2)]+[n-(k+1)]$ مقایسهٔ غیرضروری انجام می‌گیرد.

یادداشت: $(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-k) = kn-(1+2+3+\cdots+k) = kn-\frac{k(k+1)}{2}$

و $\frac{(n-k-1)(n-k)}{2} = \frac{1}{2}(n-1)(n) - \left[kn - \frac{k(k+1)}{2}\right]$.

ب) ورودی روال زیر، آرایه‌ای مانند A از n عدد حقیقی است. خروجی، آرایهٔ A است که به‌صورت $A[1] \le A[2] \le \cdots \le A[n]$ مرتب شده است:

```
Procedure BubbleSort2(var A: array; n: integer);
Var
     Switch: boolean;   {The value of Switch is true if}
                        {an interchange actually takes place.}
     i,j: integer;
     temp: real;
Begin
     Switch := true;
     While Switch do
          Begin
               Switch := false;
               For i := 1 to n-1 do
                 For j := n downto i+1 do
                   If A[ j] < A[ j-1] then
                        Begin
                             temp := A[ j-1];
                             A[ j-1] := A[ j];
                             A[ j] := temp;
                             Switch := true
                        End{if}
    End {while}
End. {procedure}
```

پ) بهترین حالت وقتی روی می‌دهد که A از اول به‌صورت غیرنزولی مرتب شده باشد. وقتی این وضعیت روی دهد، این روال فقط به‌ازای $\text{i} := ۱$ و $\text{j} := n$ تا ۲ پردازش می‌شود. این منجر به $n - ۱$ مقایسه می‌شود و بنابراین، پیچیدگی بهترین حالت، $O(n)$ است.

بدترین حالت وقتی روی می‌دهد که به‌ازای هر مقدار i از ۱ تا $n - ۱$، سوئیچ زده شود. مانند مثال ۱۰.۴، این منجر به $\frac{n^۲ - n}{۲}$ مقایسه می‌شود و بنابراین، پیچیدگی بدترین حالت، $O(n^۲)$ است.

۹. الف) ۲۱۳۴۵ ب) ۵۲۱۴۳، ۵۲۱۳۴، ۲۵۱۳۴

پ) ۲۵۱۳۴، ۲۱۵۳۴، ۲۱۳۵۴، ۲۱۳۴۵

۱۰. الف) در اینجا ورودی، آرایه‌ای مانند A از n عدد حقیقی است.

مرحلهٔ ۱: روش تمرین ۸(ب) را که در بالا آمد دربارهٔ این آرایهٔ ورودی به‌کار ببرید. خروجی آرایهٔ مرتب شدهٔ A است (که در آن $A[۱] \leq A[۲] \leq \cdots \leq A[n]$).

مرحلهٔ ۲: تعیین کنید که n زوج است یا فرد. مثلاً، در پاسکال استاندارد، می‌توانیم تابع از پیش تعریف شدهٔ Odd را، که قلمرو آن $\mathbf{Z}$ و حوزهٔ مقادیر آن {راست و دروغ} است، به‌کار ببریم. دراین صورت، میانه را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

If Odd (n) then

Median := $A[(n + ۱)/۲]$

Else Median := $(۱/۲)(A[n/۲] + A[(n/۲) + ۱])$

ب) از مرحلهٔ ۱ نتیجه می‌شود که پیچیدگی زمانی بدترین حالت $O(n^۲)$ است.

بند ۲.۱۰

۱. الف) به‌ازای $n \geq ۲$ داریم $a_n = ۵a_{n-۱} + ۶a_{n-۲}$، $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۳$.

فرض می‌کنیم $a_n = cr^n$، که در آن $c \neq ۰$ و $r \neq ۰$. دراین صورت معادلهٔ مشخصه عبارت است از $r^۲ - ۵r - ۶ = ۰ = (r - ۶)(r + ۱)$ و بنابراین، $r = -۱, ۶$ ریشه‌های مشخصه‌اند.

$a_n = A(-۱)^n + B(۶)^n$، $۱ = a_۰ = A + B$ و $۳ = a_۱ = -A + ۶B$. بنابراین، $B = \frac{۴}{۷}$ و $A = \frac{۳}{۷}$.

درنتیجه، به‌ازای هر $n \geq ۰$ داریم $a_n = \frac{۳}{۷}(-۱)^n + \frac{۴}{۷}(۶)^n$.

ب) به‌ازای هر $n \geq ۰$، $a_n = ۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^n - ۲(۵)^n$.

پ) به‌ازای هر $n \geq ۰$، $a_n = ۴ + ۳\left(-\frac{۱}{۳}\right)^n$.

ت) به‌ازای $n \geq ۰$ داریم $a_{n+۲} + a_n = ۰$، $a_۰ = ۰$ و $a_۱ = ۳$.

با فرض $a_n = cr^n$، که در آن $c \neq ۰$ و $r \neq ۰$، معادلهٔ مشخصهٔ $r^۲ + ۱ = ۰$ ریشه‌های مشخصهٔ $\pm i$ را به‌دست می‌دهد. بنابراین،

$$a_n = A(i)^n + B(-i)^n = A\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n + B\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)^n\right]$$
$$= C\cos\frac{n\pi}{2} + D\sin\frac{n\pi}{2}$$

با توجه به $C = a_0 = 0$ و $D = D\sin\frac{\pi}{2} = a_1 = 3$ می‌بینیم که به‌ازای هر $n \geq 0$، $a_n = 3\sin\frac{n\pi}{2}$.

ث) به‌ازای هر $n \geq 0$، $a_n = 2^n\left[\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$.

ج) به‌ازای $n \geq 2$ داریم $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$، $a_0 = 5$ و $a_1 = 12$. فرض می‌کنیم $a_n = cr^n$، که در آن $c \neq 0$ و $r \neq 0$. در این صورت $r^2 - 6r + 9 = 0 = (r-3)^2$ و بنابراین، ریشه‌های مشخصه عبارت‌اند از ۳ و ۳. در نتیجه، $a_n = A(3^n) + Bn(3^n)$. داریم $A = a_0 = 5$، $12 = a_1 = 3A + 3B = 15 + 3B$ و $B = -1$، بنابراین، به‌ازای هر $n \geq 0$، $a_n = 5(3^n) - n(3^n) = (5-n)(3^n)$.

چ) به‌ازای $n \geq 2$ داریم $a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$، $a_0 = 1$ و $a_1 = 3$. با توجه به $r^2 + 2r + 2 = 0$ داریم $r = -1 \pm i$، بنابراین،

$$(-1+i) = \sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big)$$

$$(-1-i) = \sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) =$$

$$\sqrt{2}\big(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)\big) = \sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) - i\sin(3\pi/4)\big)$$

$$a_n = (\sqrt{2})^n\left[A\cos(3\pi n/4) + B\sin(3\pi n/4)\right]$$

$$1 = a_0 = A$$

$$3 = a_1 = \sqrt{2}\left[\cos(3\pi/4) + B\sin(3\pi/4)\right] =$$

$$\sqrt{2}\left[(-1/\sqrt{2}) + B(1/\sqrt{2})\right] \Longrightarrow 3 = -1 + B, B = 4$$

$$a_n = (\sqrt{2})^n\left[\cos(3\pi n/4) + 4\sin(3\pi n/4)\right], n \geq 0$$

۲. الف) مثال ۱۰.۱۱: به‌ازای $n \geq 2$ داریم $a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2}$، $a_1 = 10$ و $a_2 = 100$. با توجه به $r^2 - 10r - 29 = 0$ داریم $r = 5 \pm 6\sqrt{6}$. بنابراین،

$$a_n = A(5+6\sqrt{6})^n + B(5-6\sqrt{6})^n$$

از $a_2 = 100 = 10a_1 + 29a_0 = 100 + 29a_0$ نتیجه می‌شود که $a_0 = 0$ و از $0 = a_0 = A + B$ نتیجه می‌شود که $B = -A$. پس

$$a_n = A\left[(5+6\sqrt{6})^n - (5-6\sqrt{6})^n\right]$$

از $12\sqrt{6}A = A(5 + 6\sqrt{6} - 5 + 6\sqrt{6}) = a_1 = 10$ نتیجه می‌شود که $A = \dfrac{5}{6\sqrt{6}}$. پس به‌ازای هر $n \geq 0$، $a_n = \dfrac{5}{6\sqrt{6}}\left[(5+6\sqrt{6})^n - (5-6\sqrt{6})^n\right]$.

مثال ۱۰.۱۹: به‌ازای $n \geq 0$ داریم $a_n = c_1(2^n) + c_2 n(2^n)$، $a_0 = 1$ و $a_1 = 3$. می‌بینیم که $a_0 = 1 = c_1$، $a_1 = 3 = 2 + c_2(2)$ و $c_2 = \dfrac{1}{2}$. پس $a_n = 2^n\left(1 + \dfrac{n}{2}\right)$.

ب) مثال ۱۰.۱۳: به‌ازای $n \geq 2$ داریم $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$، $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$. باتوجه‌به $r^2 - r - 1 = 0$ داریم $r = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. می‌بینیم که $a_0 = 1 = A + B$. بنابر $a_1 = 2 = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ داریم

$$4 = A(1+\sqrt{5}) + B(1-\sqrt{5}) = (A+B) + \sqrt{5}(A-B) = 1 + \sqrt{5}(A-B)$$

بنابراین، $3 = \sqrt{5}(A-B)$ و $A - B = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$، درنتیجه،

$$2A = (A+B) + (A-B) = 1 + 3/\sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}/\sqrt{5}$$

$$A = (3+\sqrt{5})/2\sqrt{5};\ B = 1 - A = (\sqrt{5}-3)/2\sqrt{5}$$

$$a_n = \left[(\sqrt{5}+3)/2\sqrt{5}\right]\left[(1+\sqrt{5})/2\right]^n + \left[(\sqrt{5}-3)/2\sqrt{5}\right]\left[(1-\sqrt{5})/2\right]^n$$

۳.
$$(n=0):\ a_2 + ba_1 + ca_0 = 0 = 4 + b(1) + c(0) \Longrightarrow b = -4$$
$$(n=1):\ a_3 - 4a_2 + ca_1 = 0 = 37 - 4(4) + c \Longrightarrow c = -21$$
$$a_{n+2} - 4a_{n+1} - 21a_n = 0$$
$$r^2 - 4r - 21 = 0 = (r-7)(r+3),\ r = 7, -3$$
$$a_n = A(7)^n + B(-3)^n$$
$$0 = a_0 = A + B \Longrightarrow B = -A$$
$$1 = a_1 = 7A - 3B = 10A \Longrightarrow A = 1/10,\ B = -1/10$$
$$a_n = (1/10)[(7)^n - (-3)^n],\ n \geq 0$$

۴.
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 2,\ a_0 = a_1 = 1$$
$$r^2 - r - 1 = 0,\ r = (1 \pm \sqrt{5})/2$$
$$a_n = A\big((1+\sqrt{5})/2\big)^n + B\big((1-\sqrt{5})/2\big)^n$$
$$a_0 = a_1 = 1 \Longrightarrow A = (1+\sqrt{5})/2\sqrt{5},\ B = \big(\sqrt{5}-1\big)/2\sqrt{5}$$
$$a_n = \big(1/\sqrt{5}\big)\left[\big((1+\sqrt{5})/2\big)^{n+1} - \big((1-\sqrt{5})/2\big)^{n+1}\right]$$

۵. الف)

$$F_1 = F_2 - F_0$$
$$F_3 = F_4 - F_2$$
$$F_5 = F_6 - F_4$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

حدس: به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$

برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

به‌ازای $n = 1$ داریم $F_1 = F_2$ و این گزارهٔ درستی است، زیرا $F_1 = 1 = F_2$. بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است (و به این ترتیب، مرحلهٔ پایهٔ برهان برقرار می‌شود).

سپس فرض می‌کنیم که نتیجه به‌ازای $n = k (k \geq 1)$ درست باشد، یعنی فرض می‌کنیم

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2k-1} = F_{2k}$$

وقتی $n = k + 1$ می‌بینیم که

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2k-1} + F_{2(k+1)-1} &= (F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2k-1}) + F_{2k+1} \\ &= F_{2k} + F_{2k+1} = F_{2k+2} = F_{2(k+1)} \end{aligned}$$

بنابراین، درستی حدس به‌ازای $n = k$ مستلزم درستی آن به‌ازای $n = k + 1$ است. پس بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ داریم

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

ب)

$$F_2 = F_3 - F_1$$
$$F_4 = F_5 - F_3$$
$$F_6 = F_7 - F_5$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$$

حدس: به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$،

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - F_1 = F_{2n+1} - 1$$

برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

وقتی $n = 0$، می‌بینیم که $F_0 = F_1 - F_1 = 0$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است و این، مرحلهٔ پایهٔ برهان را فراهم می‌آورد.

اگر درستی نتیجه را به‌ازای $n = k$ $(k \geq 0)$ مفروض بگیریم، داریم $\sum_{i=0}^{k} F_{2i} = F_{2k+1} - 1$. در این صورت، وقتی $n = k + 1$ ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} F_{2i} &= \sum_{i=0}^{k} F_{2i} + F_{2(k+1)} = F_{2k+1} - 1 + F_{2k+2} = \left(F_{2k+2} + F_{2k+1}\right) - 1 \\ &= F_{2k+3} - 1 = F_{2(k+1)+1} - 1\end{aligned}$$

بنابراین، می‌بینیم که درستی نتیجه به‌ازای $n = k$ مستلزم درستی نتیجه به‌ازای $n = k + 1$ است. درنتیجه، بنابر اصل استقرای ریاضی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم

$$F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

۶. الف)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/\sqrt{5})\left[\left((1+\sqrt{5})/2\right)^{n+1} - \left((1-\sqrt{5})/2\right)^{n+1}\right]}{(1/\sqrt{5})\left[\left((1+\sqrt{5})/2\right)^{n} - \left((1-\sqrt{5})/2\right)^{n}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left((1+\sqrt{5})/2\right)^{n+1} - \left((1-\sqrt{5})/2\right)^{n+1}\right]}{\left[\left((1+\sqrt{5})/2\right)^{n} - \left((1-\sqrt{5})/2\right)^{n}\right]}$$

چون $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$، وقتی $n \to \infty$ داریم $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \to 0$. بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[(1+\sqrt{5})/2\right]^{n+1}}{\left[(1+\sqrt{5}/2\right]^{n}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ب) (یک)

$$\frac{AC}{AX} = \frac{\sin AXC}{\sin ACX} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ$$

(دو)

$$\begin{aligned}\cos 180^\circ &= \sin 72^\circ = 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ = \\ &= 2(2\sin 18^\circ \cos 18^\circ)(1 - 2\sin^2 18^\circ) \\ \Longrightarrow 1 &= 4\sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) = 4\sin 18^\circ - 8\sin^3 18^\circ \\ 0 &= 8\sin^3 18^\circ - 4\sin 18^\circ + 1\end{aligned}$$

پس $\sin 18^\circ$ یک ریشهٔ $8x^3 - 4x + 1 = 0$ است.

$$8x^3 - 4x + 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

ریشه‌های $۴x^۲ + ۲x + ۱ = ۰$ عبارت‌اند از $\frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۴}$. چون $\frac{۱}{۲} = \sin ۳۰^\circ > \sin ۱۸^\circ > ۰$، پس $\sin ۱۸^\circ = \frac{-۱ + \sqrt{۵}}{۴}$.

پ) $(۱/۲)(AC/AX) = \cos ۳۶^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۸^\circ = ۱ - ۲[(-۱ + \sqrt{۵})/۴]^۲ = (۱ + \sqrt{۵})/۴$

$AC/AX = ۲(۱ + \sqrt{۵})/۴ = (۱ + \sqrt{۵})/۲$

۷. به‌ازای $n \geq ۰$ داریم $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$ و $a_۰ = a_۱ = ۱$.

$$a_n = A \underbrace{\left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\right)^n}_{\text{(جمع ۱ ها)}} + B \underbrace{\left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)^n}_{\text{(جمع ۲ ها)}}$$

ملاحظه می‌شود که $۱ = a_۰ = A + B$، $۱ = a_۱ = A\left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\right) + B\left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)$ یا

$$A - B = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \ , \ \ ۲ = A + B + \sqrt{۵}(A - B) = ۱ + \sqrt{۵}(A - B)$$

اکنون

$$۱ = A + B, \ \frac{۱}{\sqrt{۵}} = A - B \Longrightarrow A = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}}, \ B = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲\sqrt{۵}}$$

درنتیجه، به‌ازای هر $n \geq ۰$ داریم $a_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱} - \left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}\right]$

۸. الف) برهان:

$$\begin{aligned}
&F_n + F_{n+۱} + F_{n+۲} + F_{n+۳} + F_{n+۴} + F_{n+۵} \\
&= (F_n + F_{n+۱}) + F_{n+۲} + F_{n+۳} + F_{n+۴} + (F_{n+۳} + F_{n+۴}) \\
&= ۲F_{n+۲} + ۲F_{n+۳} + ۲F_{n+۴} = ۲(F_{n+۲} + F_{n+۳}) + ۲F_{n+۴} = ۴F_{n+۴}
\end{aligned}$$

بنابراین، مجموع هر شش عدد متوالی فیبوناچی بر ۴ بخش‌پذیر است.

ب) برهان:

$$\begin{aligned}
&F_n + F_{n+۱} + F_{n+۲} + \cdots + F_{n+۷} + F_{n+۸} + F_{n+۹} \\
&= ۲F_{n+۲} + F_{n+۳} + F_{n+۴} + F_{n+۵} + F_{n+۶} + ۲F_{n+۷} + ۲F_{n+۸} \\
&= ۲F_{n+۲} + F_{n+۳} + F_{n+۴} + F_{n+۵} + ۳F_{n+۶} + ۴F_{n+۷} \\
&= ۲F_{n+۲} + F_{n+۳} + F_{n+۴} + ۵F_{n+۵} + ۷F_{n+۶} \\
&= -F_{n+۳} + ۳F_{n+۴} + ۵F_{n+۵} + ۷F_{n+۶} \\
&= ۴F_{n+۴} + ۴F_{n+۵} + ۷F_{n+۶} = ۱۱F_{n+۶}
\end{aligned}$$

بنابراین، مجموع هر ده عدد متوالی فیبوناچی بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۹. فرض می‌کنیم a_n تعداد طرق چیدن n تا از این قرصها باشد به‌طوری‌که هیچ دو قرص آبی روی هم قرار نگیرند. فرض می‌کنیم b_n تعداد آن ترتیبهایی در a_n باشد که به قرص آبی ختم می‌شوند. قرار می‌دهیم $c_n = a_n - b_n$. دراین صورت

$$a_{n+۱} = ۳b_n + ۴c_n = ۳(b_n + c_n) + c_n = ۳a_n + ۳a_{n-۱}$$

بنابراین، به‌ازای $n \geq ۱$ داریم $a_{n+۱} - ۳a_n - ۳a_{n-۱} = ۰$، $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۴$. ریشه‌های مشخصهٔ این رابطهٔ بازگشتی عبارت‌اند از $r = \frac{۳ \pm \sqrt{۲۱}}{۲}$ و $a_n = A\left(\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲}\right)^n + B\left(\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}\right)^n$. از $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۴$ نتیجه می‌شود که $A = \frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲\sqrt{۲۱}}$ و $B = \frac{\sqrt{۲۱}-۵}{۲\sqrt{۲۱}}$. پس به‌ازای هر $n \geq ۰$

$$a_n = \left(\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲\sqrt{۲۱}}\right)\left(\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲}\right)^n - \left(\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲\sqrt{۲۱}}\right)\left(\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}\right)^n$$

۱۰. به‌ازای $n \geq ۰$ فرض می‌کنیم a_n تعداد طرق چیدن nتا از این قرصها باشد به‌طوری‌که هیچ دو قرص آبی روی‌هم قرار نگیرند. فرض می‌کنیم $a_n^{(b)}$ تعداد طرق چیدن n قرص باشد که یک قرص آبی در بالا دارند و $a_n^{(c)}$ تعداد طرق چیدن n قرص باشد که قرص بالای آنها آبی نیست. دراین صورت به‌ازای $n \geq ۱$ داریم

$$\begin{aligned} a_{n+۱} &= (k-۱)a_n^{(b)} + ka_n^{(c)} \\ &= (k-۱)\left[a_n^{(b)} + a_n^{(c)}\right] + a_n^{(c)} \\ &= (k-۱)a_n + a_n^{(c)} = (k-۱)a_n + (k-۱)a_{n-۱} \end{aligned}$$

و $a_۰ = ۱$، $a_۱ = k$.

۱۱. به‌ازای $n \geq ۰$ فرض می‌کنیم a_n تعداد واژه‌هایی به طول n در $\sum^*$ باشد که در آنها هیچ دو نویسهٔ الفبایی کنار هم نیستند. فرض می‌کنیم $a_n^{(۱)}$ تعداد آن واژه‌هایی به طول n باشد که به یک نویسهٔ عددی ختم می‌شوند و $a_n^{(۲)}$ تعداد واژه‌هایی به طول n باشد که به یک نویسهٔ الفبایی ختم می‌شوند. دراین صورت $a_n = a_n^{(۱)} + a_n^{(۲)}$. به‌ازای $n \geq ۱$ داریم

$$\begin{aligned} a_{n+۱} &= ۱۱a_n^{(۱)} + ۴a_n^{(۲)} \\ &= \left[۴a_n^{(۱)} + ۴a_n^{(۲)}\right] + ۷a_n^{(۱)} \\ &= ۴a_n + ۷a_n^{(۱)} \\ &= ۴a_n + ۷(۴a_{n-۱}) = ۴a_n + ۲۸a_{n-۱} \end{aligned}$$

و $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۱۱$.

اکنون فرض می‌کنیم $a_n = cr^n$، که در آن $c \neq ۰$ و $r \neq ۰$. دراین صورت معادلهٔ مشخصهٔ حاصل عبارت است از

$$r^۲ - ۴r - ۲۸ = ۰$$

بنابراین، $r = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۲۸}}{۲} = ۲ \pm ۴\sqrt{۲}$. پس به‌ازای $n \geq ۰$ داریم $a_n = A(۲+۴\sqrt{۲})^n + B(۲-۴\sqrt{۲})^n$.
از $a_۰ = ۱$ نتیجه می‌شود که $A + B = ۱$ و از $a_۱ = ۱۱$ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} ۱۱ &= A\left[۲+۴\sqrt{۲}\right] + B\left[۲-۴\sqrt{۲}\right] \\ &= A\left[۲+۴\sqrt{۲}\right] + (۱-A)\left[۲-۴\sqrt{۲}\right] \\ &= \left[۲-۴\sqrt{۲}\right] + A\left[۲+۴\sqrt{۲}-۲+۴\sqrt{۲}\right] = \left[۲-۴\sqrt{۲}\right] + ۸\sqrt{۲}A \end{aligned}$$

بنابراین $A = \frac{۹+۴\sqrt{۲}}{۸\sqrt{۲}} = \frac{۸+۹\sqrt{۲}}{۱۶}$ و $B = ۱ - A = \frac{۸-۹\sqrt{۲}}{۱۶}$. درنتیجه، به‌ازای $n \geq ۰$ داریم

$$a_n = \frac{۸+۹\sqrt{۲}}{۱۶}\left(۲+۴\sqrt{۲}\right)^n + \frac{۸-۹\sqrt{۲}}{۱۶}\left(۲-۴\sqrt{۲}\right)^n$$

۱۲. با استفاده از ایده‌های به‌کار رفته در تمرین قبلی، می‌بینیم که $۷k = ۶۳$ یا $k = ۹$.

۱۳. در اینجا می‌بینیم که $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۲$، $a_۲ = ۲$، $a_۳ = ۲^۲$، $a_۴ = ۲^۳$، $a_۵ = ۲^۵$، $a_۶ = ۲^۸$ و به‌طور کلی، $a_n = ۲^{F_n}$، که در آن به‌ازای هر $n \geq ۰$، F_n عدد nاُم فیبوناچی است.

۱۴. $a_۱ = ۰$، $a_۲ = ۱$ و $a_۳ = ۱$. به‌ازای $n \geq ۴$ فرض می‌کنیم $n = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_t$، که در آن $۱ \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$ و به‌ازای هر $۱ \leq i \leq t$، $x_i \geq ۲$. اگر $x_۱ = ۲$، دراین صورت $x_۲ + \cdots + x_t$ در $a_{n-۲}$ به‌حساب می‌آید. اگر $x_۱ \neq ۲$، دراین صورت $x_۱ > ۲$ و $(x_۱ - ۱) + x_۲ + \cdots + x_t$ در $a_{n-۱}$ به‌حساب می‌آید. بنابراین، به‌ازای $n \geq ۳$ داریم $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$ و $a_n = F_{n-۱}$، که در آن $F_{n-۱}$ عدد $(n-۱)$اُم فیبوناچی است.

۱۵. به‌ازای $n \geq ۰$ داریم $x_{n+۲} - x_{n+۱} = ۲(x_{n+۱} - x_n)$، $x_۰ = ۱$ و $x_۱ = ۵$. درنتیجه،

$$x_{n+۲} - ۳x_{n+۱} + ۲x_n = ۰$$

به‌ازای $n \geq ۰$، فرض می‌کنیم $x_n = cr^n$، که در آن $c \neq ۰$ و $r \neq ۰$. دراین صورت معادلهٔ مشخصهٔ $r^۲ - ۳r + ۲ = ۰ = (r-۲)(r-۱)$ را به‌دست می‌آوریم و بنابراین، $x_n = A(۲^n) + B(۱^n) = A(۲^n) + B$.
با توجه به $x_۰ = ۱ = A + B$ و $x_۱ = ۵ = ۲A + B$ می‌بینیم که $A = ۴$ و $B = -۳$ و در نتیجه، به‌ازای $n \geq ۰$، $x_n = ۴(۲^n) - ۳ = ۲^{n+۲} - ۳$.

۱۶. اگر برحسب سطر ۱ بسط دهیم، داریم $D_n = ۲D_{n-۱} - D$، که در آن D یک دترمینان $(n-۱)$ در $(n-۱)$ است که مقدار آن، پس از بسط برحسب ستون اول، برابر با $D_{n-۲}$ است. بنابراین، $D_n = ۲D_{n-۱} - D_{n-۲}$. این رابطهٔ بازگشتی ریشه‌های مشخصهٔ ۱ و ۱ را به‌دست می‌دهد و بنابراین، مقدار D_n با $D_n = A(۱^n) + B\,n(۱^n) = A + Bn$ بیان می‌شود.

با توجه به $D_1 = |2| = 2$ و

$$D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3$$

داریم $A + B = D_1 = 2$ و $A + 2B = D_2 = 3$. درنتیجه، $A = B = 1$ و به‌ازای هر $n \geq 1$، $D_n = 1 + n$.

۱۷. فرض می‌کنیم $b_n = a_n^2$، $b_0 = 16$ و $b_1 = 169$.

از اینجا رابطهٔ خطی $b_{n+2} - 5b_{n+1} + 4b_n = 0$ با ریشه‌های مشخصهٔ ۴ و ۱ حاصل می‌شود و بنابراین، $b_n = A(1)^n + B(4)^n$.

از $b_0 = 16$ و $b_1 = 169$ نتیجه می‌شود که $A = -35$، $B = 51$ و $b_n = 51(4)^n - 35$. بنابراین، به‌ازای $n \geq 0$ داریم $a_n = \sqrt{51(4)^n - 35}$.

۱۸. $a_n = c_1 + c_2(7)^n$، $n \geq 0$، جواب $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$ است. بنابراین، $r^2 + br + c = 0$ معادلهٔ مشخصه است و $r^2 + br + c = r^2 - 8r + 7 = (r-1)(r-7)$. درنتیجه، $b = -8$ و $c = 7$.

۱۹. چون $\gcd(F_2, F_1) = 1 = \gcd(F_1, F_0)$، $n \geq 2$ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت

$$F_3 = F_2 + F_1 (= 1)$$

$$F_4 = F_3 + F_2$$

$$F_5 = F_4 + F_3$$

$$\vdots$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

اگر ترتیب این برابریها را وارون کنیم، مراحل الگوریتم اقلیدس را برای محاسبهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک F_{n+1} و F_n، $n \geq 2$، خواهیم داشت. چون آخرین باقیماندهٔ غیرصفر عبارت است از $F_1 = 1$، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $n \geq 2$، $\gcd(F_{n+1}, F_n) = 1$.

۲۰.

```
Program Fibonacci (input, output);
Var
    number: integer; {the input}
    i: integer; {i is a counter}
    current: integer;
    Fibonacci: array [1..100] of integer;
Begin
    Write ('This program is designed to determine if ');
    Write ('a given nonnegative integer is a ');
    Writeln ('Fibonacci number.');
```

```
    Writeln ('What nonnegative integer n do you wish to test?');
    Write ('n= ');
    Readln (number);
    If number < 0 then
        Writeln ('Your input is not appropriate.')
    Else if number = 0 then
        Writeln ('Your number is the 0-th Fibonacci number.')
    Else if number = 1 then
        Writeln ('Your number is the 1-st Fibonacci number.')
    Else {number ≥ 2}
        Begin
            Fibonacci [1] := 1;
            Fibonacci [2] := 1;
            current := 1;
            i := 3;
            While number > current do
                Begin
                    Fibonacci [i] := Fibonacci [i-1] + Fibonacci [i-2];
                    current := Fibonacci [i];
                    If number < current then
                        Writeln ('Your number is not a Fibonacci number. ')
                    Else if number = current then
                        Writeln ('Your number is the ', i:0, '-th Fibonacci number.')
                    Else i := i + 1      {number > count}
                End {while}
        End {else}
End.
```

بند ۳.۱۰

۱. الف)

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 3, n \geq 0, a_0 = 1$$

$$a_1 = a_0 + 0 + 3$$

$$a_2 = a_1 + 2 + 3 = a_0 + 2 + 2(3)$$

$$a_3 = a_2 + 2(2) + 3 = a_0 + 2 + 2(2) + 3(3)$$

$$a_4 = a_3 + 2(3) + 3 = a_0 + [2 + 2(2) + 2(3)] + 4(3)$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_0 + 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] + n(3) = 1 + 2[n(n-1)/2] + 3n$$

$$= 1 + n(n-1) + 3n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, n \geq 0$$

ب) $a_n = ۳ + n(n - ۱)^۲, n \geq ۰$

پ) $a_{n+۱} - ۲a_n = ۵, n \geq ۰, a_۰ = ۱$

$$a_۱ = ۲a_۰ + ۵ = ۲ + ۵$$

$$a_۲ = ۲a_۱ + ۵ = ۲^۲ + ۲ \cdot ۵ + ۵$$

$$a_۳ = ۲a_۲ + ۵ = ۲^۳ + (۲^۲ + ۲ + ۱)۵$$

$$\vdots$$

$$a_n = ۲^n + ۵(۱ + ۲ + ۲^۲ + \cdots + ۲^{n-۱}) = ۲^n + ۵(۲^n - ۱) = ۶(۲^n) - ۵, n \geq ۰$$

ت) $a_n = ۲^n + n(۲^{n-۱}), n \geq ۰$

۲. $a_n = \sum_{i=۰}^{n} i^۲$

$$a_{n+۱} = a_n + (n + ۱)^۲, n \geq ۰, a_۰ = ۰$$

$$a_{n+۱} - a_n = (n + ۱)^۲ = n^۲ + ۲n + ۱$$

$$a_n^{(h)} = A, a_n^{(p)} = Bn + Cn^۲ + Dn^۳$$

$$B(n + ۱) + C(n + ۱)^۲ + D(n + ۱)^۳ = Bn + Cn^۲ + Dn^۳ + n^۲ + ۲n + ۱ \Longrightarrow$$

$$Bn + B + Cn^۲ + ۲Cn + C + Dn^۳ + ۳Dn^۲ + ۳Dn + D =$$

$$Bn + Cn^۲ + Dn^۳ + n^۲ + ۲n + ۱$$

از مقایسهٔ ضرایب توانهای مشابه n می‌بینیم که $C + ۳D = C + ۱$ و بنابراین، $D = \frac{۱}{۳}$. همچنین، $B + ۲C + ۳D = B + ۲$. پس $C = \frac{۱}{۲}$. سرانجام، از $B + C + D = ۱$ نتیجه می‌شود که $B = \frac{۱}{۶}$. بنابراین، $a_n = A + \frac{۱}{۶}n + \frac{۱}{۲}n^۲ + \frac{۱}{۳}n^۳$. با توجه به $a_۰ = ۰$ داریم $A = ۰$ و به این ترتیب، به‌ازای $n \geq ۰$،

$$a_n = \frac{۱}{۶}n(۱ + ۳n + ۲n^۲) = \frac{۱}{۶}n(n + ۱)(۲n + ۱)$$

۳. الف) فرض می‌کنیم a_n تعداد ناحیه‌هایی باشد که این n خط، با توجه به شرایط مشخص شده، تعیین می‌کنند. وقتی خط nاُم رسم می‌شود، $n - ۱$ نقطهٔ تقاطع و n قسمت روی این خط حاصل می‌شود. هر یک از این قسمتها، یکی از ناحیه‌ها را به دو ناحیه تقسیم می‌کند و به این ترتیب، تعداد ناحیه‌های موجود، یعنی $a_{n-۱}$، n تا افزایش می‌یابد.

$$a_n = a_{n-۱} + n, n \geq ۱, a_۰ = ۱$$

$$a_n^{(h)} = A, a_n^{(p)} = Bn + Cn^۲$$

$$Bn + Cn^2 = B(n-1) + C(n-1)^2 + n$$

$$Bn + Cn^2 - Bn + B - Cn^2 + 2Cn - C = n$$

از مقایسهٔ ضرایب توانهای مشابه n داریم $B = C = \frac{1}{2}$ و $a_n = A + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$. از $A = a_0 = 1$ نتیجه می‌شود که به‌ازای $n \geq 0$، $a_n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$.

ب) فرض می‌کنیم b_n تعداد ناحیه‌های بیکرانی باشد که برای این n خط به‌دست می‌آید. وقتی خط nاُم رسم می‌شود، خطوط قبلی n قسمت روی آن پدید می‌آورند. هر یک از قسمتهای اول و nاُم ناحیهٔ بیکران جدیدی به‌وجود می‌آورد. بنابراین، به‌ازای $n \geq 2$ داریم $b_n = b_{n-1} + 2$ و $b_1 = 2$. جواب این رابطهٔ بازگشتی عبارت است از $b_n = 2n$، $n \geq 1$، و $b_0 = 1$.

۴. فرض می‌کنیم p_n ارزش این حساب، n ماه پس از اول فروردین سالی باشد که حساب افتتاح شده است.

$$p_0 = 1000$$

$$p_1 = 1000 + (0/005)(1000) + 200 = (1/005)p_0 + 200$$

$$p_{n+1} = (1/005)p_n + 200, 0 \leq n \leq 46$$

$$p_{48} = (1/005)p_{47}$$

$$p_{n+1} - 1/005p_n = 200, 0 \leq n \leq 46$$

$$p_n^{(h)} = A(1/005)^n, p_n^{(p)} = C$$

$$C - 1/005C = 200 \Longrightarrow C = -40000$$

$$p_0 = A(1/005)^0 - 40000 = 1000 \Longrightarrow A = 41000$$

$$p_n = (41000)(1/005)^n - 40000$$

$$p_{47} = (41000)(1/005)^{47} - 40000 = 11830/90$$

$$p_{48} = (1/005)p_{47} = 11890/05$$

۵. الف) به‌ازای $n \geq 0$ داریم $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n$، $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$.
با فرض $a_n = cr^n$، که در آن $c \neq 0$ و $r \neq 0$، معادلهٔ مشخصهٔ $r^2 + 3r + 2 = 0 = (r+2)(r+1)$ ریشه‌های مشخصهٔ -1 و -2 را به‌دست می‌دهد. بنابراین، $a_n^{(h)} = A(-1)^n + B(-2)^n$، درحالی که $a_n^{(p)} = C(3)^n$.

از $C(3)^{n+2} + 3C(3)^{n+1} + 2C(3)^n = 3^n$ نتیجه می‌شود که $9C + 9C + 2C = 1$ یا $C = \frac{1}{20}$. پس $a_n = A(-1)^n + B(-2)^n + \frac{1}{20}(3)^n$.

با توجه به $a_0 = A + B + \frac{1}{20} = 0$ و $a_1 = -A - 2B + \frac{3}{20} = 1$ می‌بینیم که $1 = a_0 + a_1 = -B + \frac{4}{20}$ و $B = -\frac{4}{5}$. دراین صورت $A = -B - \frac{1}{20} = \frac{3}{4}$. بنابراین، به‌ازای $n \geq 0$،

$$a_n = \frac{3}{4}(-1)^n + \left(\frac{-4}{5}\right)(-2)^n + \frac{1}{20}(3)^n$$

ب) به‌ازای $n \geq 0$، $a_n = \frac{2}{9}(-2)^n - \frac{5}{6}(n)(-2)^n + \frac{7}{9}$.

پ) $a_{n+2} - a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ و $a_0 = a_1 = 1$.

داریم $(r+1)(r-1) = 0 = r^2 - 1$ و بنابراین، $a_n^{(h)} = A(1)^n + B(-1)^n = A + B(-1)^n$ و $a_n^{(p)} = C\sin\frac{n\pi}{2} + D\cos\frac{n\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
&C\sin\left((n+2)\pi/2\right) - D\cos\left((n+2)\pi/2\right) - C\sin(n\pi/2) - D\cos(n\pi/2)\\
&= \sin(n\pi/2) - 2C\sin(n\pi/2) - 2D\cos(n\pi/2)\\
&= \sin(n\pi/2) \Longrightarrow C = -1/2, D = 0
\end{aligned}$$

$$a_n = A + B(-1)^n - (1/2)\sin(n\pi/2)$$

$$1 = a_0 = A + B$$

$$1 = a_1 = A - B - 1/2$$

بنابراین، $A = \frac{5}{4}$، $B = -\frac{1}{4}$ و به‌ازای $n \geq 0$، $a_n = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$.

۶. به‌ازای $n \geq 0$ داریم $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2)^n + 7(3)^n$، $a_0 = 1$ و $a_1 = 4$.

$$a_n^{(h)} = A(3)^n + Bn(3)^n, \qquad a_n^{(p)} = C(2)^n + Dn^2(3)^n$$

پس از جایگذاری $a_n^{(p)}$ در رابطهٔ بازگشتی مفروض و مقایسهٔ ضرایب، می‌بینیم که $C = 3$ و $D = \frac{7}{18}$. بنابراین، $a_n = A(3)^n + Bn(3)^n + 3(2)^n + \frac{7}{18}n^2(3)^n$. از $a_0 = 1$ و $a_1 = 4$ نتیجه می‌شود که $A = -1$ و $B = \frac{17}{18}$ و بنابراین، به‌ازای $n \geq 0$،

$$a_n = -2(3)^n + \frac{17}{18}n(3)^n + \frac{7}{18}n^2(3)^n + 3(2)^n$$

۷. در اینجا معادلهٔ مشخصه عبارت است از $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 = (r-1)^3$ و بنابراین، $r = 1, 1, 1$. پس $a_n^{(h)} = A + Bn + Cn^2$ و $a_n^{(p)} = Dn^3 + En^4$. اکنون ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned}
&D(n+3)^3 + E(n+3)^4 - 3D(n+2)^3 - 3E(n+2)^4 + 3D(n+1)^3\\
&+ 3E(n+1)^4 - Dn^3 - En^4 = 3 + 5n \Longrightarrow D = -3/4, E = 5/24
\end{aligned}$$

$$a_n = A + Bn + Cn^2 - (3/4)n^3 + (5/24)n^4, n \geq 0$$

۸. $a_{n+۱} = ۳a_n + ۳^n$، $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۴$. جملهٔ ۳^n، دنباله‌هایی به طول n را که به ۳ ختم می‌شوند، شمارش می‌کند. $۳a_n$ دنباله‌هایی به طول n را که به ۰، ۱ یا ۲ ختم می‌شوند، شمارش می‌کند. $a_n^{(h)} = A۳^n$ و $a_n^{(p)} = Bn۳^n$.
اکنون می‌بینیم که

$$B(n+۱)۳^{n+۱} = ۳(Bn۳^n) + ۳^n \Longrightarrow ۳B(n+۱) = ۳Bn + ۱ \Longrightarrow ۳B = ۱ \Longrightarrow B = \frac{۱}{۳}$$

پس $a_n = A \times ۳^n + n \times ۳^{n-۱}$. با توجه به $A = a_۰ = ۱$، به‌ازای $n \geq ۰$ داریم

$$a_n = ۳^n + n۳^{n-۱}$$

۹. از مثال ۱۰٫۲۵ می‌بینیم که $P = (Si)\left[۱ - (۱+i)^{-T}\right]^{-۱}$، که در آن P پرداخت ماهانه، S مبلغ وام (یعنی ۲۵۰۰ تومان)، T تعداد پرداختها (یعنی ۲۴) و i نرخ بهرهٔ ماهانه (یعنی ۱٪) است.

$$P = (۲۵۰۰)(۰٫۰۱)\left[۱ - (۱٫۰۱)^{-۲۴}\right]^{-۱} = ۱۱۷٫۶۸$$

۱۰.

$$\begin{aligned}
& a_{n+۲} + b_۱ a_{n+۱} + b_۲ a_n = b_۳ n + b_۴ \\
& a_n = c_۱ ۲^n + c_۲ ۳^n + n - ۷ \\
& r^۲ + b_۱ r + b_۲ = (r-۲)(r-۳) = r^۲ - ۵r + ۶ \Longrightarrow b_۱ = -۵, b_۲ = ۶ \\
& a_n^{(p)} = n - ۷ \\
& \left[(n+۲) - ۷\right] - ۵\left[(n+۱) - ۷\right] + ۶(n-۷) = b_۳ n + b_۴ \Longrightarrow b_۳ = ۲, b_۴ = -۱۷
\end{aligned}$$

۱۱. الف) به‌ازای $n \geq ۰$ فرض کنیم $a_n^۲ = b_n$، دراین صورت

$$\begin{aligned}
& b_{n+۲} - ۵b_{n+۱} + ۶b_n = ۷n \\
& b_n^{(h)} = A(۳^n) + B(۲^n), b_n^{(p)} = Cn + D \\
& C(n+۲) + D - ۵\left[C(n+۱) + D\right] + ۶(Cn + D) = ۷n \Longrightarrow C = ۷/۲, D = ۲۱/۴ \\
& b_n = A(۳^n) + B(۲^n) + (۷n/۲) + (۲۱/۴) \\
& b_۰ = a_۰^۲ = ۱, b_۱ = a_۱^۲ = ۱ \\
& ۱ = b_۰ = A + B + ۲۱/۴ \\
& ۱ = b_۱ = ۳A + ۲B + ۷٫۲ + ۲۱/۴ \\
& ۳A + ۲B = -۳۱/۳ \\
& ۲A + ۲B = -۳۴/۴ \\
& A = ۳/۴, B = -۵ \\
& a_n = \left[(۳/۴)(۳)^n - ۵(۲)^n + (۷n/۲) + (۲۱/۴)\right]^{۱/۲}, n \geq ۰
\end{aligned}$$

ب) به‌ازای $n \geq 1$ داریم $a_n + na_{n-1} = n!$ و $a_0 = 1$. پس $\frac{a_n}{n!} + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} = 1$. فرض می‌کنیم $b_n = \frac{a_n}{n!}$ و $b_0 = 1$. دراین صورت جواب $b_n + b_{n-1} = 1$ عبارت است از $b_n = \frac{1}{2}[(-1)^n + 1]$ و بنابراین، به‌ازای $n \geq 0$ داریم

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(-1)^n + 1\right](n!)$$

پ) به‌ازای $n \geq 1$ داریم $a_n^2 - 2a_{n-1} = 0$ و $a_0 = 2$.

می‌بینیم که

$$a_n^2 = 2a_{n-1} \Longrightarrow \log_2 a_n^2 = \log_2(2a_{n-1}) = \log_2 2 + \log_2 a_{n-1}$$
$$\Longrightarrow 2\log_2 a_n = 1 + \log_2 a_{n-1}$$

قرار می‌دهیم $b_n = \log_2 a_n$. جواب رابطهٔ بازگشتی $2b_n = 1 + b_{n-1}$ عبارت است از

$$b_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$$

از $b_0 = \log_2 a_0 = \log_2 2 = 1$ نتیجه می‌شود که $1 = b_0 = A + 1$ و $A = 0$. بنابراین، به‌ازای $n \geq 0$ داریم $b_n = 1$ و $a_n = 2$.

۱۲. الف)

$$s_{n+1} = s_n + t_{n+1} = s_n + (n+1)(n+2)/2$$
$$s_{n+1} - s_n = (1/2)(n^2 + 3n + 2)$$
$$s_n = s_n^{(h)} + s_n^{(p)}$$
$$s_{n+1}^{(h)} - s_n^{(h)} = 0 \Longrightarrow s_n^{(h)} = A(1^n) = A$$
$$s_n^{(p)} = n(Bn^2 + Cn + D) = Bn^3 + Cn^2 + Dn$$
$$B(n+1)^3 + C(n+1)^2 + D(n+1) - Bn^3 - Cn^2 - Dn = (1/2)(n^2 + 3n + 2)$$
$$\Longrightarrow B = 1/6, C = 1/2, D = 1/3$$
$$s_n = A + (1/6)n^3 + (1/2)n^2 = (1/3)n$$

از $s_1 = t_1 = 1$ نتیجه می‌شود که $1 = A + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. پس $A = 0$ و

$$s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

ب) (یک) s_{1000} اتم

(دو) اتم $s_{99999} - s_{1000} \doteq 1{,}665 \times 10^{14}$

.۱۳

```
Program Towers_of_Hanoi (input, output);
Var
    number: integer;      {number = number of disks}

Procedure Move_The_Disks (n: integer; start, inter, finish; char);
{This procedure will move n disks from the start peg to the finish peg using inter as
      the intermediary peg.}
Begin
      If n=1 then
            Writeln ('Move disk from ', start, ' to ', finish, '.')
      Else
            Begin
                  Move_The_Disks (n-1, start, finish, inter);
                  Move_The_Disks (1, start, ' ', finish);
                  Move_The_Disks (n-1, inter, start, finish)
            End{else}
End; {procedure}
Begin {main program}
      Write ('How many disks are there? ');
      Readln (number);
      If number < 1 then
            Writeln ('Your input is not appropriate.')
      Else
            Move_The_Disks (number, '1','2','3')
End.
```

بند ۴.۱۰

۱. الف)

$$a_{n+1} - a_n = ۳^n \quad n \geq ۰, a_۰ = ۱$$

فرض کنیم

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=۰}^{\infty} ۳^n x^{n+1}$$

$$[f(x) - a_۰] - xf(x) = x\sum_{n=۰}^{\infty}(۳x)^n = x/(۱ - ۳x)$$

$$f(x) - ۱ - xf(x) = x/(۱ - ۳x)$$

$$f(x) = ۱/(۱ - x) + x/(۱ - x)(۱ - ۳x)$$

$$= ۱/(۱ - x) + (-۱/۲)/(۱ - x) + (۱/۲)/(۱ - ۳x)$$

$$= (1/2)/(1-x) + (1/2)(1-3x)$$

و به‌ازای هر $n \geq 0$،

$$a_n = (1/2)[1 + 3^n]$$

ب) $a_n = 1 + [n(n-1)(2n-1)/6], n \geq 0$

پ) $a_n - 3a_{n-1} = 5^{n-1}, n \geq 1, a_0 = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 5^{n-1} x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 3x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n-1} x^{n-1}$$

فرض می‌کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. دراین صورت

$$\big(f(x) - 1\big) - 3xf(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(5x)^n = \frac{x}{1-5x}$$

و $f(x)(1-3x) = 1 + \frac{x}{1-5x}$. بنابراین،

$$f(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{x}{(1-3x)(1-5x)}$$

$$= \frac{1}{1-3x} + \frac{(-1/2)}{1-3x} + \frac{(1/2)}{1-5x}$$

$$= \frac{(1/2)}{1-3x} + \frac{(1/2)}{1-5x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(5x)^n$$

و به‌ازای $n \geq 0$، $a_n = \frac{1}{2}(3^n + 5^n)$.

ت) به‌ازای $n \geq 0$ داریم $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$، $a_0 = 1$ و $a_1 = 6$. بنابراین،

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} - 3x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} + 2x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

فرض می‌کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. دراین صورت

$$\big(f(x) - 1 - 6x\big) - 3x\big(f(x) - 1\big) + 2x^2 f(x) = 0$$

و $f(x)(1 - 3x + 2x^2) = 1 + 6x - 3x = 1 + 3x$. درنتیجه،

$$f(x) = \frac{1+3x}{(1-2x)(1-x)} = \frac{5}{1-2x} + \frac{(-4)}{1-x} = 5\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

و به‌ازای $n \ge 0$، $a_n = 5(2^n) - 4$.

ث) به‌ازای $n \ge 0$ داریم $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$، $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n+2}$$

فرض می‌کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. دراین صورت

$$\left[f(x) - a_0 - a_1 x\right] - 2x\left[f(x) - a_0\right] + x^2 f(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$$

$$f(x) - 1 - 2x - 2xf(x) + 2x + x^2 f(x) = x^2/(1-2x)$$

$$(x^2 - 2x + 1)f(x) = 1 + x^2/(1-2x)$$

$$\Longrightarrow f(x) = 1/(1-x)^2 + x^2/(1-2x)(1-x)^2$$

$$= (1 - 2x + x^2)/(1-x)^2(1-2x) = 1/(1-2x) = 1 + 2x + (2x)^2 + \cdots$$

و بنابراین، به‌ازای $n \ge 0$ داریم $a_n = 2^n$.

۲. به‌ازای $r \ge 1$ داریم $a(n,r) = a(n-1,r-1) + a(n-1,r)$. دراین صورت،

$$\sum_{r=1}^{\infty} a(n,r)x^r = \sum_{r=1}^{\infty} a(n-1,r-1)x^r + \sum_{r=1}^{\infty} a(n-1,r)x^r$$

به‌ازای $n \ge 0$ داریم $a(n,0) = 1$ و به‌ازای $r > 0$ داریم $a(0,r) = 0$. فرض می‌کنیم

$$f_n = \sum_{r=0}^{\infty} a(n,r)x^r$$

بنابراین، $f_n - a(n,0) = xf_{n-1} + f_{n-1} - a(n-1,0)$، $f_n = (1+x)f_{n-1}$ و $f_n = (1+x)^n f_0$.
درنتیجه،

$$f_0 = \sum_{r=0}^{\infty} a(0,r)x^r = a(0,0) + a(0,1)x + a(0,2)x^2 + \cdots = a(0,0) = 1$$

و بنابراین، $f_n = (1+x)^n$ مولد $a(n,r)$، $r \ge 0$، است.

۳. الف) دستگاه

$$a_{n+1} = -2a_n - 4b_n$$

$$b_{n+1} = 4a_n + 6b_n$$

$$n \ge 0,\ a_0 = 1,\ b_0 = 0$$

را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. دراین صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = -2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1} = 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1}$$

$$f(x) - a_0 = -2xf(x) - 4xg(x)$$

$$g(x) - b_0 = 4xf(x) + 6xg(x)$$

$$f(x)(1+2x) + 4xg(x) = 1$$

$$f(x)(-4x) + (1-6x)g(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & (1-6x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+2x) & 4x \\ -4x & (1-6x)\end{vmatrix}} = (1-6x)/(1-2x)^2$$

$$= (1-6x)(1-2x)^{-2} = (1-6x)\left[\binom{-2}{0} + \binom{-2}{1}(-2x) + \binom{-2}{2}(-2x)^2 + \cdots\right]$$

$$a_n = \binom{-2}{n}(-2)^n - 6\binom{-2}{n-1}(-2)^{n-1} = 2^n(1-2n), n \geq 0$$

$$f(x)(-4x) + (1-6x)g(x) = 0 \Longrightarrow g(x) = (4x)f(x)(1-6x)^{-1}$$

درنتیجه، $g(x) = 4x(1-2x)^{-2}$ و به‌ازای هر $n \geq 0$، $b_n = 4\binom{-2}{n-1}(-2)^{n-1} = n(2^{n+1})$.

ب) به‌ازای هر $n \geq 0$ داریم

$$a_n = \left(\frac{-3}{4}\right) + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}(3^n)$$

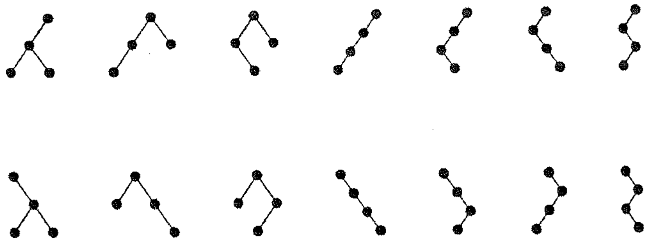
و

$$b_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{4}(3^n)$$

بند ۵.۱۰

۱. $b_4 = b_0b_3 + b_1b_2 + b_2b_1 + b_3b_0 = 2(5+2) = 14$

$b_n = \left[(2n)!/\left((n+1)!(n!)\right)\right],\ b_4 = 8!/(5!4!) = 14$



۲. $$(۱/۲)(۱/(۲n+۱))\binom{۲n+۲}{n+۱} = (۱/۲)(۱/(۲n+۱))\left[\frac{(۲n+۲)(۲n+۱)(۲n)!}{(n+۱)!(n+۱)!}\right]$$
$$= (۱/۲)\left[(۲n+۲)/(n+۱)^۲\right]\left[(۲n)!/(n!)^۲\right] = (۱/(n+۱))\binom{۲n}{n}$$

۳. $$\binom{۲n-۱}{n} - \binom{۲n-۱}{n-۲} = \left[\frac{(۲n-۱)!}{n!(n-۱)!}\right] - \left[\frac{(۲n-۱)!}{(n-۲)!(n+۱)!}\right] =$$
$$\left[\frac{(۲n-۱)!(n+۱)}{(n+۱)!(n-۱)!}\right] - \left[\frac{(۲n-۱)!(n-۱)}{(n-۱)!(n+۱)!}\right] = \left[\frac{(۲n-۱)!}{(n+۱)!(n-۱)!}\right][(n+۱)-(n-۱)] =$$
$$\frac{(۲n-۱)!(۲)}{(n+۱)!(n-۱)!} = \frac{(۲n-۱)!(۲n)}{(n+۱)!n!} = \frac{(۲n)!}{(n+۱)(n!)(n!)} = \frac{۱}{(n+۱)}\binom{۲n}{n}$$

۴. الف) خیر　　ب) بله　　پ) خیر　　ت) بله

۵. الف) $\frac{۱}{۹}\binom{۱۶}{۸}$　　ب) $\left[\frac{۱}{۴}\binom{۶}{۳}\right]^۲$

پ) $\left[\frac{۱}{۶}\binom{۱۰}{۵}\right]\left[\frac{۱}{۳}\binom{۴}{۲}\right]$　　ت) $\frac{۱}{۶}\binom{۱۰}{۵}$

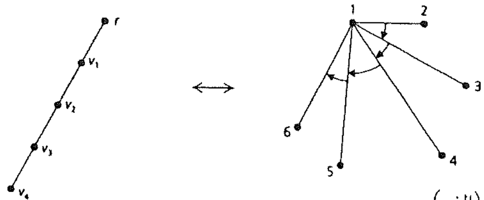
۶. الف) به‌ازای $n \geq ۲$ فرض می‌کنیم $v_۱, v_۲, \ldots, v_{n+۱}$ رأسهای یک $(n+۱)$ ضلعی محدب باشند. در هر افرازی از این چندضلعی به شکلهای مثلثی که از رسم قطرهای غیرمتقاطع حاصل شده باشد، ضلع $v_۱v_{n+۱}$ جزئی از یکی از این مثلثهاست. پس این مثلث به‌صورت $v_۱v_iv_{n+۱}$ است، که در آن $۲ \leq i \leq n$. به‌ازای هر $۲ \leq i \leq n$، به‌محض رسم مثلث $v_۱v_iv_{n+۱}$، چندضلعی بنا شده روی $v_۱, v_۲, \ldots, v_i$ و چندضلعی دوم بنا شده روی $v_i, v_{i+۱}, \ldots, v_{n+۱}$ را درنظر بگیرید. چندضلعی اول را می‌توان با استفاده از رسم قطرهای غیرمتقاطع، به t_i طریق مثلث‌بندی کرد. چندضلعی دوم را می‌توان به $t_{n+۱-i+۱} = t_{n+۲-i}$ طریق مثلث‌بندی کرد. این به $t_i \cdot t_{n+۲-i}$ افراز مثلثی با قطرهای غیرمتقاطع منجر می‌شود. وقتی i از ۲ تا n تغییر می‌کند، داریم

$$t_{n+۱} = t_۲t_n + t_۳t_{n-۱} + \cdots + t_{n-۱}t_۳ + t_nt_۲ = \sum_{i=۲}^{n+۲} t_it_{n+۲-i}$$

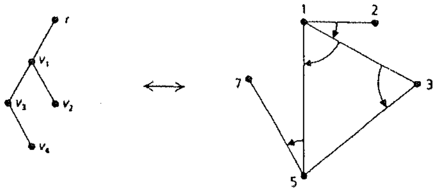
ب) با توجه به مثال ۱۰ . ۳۶، به‌ازای هر $n \geq 2$ داریم $t_n = b_{n-2}$. چون $b_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$، پس به‌ازای $n \geq 2$،

$$t_n = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}$$

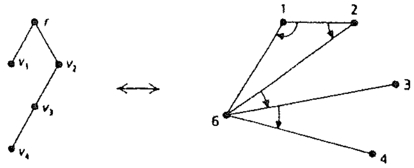
۷.



(الف)



(ب)



(پ)

۸. الف)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \left(\frac{1}{n+2}\right)\binom{2n+2}{n+1} = \left(\frac{1}{n+2}\right)\left[\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\right] \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+2)(n+1)^2(n!)^2} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)} \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2} \\ &= \frac{2(2n+1)}{(n+2)}\left[\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\right] = \frac{2(2n+1)}{(n+2)} b_n \end{aligned}$$

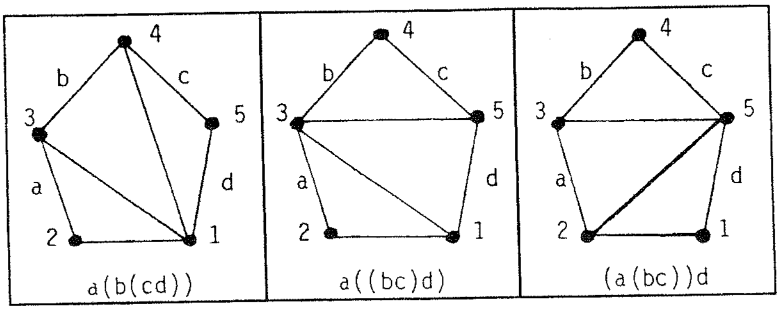
۹. در شکل ۱۰ . ۲۲، توجه کنید چگونه رأس ۱ همواره با رأسی که شمارهٔ زوج دارد جفت می‌شود. این وضعیت باید به‌ازای هر $n \geq 0$ پیش آید، زیرا در غیراین‌صورت کارمان با وترهای متقاطع پایان می‌پذیرد.

به‌ازای هر $n \geq 1$، فرض می‌کنیم $1 \leq k \leq n$. درنتیجه، $2 \leq 2k \leq 2n$. اگر وتر بین رأس ۱ و رأس $2k$ را رسم کنیم، محیط دایره به دو قسمت تقسیم می‌شود، یک قسمت شامل رأسهای ۲، ۳، . . .، $2k - 1$ است و قسمت دیگر شامل رأسهای $2k + 1$، $2k + 2$، . . .، $2n$. این رأسها را می‌توان به $a_{k-1}a_{n-k}$ طریق با وترهای غیرمتقاطع به هم وصل کرد و بنابراین،

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + a_2 a_{n-3} + \cdots + a_{n-2} a_1 + a_{n-1} a_0$$

چون $a_0 = 1$، $a_1 = 1$، $a_2 = 2$ و $a_3 = 5$، می‌بینیم که $a_n = b_n$، که عدد nاُم کاتالان است.

۱۰. الف)



ب) (سه) $(((ab)c)d)e$ (چهار) $(ab)(c(de))$

بند ۶.۱۰

۱. الف) $f(n)=\frac{۵}{۳}(۴n^{\log_۳ ۴}-۱)$ و $f\in O(n^{\log_۳ ۴})$، که در آن $n\in\{۳^i|i\in \mathbf{N}\}$.

ب) $f(n)=۷(\log_۵ n+۱)$ و $f\in O(\log_۵ n)$، که در آن $n\in\{۵^i|i\in \mathbf{N}\}$.

۲. مانند برهان قضیهٔ ۱۰.۱۰ می‌بینیم که

$$f(n)=a^kf(۱)+c(۱+a+a^۲+\cdots+a^{k-۱})=a^kd+c(۱+a+a^۲+\cdots+a^{k-۱})$$

الف) به‌ازای $a=۱$ داریم $f(n)=d+ck=d+c\log_b n$، زیرا $n=b^k$.

ب) به‌ازای $a>۱$ داریم $f(n)=a^kd+c\frac{a^k-۱}{a-۱}$. از $n=b^k$ نتیجه می‌شود که $k=\log_b n$. همچنین

$$a^k=a^{\log_b n}=n^x\Longrightarrow \log_b(a^{\log_b^n})=\log_b n^x\Longrightarrow(\log_b n)(\log_b a)=x(\log_b n)$$
$$\Longrightarrow x=\log_b a$$

بنابراین، به‌ازای $a>۱$ داریم $f(n)=dn^{\log_b a}+\left(\frac{c}{a-۱}\right)\left(n^{\log_b a}-۱\right)$.

۳. الف) روی $\{b^k|k\in \mathbf{N}\}$ داریم $f\in O\big(\log_b n\big)$.

ب) روی $\{b^k|k\in \mathbf{N}\}$ داریم $f\in O\big(n^{\log_b a}\big)$.

۴. الف) $d=۰$، $a=۲$، $b=۵$ و $c=۳$. می‌بینیم که $f(n)=۳\big(n^{\log_۵ ۲}-۱\big)$ و $f\in O\big(n\log_۵ ۲\big)$.

ب) $d=۱$، $a=۱$، $b=۲$ و $c=۲$. می‌بینیم که $f(n)=۱+۲\log_۵ n$ و $f\in O(\log_۵ n)$.

۵. الف) $f(۱)=۰$ و $f(n)=۲f\left(\frac{n}{۲}\right)+۱$. با توجه به تمرین ۲(ب) داریم $f(n)=n-۱$.

ب) معادلهٔ $f(n)=f\left(\frac{n}{۲}\right)+\frac{n}{۲}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. در دور اول، $\frac{n}{۲}$ مسابقه برگزار می‌شود. دراین‌صورت تعداد بازیکنان باقی‌مانده برابر با $\frac{n}{۲}$ است و بنابراین، $f\left(\frac{n}{۲}\right)$ مسابقهٔ دیگر لازم است تا برنده تعیین شود.

۶. (یک) با توجه به قضیهٔ ۱۰.۱۰،

(۱) وقتی $a = 1$، به‌ازای $n = 1, b, b^2, \ldots$ داریم $f(n) = c(\log_b n + 1)$. بنابراین، روی $S = \{b^k | k \in \mathbf{N}\}$ داریم $f \in O(\log_b n)$.

(۲) وقتی $a \geq 2$، به‌ازای $n = 1, b, b^2, \ldots$ داریم $f(n) = \left(\frac{c}{a-1}\right)(an^{\log_b a} - 1)$. بنابراین، روی $S = \{b^k | k \in \mathbf{N}\}$ داریم $f \in O(n^{\log_b a})$.

(دو) چون روی S داریم $f \in O(g)$ و $g \in O(n \log n)$، پس روی S داریم $f \in O(n \log n)$. دراین‌صورت، بنابر تعریف ۱۰.۱۰، می‌دانیم که ثابتهای $m \in \mathbf{R}^+$ و $s \in \mathbf{Z}^+$ وجود دارند به‌طوری‌که به‌ازای هر $n \in S$، $n \geq s$،

$$f(n) = |f(n)| \leq m|n \log n| = mn \log n$$

باید ثابتهای $M \in \mathbf{R}^+$ و $s_1 \in \mathbf{Z}^+$ را چنان بیابیم که به‌ازای هر $n \geq s_1$ (و نه فقط به‌ازای آن nهایی که در S هستند) داشته باشیم $f(n) \leq Mn \log n$.

$t \in \mathbf{Z}^+$ را چنان انتخاب کنید که $s < b^k < t < b^{k+1}$(و $\log s \geq 1$). چون f مثبت و به‌طور یکنوا صعودی است،

$$\begin{aligned} f(t) &\leq f(b^{k+1}) \leq mb^{k+1} \log(b^{k+1}) \\ &= mb^{k+1}\left[\log b^k + \log b\right] \\ &= mb^{k+1} \log b^k + mb^{k+1} \log b \\ &= mb\left[b^k(\log b^k + \log b)\right] \\ &< mb\left[b^k \log b^k(1 - \log b)\right] \\ &= mb(1 + \log b)(b^k \log b^k) \\ &< mb(1 + \log b)t \log t \end{aligned}$$

بنابراین، با فرض $M = mb(1 + \log b)$ و $s_1 = b^k + 1$، می‌بینیم که به‌ازای هر $t \in \mathbf{Z}^+$، اگر $t \geq s_1$، آن‌گاه $f(t) < M(t \log t)$ (و بنابراین، $f(t) \leq M(t \log t)$ و $f \in O(n \log n)$).

۷. $O(1)$

۸. الف) دراینجا $f(1) = 0$، $f(2) = 1$، $f(3) = 3$ و $f(4) = 4$. بنابراین، $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$.

برای اینکه نشان دهیم f به‌طور یکنوا صعودی است، اصل استقرای قوی را به‌کار می‌بریم. فرض می‌کنیم به‌ازای هر $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$،

$$j > i \Longrightarrow f(j) \geq f(i)$$

اکنون حالت مربوط به $n + 1$ را، که در آن $n \geq 4$، درنظر می‌گیریم.

(حالت ۱ : $n+1$ فرد است) می‌نویسیم $n+1 = 2k+1$ و داریم

$$f(n+1) = f(k+1) + f(k) + 2 \geq f(k) + f(k) + 2 = f(2k) = f(n)$$

زیرا $k, k+1 < n$ و بنابر فرض استقرا، $f(k+1) \geq f(k)$.

(حالت ۲ : $n+1$ زوج است) این‌بار می‌نویسیم $n+1 = 2r$، که در آن $r \in \mathbf{Z}^+$ (و $r \geq 3$) . دراین‌صورت،

$$f(n+1) = f(2r) = f(r) + f(r) + 2f(r) + f(r-1) + 2 = f(2r-1) = f(n)$$

زیرا بنابر فرض استقرا داریم $f(r) \geq f(r-1)$.

بنابراین، f تابعی به‌طوریکنوا صعودی است.

ب) با توجه به قسمت (الف)، مثال ۴۳۰۱۰ و قضیهٔ ۲۰۱۰(پ) می‌بینیم که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $f \in O(n)$.

۹. الف)

$$\begin{array}{rcrcl}
f(n) & \leq & af(n/b) & + & cn \\
af(n/b) & \leq & a^2 f(n/b^2) & + & ac(n/b) \\
a^2 f(n/b^2) & \leq & a^3 f(n/b^3) & + & a^2 c(n/b^2) \\
a^3 f(n/b^3) & \leq & a^4 f(n/b^4) & + & a^3 c(n/b^3) \\
& \vdots & & \vdots & \\
a^{k-1} f(n/b^{k-1}) & \leq & a^k f(n/b^k) & + & a^{k-1} c(n/b^{k-1})
\end{array}$$

بنابراین، با توجه به $n = b^k$ داریم

$$\begin{aligned}
f(n) &\leq a^k f\left(\frac{n}{b}\right)^k + cn\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right)^{k-1}\right] \\
&= a^k f(1) + cn\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right)^{k-1}\right]
\end{aligned}$$

چون $f(1) \leq c$ و $\frac{n}{b^k} = 1$، پس

$$f(n) \leq cn\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right)^{k-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^k\right] = (cn)\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^i$$

ب) وقتی $a = b$، داریم $f(n) \leq (cn)\sum_{i=0}^{k} 1^i = (cn)(k+1)$، که در آن $n = b^k$ یا $k = \log_b n$.

بنابراین، $f(n) \leq (cn)(\log_b n + 1)$ و درنتیجه، به‌ازای هر پایهٔ بزرگ‌تر از ۱ داریم

$$f \in O(n \log_b n) = O(n \log n)$$

پ) به‌ازای $a \neq b$،

$$cn\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^i = cn\left[\frac{1-(a/b)^{k+1}}{1-(a/b)}\right] = (c)(b^k)\left[\frac{1-(a/b)^{k+1}}{1-(a/b)}\right]$$

$$= c\left[\frac{b^k - (a^{k+1}/b)}{1-(a/b)}\right] = c\left(\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a}\right)$$
$$= c\left(\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b}\right)$$

ت) با توجه به قسمت (پ)، داریم

$$f(n) \le \left(\frac{c}{a-b}\right)(a^{k+1} - b^{k+1}) = \left(\frac{ca}{a-b}\right)a^k - \left(\frac{cb}{a-b}\right)b^k$$

ولی $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$ و $b^k = n$. بنابراین، $f(n) \le \left(\frac{ca}{a-b}\right)n^{\log_b a} - \left(\frac{cb}{a-b}\right)n$.

(یک) وقتی $a < b$، آن‌گاه $\log_b a < 1$ و روی $\mathbf{Z}^+$ داریم $f \in O(n)$.

(دو) وقتی $a > b$، آن‌گاه $\log_b a > 1$ و روی $\mathbf{Z}^+$ داریم $f \in O(n^{\log_b a})$.

تمرینات تکمیلی

۱.
$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n-k)}{(k+1)}\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$= \left(\frac{n-k}{k+1}\right)\binom{n}{k}$$

۲. الف) عنصر $n+1$ را در $S = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1\}$ درنظر بگیرید. به‌ازای هر افراز S، اندازهٔ زیرمجموعهٔ حاوی $n+1$ را درنظر می‌گیریم. اگر این اندازه برابر با ۱ باشد، آن‌گاه عنصر $n+1$ تنهاست و B_n افراز وجود دارد که در آنها، این وضعیت روی می‌دهد. اگر اندازهٔ زیرمجموعه برابر با ۲ باشد، این وضعیت به $n = \binom{n}{1}$ طریق روی می‌دهد و B_{n-1} طریق برای افرازکردن $n-1$ عدد صحیح دیگر وجود دارد. این به $\binom{n}{1}B_{n-1}$ افراز برای S منجر می‌شود. به‌طورکلی، اگر عنصر $n+1$ به زیرمجموعه‌ای با اندازهٔ $i+1$، $0 \le i \le n$، تعلق داشته باشد، این وضعیت می‌تواند به $\binom{n}{i}$ طریق روی دهد و پس از آن، $\binom{n}{1}B_{n-1}$ افراز برای S حاصل می‌شود. بنابر قاعدهٔ جمع داریم

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{n-i}B_{n-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i$$

ب) به‌ازای هر $n \ge 0$ داریم $B_n = \sum_{i=0}^{n} S(n,i)$. $[S(0,0) = 1]$.

۳. دو حالت درنظر می‌گیریم. حالت ۱: (۱ یکی از جمعوندهاست) دراین‌صورت $p(n-1, k-1)$ طریق برای افراز کردن $n-1$ به دقیقاً $k-1$ جمعوند وجود دارد. حالت ۲: (۱ یکی از جمعوندها نیست) دراین‌صورت هریک

از جمعوندهای s_1، s_2، ...، s_k بزرگتر از ۱ است. به‌ازای هر $1 \le i \le k$ فرض می‌کنیم $t_i = s_i - 1 \ge 1$. دراین‌صورت، t_1، t_2، ...، t_k افرازی از $n-k$ را به دقیقاً k جمعوند به‌دست می‌دهد. این حالتها جامع و مانع‌اند و بنابراین، بنابر قاعدهٔ جمع داریم $p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$.

۴. دراینجا $a_1 = 1$ و $a_2 = 1$.

به‌ازای $n \ge 3$ می‌نویسیم $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_t$، که در آن x_i به‌ازای هر $1 \le i \le t$ عددی صحیح و مثبت است (و اگر n فرد باشد، $1 \le t \le n$ و اگر n زوج باشد، $2 \le t \le n$). اگر $x_1 = 1$، دراین‌صورت $n - 1 = x_2 + \cdots + x_t$ و این عمل جمع در a_{n-1} به‌حساب می‌آید. اگر $x_1 \neq 1$، دراین‌صورت $x_1 \ge 3$ و $n - 2 = (x_1 - 2) + x_2 + \cdots + x_t$ و این عمل جمع در a_{n-2} به حساب می‌آید. درنتیجه، به‌ازای هر $n \ge 3$ داریم $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ و $a_n = F_n$، که در آن، به‌ازای هر $n \ge 1$، F_n عدد nاُم فیبوناچی است.

۵. الف)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{bmatrix}$$

ب) حدس: به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ داریم $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$

که در آن، F_n عدد nاُم فیبوناچی را نشان می‌دهد.

برهان: به‌ازای $n = 1$، $A = A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است. فرض می‌کنیم این نتیجه به‌ازای $n = k$ $(k \ge 1)$ درست باشد، یعنی فرض می‌کنیم $A^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}$. به‌ازای $n = k + 1$ داریم

$$\begin{aligned} A^n = A^{k+1} = A^k \cdot A &= \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۶. الف)
$$\alpha^۲ = (۱ + \sqrt{۵})^۲/۴ = (۶ + ۲\sqrt{۵})/۴ = (۳ + \sqrt{۵})/۲$$
$$\alpha + ۱ = (۱ + \sqrt{۵})/۲ + ۱ = (۳ + \sqrt{۵})/۲$$
$$\beta^۲ = (۱ - \sqrt{۵})^۲/۴ = (۶ - ۲\sqrt{۵})/۴ = (۳ - \sqrt{۵})/۲$$
$$\beta + ۱ = (۱ - \sqrt{۵})/۲ + ۱ = (۳ - \sqrt{۵})/۲$$

ب)
$$F_k = (۱/\sqrt{۵})\left[((۱ + \sqrt{۵})/۲)^k - ((۱ - \sqrt{۵})/۲)^k\right]$$
$$\alpha - \beta = \left[(۱ + \sqrt{۵})/۲\right] - \left[(۱ - \sqrt{۵})/۲\right] = \sqrt{۵}$$

بنابراین،
$$F_k = (\alpha^k - \beta^k)/(\alpha - \beta)$$

پ)
$$\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} F_k = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} (\alpha^k - \beta^k)/(\alpha - \beta)$$
$$= \left[۱/(\alpha - \beta)\right]\left[\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k}\alpha^k - \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k}\beta^k\right]$$
$$\left[۱/(\alpha - \beta)\right]\left[(۱ + \alpha)^n - (۱ + \beta)^n\right]$$
$$= \left[۱/(\alpha - \beta)\right]\left[(\alpha^۲)^n - (\beta^۲)^n\right] = (\alpha^{۲n} - \beta^{۲n})/(\alpha - \beta) = F_{۲n}$$

ت)
$$\alpha^۳ = \alpha(\alpha^۲) = \left[(۱ + \sqrt{۵})/۲\right]\left[(۳ + \sqrt{۵})/۲\right] = (۸ + ۴\sqrt{۵})/۴ = ۲ + \sqrt{۵}$$
$$۱ + ۲\alpha = ۱ + ۲\left[(۱ + \sqrt{۵})/۲\right] = ۲ + \sqrt{۵}$$
$$\beta^۳ = \beta(\beta^۲) = \left[(۱ - \sqrt{۵})/۲\right]\left[(۳ - \sqrt{۵})/۲\right] = (۸ - ۴\sqrt{۵})/۴ = ۲ - \sqrt{۵}$$
$$۱ + ۲\beta = ۱ + ۲\left[(۱ - \sqrt{۵})/۲\right] = ۲ - \sqrt{۵}$$

ث)
$$\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} ۲^k F_k = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} ۲^k(\alpha^k - \beta^k)/(\alpha - \beta)$$
$$= \left[۱/(\alpha - \beta)\right]\left[\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} ۲^k\alpha^k - \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} ۲^k\beta^k\right]$$
$$= \left[۱/(\alpha - \beta)\right]\left[\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} (۲\alpha)^k - \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} (۲\beta)^k\right]$$
$$= \left[۱/(\alpha - \beta)\right]\left[(۱ + ۲\alpha)^n - (۱ + ۲\beta)^n\right]$$
$$= \left[۱/(\alpha - \beta)\right]\left[\alpha^{۳n} - \beta^{۳n}\right]$$
$$= (\alpha^{۳n} - \beta^{۳n})/(\alpha - \beta) = F_{۳n}$$

۷. الف) چون $1+\alpha=\alpha^2$، پس $\alpha+2=\alpha^2+1$ و $5\alpha^2=4(1+\alpha)+\alpha^2=4+4\alpha+\alpha^2=(2+\alpha)^2$.

ب) چون $1+\beta=\beta^2$، می‌بینیم که $\beta+2=\beta^2+1$ و $5\beta^2=4(1+\beta)+\beta^2=4+4\beta+\beta^2=(2+\beta)^2$.

پ)
$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}F_{2k+m}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left[\frac{\alpha^{2k+m}-\beta^{2k+m}}{\alpha-\beta}\right]$$
$$=\big(1/(\alpha-\beta)\big)\left[\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\alpha^2)^k\alpha^m-\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\beta^2)^k\beta^m\right]$$
$$=\big(1/(\alpha-\beta)\big)\left[\alpha^m(1+\alpha^2)^{2n}-\beta^m(1+\beta^2)^{2n}\right]$$
$$=\big(1/(\alpha-\beta)\big)\left[\alpha^m(2+\alpha)^{2n}-\beta^m(2+\beta)^{2n}\right]$$
$$=\big(1/(\alpha-\beta)\big)\left[\alpha^m\big((2+\alpha)^2\big)^n-\beta^m\big((2+\beta)^2\big)^n\right]$$
$$=\big(1/(\alpha-\beta)\big)\left[\alpha^m(5\alpha^2)^n-\beta^m(5\beta^2)^n\right]$$
$$=5^n\big(1/(\alpha-\beta)\big)\left[\alpha^{2n+m}-\beta^{2n+m}\right]=5^nF_{2n+m}$$

۸. الف) $\alpha\beta=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=\frac{1}{4}(1-5)=-1$

ب) $\alpha(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta=\alpha^2+1=(\alpha+1)+1=\alpha+2$ و بنابراین، $\frac{1}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha}{\alpha+2}$.

$\beta(\beta-\alpha)=\beta^2-\alpha\beta=\beta^2+1=(\beta+1)+1=\beta+2$ و از این رو، $\frac{1}{\beta-\alpha}=\frac{\beta}{\beta+2}$.

پ)
$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}F_k^2=\big[1/(\alpha-\beta)\big]^2\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(\alpha^k-\beta^k)^2$$
$$=[1/(\alpha-\beta)]^2\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(\alpha^2)^k-2\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(\alpha\beta)^k+\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(\beta^2)^k\right]$$
$$=\big[1/(\alpha-\beta)\big]^2\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(\alpha^2)^k-2(0)+\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(\beta^2)^k\right]$$
$$=\big[1/(\alpha-\beta)^2\big]\left[(1+\alpha^2)^{2n+1}+(1+\beta^2)^{2n+1}\right]$$
$$=(1/5)\left[(2+\alpha)^{2n+1}+(2+\beta)^{2n+1}\right]$$

می‌دانیم که $5\alpha^2=5+5\alpha=4+4\alpha+\alpha^2=(2+\alpha)^2$ و $5\beta^2=5+5\beta=4+4\beta+\beta^2=(2+\beta)^2$.

و بنابراین،

$$
\begin{aligned}
&(۱/۵)\left[(۲+\alpha)^{۲n+۱}+(۲+\beta)^{۲n+۱}\right]\\
&=(۱/۵)\left[(۵\alpha^{۲})^{n+۱}/(۲+\alpha)\right]+(۱/۵)\left[(۵\beta^{۲})^{n+۱}/(۲+\beta)\right]\\
&=(۵^n)\left[(\alpha^{۲n+۲})/(۲+\alpha)\right]+(۵^n)\left[(\beta^{۲n+۲})/(۲+\beta)\right]\\
&=(۵^n)\left[\alpha^{۲n+۱}\right]\left[\alpha/(۲+\alpha)\right]+(۵^n)\left[\beta^{۲n+۱}\right]\left[\beta/(۲+\beta)\right]\\
&=(۵^n)\left[\alpha^{۲n+۱}\right]\left[۱/(\alpha-\beta)\right]-(۵^n)\left[\beta^{۲n+۱}\right]\left[۱/(\alpha-\beta)\right]\\
&=(۵^n)\left[(\alpha^{۲n+۱}-\beta^{۲n+۱})/(\alpha-\beta)\right]=۵^nF_{۲n+۱}
\end{aligned}
$$

۹. در اینجا می‌بینیم که

$$
\begin{aligned}
&c_{n-۱}+c_{n-۲}+F_n=(F_۱F_{n-۱}+F_۲F_{n-۲}+F_۳F_{n-۳}+\cdots+F_{n-۲}F_۲+F_{n-۱}F_۱)+\\
&(F_۱F_{n-۲}+F_۲F_{n-۳}+F_۳F_{n-۴}+\cdots+F_{n-۳}F_۲+F_{n-۲}F_۱)+F_n=\\
&F_۱(F_{n-۱}+F_{n-۲})+F_۲(F_{n-۲}+F_{n-۳})+F_۳(F_{n-۳}+F_{n-۴})+\cdots+F_{n-۲}(F_۲+F_۱)+\\
&F_{n-۱}F_۱+F_n=F_۱F_n+F_۲F_{n-۱}+F_۳F_{n-۲}+\cdots+F_{n-۲}F_۳+F_{n-۱}F_۲+F_nF_۱
\end{aligned}
$$

زیرا $F_۲=F_۱=۱$. درنتیجه، به‌ازای $n\geq ۳$

$$c_{n-۱}+c_{n-۲}+F_n=c_n$$

۱۰. این اتحاد ترکیبیاتی از مشاهدهٔ این نکته نتیجه می‌شود که هر یک از دو عدد $F_{n+۲}$ و $\sum_{k=۰}^{m}\binom{n-k+۱}{k}$، که در آن $m=\left\lfloor\frac{n+۱}{۲}\right\rfloor$، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌هایی از $\{۱,۲,۳,\ldots,n\}$ که شامل هیچ دو عدد صحیح متوالی نیستند.

۱۱. الف) در هر پریش، ۱ در مکان i، $۲\leq i\leq n$، گذاشته می‌شود. دو حالت پیش می‌آید. حالت ۱: (i در مکان ۱ است) دراین‌صورت، $n-۲$ عدد صحیح دیگر به $d_{n-۲}$ طریق پریشان می‌شوند. با توجه به اینکه $n-۱$ انتخاب برای i امکان‌پذیر است، $(n-۱)d_{n-۲}$ تا از این نوع پریشها وجود دارد.

حالت ۲: (i در مکان ۱ (یا در مکان i) نیست). دراین‌صورت ۱ را به‌عنوان مکان طبیعی جدید برای i تلقی می‌کنیم و بنابراین، $n-۱$ عنصر برای پریشان کردن داریم. با توجه به اینکه $n-۱$ انتخاب برای i امکان‌پذیر است، تعداد این نوع پریشها برابر با $(n-۱)d_{n-۱}$ است. چون این دو حالت جامع و مانع‌اند، نتیجهٔ موردنظر از قاعدهٔ جمع به‌دست می‌آید.

ب) $d_0 = 1$

پ) $d_n - nd_{n-1} = d_{n-2} - (n-2)d_{n-3}$

ت) $d_n - nd_{n-1} = (-1)^i\left[d_{n-i} - (n-i)d_{n-i-1}\right]$.

فرض می‌کنیم $i = n - 2$، دراین‌صورت

$$\begin{aligned} d_n - nd_{n-1} &= (-1)^{n-2}(d_2 - 2d_1) = (-1)^{n-2} \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

ث)

$$d_n - nd_{n-1} = (-1)^n$$

$$(d_n - nd_{n-1})(x^n/n!) = (-1)^n(x^n/n!)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(d_n - nd_{n-1})(x^n/n!) = \sum_{n=2}^{\infty}(-x)^n/n! = e^{-x} - 1 + x$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}d_n x^n/n! - x\sum_{n=2}^{\infty}d_{n-1}x^{n-1}/(n-1)! = e^{-x} - 1 + x$$

$$\left[f(x) - d_1 x - d_0\right] - x\left[f(x) - d_0\right] = e^{-x} - 1 + x$$

بنابراین، $f(x) - 1 - xf(x) + x = e^{-x} - 1 + x$ و $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

۱۲. با رسم بیضی $(n+1)$اُم، که در آن $n \geq 0$، $2n$ نقطهٔ تقاطع جدید به‌دست می‌آوریم که محیط این بیضی را به $2n$ قسمت تقسیم می‌کنند. هریک از این قسمتها یکی از ناحیه‌های موجود را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. بنابراین، به‌ازای هر $n \geq 1$ داریم

$$a_1 = 2 \ , \ a_{n+1} = a_n + 2n$$

از طرف دیگر،

$$a_n^{(h)} = A \ , \ a_n^{(p)} = n(Bn + C)$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم که

$$(n+1)\left[B(n+1) + C\right] = n\left(Bn + C\right) + 2n$$

$$\Longrightarrow B(n^2 + 2n + 1) + Cn + C = Bn^2 + Cn + 2n$$

$$\Longrightarrow 2B + C = C + 2, B + C = 0 \Longrightarrow B = 1, C = -1$$

بنابراین، $a_n = A + n^2 - n$. از $A = a_1 = 2$ نتیجه می‌شود که

$$a_n = n^2 - n + 2 = 2\left[\frac{n(n-1)}{2}\right] + 2$$

۱۳. الف) $a_n = \binom{2n}{n}$

ب)

$$(r+sx)^t = r^t\left(1+\frac{s}{r}x\right)^t$$

$$= r^t\left[\binom{t}{0}+\binom{t}{1}\left(\frac{s}{r}\right)x+\binom{t}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2x^2+\cdots\right]$$

$$= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots = 1+2x+6x^2+\cdots$$

از $r^t = 1$ نتیجه می‌شود که $r = 1$. با توجه به $\binom{t}{1}s = ts = 2$ و

$$\binom{t}{2}s^2 = 6 = s^2\left[\frac{t(t-1)}{2}\right] = s(t-1) = 2 - s$$

می‌بینیم که $s = -4$، $t = -\frac{1}{2}$ و $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ مولد $\binom{2n}{n}$، $n \geq 0$، است.

پ) فرض می‌کنیم سکه‌ای را $2n$ بار پرتاب کنیم و a_n هم مانند قسمت (الف) باشد. به‌ازای $1 \leq i \leq n$، کوچکترین iای وجود دارد به‌طوری که پس از $2i$ پرتاب، تعداد روها و پشتها برای نخستین بار برابر شوند. این دنبالهٔ متشکل از $2i$ پرتاب در b_i به‌حساب می‌آید، درحالی‌که دنبالهٔ مفروض متشکل از $2n$ پرتاب در $a_{n-i}b_i$ به‌حساب می‌آید. چون $b_0 = 0$، وقتی i از 0 تا n تغییر می‌کند داریم

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

ت) فرض می‌کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-4x)^{-1/2}$ و $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. دراین‌صورت، از

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n$$

نتیجه می‌شود که

$$f(x) - a_0 = f(x)g(x)$$

یا

$$g(x) = 1 - \frac{1}{f(x)} = 1 - (1-4x)^{1/2}$$

با توجه به $(1-4x)^{1/2} = \left[\binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}(-4x) + \binom{1/2}{2}(-4x)^2 + \cdots\right]$، ضریب x^n در $(1-4x)^{1/2}$ عبارت است از

$$\binom{1/2}{n}(-4)^n =$$

$$\frac{(1/2)\big((1/2)-1\big)\big((1/2)-2\big)\cdots\big((1/2)-n+1\big)}{n!}(-4)^n =$$

$$\frac{(-1)(1)(3)(5)\cdots(2n-3)}{n!}(2^n) =$$

$$\frac{(-1)(1)(3)\cdots(2n-3)(2)(4)\cdots(2n-2)(2n)}{n!n!} =$$

$$\frac{(-1)}{(2n-1)}\frac{(2n)!}{n!n!} = \big[-1/(2n-1)\big]\binom{2n}{n}$$

درنتیجه، ضریب x^n در $g(x)$ برابر است با $\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2n-1}\right) = b_n$، $n \geq 1$ و $b_0 = 0$.

۱۴. الف) به‌ازای $0 \leq n \leq 18$، فرض می‌کنیم p_n عبارت باشد از احتمال اینکه شخص B، هنگامی‌که $25 \times n$ تومان دارد، A را ورشکست کند. دراین‌صورت داریم $p_0 = 0$ و $p_{18} = 1$ و پاسخ مسأله هم p_{10} است.
به‌ازای $0 < n < 18$، اگر B دارای $25 \times n$ تومان باشد، دراین‌صورت پس از یک بازی دیگر،

$$p_n = \underbrace{\frac{1}{2}p_{n-1}}_{\text{شخص } B \text{ بازی را باخته است.}} + \underbrace{\frac{1}{2}P_{n+1}}_{\text{شخص } B \text{ بازی را می‌برد.}}$$

ملاحظه می‌کنیم که $p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1} = 0$ دارای ریشه‌های مشخصهٔ $r = 1, 1$ است و بنابراین، $p_n = A + Bn$. از $p_0 = 0$ و $p_{18} = 1$ نتیجه می‌شود که $A = 0$ و $B = \frac{1}{18}$. بنابراین، $p_n = \frac{n}{18}$،
به این ترتیب، احتمال اینکه B، A را ورشکست کند برابر است با $\frac{5}{9} = \frac{10}{18}$.

ب) به‌ازای $1 \leq n \leq 17$ داریم $p_n = \frac{3}{4}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n+1}$، $p_0 = 0$ و $p_{18} = 1$. درنتیجه،

$$p_{n+1} - 4p_n - 3p_{n-1} = 0 \qquad \text{یا} \qquad 4p_n = 3p_{n-1} + p_{n+1}$$

فرض می‌کنیم $p_n = cr^n$، که در آن $c \neq 0$ و $r \neq 0$. دراین‌صورت، معادلهٔ مشخصهٔ

$$r^2 - 4r + 3 = 0 = (r-3)(r-1)$$

جواب $p_n = A + B(3^n)$ را به‌دست می‌دهد. از $p_0 = 0 = A + B$ نتیجه می‌شود که $B = -A$ و بنابراین، $p_n = A\big[1 - (3^n)\big]$. اکنون با توجه به $p_{18} = A(1 - 3^{18}) = 1$ داریم $A = (1 - 3^{18})^{-1}$،
بنابراین، $p_n = \frac{1-3^n}{1-3^{18}}$ و احتمال اینکه B، A را با این شرایط ورشکست کند برابر است با

$$p_{10} = \frac{1-3^{10}}{1-3^{18}} \doteq 0/00015$$

۱۵. الف) (یک) ۱

(دو) $\binom{۵}{۲}$ طریق برای انتخاب دو عدد صحیح، که کنار ۱ قرارگیرند، وجود دارد. بنابراین، تعداد این نوع افرازها

$$\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳} = \frac{۵!}{۲! \times ۳!} = \frac{۶!}{۲^۲ \times ۳^۲ \times ۲!}$$

است.

(سه) اکنون $\binom{۸}{۲}$ طریق برای انتخاب دو عدد صحیح، که درکنار ۱ قرارگیرند، و $\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳}$ طریق برای افراز کردن شش عدد صحیح دیگر به دو زیرمجموعهٔ ۳ عنصری، وجود دارد. درنتیجه، تعداد افرازها برابر است با $\frac{۹!}{۲^۳ \times ۳^۳ \times ۳!} = \left(\frac{۸ \times ۷}{۲}\right)\left(\frac{۶!}{۲^۲ \times ۳^۲ \times ۲!}\right) = \binom{۸}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳}$.

ب) به‌ازای $n \geq ۲$ داریم $f(n,۳) = \binom{۳n-۱}{۲} f(n-۱,۳)$ و $f(۱,۳) = ۱$.

حدس: $f(n,۳) = \frac{(۳n)!}{۲^n \times ۳^n \times n!}$

برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

به‌ازای $n = ۱$ داریم $f(۱,۳) = ۱$ و $\frac{۳!}{۲! \times ۳! \times ۱!} = ۱$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر در این حالت درست است و مرحلهٔ پایهٔ استقرا برقرار می‌شود.

اکنون به مرحلهٔ استقرایی می‌رویم و فرض می‌کنیم که نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = t$ $(t \geq ۱)$ درست باشد، یعنی فرض می‌کنیم که رابطهٔ $f(t,۳) = \frac{(۳t)!}{۲^t \times ۳^t \times t!}$ برقرار است. وقتی $n = t + ۱$ داریم

$$\begin{aligned} f(t+۱,۳) &= \binom{۳(t+۱)-۱}{۲} f(t,۳) = \binom{۳t+۲}{۲} f(t,۳) \\ &= \left[(۳t+۲)(۳t+۱)/۲\right]\left[(۳t)!/(۲^t ۳^t t!)\right] \\ &= \left[(۳t+۳)(۳t+۲)(۳t+۱)/(۲ \cdot ۳ \cdot (t+۱))\right]\left[(۳t)!/(۲^t ۳^t t!)\right] \\ &= (۳t+۳)!/(۲^{t+۱} ۳^{t+۱} (t+۱)!) = \left(۳(t+۱)\right)!/(۲^{t+۱} ۳^{t+۱} (t+۱)!) \end{aligned}$$

چون درستی فرمول یاد شده در $n = t$ مستلزم درستی آن در $n = t + ۱$ است، از اصل استقرای ریاضی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$،

$$f(n,۳) = \frac{۳n!}{۲^n \times ۳^n \times n!}$$

پ) داریم $f(n,k) = \binom{kn-۱}{k-۱} f(n-۱,k)$ و $f(۱,k) = ۱$.

حدس: $f(n,k) = \frac{(kn)!}{۲^n \times ۳^n \times k^n \times n!}$

برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

وقتی $n = ۱$ داریم $f(۱, k) = ۱$ و $۱ = \frac{k!}{۲^۱ \times ۳^۱ \times \cdots \times k^۱ \times ۱!}$ و بنابراین، مرحلهٔ پایه برای اثبات استقرایی فراهم می‌شود.

اگر درستی نتیجهٔ موردنظر را به‌ازای $n = t$ $(t \geq ۱)$ بپذیریم، فرض استقرا را خواهیم داشت:

$$f(t, k) = \frac{(kt)!}{۲^t \times ۳^t \times \cdots \times k^t \times t!}$$

وقتی $n = t + ۱$ می‌بینیم که

$$f(t+۱, k) = \binom{k(t+۱) - ۱}{k - ۱} f(t, k) = \binom{kt + k - ۱}{k - ۱} f(t, k) =$$

$$\left[(kt + k - ۱)!/(k - ۱)!(kt)!\right]\left[(kt)!/(۲^t ۳^t \cdots k^t t!)\right] =$$

$$\left[(kt + k)!/k(t + ۱)(k - ۱)!\right]\left[۱/(۲^t ۳^t \cdots k^t t!)\right] =$$

$$(kt + k)!/(۲^{t+۱} ۳^{t+۱} \cdots k^{t+۱} (t + ۱)!) =$$

$$\left[k(t + ۱)\right]!/(۲^{t+۱} ۳^{t+۱} \cdots k^{t+۱} (t + ۱)!)$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۱۶. فرض می‌کنیم

$$|A| = m \ \ , \ \ |B| = n = ۱$$

دراین‌صورت تابع $f : A \to B$، که در آن به‌ازای هر $a \in A$ داریم $f(a) = b$, $B = \{b\}$ تنها تابع پوشا از A در B است. بنابراین، $a(m, ۱) = ۱$.

به‌ازای $m \geq n > ۱$، تعداد کل توابع $f : A \to B$ برابر با n^m است. اگر $۱ \leq i \leq n - ۱$، $\binom{n}{i} a(m, i)$ تابع پوشا مانند g با قلمرو A و بردی برابر با زیرمجموعه‌ای i عنصری از B وجود دارد. علاوه‌براین، هر تابع غیر پوشا مانند $h : A \to B$ در مجموعهٔ این توابع g قرار دارد. درنتیجه،

$$a(m, n) = n^m - \sum_{i=۱}^{n-۱} \binom{n}{i} a(m, i)$$

۱۷. الف) افرازهایی که در $f(n, m)$ به‌حساب آمده‌اند به دو رده تقسیم می‌شوند:

(۱) افرازهایی که در آنها m یکی از جمعوندهاست. این افرازها در $f(n - m, m)$ به‌حساب می‌آیند، زیرا m می‌تواند بیش از یک بار حضور داشته باشد.

(۲) افرازهایی که در آنها m یکی از جمعوندها نیست. بنابراین، $m - ۱$ بزرگترین جمعوند ممکن در این نوع افرازهاست. این افرازها در $f(n, m - ۱)$ به‌حساب می‌آیند. چون این دو رده از افرازها جامع و مانع‌اند، نتیجه می‌گیریم که

$$f(n, m) = f(n - m, m) + f(n, m - ۱)$$

ب)

```
Program Summands(input,output);
Var
      n: integer;

Function f(n,m: integer): integer;
Begin
      If n=0 then
           f := 1
       Else if (n < 0) or (m < 1) then
                f := 0
             Else f : = f(n,m-1) + f(n-m,m)
End; {of function f}

Begin
      Writeln ('What is the value of n?');
      Readln (n);
      Writeln ('What is the value of m?');
      Readln (m);
      Write ('There are ', f(n,m):0, ' partitions of ');
      Write (n:0, ' where ', m:0, ' is the largest ');
      Writeln ('summand possible.')
End.
```

پ)

```
Program Partitions(input,output);
Var
     n: integer;

Function f(n,m: integer): integer;
Begin
     If n=0 then
          f := 1
     Else if (n < 0) or (m < 1) then
                f := 0
          Else f := f(n,m-1) + f(n-m,m)
End; {of function f}

Begin
     Writeln ('What is the value of n?');
     Readln (n);
     Write ('For n = ', n :0, ' the number of ');
     Write ('partitions p(', n:0, ') is ', f(n,n):0, '.')
End.
```

۱۸. برنامهٔ زیر، رقمهای یکان نخستین ۱۳۰ عدد فیبوناچی، یعنی F_0 تا F_{129}، را چاپ می‌کند.

```
Program Units(input, output);
Var
    FibUnit: array[0..129] of integer;
        i,j: integer;
Begin
    FibUnit[0] := 0;
    FibUnit[1] := 1;
    For i := 2 to 129 do
        FibUnit[i] := (FibUnit[i-1] + FibUnit[i-2]) Mod 10;
    For i :=0 to 12 do
        For j := 0 to 9 do
            If j < 9 then
                Write (FibUnit[10 * i + j]: 4)

      Else {j = 9}
           Writeln (FibUnit[10* i + 9]: 4)
End.
```

قسمت سوم

نظریهٔ گراف و کاربردهای آن

۱۱

مقدمه‌ای بر نظریهٔ گراف

بند ۱.۱۱

۱. الف) برای نشان دادن راههای هوایی‌ای که یک شرکت خاص هواپیمایی بین مجموعهٔ معینی از شهرها می‌پیماید.

ب) برای نشان دادن یک شبکهٔ الکتریکی. در اینجا رأسها می‌توانند کلیدها، ترانزیستورها و غیره را نشان دهند و یالی مانند (x, y) بر وجود سیمی بین x و y دلالت دارد.

پ) فرض می‌کنیم رأسها مجموعه‌ای از متقاضیان کار و مجموعه‌ای از پستهای خالی در یک شرکت را نشان دهند. رسم یال (A, b) به این معناست که متقاضی A برای پست b صلاحیت دارد. دراین‌صورت، اگر گراف حاصل تطابقی بین متقاضیان و پستهای خالی به‌دست دهد، همهٔ پستهای خالی را می‌توان پرکرد.

۲. الف) $\{b, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, e\}, \{e, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}$

ب) $\{b, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, e\}, \{e, d\}$

پ) $\{b, e\}, \{e, d\}$

ت) $\{b, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, e\}, \{e, b\}$

ث) $\{b, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, e\}, \{e, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}$

ج) $\{b, a\}, \{a, c\}, \{c, b\}$

۳. ۶

۴. شش مسیر به طول ۳، شش مسیر به طول ۵ و شش مسیر به طول ۷ وجود دارد. بنابراین، روی‌هم ۱۸ مسیر وجود دارد.

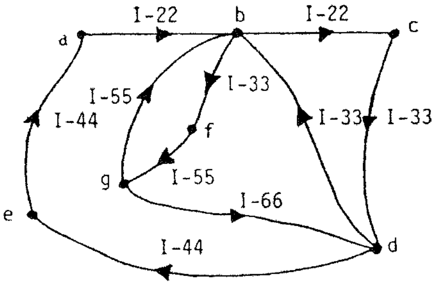
۵. هر مسیر از a به h باید حاوی یال $\{b, g\}$ باشد. سه مسیر (در G) از a به b و سه مسیر (در G) از g به h وجود دارد. در نتیجه، نه مسیر در G از a به h وجود دارد.

فقط یک مسیر به طول ۳، دو مسیر به طول ۴، سه مسیر به طول ۵، دو مسیر به طول ۶ و یک مسیر به طول ۷ وجود دارد.

۶. h : ۳   g : ۲   f : ۱   e : ۱   c : ۱

m : ۳   l : ۳   k : ۲   j : ۳   i : ۴

۷. الف)



ب) $\{(g,d),(d,e),(e,a)\}$ و $\{(g,b),(b,c),(c,d),(d,e),(e,a)\}$.

پ) یکی از یالهای $\{(b,c),(c,d)\}$ و یکی از یالهای $\{(b,f),(f,g),(g,d)\}$.

ت) خیر

ث) بله: مسیر $\{(c,d),(d,e),(e,a),(a,b),(b,f),(f,g)\}$ را بپیمایید.

ج) بله: مسیر $\{(g,b),(b,f),(f,g),(g,d),(d,b),(b,c),(c,d),(d,e),(e,a),(a,b)\}$ را بپیمایید.

۸. کمترین تعداد نگهبانان لازم ۳ است (مثلاً، در رأسهای a، g و i).

۹. اگر $\{a,b\}$ جزئی از یک دور نباشد، حذف آن موجب جدایی a و b (در G) می‌شود. اگر a و b جدا نشوند، مسیری مانند P از a به b وجود خواهد داشت که همراه با $\{a,b\}$ دوری حاوی $\{a,b\}$ به‌دست می‌دهد.

برعکس، اگر حذف $\{a,b\}$ از G موجب ناهمبندی G بشود، عنصرهایی مانند $x,y\in V$ وجود دارد به‌طوری که تنها مسیر P از x به y شامل $e=\{a,b\}$ است. اگر e جزئی از دوری مانند C نباشد، یالهای واقع در $(P-\{e\})\cup(C-\{e\})$ مسیر دومی از x به y به‌دست می‌دهند.

۱۰. هر مسیر این ویژگی را دارد.

۱۱. الف) بله   ب) خیر   پ) $n-1$

۱۲. الف) در هر گراف بی‌سوی بی‌طوقه (که گراف چندگانه نباشد) تعداد ماکسیمم یالها برابر است با $\binom{v}{2}$. بنابراین، $e\le\binom{v}{2}=\dfrac{v(v-1)}{2}$ و درنتیجه، $2e\le v^2-v$.

ب) در هر گراف سودار بی‌طوقه (که گراف چندگانه نباشد) داریم $e\le v^2-v$.

۱۳. این رابطه، بازتابی، متقارن و ترایاست و درنتیجه، یک رابطهٔ هم‌ارزی است. افرازی که $\mathcal{R}$ در V پدید می‌آورد، مؤلفه‌های (همبند) G را به‌دست می‌دهد.

۱۴. الف) سه دور به طول ۴ در W_3، پنج دور به طول ۴ در W_4 و پنج دور به طول ۴ در W_5 وجود دارد.

ب) رأسهای دوری متوالی W_n را (که در لبه قرار گرفته‌اند) با v_1، v_2، …، v_n و رأس (مرکزی) اضافی را با v_{n+1} نشان دهید.

(یک) به‌ازای $n \neq 4$، n دور به طول ۴ وجود دارد:

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_{n+1} \to v_1 \quad (1)$$
$$v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_{n+1} \to v_2 \quad (2)$$
$$\cdots$$
$$v_{n-1} \to v_n \to v_1 \to v_{n+1} \to v_{n-1} \quad (n-1)$$
$$v_n \to v_1 \to v_2 \to v_{n+1} \to v_n \quad (n)$$

وقتی $n = 4$، رأسهای v_1، v_2، v_3 و v_4 یک دور به‌دست می‌دهند. هریک از چهار دور دیگری که طولشان ۴ است، از رأس v_5 و سه تا از چهار رأس v_1، v_2، v_3 و v_4 تشکیل شده است.

(دو) $n+1$ دور به طول n در W_n وجود دارد:

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n \to v_1, \quad (1)$$
$$v_1 \to v_{n+1} \to v_3 \to v_4 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n \to v_1, \quad (2)$$
$$v_2 \to v_{n+1} \to v_4 \to v_5 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n \to v_1 \to v_2 \quad (3)$$
$$\cdots$$
$$v_{n-1} \to v_{n+1} \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{n-3} \to v_{n-2} \to v_{n-1} \text{ و} \quad (n)$$
$$v_n \to v_{n+1} \to v_2 \to v_3 \to \cdots \to v_{n-3} \to v_{n-1} \to v_n \quad (n+1)$$

بند ۲.۱۱

۱. الف) سه زیرگراف همبند: (۱) $\{b,a\}$، $\{a,c\}$، $\{c,d\}$، $\{d,a\}$

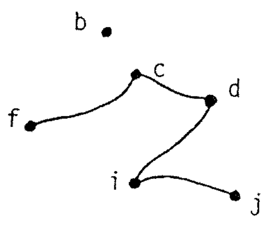
(۲) $\{f,c\}$ ، $\{c,a\}$، $\{a,d\}$، $\{d,c\}$

(۳) $\{i,d\}$ ، $\{d,c\}$، $\{c,a\}$، $\{a,d\}$

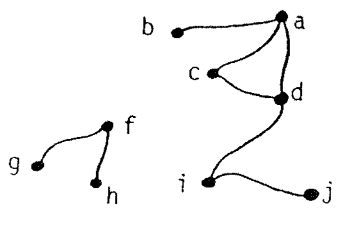
ب) G_1 زیرگراف القایی به‌وسیلهٔ $U = \{a,b,d,f,g,h,i,j\}$ است. $G_1 = G - \{c\}$.

پ) G_2 زیرگراف القایی به‌وسیلهٔ $W = \{b,c,d,f,g,i,j\}$ است. $G_2 = G - \{a,h\}$.

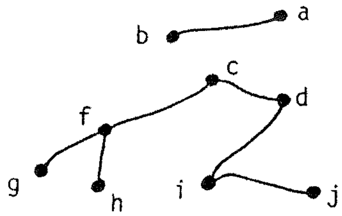
ت)



ث)



ج) ((یک)، (دو)، (سه))



۲. الف) اگر یالی مانند $\{a,b\}$ در E وجود داشته باشد به‌طوری که $a,b \in V$، ولی $\{a,b\} \notin E_1$، آن‌گاه G_1 زیرگرافی القایی از G نیست.

ب) فرض می‌کنیم $e = \{a,d\}$. دراین‌صورت $G - e$ زیرگرافی از G هست ولی زیرگرافی القایی نیست.

۳. الف) $۲^{۹} = ۵۱۲$ زیرگراف فراگیر وجود دارد.

ب) سه تا از زیرگرافهای فراگیر قسمت (الف) همبندند.

پ) (یک) $۲^{۶}$

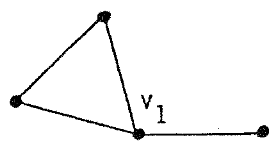
(دو) $۲^{۸}$

۴. فقط یکی، خود گراف G.

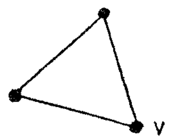
۵. G با گراف K_n، که در آن $n = |V|$، یکریخت است.

۶. الف)

$: G_1$

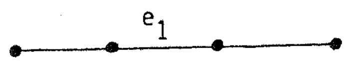


$: G$

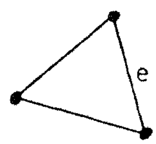


ب)

$: G_1$

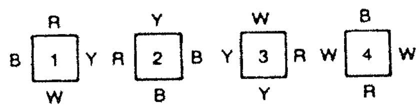


$: G$

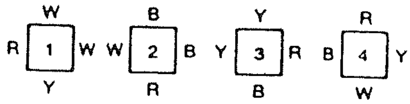


۷. الف)

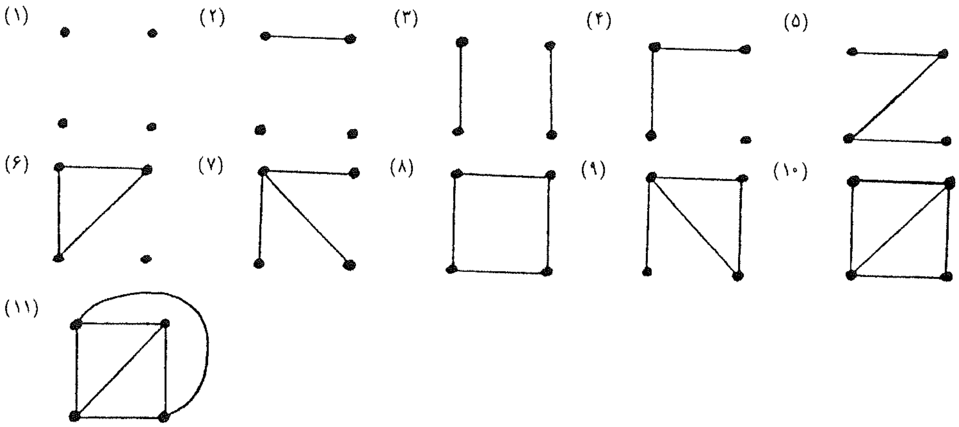
ب) جواب ندارد.



پ)



۸. ۱۱ گراف بی‌سوی بی‌طوقهٔ چهار رأسی نایکریخت وجود دارد.



شش تا از این گرافها همبندند.

۹. الف) $\frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۱۲۶۰$ مسیر به طول ۴ در $K_۷$ وجود دارد.

ب) به‌ازای $۰ < m < n$، تعداد مسیرهای به طول m در K_n برابر است با

$$\frac{۱}{۲} n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-m)$$

۱۰. به‌ازای هر مقدار n، W_n دارای $n+۱$ رأس و $۲n$ یال است، درحالی‌که $K_{n+۱}$، $n+۱$ رأس و $\frac{(n+۱)n}{۲} = \binom{n+۱}{۲}$ یال دارد. ضمناً می‌بینیم که

$$۲n = \frac{(n+۱)n}{۲} \Longrightarrow ۴n = (n+۱)n \Longrightarrow ۴ = n+۱ \Longrightarrow n = ۳$$

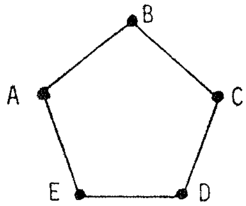
بنابراین، گراف چرخی $W_۳$ با گراف کامل $K_۴$ یکریخت است.

۱۱. الف) در هر یک از این گرافها چهار رأس هست که هر یک از آنها روی سه یال قرار دارد. در گراف دوم، این رأسها عبارت‌اند از w ، x، y و z، که در عین حال یک دور می‌سازند. ولی برای رأسهای متناظر با آنها در گراف اول، یعنی a، b ، g و h، این وضعیت برقرار نیست. بنابراین، این دو گراف یکریخت نیستند.

ب) در گراف اول، رأس d روی چهار یال قرار دارد. هیچ رأسی از گراف دوم این ویژگی را ندارد و درنتیجه، این دو گراف یکریخت نیستند.

پ) بله. a را با b ، u را با c ،w را با d ، x را با e ، y را با v و f را با z متناظر کنید.

۱۲. الف) فرض می‌کنیم A ، B، C، D و E پنج تیم موردنظر را نشان دهند. دراین صورت می‌توان جدول زمانی را با پنج‌ضلعی شکل زیر مدلسازی کرد.



ب) هر جدول زمانی دیگری از این نوع با گراف قسمت (الف) یکریخت است.

۱۳. اگر G دارای v رأس و e یال باشد، آن‌گاه بنابر تعریف $\overline{G}$، $\binom{v}{2} - e$ یال در $\overline{G}$ وجود دارد، زیرا تعداد یالهای K_v برابر با $\binom{v}{2}$ است.

۱۴. اگر در G_1 مسیری به طول ۳ از a به b وجود داشته باشد، دراین‌صورت یالهایی مانند $\{a, x\}$، $\{x, y\}$ و $\{y, b\}$ در G_1 وجود دارند. چون G_2 با G_1 یکریخت است، یالهای $\{f(a), f(x)\}$ ، $\{f(x), f(y)\}$ و $\{f(y), f(b)\}$ در G_2، که متناظر با یالهای قبلی‌اند، مسیری به طول ۳ از $f(a)$ به $f(b)$ به‌دست می‌دهند.

۱۵. الف) اگر $G_1 = (V_1, E_1)$ با $G_2 = (V_2, E_2)$ یکریخت باشد، تابعی مانند $f : V_1 \to V_2$ وجود دارد که یک‌به‌یک و پوشاست و مجاورتها را حفظ می‌کند. اگر $x, y \in V_1$ و $\{x, y\} \notin E_1$، دراین‌صورت $\{f(x), f(y)\} \notin E_2$. بنابراین، همین تابع f مجاورتها را برای $\overline{G}_1$ و $\overline{G}_2$ حفظ می‌کند و می‌توان با استفاده از آن یکریختی‌ای برای $\overline{G}_1$ و $\overline{G}_2$ تعریف کرد. عکس این مطلب نیز به‌طور مشابهی ثابت می‌شود.

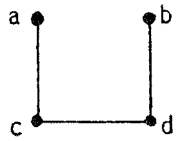
ب) این دوگراف یکریخت نیستند. مکمل گرافی که شامل رأس a است، دوری به طول ۸ است. مکمل گراف دوم، اجتماع دو دور به طول ۴ است که جدا از هم‌اند.

۱۶. الف) فرض می‌کنیم e_1 تعداد یالهای G و e_2 تعداد یالهای $\overline{G}$ باشد. در هرگراف بی‌سوی (بی‌طوقهٔ) G داریم $e_1 + e_2 = \binom{n}{2}$، که تعداد یالهای K_n است. چون G خود مکمل است، داریم $e_1 = e_2$ و بنابراین،

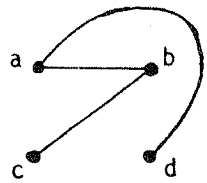
$$e_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

ب) چهار رأس:

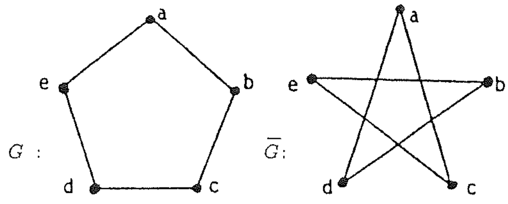
$G:$



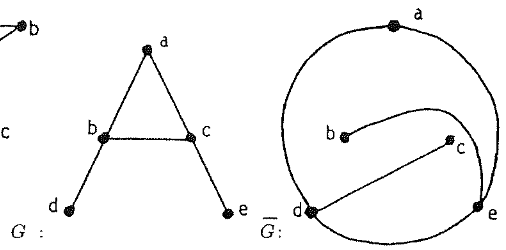
$\overline{G}:$



پنج رأس:

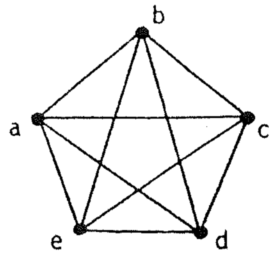


یا



پ) از قسمت (الف) داریم $۴|n(n-۱)$. یکی از دو عامل n و $n-۱$ زوج و دیگری فرد است. اگر n زوج باشد، دراین‌صورت $۴|n$ و به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{Z}^+$ داریم $n = ۴k$. اگر $n-۱$ زوج باشد، دراین‌صورت $۴|(n-۱)$ و به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{Z}^+$ داریم $n-۱ = ۴k$ یا $n = ۴k+۱$.

۱۷. اگر G دوری با یالهای $\{a,b\}$، $\{b,c\}$، $\{c,d\}$، $\{d,e\}$ و $\{e,a\}$ باشد، دراین‌صورت $\overline{G}$ دوری با یالهای $\{a,c\}$، $\{c,e\}$، $\{e,b\}$، $\{b,d\}$ و $\{d,a\}$ است. بنابراین، G و $\overline{G}$ یکریخت‌اند. برعکس، اگر G دوری n رأسی باشد و اگر G و $\overline{G}$ یکریخت باشند، آنگاه $\left(\frac{۱}{۲}\right)\binom{n}{۲} = n$ یا $\frac{۱}{۴}(n)(n-۱) = n$ و $n = ۵$.

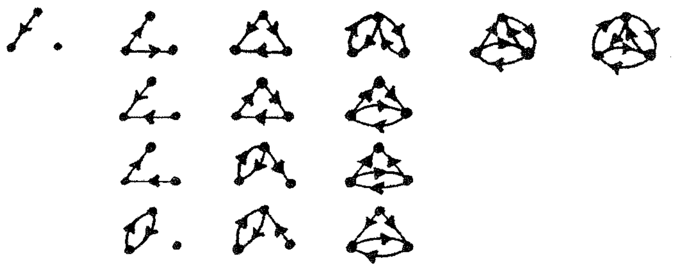


۱۸. الف) همهٔ مثالهای تمرین ۱۶ در این شرایط صدق می‌کنند.

ب) چون G همبند نیست، رأسهایی مانند x و y در G وجود دارند که با هیچ مسیری از G به‌هم وصل نمی‌شوند. بنابراین، $\{x,y\}$ یالی از $\overline{G}$ است. به‌ازای هر رأس مانند a در G، که در آن $a \neq x$ و $a \neq y$، $\{a,x\}$ یا $\{a,y\}$ در $\overline{G}$ است. اگر این‌طور نباشد، هر دو یال $\{a,x\}$ و $\{a,y\}$ در G هستند و $\{x,a\}$ و $\{a,y\}$ مسیری در G می‌سازند که x و y را به‌هم وصل می‌کند. فرض می‌کنیم $b,c \in V$. اگر هر دو یال $\{b,x\}$ و $\{c,x\}$ در $\overline{G}$ باشند، مسیری وجود دارد که b و c را به‌هم وصل می‌کند که مسیر متشکل از $\{b,x\}$ و $\{x,c\}$ است. اگر هر دو یال $\{b,y\}$ و $\{c,y\}$ نیز در $\overline{G}$ باشند، نتیجهٔ مشابهی خواهیم داشت. اگر هیچ‌یک از این وضعیتها روی ندهد، $\{b,x\}$ و $\{c,y\}$ (یا $\{b,y\}$ و $\{c,x\}$) در $\overline{G}$ هستند و دراین‌صورت یالهای $\{b,x\}$، $\{x,y\}$ و $\{y,c\}$ مسیری می‌سازند که b و c را به‌هم وصل می‌کند.

۱۹. الف) در اینجا f باید سوها را نیز حفظ کند. بنابراین، اگر $(a,b) \in E_1$، آنگاه $(f(a), f(b)) \in E_2$.

ب)



پ) این دوگراف یکریخت نیستند. رأس a را درگراف اول درنظر بگیرید. این رأس به یک رأس وصل شده است و دو رأس دیگر به آن وصل شده‌اند. هیچ‌یک از رأسهای گراف دوم این ویژگی را ندارد.

۲۰. الف) $\binom{6}{3}(2^{\binom{3}{2}}) = \binom{6}{3}(2^3)$ ب) $\binom{6}{4}(2^{\binom{4}{2}})$ پ) $\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k}(2^{\binom{k}{2}})$

بند ۳.۱۱

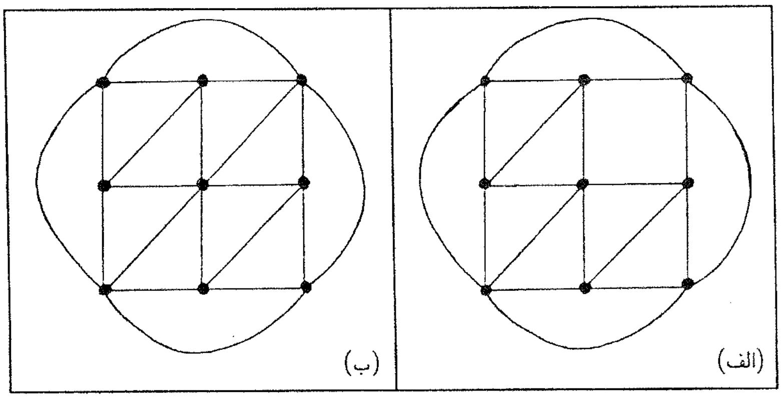
۱. الف) $|V| = 6$

ب) $|V|$ برابر است با ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۶ یا ۱۰ یا ۱۵ یا ۳۰. [در هر چهار حالت نخست، G یک گراف چندگانه است. وقتی $|V| = 30$، G ناهمبند است.]

پ) $|V| = 6$

۲. $2|E| = 2 \times 17 = 34 = \sum_{v\in V}\deg(v) \geq 3|V|$. بنابراین، مقدار ماکسیمم $|V|$ برابر با ۱۱ است.

۳. چون $2|E| = 38 = \sum_{v\in V}\deg(v) \geq 4|V|$، بزرگترین مقدار ممکن برای $|V|$ برابر با ۹ است. می‌توانیم (یک) هفت رأس درجهٔ ۴ و دو رأس درجهٔ ۵ یا (دو) هشت رأس درجهٔ ۴ و یک رأس درجهٔ ۶ داشته باشیم. گراف قسمت (الف) از شکل زیر، مثالی برای حالت (یک) است. گراف قسمت (ب) مثالی برای حالت (دو) به‌دست می‌دهد.



۴. از قضیهٔ ۲۰۱۱ نتیجه می‌شود که $(6-|V|)2(2|V|) = 2|E| = 3|V| = \sum_{v\in V}\deg(v)$. بنابراین، $12 - |V| = 4|V| = 3|V|$ و درنتیجه، $12 = |V|$ و $18 = |E|$.

۵. الف) $|V_2| = 8 = |V_1|$ و $|E_2| = 14 = |E_1|$.

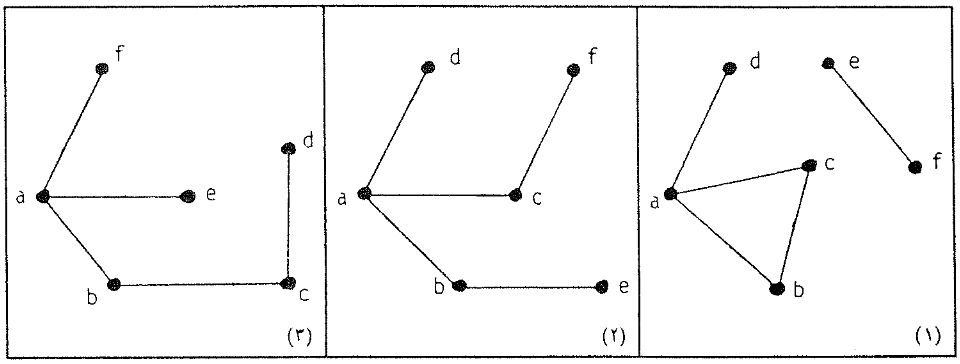
ب) در V_1 می‌بینیم که $\deg(a) = 3$، $\deg(b) = 4$، $\deg(c) = 4$، $\deg(d) = 3$، $\deg(e) = 3$، $\deg(f) = 4$، $\deg(g) = 4$ و $\deg(h) = 3$. در V_2 داریم $\deg(s) = 3$، $\deg(t) = 4$، $\deg(u) = 4$، $\deg(v) = 3$، $\deg(w) = 4$، $\deg(x) = 3$، $\deg(y) = 3$ و $\deg(z) = 4$. بنابراین، هر یک از این دو گراف، چهار رأس درجهٔ ۳ و چهار رأس درجهٔ ۴ دارد.

پ) علی‌رغم نتایج قسمتهای (الف) و (ب) گرافهای G_1 و G_2 یکریخت نیستند.

درگراف G_2، هر چهار رأس درجهٔ ۴، یعنی رأسهای t، u، w و z، روی دوری به طول ۴ قرار دارند. در گراف G_1، رأسهای b، c، f و g، که درجهٔ هر یک از آنها ۴ است، روی دوری به طول ۴ قرار ندارند.

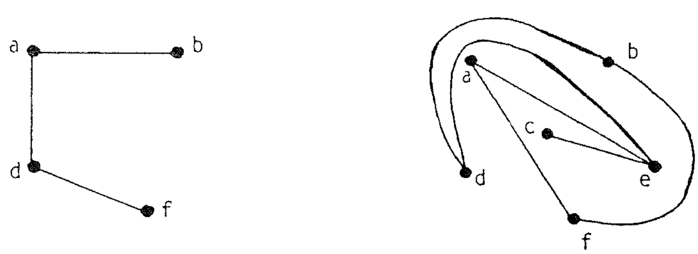
راه دیگری برای ملاحظهٔ نایکریخت بودن G_1 و G_2 این است که باز هم رأسهای درجهٔ ۴ را در هر دوی آنها درنظر بگیریم. در G_1، این چهار رأس زیرگراف ناهمبند متشکل از دو یال $\{b,c\}$ و $\{f,g\}$ را به‌دست می‌دهند، درحالی که در G_2، رأسهای درجهٔ ۴ زیرگراف همبندی به‌دست می‌دهند که پنج یال دارد، یعنی هر یک از یالهای ممکن غیر از $\{u,z\}$.

۶. الف)



ب) دو تا از این سه گراف همبندند.

۷. الف) ب)



۸. الف) در $\overline{G}$، یعنی مکمل G، می‌بینیم که $\deg(v_1) = 7$، $\deg(v_2) = 6$، $\deg(v_3) = 6$، $\deg(v_4) = 4$، $\deg(v_5) = 8$، $\deg(v_6) = 7$، $\deg(v_7) = 4$، $\deg(v_8) = 7$، $\deg(v_9) = 6$ و $\deg(v_{10}) = 7$.

ب) درگراف $\overline{H}$ داریم $\deg(v_2) = 2$، $\deg(v_3) = 0$، $\deg(v_5) = 3$، $\deg(v_6) = 3$ و $\deg(v_7) = 2$.

۹. توجه کنید که $2|E| = \sum_{v\in V}\deg(v)$. چون $\delta|V| \leq \sum_{v\in V}\deg(v) \leq \Delta|V|$، نتیجه می‌گیریم که $\delta|V| \leq 2|E| \leq \Delta|V|$ و بنابراین، $\delta \leq 2 \times \dfrac{e}{n} \leq \Delta$.

۱۰. الف) f^{-1} یک به‌یک و پوشاست. فرض می‌کنیم $x, y \in V'$ و $\{x, y\} \in E'$. دراین‌صورت از اینکه f یک‌به‌یک و پوشاست نتیجه می‌شود که رأسهای یکتای $a, b \in V$ وجود دارند به‌طوری‌که $f(a) = x$ و $f(b) = y$. اگر $\{a, b\} \notin E$، آن‌گاه $\{f(a), f(b)\} \notin E'$.

ب) اگر $\deg(a) = n$، دراین‌صورت رأسهای $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ و به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، یک یال $\{a, x_i\} \in E$ وجود دارد. بنابراین، به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ یال $\{f(a), f(x_i)\}$ متعلق به E' است و درنتیجه، $\deg\big(f(a)\big) \geq n$. اگر $\deg\big(f(a)\big) > n$، فرض کنیم $y \in V'$ چنان باشد که به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $y \neq f(x_i)$ و $y = f(x)$. چون، بنابرقسمت (الف)، f^{-1} یکریختی است پس $\{a, x\} \in E$ و $\deg(a) > n$. درنتیجه، $\deg f(a) = n$.

۱۱. برهان: با دوری مانند $v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots \to v_{2k-1} \to v_{2k} \to v_1$ شروع می‌کنیم. سپس k یال $\{v_1, v_{k+1}\}$، $\{v_2, v_{k+2}\}$، …، $\{v_i, v_{i+k}\}$، …، $\{v_k, v_{2k}\}$ را رسم می‌کنیم. گراف حاصل $2k$ رأس دارد که درجهٔ هر یک از آنها ۳ است.

۱۲. برهان (با استفاده از اصل استقرای قوی):

نتیجهٔ موردنظر (با توجه به گراف کامل K_2) به‌ازای $n = 1$ و (با توجه به مسیر چهار رأسی) به‌ازای $n = 2$ درست است. بنابراین، فرض می‌کنیم این نتیجه به‌ازای هر $1 \leq n \leq k$ درست باشد و حالت مربوط به $n = k + 1$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم G' گرافی متناظر با $n = k - 1$ باشد و دو رأس تنها مانند x و y به آن می‌افزاییم. اکنون دو رأس دیگر مانند a و b را وارد می‌کنیم. یالی بین a و x و بین a و $k - 1$ تا از رأسهای G' (که هر یک از این رأسها متناظر با یکی از درجه‌های ۱، ۲، …، $k - 1$ است) رسم می‌کنیم. اینک یالی بین b و y و بین b و هر یک از $k - 1$ رأس دیگر G' (یعنی رأسهایی که مجاور به a نیستند) رسم می‌کنیم. گراف حاصل دارای $2(k + 1)$ رأس است و به‌گونه‌ای است که به‌ازای هر $1 \leq i \leq k + 1$، دقیقاً دو رأس درجهٔ i دارد.

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای قوی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۱۳. (فرع ۱۱ ۰ ۱) فرض می‌کنیم $V = V_1 \cup V_2$، که در آن V_1 از همهٔ رأسهای درجهٔ فرد و V_2 از همهٔ رأسهای درجهٔ زوج تشکیل شده است. دراین‌صورت $\sum_{v\in V_1}\deg(v) = 2|E| - \sum_{v\in V_2}\deg(v)$ عددی زوج است. اگر $|V_1|$ فرد باشد، $\sum_{v\in V_1}\deg(v)$ نیز فرد خواهد بود.

(فرع ۱۱ ۰ ۲) برای اثبات عکس مطلب، فرض می‌کنیم $G = (V, E)$ پیگردی اویلری با رأسهای آغازی و پایانی a و b داشته باشد. یال $\{a, b\}$ را به G اضافه می‌کنیم تا گراف $G' = (V, E')$، که مداری اویلری دارد، به‌دست آید. بنابراین، G' همبند است و درجهٔ هر رأس آن زوج است. اگر یال $\{a, b\}$ را حذف کنیم، رأسهای G،

به‌جز a و b، دارای همان درجهٔ زوج هستند. از $\deg_G(a) = \deg_{G'}(a) - ۱$ و $\deg_G(b) = \deg_{G'}(b) - ۱$ نتیجه می‌شود درجهٔ هر یک از دو رأس a و b در G فرد است. علاوه‌براین، چون یالهای G پیگردی اویلری می‌سازند، G همبند است.

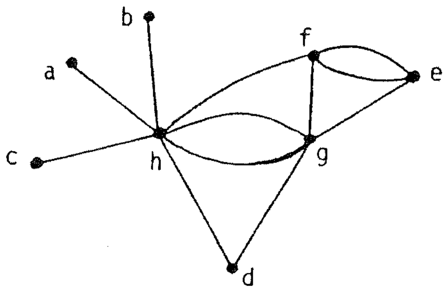
۱۴. رأسهای $v_۱, v_۲ \in V$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\{v_۱, v_۲\} \in E$. چنین رأسها و چنین یالی وجود دارد، زیرا $V \neq \emptyset$ و به‌ازای هر $v \in V$ ، $\deg(v) \geq k \geq ۱$. اگر $k = ۱$، نتیجهٔ موردنظر بی‌درنگ به‌دست می‌آید. اگر $k > ۱$، فرض می‌کنیم رأسهای $v_۱, v_۲, \ldots, v_k \in V$ چنان انتخاب شده باشند که $\{v_۱, v_۲\}, \{v_۲, v_۳\}, \ldots, \{v_{k-۱}, v_k\} \in E$. چون $\deg(v_k) \geq k$، رأسی مانند $v_{k+۱} \in V_۱$ وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای هر $۱ \leq i \leq k - ۱$، $v_{k+۱} \neq v_i$ و $\{v_k, v_{k+۱}\} \in E$. دراین‌صورت

$$\{v_۱, v_۲\}, \ \{v_۲, v_۳\}, \ \ldots, \ \{v_{k-۱}, v_k\}, \ \{v_k, v_{k+۱}\}$$

مسیری به طول k است.

۱۵. الف) فرض می‌کنیم $a, b, c, x, y \in V$ به‌گونه‌ای باشند که $\deg(a) = \deg(b) = \deg(c) = ۱$، $\deg(x) = ۵$ و $\deg(y) = ۷$. چون $\deg(y) = ۷$، y به هر یک از هفت رأس دیگر مجاور است. بنابراین، رأس x به هیچ‌یک از رأسهای a، b و c مجاور نیست چون x نمی‌تواند به خودش مجاور باشد، مگر آنکه طوقه‌ای در x داشته باشیم، نتیجه می‌گیریم که $\deg(x) \leq ۴$ و نمی‌توان گرافی با شرایط داده شده رسم کرد.

ب)



۱۶. الف) $a \to b \to c \to g \to k \to j \to g \to b \to f \to j \to i \to f \to e \to i \to h \to d \to e$
$\to b \to d \to a$

ب) $d \to a \to b \to d \to h \to i \to e \to f \to i \to j \to f \to b \to c \to g \to k \to j \to g$
$\to b \to e$

۱۷. n فرد، $n = ۲$

۱۸. ۱؛ هر پل تنها.

۱۹. بله. وضعیت مورد بحث را با گرافی مدلسازی کنید که در آن، برای هر اتاق و برای راهروی دور تا دور یک رأس وجود دارد. اگر در مشترکی بین دو اتاق یا بین یک اتاق و راهروی دور تا دور وجود داشته باشد، یالی بین رأسهای

متناظر آنها رسم کنید. گراف چندگانهٔ حاصل گرافی همبند و درجهٔ هر رأس آن زوج است.

۲۰. چون $2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v)$، اگر G فقط یک رأس درجهٔ زوج داشته باشد، دراین‌صورت $n-1$ رأس درجهٔ فرد دارد و درنتیجه، $n-1$ زوج و n فرد است. به‌ازای هر $v \in V$، $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = n-1$ و بنابراین، $\overline{G}$ فقط یک رأس درجهٔ زوج دارد.

۲۱. الف) (یک) فرض می‌کنیم رأسهای K_6 عبارت باشند از v_1، v_2، v_3، v_4، v_5 و v_6، که در آن به‌ازای هر $1 \le i \le 6$ داریم $\deg(v_i) = 5$. زیرگراف S از K_6 را که از حذف یالهای $\{v_2, v_5\}$ و $\{v_3, v_6\}$ به‌دست می‌آید درنظر بگیرید. دراین‌صورت S همبند است، $\deg(v_1) = \deg(v_4) = 5$ و به‌ازای هر $i \in \{2, 3, 5, 6\}$، $\deg(v_i) = 4$. بنابراین، S دارای یک پیگرد اویلری است که از v_1 (یا v_4) آغاز و به v_4 (یا v_1) ختم می‌شود. دراین صورت این پیگرد اویلری که در S قرار دارد پیگردی به طول ماکسیمم در K_6 است و طول آن برابر است با $13 = 15 - 2 = \binom{6}{2} - \frac{1}{2}(6-2)$.

(دو) $\binom{8}{2} - \frac{1}{2}(8-2) = 28 - 3 = 25$

(سه) $\binom{10}{2} - \frac{1}{2}(10-2) = 45 - 4 = 41$

(چهار) $\binom{2n}{2} - \frac{1}{2}(2n-2) = n(2n-1) - (n-1) = 2n^2 - 2n + 1$

ب) (یک) رأسهای K_6 را مانند بند (یک) از قسمت (الف) نامگذاری کنید. اکنون زیرگراف T از K_6 را که از حذف یالهای $\{v_1, v_4\}$، $\{v_2, v_5\}$ و $\{v_3, v_6\}$ به‌دست می‌آید درنظر بگیرید. دراین‌صورت T همبند است و به‌ازای هر $1 \le i \le n$، $\deg(v_i) = 4$. بنابراین، T دارای یک مدار اویلری است و این مدار اویلری، مداری به طول ماکسیمم در K_6 است. طول این مدار برابر است با $12 = 15 - 3 = \binom{6}{2} - \frac{1}{2} \times 6$.

(دو) $\binom{8}{2} - \frac{1}{2} \times 8 = 28 - 4 = 24$

(سه) $\binom{10}{2} - \frac{1}{2} \times 10 = 45 - 5 = 40$

(چهار) $\binom{2n}{2} - \frac{1}{2} \times 2n = n(2n-1) - n = 2n^2 - 2n = 2n(n-1)$

۲۲. می‌بینیم که $\sum_{v\in V} \mathrm{od}(v) = e = \sum_{v\in V} \mathrm{id}(v)$.

۲۳. $\sum_{v\in V} \mathrm{id}(v) = |E| = \sum_{v\in V} \mathrm{od}(v)$.

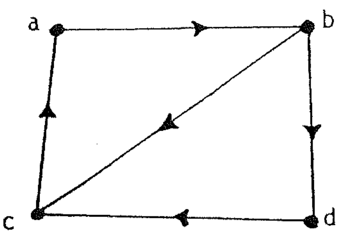
۲۴. الف) اگر $G = (V, E)$ مدار اویلری سوداری داشته باشد، دراین‌صورت به‌ازای هر $x, y \in V$، پیگرد سوداری از x به y وجود دارد (که قسمتی از همان مدار اویلری سودار است که بین x و y قرار دارد). به این ترتیب مسیر سوداری از x به y و همچنین، مسیر سوداری از y به x به‌دست می‌آید. بنابراین، G همبند است (درحقیقت، به معنایی که در قسمت (پ) از این تمرین تعریف شده است، قویاً همبند است). فرض می‌کنیم s رأس آغازی (و رأس پایانی) این مدار اویلری سودار باشد. به‌ازای هر $v \in V$، $v \neq s$، هر بار که این مدار به رأس v می‌رسد، باید از این رأس نیز خارج شود و بنابراین، $\mathrm{od}(v) = \mathrm{id}(v)$. در مورد s روشن است که آخرین یال مدار غیر از اولین یال آن است و درنتیجه، $\mathrm{od}(s) = \mathrm{id}(s)$.

برعکس، اگر G در شرایط بیان شده صدق کند، با استقرا روی $|E|$ ثابت خواهیم کرد که G مدار

اویلری سوداری دارد. به‌ازای $|E| = ۱$، نتیجهٔ موردنظر درست است (و در این حالت، گراف مورد بحث از یک طوقه (سودار) در یک رأس تشکیل شده است). فرض می‌کنیم این نتیجه به‌ازای همهٔ این نوع گرافها، که در آنها $۱ \leq |E| < n$، درست باشد. اکنون گراف سودار $G = (V, E)$ را که در شرایط مفروض صدق می‌کند و $|E| = n$، درنظر بگیرید. فرض می‌کنیم $a \in V$، مداری در G وجود دارد که شامل a است. اگر طوقهٔ $(a, a) \notin E$، دراین‌صورت یالی مانند $(a, b) \in E$، $a \neq b$، وجود دارد. اگر این‌طور نباشد، a رأسی تنهاست و این با همبندی G در تناقض است. اگر $(b, a) \in E$، مدار $\{(a, b), (b, a)\}$ را داریم که شامل a است. اگر $(b, a) \notin E$، دراین‌صورت یالی مانند (b, c)، $b \neq c$ و $a \neq c$، وجود دارد زیرا $\mathrm{od}(b) = \mathrm{id}(b)$. با ادامهٔ این فرایند و با توجه به $\mathrm{od}(a) = \mathrm{id}(a)$ و اینکه G متناهی است، مدار سوداری مانند C به‌دست می‌آوریم که شامل a است. اگر $C = G$، کار تمام است. در غیراین‌صورت، یالهای C را از G، همراه با هر رأسی که تنها می‌شود، حذف می‌کنیم. زیرگراف حاصل، که آن را $H = (V_۱, E_۱)$ می‌نامیم، به گونه‌ای است که به‌ازای هر $v \in V_۱$، در H داریم $\mathrm{od}(v) = \mathrm{id}(v)$. H الزاماً همبند نیست. ولی هر مؤلفهٔ H همبند است و در هر مؤلفه، به‌ازای هر رأس داریم $\mathrm{od}(v) = \mathrm{id}(v)$. درنتیجه، بنابر فرض استقرا، هر مؤلفهٔ H هم مدار اویلری سودار دارد و هم رأسی که روی مدار C (قبلی) واقع است. بنابراین، از رأس a شروع و روی C حرکت می‌کنیم تا به رأسی مانند $v_۱$ از مدار اویلری سودار متعلق به مؤلفهٔ $C_۱$ از H برسیم. پس از پیمودن $C_۱$ به $v_۱$ باز می‌گردیم و حرکت خود را روی C ادامه می‌دهیم تا به رأس $v_۲$ متعلق به مؤلفهٔ $C_۲$ از H برسیم. با ادامهٔ این فرایند و با توجه به متناهی بودن G، مدار اویلری سوداری برای G به دست می‌آوریم.

ب) $a \to d \to h \to e \to i \to d \to i \to j \to k \to f \to j \to k \to g \to c \to f \to$
$g \to c \to b \to e \to f \to b \to a$

پ) اگر $G = (V, E)$ گراف سوداری باشد که مدار اویلری سودار دارد، دراین‌صورت به‌ازای هر $x, y \in V$، $x \neq y$، مسیر سوداری از x به y و مسیر سوداری از y به x وجود دارد و درنتیجه، این گراف قویاً همبند است. ولی عکس این مطلب نادرست است. گراف سودار مقابل قویاً همبند است. ولی این گراف مدار اویلری سودار ندارد، زیرا $\mathrm{od}(b) \neq \mathrm{id}(b)$.



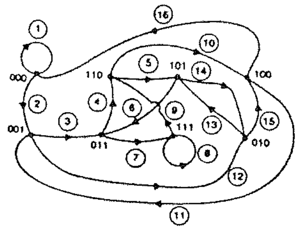
۲۵. باتوجه به مثال ۲۳ می‌دانیم که $\sum_{v \in V} \left[\mathrm{od}(v) - \mathrm{id}(v)\right] = ۰$. به‌ازای هر $v \in V$ داریم $\mathrm{od}(v) + \mathrm{id}(v) = n - ۱$. بنابراین،

$$۰ = (n - ۱) \times ۰ = \sum_{v \in V} (n - ۱)\left[\mathrm{od}(v) - \mathrm{id}(v)\right] = \sum_{v \in V} \left[\mathrm{od}(v) + \mathrm{id}(v)\right]\left[\mathrm{od}(v) - \mathrm{id}(v)\right]$$
$$= \sum_{v \in V} \left[(\mathrm{od}(v))^۲ - (\mathrm{id}(v))^۲\right]$$

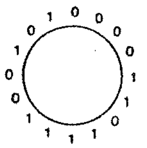
و به این ترتیب نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

۲۶. فرض می‌کنیم G گراف سوداری باشد که در هر سه شرط داده شده صدق می‌کند. یال (x,y) را اضافه می‌کنیم. دراین‌صورت، بنابر قسمت (الف) از تمرین ۲۴، گراف حاصل مدار اویلری سوداری مانند C دارد. اگر (x,y) را از C حذف کنیم، پیگرد اویلری سوداری برای گراف مفروض G به‌دست می‌آید. (این پیگرد از y آغاز و به x ختم می‌شود.) به‌همین ترتیب، می‌بینیم که اگر گراف سوداری مانند G پیگرد اویلری سودار داشته باشد، آن‌گاه در هر سه شرط مفروض صدق می‌کند.

۲۷. الف و ب)



پ)



۲۸. فرض می‌کنیم

$$V = \{۰۰, ۰۱, ۰۲, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۲۰, ۲۱, ۲۲\}$$

به‌ازای هر دنبالهٔ سه نمادی مانند $t_۱t_۲t_۳$، که در آن به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۳$ داریم $۰ \leq t_i \leq ۲$، یالی از رأس $t_۱t_۲$ به رأس $t_۲t_۳$ رسم کنید. گراف سودار حاصل همبند است و به‌ازای هر $v \in V$ داریم $\mathrm{od}(v) = ۳ = \mathrm{id}(v)$. مانند تمرین ۲۷، این گراف مدار اویلری سودار دارد. یکی از این نوع مدارها عبارت است از

$$۰۰ \to ۰۰ \to ۰۱ \to ۱۰ \to ۰۱ \to ۱۱ \to ۱۱ \to ۱۲ \to ۲۱ \to ۱۲ \to ۲۲ \to$$

$$۲۲ \to ۲۱ \to ۱۰ \to ۰۰ \to ۰۲ \to ۲۱ \to ۱۱ \to ۱۰ \to ۰۲ \to ۲۲ \to ۲۰ \to$$

$$۰۲ \to ۲۰ \to ۰۱ \to ۱۲ \to ۲۰ \to ۰۰$$

این مدار، دنبالهٔ

$$۰۰۰۱۰۱۱۱۲۱۲۲۲۱۰۰۲۱۱۰۲۲۰۲۰۱۲$$

را به‌دست می‌دهد. وقتی این دنباله را دور تادور لبهٔ یک قرص گردان (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) می‌چینیم، زیردنباله‌های (متوالی) به طول ۳، نمایشهای سه‌سه‌ای عددهای ۰، ۱، ۲، ...، ۲۵ و ۲۶ را در اختیار ما می‌گذارند.

۲۹. فرض می‌کنیم $|V| = n \geq ۲$. چون G بی‌طوقه و همبند است، به‌ازای هر $x \in V$ داریم

$$۱ \leq \deg(x) \leq n - ۱$$

اکنون با این فرض که این n رأس در نقش کبوترها و این $n - ۱$ درجهٔ ممکن در نقش لانه‌های کبوترها باشند، اصل لانه کبوتری را به‌کار می‌بریم.

۳۰. ۳، ۳

۳۱. الف)

$$A=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]\end{array}$$

$$I=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]\end{array}$$

ب) اگر گشتی به طول دو بین v_i و v_j وجود داشته باشد، آن را به‌صورت $\{v_i, v_k\}$، $\{v_k, v_j\}$ نشان دهید. دراین‌صورت در A داریم

$$a_{ik} = a_{kj} = 1$$

و درایهٔ ij در A^2 برابر با ۱ است. برعکس، اگر درایهٔ ij در A^2 برابر با ۱ باشد، دست‌کم یک مقدار برای k، $1 \leq k \leq n$، وجود دارد به‌طوری که $a_{ik} = a_{kj} = 1$ و این بر وجود گشتی مانند $\{v_i, v_k\}$، $\{v_k, v_j\}$ بین رأسهای iاُم و jاُم V دلالت دارد.

پ) به‌ازای هر $1 \leq i, j \leq n$، درایهٔ ij در A^2 برابر است با تعداد گشتهای متمایز به طول دو بین رأسهای iاُم و jاُم V.

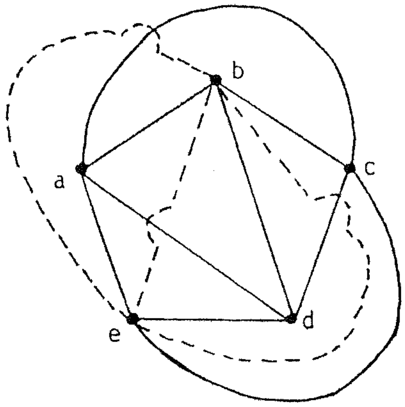
ت) اگر ستون مربوط به رأس v را درنظر بگیریم، مجموع درایه‌های آن ستون برابر است با درجهٔ v، مشروط بر آنکه طوقه‌ای در v وجود نداشته باشد. در غیر این‌صورت، داریم

$$\deg(v) = [(\text{مجموع درایه‌های ستون مربوط به } v) - 1] + 2(\text{تعداد طوقه‌های واقع در رأس } v)$$

ث) در ماتریس I، مجموع درایه‌های هر ستون مربوط به یک طوقه برابر با ۱ و هر ستون مربوط به یالی که طوقه نباشد، برابر با ۲ است.

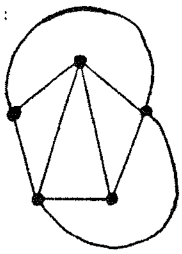
بند ۴.۱۱

۱. در این وضعیت، رأس b در ناحیه‌ای قرار دارد که به‌وسیلهٔ یالهای $\{a,d\}$ $\{d,c\}$ و $\{c,a\}$ ساخته شده است و رأس e خارج از این ناحیه است. درنتیجه، یال $\{b,e\}$، مطابق شکل، یکی از یالهای $\{a,d\}$، $\{d,c\}$ یا $\{a,c\}$ را قطع خواهد کرد.

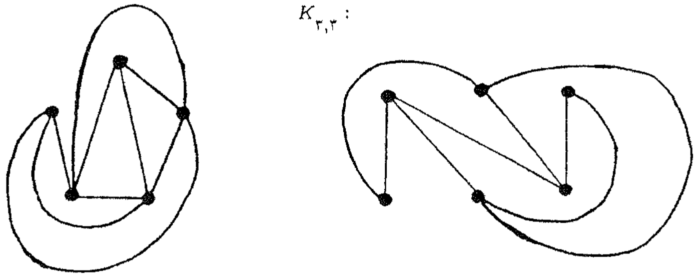


۲. با توجه به وجود تقارن در این گرافها، شکلهای زیر وضعیتهایی را نشان می‌دهند که باید بررسی کنیم.

K_5 :



$K_{3,3}$:



۳. الف)

گراف	تعداد رأسها	تعداد یالها
$K_{4,7}$	۱۱	۲۸
$K_{7,11}$	۱۸	۷۷
$K_{m,n}$	$m+n$	mn

ب) $m = 6$

۴. فرض می‌کنیم $G=(V,E)$ گرافی دو بخشی و $V_1 \cup V_2$ افرازی برای V باشد به‌طوری که هر یال E به‌صورت $\{a,b\}$، $a \in V_1$ و $b \in V_2$، است. اگر H زیرگرافی از G باشد، فرض می‌کنیم W مجموعهٔ رأسهای H را نشان دهد. دراین‌صورت

$$W = W \cap V = W \cap (V_1 \cup V_2) = (W \cap V_1) \cup (W \cap V_2)$$

که در آن $(W \cap V_1) \cap (W \cap V_2) = \emptyset$. اگر $\{x, y\}$ یالی از H باشد، دراین‌صورت $\{x, y\}$ یالی از G است که در آن، مثلاً $x \in V_1$ و $y \in V_2$. بنابراین، $x \in W_1$ و $y \in W_2$ و درنتیجه، H گرافی دوبخشی است.

۵. الف) فرض می‌کنیم $V_1 = \{a, d, e, h\}$ و $V_2 = \{b, c, f, g\}$. دراین‌صورت هر رأس G در $V_1 \cup V_2$ قرار دارد و $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. همچنین، هر یال G را می‌توان به‌صورت $\{x, y\}$ نوشت، که در آن $x \in V_1$ و $y \in V_2$. درنتیجه، گراف G در شکل ۶۳۰۱۱ (الف) گرافی دوبخشی است.

ب) فرض می‌کنیم $V_1' = \{a, b, g, h\}$ و $V_2' = \{c, d, e, f\}$. دراین‌صورت هر رأس G' در $V_1' \cup V_2'$ قرار دارد و $V_1' \cap V_2' = \emptyset$. چون هر یال G' را می‌توان به‌صورت $\{x, y\}$ نوشت که در آن $x \in V_1'$ و $y \in V_2'$، پس این گراف گرافی دوبخشی است. درحقیقت، G' با گراف دوبخشی کامل $K_{2,2}$ یکریخت است.

پ) این گراف گرافی دوبخشی نیست. اگر $G'' = (V'', E'')$ دوبخشی باشد، دراین‌صورت مجموعهٔ رأسهای G'' به‌صورت $V_1'' \cup V_2''$ افراز می‌شود، که در آن هر یال G'' به‌صورت $\{x, y\}$، $x \in V_1''$ و $y \in V_2''$، است. فرض می‌کنیم رأس a در V_1'' باشد. اکنون رأسهای b، c، d و e را درنظر بگیرید. چون $\{a, b\}$ و $\{a, c\}$ یالهایی از G'' هستند، باید b و c در V_2'' باشند. همچنین، $\{b, d\}$ یالی از این گراف است و درنتیجه، d در V_1'' قرار دارد. دراین‌صورت از $\{d, e\} \in E''$ نتیجه می‌شود که $e \in V_2''$، درحالی که

$$\{c, e\} \in E'' \Longrightarrow e \in V_1''$$

۶. تعداد رأسهای $K_{1,3}$ برابر با ۴ است و می‌توانیم به $\binom{n}{4}$ طریق چهار رأس از K_n انتخاب کنیم. چون هر یک از این چهار رأس (که متعلق به یکی از این $\binom{n}{4}$ انتخاب هستند) می‌تواند تنها رأس درجهٔ ۳ در $K_{1,3}$ باشد، $4\binom{n}{4}$ تا از زیرگرافهای K_n با $K_{1,3}$ یکریخت‌اند.

روش دیگری برای حل مسأله این است که رأس درجهٔ ۳ را برای $K_{1,3}$ انتخاب کنیم. این کار را می‌توان به n طریق انجام داد. سپس رأسهای آویزان باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{n-1}{3}$ طریق می‌توان انجام داد. بنابراین، تعداد زیرگرافهایی از K_n که با $K_{1,3}$ یکریخت‌اند عبارت است از

$$n\binom{n-1}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6} = 4\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 4\binom{n}{4}$$

۷. رأسهای $K_{m,n}$ را می‌توان به‌صورت $V_1 \cup V_2$، که در آن $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$، چنان افراز کرد که هر یال گراف به‌صورت $\{x, y\}$، $x \in V_1$ و $y \in V_2$، باشد.

الف) برای به‌دست آوردن دوری به طول چهار، باید از هر یک از دو مجموعهٔ V_1 و V_2 دو رأس انتخاب کنیم. این کار را می‌توان به $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$ طریق انجام داد و این انتخابها دورهای متمایزی به طول چهار به‌دست می‌دهند. [یادداشت: مثلاً فرض‌کنید a و b را از V_1 و c و d را از V_2 انتخاب کنیم. دراین‌صورت بین دورهای $a \to c \to b \to d \to a$ و $a \to d \to b \to c \to a$ تمایزی قائل نمی‌شویم.]

ب) هر مسیر به طول دو دارای یک رأس درجهٔ ۲ و دو رأس درجهٔ ۱ است (این درجه‌ها را نسبت به مسیر

درنظرگرفته‌ایم). اگر رأس درجهٔ ۲ در V_1 باشد، دراین‌صورت $m\binom{n}{2}$ تا از این نوع مسیرها وجود دارد. اگر رأس درجهٔ ۲ در V_2 باشد، دراین‌صورت $n\binom{m}{2}$ تا از این نوع مسیرها وجود دارد. بنابراین، تعداد مسیرهای به طول ۲ در $K_{m,n}$ عبارت است از

$$m\binom{n}{2} + n\binom{m}{2} = \frac{1}{2}(mn)(m+n-2)$$

پ) در اینجا هر مسیر به طول ۳ به‌صورت $a \to b \to c \to d$ است، که در آن $a, c \in V_1$ و $b, d \in V_2$. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $(m)(n)(m-1)(n-1) = 4\binom{m}{2}\binom{n}{2}$ تا از این نوع مسیرها وجود دارد.

۸. الف) ۲ ب) ۶(یعنی 3×2) پ) ۱۴(یعنی 7×2) ت) $2m$

۹. الف) ۶

ب) $\frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times 6 \times 2 \times 5 \times 1 \times 4 = 2520$

پ) ۵۰۲۹۵۱۶۸۰۰۰

ت) $\left(\frac{1}{2}\right)(n)(m)(n-1)(m-1)(n-2)\cdots(2)\big(n-(m+1)\big)(1)(n-m)$

۱۰. فرض می‌کنیم $G = (V, E)$ گرافی دوبخشی باشد، که در آن $V = V_1 \cup V_2$ و $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. اگر G دوری به طول فرد داشته باشد، دراین‌صورت یالی به‌صورت $\{x, y\}$ در این دور وجود دارد به‌طوری‌که $x, y \in V_1$ (یا $x, y \in V_2$). این نتیجه با تعریف گراف دوبخشی در تناقض است.

۱۱. V را به‌صورت $V_1 \cup V_2$، که در آن $|V_1| = m$ و $|V_2| = v - m$، افراز کنید. چون G دوبخشی است، تعداد ماکسیمم یالهایی که G می‌تواند داشته باشد برابر است با

$$m(v-m) = -\left[m - \left(\frac{v}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$$

که تابعی از m است. اگر v زوج باشد، $m = \frac{v}{2}$ عبارت $m(v-m)$ را ماکسیمم می‌کند و این ماکسیمم برابر است با

$$m(v-m) = \frac{v}{2}\left[v - \left(\frac{v}{2}\right)\right] = \left(\frac{v}{2}\right)^2$$

اگر v فرد باشد، $m = \frac{v-1}{2}$ یا $m = \frac{v+1}{2}$ عبارت $m(v-m)$ را ماکسیمم می‌کند و این ماکسیمم برابر است با

$$m(v-m) = \frac{v-1}{2}\left(v - \frac{v-1}{2}\right) = \frac{v-1}{2} \times \frac{v+1}{2} = \frac{v+1}{2}\left(v - \frac{v+1}{2}\right)$$
$$= \frac{v^2-1}{4}\left\lfloor\left(\frac{v}{2}\right)^2\right\rfloor < \left(\frac{v}{2}\right)^2$$

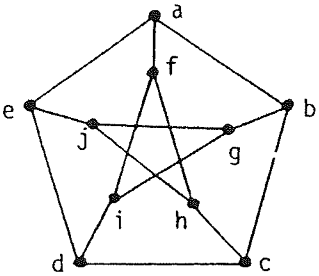
بنابراین، اگر $|E| > \left(\frac{v}{2}\right)^2$، G نمی‌تواند دوبخشی باشد.

۱۲. الف) ۳ تا از این نوع گرافها وجود دارد: (یک) $K_{1,5}$، (دو) $K_{2,4}$ و (سه) $K_{3,3}$.

ب) $\frac{n}{2}$، که در آن $n \in \mathbf{Z}^+$ و $n \geq 2$.

۱۳. الف)

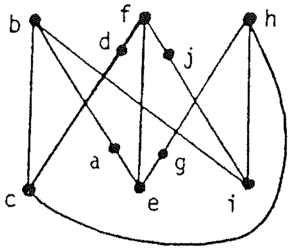
$a : \{۱, ۲\}$	$f : \{۴, ۵\}$
$b : \{۳, ۴\}$	$g : \{۲, ۵\}$
$c : \{۱, ۵\}$	$h : \{۲, ۳\}$
$d : \{۲, ۴\}$	$i : \{۱, ۳\}$
$e : \{۳, ۵\}$	$j : \{۱, ۴\}$



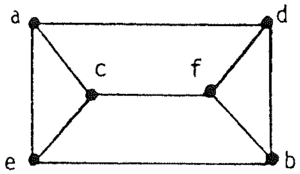
ب) G با گراف پترسن یکریخت است. (شکل ۱۱ ۰ ۴۸ (الف) را ببینید.)

۱۴.

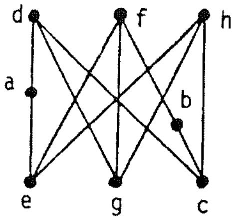
(۱)



(۲)

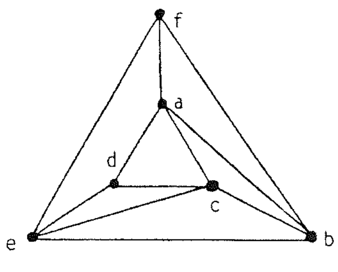


(۳)

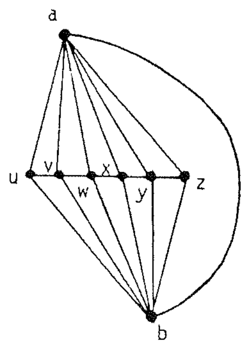


گراف (۱) نشان می‌دهد که گراف اول شامل زیرگرافی همریخت با $K_{3,3}$ است و بنابراین، مسطح نیست. گراف دوم، مسطح و با دومین گراف از این تمرین یکریخت است. گراف سوم حاوی زیرگرافی همریخت با $K_{3,3}$ است و بنابراین گراف سوم مسطح نیست.

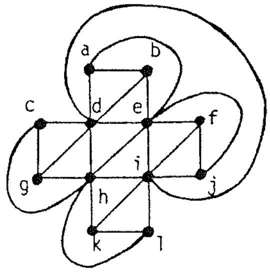
(۴)



(۵)



(۶)



۱۵. $|E| = 9$ کمترین مقدار ممکن برای $|E|$ است. در این حالت، G با $K_{3,3}$ یکریخت است.

۱۶. توجه کنید که چگونه در شکل ۱۱ ۰ ۴۸ (الف)، رأسهای گراف پترسن نشانگذاری شده‌اند. تناظری که به‌صورت زیر بین رأسها ارائه شده است یک یکریختی برای این دوگراف به‌دست می‌دهد.

$$\begin{array}{ccccc} a \to s & b \to v & c \to z & d \to y & e \to t \\ f \to u & g \to r & h \to w & i \to x & j \to q \end{array}$$

۱۷. الف) ۱۷ رأس، ۳۴ یال و ۱۹ ناحیه وجود دارد و $v - e + r = ۱۷ - ۳۴ + ۱۹ = ۲$.

ب) در اینجا ۱۰ رأس، ۲۴ یال و ۱۶ ناحیه می‌یابیم و $v - e + r = ۱۰ - ۲۴ + ۱۶ = ۲$.

۱۸. برهان: چون مرز هر ناحیه شامل دست‌کم پنج یال است، پس $۲|E| > ۵ \times ۵۳$ یا $|E| \geq \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵۳$. با توجه به قضیهٔ ۱۱ ۰ ۶ داریم

$$|V| = |E| - ۵۳ + ۲ = |E| - ۵۱ \geq \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵۳ - ۵۱ = \frac{۲۶۵}{۲} - ۵۱ = ۸۱\frac{۱}{۲}$$

بنابراین، $|V| \geq ۸۲$.

۲۰. الف) به‌ازای هر مؤلفهٔ G مانند $C_i = (V_i, E_i)$، $۱ \leq i \leq n$، اگر $e_i = |E_i|$ و $v_i = |V_i|$، دراین‌صورت $e_i - v_i + ۲ = r_i$. اگر وقتی i از ۱ تا n تغییر می‌کند برابریهای اخیر را با هم جمع کنیم، می‌بینیم که $e - v + ۲n = r + (n - ۱)$، زیرا ناحیهٔ بیکران را $n = \kappa(G)$ بار شمرده‌ایم. بنابراین،

$$e - v + n + ۱ = r = e - v + \left[\kappa(G) + ۱\right] = r$$

ب) با استفاده از همان نمادگذاری قسمت (الف)، به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$ داریم $۳r_i \leq ۲e_i$ و بنابراین، $۳r \leq \sum_{i=۱}^{n}(۳r_i) \leq \sum_{i=۱}^{n} ۲e_i = ۲e$. همچنین، به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$ داریم $e_i \leq ۳v_i - ۶$ و درنتیجه،

$$e = \sum_{i=۱}^{n} e_i \leq \sum_{i=۱}^{n}(۳v_i - ۶) = ۳v - ۶n \leq ۳v - ۶$$

۲۱. اگر این‌طور نباشد، آن‌گاه به‌ازای هر $v \in V$ داریم $\deg(v) \geq ۶$. دراین‌صورت، $۲e = \sum_{v\in V} \deg(v) \geq ۶|V|$ و بنابراین، $e \geq ۳|V|$. این نابرابری با $e \leq ۳|V| - ۶$ (فرع ۱۱ ۰ ۳) در تناقض است.

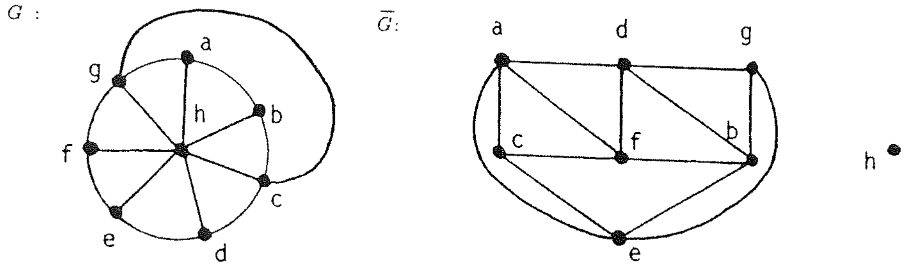
۲۲. الف) فرض کنید $G = (V, E)$، که در آن $|V| = ۱۱$. دراین‌صورت $\overline{G} = (V, E_۱)$، که در آن $\{a, b\} \in E_۱$ اگر و فقط اگر $\{a, b\} \notin E$. فرض کنیم $e = |E|$ و $e_۱ = |E_۱|$. اگر هم G مسطح باشد هم $\overline{G}$، آن‌گاه بنابر فرع ۱۱ ۰ ۳ (و در صورت لزوم، قسمت (ب) از تمرین ۲۰) داریم

$$e \leq ۳|V| - ۶ = ۳۳ - ۶ = ۲۷$$

و $e_۱ \leq ۳|V| - ۶ = ۲۷$، ولی با توجه به $|V| = ۱۱$، $\binom{۱۱}{۲} = ۵۵$ یال در $K_{۱۱}$ وجود دارد و بنابراین، $|E| + |E_۱| = ۵۵$ و درنتیجه، یا $e \geq ۲۸$ یا $e_۱ \geq ۲۸$. بنابراین، یکی از دوگراف G و $\overline{G}$ باید مسطح باشد.

اگر $G = (V, E)$ و $|V| > ۱۱$، زیرگرافی از G چنان انتخاب می‌کنیم که مجموعهٔ رأسهایش $V' \subset V$ در $|V'| = ۱۱$ صدق کند.

ب)



۲۳. الف) $۲e \geq kr = k(۲ + e - v) \Longrightarrow (۲ - k)e \geq k(۲ - v) \Longrightarrow e \leq \frac{k}{k-۲}(v - ۲)$

ب) ۴

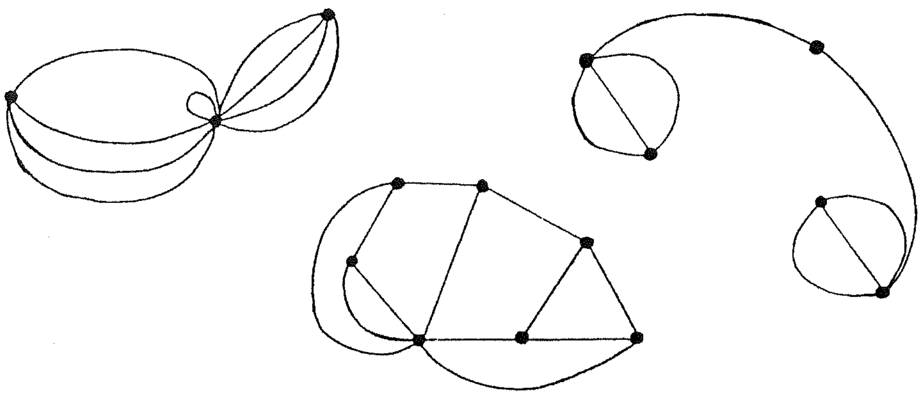
پ) در $K_{۳,۳}$ داریم $e = ۹$ و $v = ۶$. پس

$$\frac{k}{k-۲}(v-۲) = \frac{۴}{۲} \times ۴ = ۸ < ۹ = e$$

پس، با توجه به همبندی، $K_{۳,۳}$ باید مسطح باشد.

ت) در اینجا داریم $k = ۵$، $v = ۱۰$، $e = ۱۵$ و $\frac{k}{k-۲}(v-۲) = \frac{۵}{۳} \times ۸ = \frac{۴۰}{۳} < ۱۵ = e$. پس، باتوجه به همبندی، گراف پترسن باید غیرمسطح باشد.

۲۴. الف)

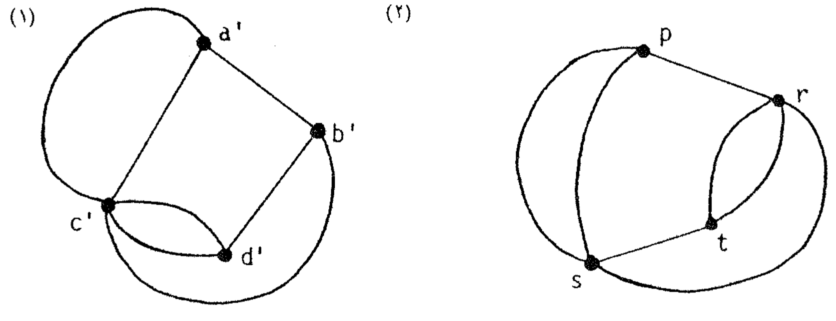


ب) رأس آویزان وجود ندارد. این هم با شرط مذکور در تناقض نیست، زیرا طوقه‌ها شامل رأسها و یالهای دیگری از گراف هستند.

۲۵. دوگان گراف چهاروجهی (در شکل ۱۱ ۰ ۵۴(ب)) با خودگراف یکی است. دوگان گراف مکعب در شکل ۱۱ ۰ ۵۴(ت)، گراف هشت‌وجهی است و برعکس. به همین ترتیب، دوگان گراف دوازده‌وجهی، گراف بیست‌وجهی است و برعکس.

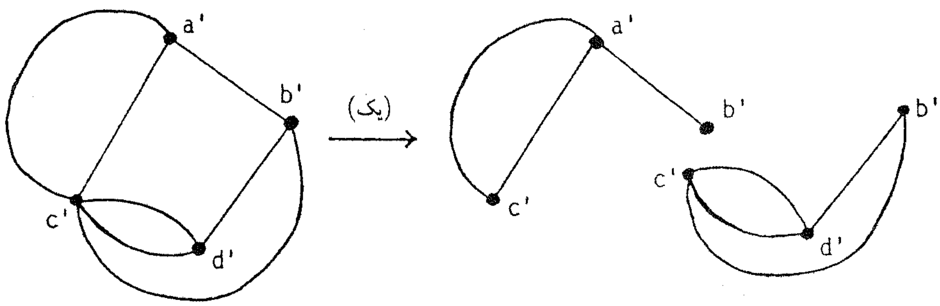
۲۶. الف) تناظر $a \to v$، $b \to w$، $c \to y$، $d \to z$، $e \to x$، یکریختی‌ای به‌دست می‌دهد.

ب)



پ) درگراف اول از قسمت (ب)، درجهٔ رأس c' برابر با ۵ است. چون درگراف دوم رأس درجهٔ ۵ وجود ندارد، این دوگراف نمی‌توانند یکریخت باشند.

ت)

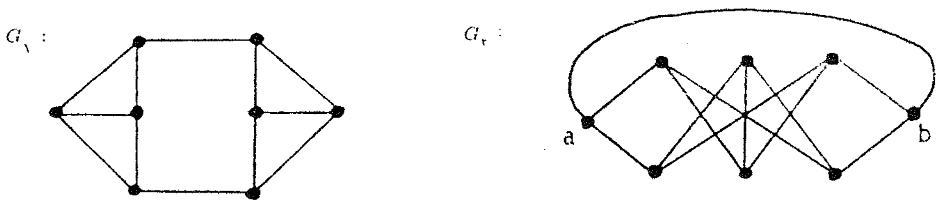


ث) $\{\{a', c'\}, \{c', b'\}, \{b', a'\}\}$ ، $\{\{p, r\}, \{r, t\}, \{r, t\}, \{r, s\}\}$.

۲۷. (یک) $\{\{k, m\}, \{m, s\}\}$ (دو) $\{\{j, k\}, \{k, s\}, \{k, m\}\}$

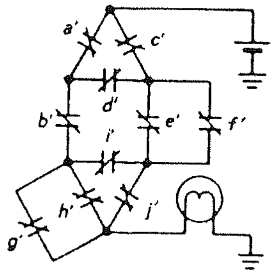
۲۸. الف) $\sum_{v \in V} \deg(v) = ۲۴ = ۲|E|$ و بنابراین، $|E| = ۱۲$.

ب)



اگر یال $\{a, b\}$ را ازگراف G_2 حذف کنیم، زیرگراف حاصل با $K_{3,3}$ همسانریخت است.

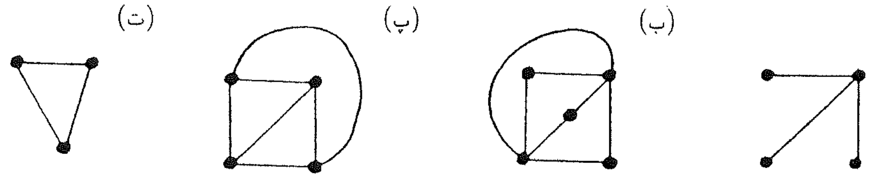
.۲۹



بند ۵.۱۱

.۱

(ت) (پ) (ب) (الف)



۲. این گراف یک مسیر (دور) است.

۳. الف) دور همیلتونی: $a \to g \to k \to i \to h \to b \to c \to d \to j \to f \to e \to a$

ب) دور همیلتونی: $a \to d \to b \to e \to g \to j \to i \to f \to h \to c \to a$

پ) دور همیلتونی: $a \to h \to e \to f \to g \to i \to d \to c \to b \to a$

ت) یالهای $\{a,c\}$، $\{c,d\}$، $\{d,b\}$، $\{b,e\}$، $\{e,f\}$ و $\{f,g\}$ مسیری همیلتونی برای گراف مفروض تشکیل می‌دهند. ولی دور همیلتونی وجود ندارد، زیرا چنین دوری الزاماً باید شامل یالهای $\{b,d\}$، $\{b,e\}$، $\{a,c\}$، $\{a.e\}$، $\{g,f\}$ و $\{g,e\}$ باشد و درنتیجه، درجهٔ رأس e بزرگتر از ۲ خواهد بود.

ث) مسیر $a \to b \to c \to d \to e \to j \to i \to h \to g \to f \to k \to l \to m \to n \to o$ یکی از مسیرهای همیلتونی ممکن برای این گراف است. حالت ممکن دیگر مسیر زیر است:

$$a \to b \to c \to d \to i \to h \to g \to f \to k \to l \to m \to n \to o \to j \to e$$

ولی دور همیلتونی وجود ندارد. درحقیقت، اگر بکوشیم دوری همیلتونی بسازیم، باید یالهای $\{a,b\}$، $\{a,f\}$، $\{f,k\}$، $\{k,l\}$، $\{d,e\}$، $\{e,j\}$، $\{j,o\}$ و $\{n,o\}$ را در این دور بگنجانیم. دراین‌صورت مجبوریم یالهای $\{f,g\}$ و $\{i,j\}$ را از بحث خارج کنیم. اکنون رأس i را درنظر بگیرید. اگر یالهای $\{d,i\}$ و $\{i,n\}$ را به‌کار ببریم، دوری با رأسهای d، e، j، o، n و i داریم و درنتیجه، نمی‌توانیم دوری همیلتونی برای گراف مفروض به‌دست آوریم. بنابراین، باید فقط یکی از یالهای $\{d,i\}$ و $\{i,n\}$ را به‌کار ببریم. با توجه به تقارن

موجود در این گراف، یال $\{d,i\}$، و سپس یال $\{h,i\}$، را انتخاب می‌کنیم که درنتیجه، در دور همیلتونی‌ای که در حال ساختن آن هستیم، درجهٔ رأس i برابر با ۲ خواهد بود. چون یالهای $\{d,i\}$ و $\{d,e\}$ را به‌کار برده‌ایم، یال $\{c,d\}$ را حذف می‌کنیم و این ما را مجبور می‌کند که یالهای $\{b,c\}$ و $\{c,h\}$ را در این ساختمان بگنجانیم. همچنین، باید یال $\{m,n\}$ را نیز منظور کنیم، زیرا یال $\{i,n\}$ را از بحث خارج کردیم. سپس یالهای $\{h,m\}$، $\{h,g\}$ و $\{b,g\}$ را حذف می‌کنیم. سرانجام، باید یال $\{m,l\}$ را بگنجانیم و سپس یال $\{l,g\}$ را حذف کنیم. اکنون هر چهار یال $\{b,g\}$، $\{f,g\}$، $\{h,g\}$ و $\{l,g\}$ حذف شده‌اند و درنتیجه، g تنها شده است.

ج) در این گراف، دور همیلتونی

$$a \to b \to c \to d \to e \to j \to i \to h \to g \to l \to m \to n \to o \to t \to s \to$$
$$r \to q \to p \to k \to f \to a$$

را می‌یابیم.

۴. الف) گراف شکل ۱۱ . ۴۸ (الف) را می‌یابیم. یک حالت را ثابت می‌کنیم. از رأس a شروع می‌کنیم و مسیر جزئی $a \to f \to i \to d$ را درنظر می‌گیریم. این انتخابها ما را مجبور می‌کنند که یالهای $\{f,h\}$ و $\{g,i\}$ را از بحث خارج کنیم، زیرا هر یک از رأسهای گراف باید دقیقاً روی دو تا از یالهای دور همیلتونی قرارگیرند. از رأس d می‌توانیم یا به رأس c برویم یا به رأس e. (یک) اگر به رأس c برویم، یال $\{e,d\}$ را از بحث خارج می‌کنیم، ولی باید یالهای $\{e,j\}$ و $\{e,a\}$ را منظورکنیم و این ما را به حذف یال $\{a,b\}$ ملزم می‌کند. اکنون باید رأس b را درنظر بگیریم، زیرا پس از حذف یال $\{a,b\}$ مجبوریم یالهای $\{b,g\}$ و $\{b,c\}$ را در دور بگنجانیم. این ما را ملزم می‌کند که یال $\{c,h\}$ را از بحث خارج کنیم. اکنون یالهای $\{f,h\}$ و $\{c,h\}$ حذف شده‌اند و فقط یک یال دیگر وجود دارد که از h می‌گذرد و بنابراین، نمی‌توان دوری همیلتونی به‌دست آورد. (دو) با انتخاب رأس e پس از d، یال $\{d,c\}$ را حذف و یالهای $\{c,h\}$ و $\{b,c\}$ را منظور می‌کنیم. پس از حذف $\{g,i\}$، باید $\{g,b\}$ و $\{g,j\}$ را بگنجانیم. این ما را به حذف $\{a,b\}$ و منظورکردن $\{a,e\}$ (و حذف $\{e,j\}$) مجبور می‌کند. اکنون دوری شامل a، f، i، d و e داریم و بنابراین، این روش هم با شکست مواجه می‌شود.

با وجود این گراف دارای مسیر همیلتونی $g \to i \to f \to h \to j \to e \to d \to c \to b \to a$ است.

ب) مثلاً، رأس j و یالهای $\{e,j\}$، $\{g,j\}$ و $\{h,j\}$ را حذف کنید. دراین‌صورت،

$$e \to a \to f \to h \to c \to b \to g \to i \to d \to e$$

دوری همیلتونی برای این زیرگراف به‌دست می‌دهد.

۵. الف) اگر یکی از رأسهای a، b یا g را حذف کنیم، زیرگراف حاصل دوری همیلتونی دارد. مثلاً، با حذف رأس a،

دور همیلتونی $b \to d \to c \to f \to g \to e \to b$ را می‌یابیم.

ب) اگر رأس g را حذف کنیم، دور همیلتونی زیر به‌دست می‌آید:

$$a \to b \to c \to d \to e \to j \to o \to n \to i \to h \to m \to l \to k \to f \to a$$

با حذف رأس i، وضعیتی متقارن پیش می‌آید.

۶. فرض می‌کنیم رأسهای واقع روی لبهٔ W_n متوالیاً عبارت باشند از $v_1, v_2, \dots, v_n$ و فرض می‌کنیم v_{n+1} رأس اضافی (یعنی، رأس مرکزی) W_n را نشان دهد. دراین‌صورت دورهای زیر، n دور همیلتونی برای گراف چرخی W_n به‌دست می‌دهند.

$$v_1 \to v_{n+1} \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n \to v_1, \qquad (1)$$
$$v_1 \to v_2 \to v_{n+1} \to v_3 \to v_4 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n \to v_1, \qquad (2)$$
$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_{n+1} \to v_4 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n \to v_1, \qquad (3)$$
$$\vdots$$
$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_{n+1} \to v_n \to v_1, \qquad (n-1)$$
$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n \to v_{n+1} \to v_1. \qquad (n)$$

۷. الف) $\left(\frac{1}{2}\right)(n-1)!$ ب) ۱۰ پ) ۹

۸. الف) رأسهای $K_{n,n}$ را به‌صورت $X \cup Y$، که در آن $|X| = |Y| = n$، افرازکنید. فرض کنید

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

و

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

به این ترتیب، هر یال $K_{n,n}$ به‌صورت $\{x_i, y_i\}$ است، که در آن $1 \le i, j \le n$. چون x_1 روی هر دور همیلتونی $K_{n,n}$ قرار دارد، کار را با x_1 شروع کنید. دراین‌صورت n انتخاب برای y_j، به‌طوری‌که $\{x_1, y_j\}$ در دور باشد، وجود دارد. از y_j می‌توانیم به $n-1$ طریق به X بازگردیم (زیرا نمی‌توانیم x_1 را مجدداً به کار ببریم) و به این ترتیب، یال دومی به‌صورت $\{y_j, x_i\}$، که در آن $2 \le i \le n$، حاصل می‌شود. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، $n!(n-1)!$ نتیجه وجود دارد. چون یالها جهتدار نشده‌اند، روی هم $\frac{1}{2}(n-1)!n!$ دور همیلتونی برای $K_{n,n}$ به‌دست می‌آوریم.

ب) در این حالت (مانند قسمت (الف)) رأس «آغازی» برای مسیری همیلتونی، رأسی از X یا Y است و دراین‌صورت، رأس «پایانی» متعلق به مجموعهٔ دوم است. تعداد این نوع مسیرها $(n!)^2$ است. (یادداشت:

$n = 1$ در این قسمت معنی دارد، ولی برای فرمول قسمت (الف) بی‌معنی است.)

۹. فرض می‌کنیم $G = (V, E)$ گراف بی‌سوی بی‌طوقه‌ای باشد که دور فرد ندارد. فرض می‌کنیم که G همبند باشد، در غیراین‌صورت با مؤلفه‌های G کار می‌کنیم. رأس دلخواهی مانند x در V انتخاب کنید و فرض کنید

$$V_1 = \{v \in V | \text{طول کوتاهترین مسیر بین } v, x \text{، } d(x,v) \text{، فرد است}\}$$

و

$$V_2 = \{w \in V | \text{طول کوتاهترین مسیر بین } w, x \text{، } d(x,w) \text{، زوج است}\}$$

توجه کنید که (یک) $x \in V_2$، (دو) $V = V_1 \cup V_2$ و (سه) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ادعا می‌کنیم که هر یال متعلق به E مانند $\{a, b\}$، یک رأس در V_1 دارد و رأس دیگرش در V_2 است.

در حقیقت، فرض می‌کنیم $e = \{a, b\} \in E$ چنان باشد که $a, b \in V_1$. (استدلال برای حالت مربوط به $a, b \in V_2$ نیز به‌طور مشابهی انجام می‌گیرد.) فرض می‌کنیم

$$E_a = \{\{a, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{m-1}, x\}\}$$

m یال موجود در یکی ازکوتاهترین مسیرهای a به x و

$$E_b = \{\{b, v'_1\}, \{v'_1, v'_2\}, \ldots, \{v'_{n-1}, x\}\}$$

n یال موجود در یکی از کوتاهترین مسیرهای b به x باشد. دراین‌صورت m و n هر دو فردند. اگر $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\} \cap \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n-1}\} = \emptyset$، آن‌گاه مجموعهٔ

$$E' = \{\{a, b\}\} \cup E_a \cup E_b$$

دور فردی در G به‌دست می‌دهد. اگر این‌طور نباشد، فرض می‌کنیم $w(w \neq x)$ اولین رأسی باشد که این دو مسیر در آنجا به هم می‌رسند و به‌ازای اندیسهایی مانند $1 \leq i \leq m-1$ و $1 \leq j \leq n-1$، فرض می‌کنیم

$$E'' = \{\{a, b\}\} \cup \{\{a, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_i, w\}\} \cup \{\{b, v'_1\}, \{v'_1, v'_2\}, \ldots, \{v'_j, w\}\}$$

دراین‌صورت یا E'' دور فردی برای G به‌دست می‌دهد یا $E' - E''$ حاوی دور فردی برای G است.

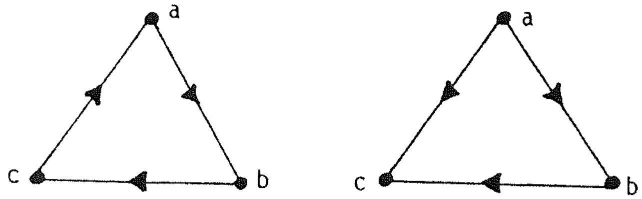
۱۰. الف) فرض می‌کنیم G دوری همیلتونی مانند C داشته باشد. دراین‌صورت C دارای $|V|$ یال است و رأسهای C باید یک در میان متعلق به V_1 و V_2 باشند، زیرا G دوبخشی است. درنتیجه، $|V|$ الزاماً باید زوج باشد و $|V_1| = |V_2|$.

ب) به‌همین ترتیب، اگر G مسیری همیلتونی مانند P داشته باشد، دراین‌صورت P دارای $|V| - 1$ یال است و رأسهای P باید یک در میان متعلق به V_1 و V_2 باشند. چون $|V_1| \neq |V_2|$، نتیجه می‌گیریم که $|V_1| - |V_2| = \pm 1$.

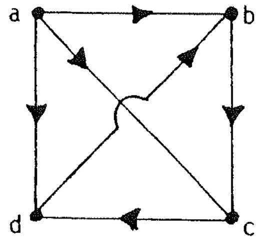
پ) فرض می‌کنیم $V=\{a,b,c,d,e\}$، $V_۱=\{a,b\}$، $V_۲=\{c,d,e\}$ و

$E=\big\{\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\}\big\}$

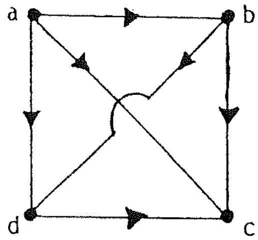
۱۱. الف)



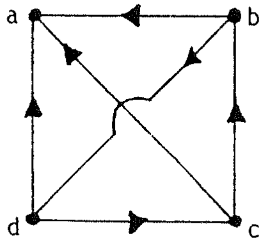
ب)



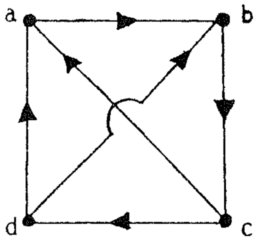
$\mathrm{od}(a)=۳$	$\mathrm{id}(a)=۰$
$\mathrm{od}(b)=۱$	$\mathrm{id}(b)=۲$
$\mathrm{od}(c)=۱$	$\mathrm{id}(c)=۲$
$\mathrm{od}(d)=۱$	$\mathrm{id}(d)=۲$



$\mathrm{od}(a)=۳$	$\mathrm{id}(a)=۰$
$\mathrm{od}(b)=۲$	$\mathrm{id}(b)=۱$
$\mathrm{od}(c)=۰$	$\mathrm{id}(c)=۳$
$\mathrm{od}(d)=۱$	$\mathrm{id}(d)=۲$

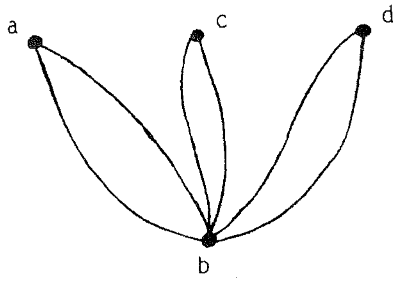


$\mathrm{od}(a)=۰$	$\mathrm{id}(a)=۳$
$\mathrm{od}(b)=۲$	$\mathrm{id}(b)=۱$
$\mathrm{od}(c)=۲$	$\mathrm{id}(c)=۱$
$\mathrm{od}(d)=۲$	$\mathrm{id}(d)=۱$



$\mathrm{od}(a)=۱$	$\mathrm{id}(a)=۲$
$\mathrm{od}(b)=۱$	$\mathrm{id}(b)=۲$
$\mathrm{od}(c)=۲$	$\mathrm{id}(c)=۱$
$\mathrm{od}(d)=۲$	$\mathrm{id}(d)=۱$

۱۲. در اینجا $|E|=\binom{n}{۲}=\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ و $\sum_{v\in V}\mathrm{od}(v)=\binom{n}{۲}=\sum_{v\in V}\mathrm{id}(v)$.



۱۳. در گراف چندگانهٔ شکل روبه‌رو داریم $|V| = ۴$،

$$\deg(a) = \deg(c) = \deg(d) = ۲$$

و $\deg(b) = ۶$. بنابراین، به‌ازای هر دو رأس غیرمجاور $x, y \in V$ داریم

$$\deg(x) + \deg(y) \geq ۴ > ۳ = ۴ - ۱$$

ولی این گراف چندگانه مسیر همیلتونی ندارد.

۱۴. فرض کنید G مسیری با بیش از سه رأس باشد.

۱۵. به‌ازای هر $x, y \in V$، داریم $\deg(x) + \deg(y) \geq ۲ \times \frac{n-۱}{۲} = n - ۱$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر از قضیهٔ ۱۱ ۰ ۸ به‌دست می‌آید.

۱۶. برهان: فرض می‌کنیم $a, b \in V$، که در آن $\{a, b\} \notin E$. دراین‌صورت

$$\deg(a) + \deg(b) \geq \frac{n}{۲} + \frac{n}{۲} = n$$

و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر از قضیهٔ ۱۱ ۰ ۹ به‌دست می‌آید.

۱۷. به‌ازای $n \geq ۵$ فرض می‌کنیم $C_n = (V, E)$ دور n رأسی را نشان دهد. دراین‌صورت C_n دوری همیلتونی دارد (درحقیقت، C_n خود یک دور همیلتونی است)، ولی به‌ازای هر $v \in V$ داریم $\deg(v) = ۲ < \frac{n}{۲}$.

۱۸. گرافی ۱۲ رأسی رسم کنید، برای هر نفر یک رأس. اگر دو نفر با هم آشنا باشند، یالی بین رأسهای متناظر آنها رسم کنید. بنابر قضیهٔ ۱۱ ۰ ۹، این گراف دور همیلتونی دارد و این دور یکی از این نوع ترتیبها را برای نشستن به دست می‌دهد.

۱۹. این نتیجه از قضیهٔ ۱۱ ۰ ۹ به‌دست می‌آید، زیرا به‌ازای هر دو رأس غیرمجاور $x, y \in V$ داریم $\deg(x) + \deg(y) = ۱۲ > ۱۱ = |V|$.

۲۰. برهان: فرض می‌کنیم $x, y \in V$ و $\{x, y\} \in E$. درنتیجه، x و y در $\overline{G}$ غیرمجاورند. در $\overline{G}$ می‌بینیم که $\deg_{\overline{G}}(x) = \deg_{\overline{G}}(y) \geq ۲n + ۲ - n = n + ۲$ و بنابراین

$$\deg_{\overline{G}}(x) + \deg_{\overline{G}}(y) = ۲n + ۴ > ۲n + ۲ = |V|$$

درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۱ ۰ ۹، گراف $\overline{G}$ دور همیلتونی دارد.

۲۱. وقتی $n = ۵$، گرافهای $C_۵$ و $\overline{C}_۵$ یکریخت‌اند و هر یک از آنها یک دور همیلتونی پنج رأسی است.

به‌ازای $n \geq ۶$ فرض می‌کنیم u و v دو رأس غیرمجاور در $\overline{C}_n$ باشند. چون $\deg(u) = \deg(v) = n - ۳$، می‌بینیم که $\deg(u) + \deg(v) = ۲n - ۶$. همچنین،

$$۲n - ۶ \geq n \iff n \geq ۶$$

و بنابراین، از قضیهٔ ۱۱ ۰ ۹ نتیجه می‌شود که وقتی $n \geq ۶$، همدور $\overline{C}_n$ شامل دوری همیلتونی است.

۲۲. الف) اگر $x \neq v$ و $y \neq v$، آن‌گاه $\deg(x) = \deg(y) = n - ۲$ و به‌ازای $n \geq ۴$،

$$\deg(x) + \deg(y) = ۲n - ۴ \geq n$$

اگر یکی از دو رأس x و y، مثلاً x، همان v باشد، دراین‌صورت $\deg(x) = ۲$، $\deg(y) = n - ۲$ و $\deg(x) + \deg(y) = n$.

ب) با توجه به قسمت (الف)، به‌ازای هر دو رأس غیرمجاور $x, y \in V$ داریم $\deg(x) + \deg(y) \geq n$. به‌این ترتیب، بنابر قضیهٔ ۱۱ ۰ ۹، G_n دور همیلتونی دارد.

پ) در اینجا $|E| = \binom{n-۱}{۲} - ۱ + ۲$ که در آن، عدد ۱ را به‌خاطر یال $\{v_۱, v_۲\}$ کم کرده‌ایم و عدد ۲ را به‌خاطر یالهای $\{v_۱, v\}$ و $\{v, v_۲\}$ افزوده‌ایم. درنتیجه، $|E| = \binom{n-۱}{۲} + ۱$.

ت) نتایج قسمتهای (ب) و (پ) فرع ۱۱ ۰ ۶ را نقض نمی‌کنند. این نتایج نشان می‌دهند که عکس این فرع، همانند وارون آن، نادرست است.

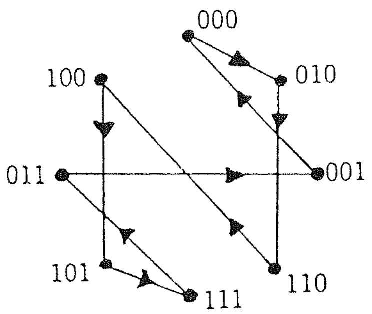
۲۳. الف) مسیر $v \to v_۱ \to v_۲ \to v_۳ \to \cdots \to v_{n-۱}$ مسیری همیلتونی برای H_n به‌دست می‌دهد. چون $\deg(v) = ۱$، این گراف نمی‌تواند دور همیلتونی داشته باشد.

ب) در اینجا $|E| = \binom{n-۱}{۲} + ۱$. (بنابراین، تعداد یالهای قید شده در فرع ۱۱ ۰ ۶ را نمی‌توان کاهش داد.)

۲۴. الف) چون گراف مفروض مسیر همیلتونی دارد، این مسیر را به‌کار می‌بریم و کدگری را به‌صورت زیر برای

۱, ۲, ۳, ..., ۸

می‌سازیم:



۲ : ۰۱۰	۱ : ۰۰۰
۴ : ۱۰۰	۳ : ۱۱۰
۶ : ۱۱۱	۵ : ۱۰۱
۸ : ۰۰۱	۷ : ۰۱۱

ب)

۴ : ۰۱۱۱	۳ : ۰۰۱۱	۲ : ۰۰۰۱	۱ : ۰۰۰۰
۸ : ۱۰۰۰	۷ : ۱۱۰۰	۶ : ۱۱۱۰	۵ : ۱۱۱۱
۱۲ : ۱۱۰۱	۱۱ : ۱۰۰۱	۱۰ : ۱۰۱۱	۹ : ۱۰۱۰
۱۶ : ۰۰۱۰	۱۵ : ۰۱۱۰	۱۴ : ۰۱۰۰	۱۳ : ۰۱۰۱

۲۵. الف) (یک) $\{a, c, f, h\}$، $\{a, g\}$ (دو) $\{z\}$، $\{u, w, y\}$

ب) (یک) $\beta(G) = ۴$ (دو) $\beta(G) = ۳$

پ) (یک) ۳ (دو) ۳ (سه) ۳ (چهار) ۴ (پنج) ۶

(شش) ماکسیمم m و n

ت) گراف کاملِ $|I|$ رأسی.

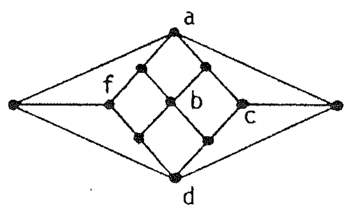
۲۶. الف) اگر این‌طور نباشد، یالی مانند $\{a,b\}$ در E وجود دارد به‌طوری که $a,b \in I$. این نتیجه با استقلال I در تناقض است.

ب) هر دور همیلتونی v رأسی باید v یال داشته باشد.

پ) فرض می‌کنیم مطابق شکل مقابل، $I = \{a,b,c,d,f\}$. در اینجا $v = ۱۱$، $e = ۱۸$ و

$$e - \sum_{v\in I} \deg(v) + ۲|I| = ۱۸ - (۴+۴+۳+۴+۳) + ۲ \times ۵ = ۱۰ < ۱۱$$

پس بنابر قسمت (ب)، گراف هرشل دور همیلتونی ندارد.



۲۷. الف) ۵؛ $\binom{۴}{۲} = ۶$

ب) $۱ + ۵ + \binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴} = ۱ + ۱ + \binom{۴}{۱} + \binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴} = ۱ + ۲^۴$

پ) $۱ + ۱ + ۵ + \binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۴} + \binom{۵}{۵} = ۱ + ۲^۵$

ت) $۱ + ۱ + n + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۳} + \cdots + \binom{n}{n} = ۱ + ۲^n$

بند ۶.۱۱

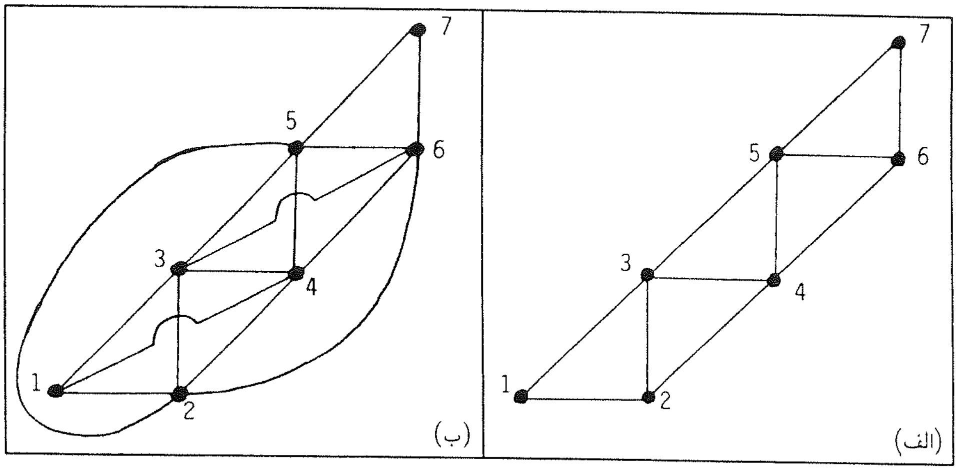
۱. برای هر گونه از این ماهیها یک رأس رسم کنید. اگر دوگونهٔ x و y باید در آکواریومهای مجزا نگهداری شوند، یال $\{x,y\}$ را رسم کنید. دراین‌صورت کمترین تعداد آکواریومهای لازم برابر است با عدد رنگی گراف حاصل.

۲. برای هر کمیته یک رأس رسم کنید، اگر کسی در دو کمیتهٔ c_i و c_j عضویت داشته باشد، یالی رسم کنید که رأسهای متناظر با c_i و c_j را به هم وصل کند. دراین‌صورت کمترین تعداد زمانهای برگزاری جلسات برابر است با عدد رنگی گراف حاصل.

۳. می‌توانیم این مسأله را با گرافها مدلسازی کنیم. برای هر قسمت از مسأله، گراف بی‌سوی $G = (V,E)$ را چنان رسم کنید، که در آن

$$V = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$$

و اگر بنا باشد ماده‌های شیمیایی i و j در قسمتهای مجزا نگهداری شوند، $\{i,j\} \in E$. برای قسمت (الف)، عدد رنگی گراف (در قسمت (الف) از شکل زیر) برابر با ۳ است و بنابراین، سه قسمت جداگانه برای نگهداری بی‌خطر این هفت مادهٔ شیمیایی لازم است.



اکنون گراف قسمت (ب) از این شکل را درنظر بگیرید. ملاحظه می‌کنید که زیرگراف القا شده به‌وسیلهٔ رأسهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ با $K_۵$ یکریخت است. درنتیجه، با توجه به این شرایط اضافی، برای نگهداری بی‌خطر این هفت مادهٔ شیمیایی پنج قسمت جداگانه لازم است.

۴. فرض کنید G دوری n رأسی باشد به‌طوری که n فرد است و $n \geq ۵$.

۵. الف) $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - ۱)^۳$.

ب) برای $G = K_{۱,n}$ می‌بینیم که $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - ۱)^n$. $\chi(K_{۱,n}) = ۲$.

۶. الف) (یک) در اینجا λ انتخاب برای رأس a، ۱ انتخاب برای رأس b (یعنی همان انتخابی که برای رأس a به‌عمل می‌آوریم) و $\lambda - ۱$ انتخاب برای هر یک از رأسهای x، y و z داریم. درنتیجه، $\lambda(\lambda - ۱)^۳$ رنگ‌آمیزی سره برای $K_{۲,۳}$ وجود دارد که در آنها، رنگ رأسهای a و b یکی است.

(دو) اکنون λ انتخاب برای رأس a، $\lambda - ۱$ انتخاب برای رأس b و $\lambda - ۲$ انتخاب برای هر یک از رأسهای x، y و z داریم. بنابراین، در اینجا $\lambda(\lambda - ۱)(\lambda - ۲)^۳$ رنگ‌آمیزی سره وجود دارد.

ب) چون دو حالت قسمت (الف) مانع و جامع‌اند، چندجمله‌ای رنگی $K_{۲,۳}$ برابر است با

$$\lambda(\lambda - ۱)^۳ + \lambda(\lambda - ۱)(\lambda - ۲)^۳ = \lambda(\lambda - ۱)(\lambda^۳ - ۵\lambda^۲ + ۱۰\lambda - ۷)$$

پ) $\chi(K_{۲,۳}) = ۲$.

ت) $P(K_{۲,n}, \lambda) = \lambda(\lambda - ۱)^n + \lambda(\lambda - ۱)(\lambda - ۲)^n$.

ث) $\chi(K_{۲,n}) = ۲$.

۷. الف) ۲

ب) ۲ (اگر n زوج باشد)، ۳ (اگر n فرد باشد)

پ) شکل ۱۱٫۰۵۴ (ت): ۲، شکل ۱۱٫۰۵۷ (الف): ۳، شکل ۱۱٫۰۸۰ (الف): ۲ و شکل ۱۱٫۰۸۰ (ب): ۳.

۸. اگر $G = (V, E)$ دوبخشی باشد، آن‌گاه $V = V_1 \cup V_2$، که در آن $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ و هر یال گراف به‌صورت $\{x, y\}$ است به‌طوری که $x \in V_1$ و $y \in V_2$. همهٔ رأسهای V_1 را با یک رنگ و همهٔ رأسهای V_2 را با یک رنگ دیگر رنگ کنید. دراین‌صورت $\chi(G) = 2$.

برعکس، اگر $\chi(G) = 2$، فرض می‌کنیم V_1 مجموعهٔ همهٔ رأسهایی باشد که یک رنگ مشترک دارند و V_2 مجموعهٔ همهٔ رأسهایی باشد که دارای رنگ مشترک دوم‌اند. دراین‌صورت، $V = V_1 \cup V_2$، $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ و هر یال G به‌گونه‌ای است که یک رأس در V_1 دارد و رأس دیگرش در V_2 است. بنابراین، G دوبخشی است.

۹. الف) (۱) $\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$؛

(۲) $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+2)$؛

(۳) $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+7)$.

ب) (۱) ۳؛ (۲) ۳؛ (۳) ۳

پ) (۱) ۷۲۰؛ (۲) ۱۰۲۰؛ (۳) ۴۲۰

۱۰. الف) این گرافها یکریخت نیستند. گراف اول دو رأس درجهٔ ۴ دارد که عبارت‌اند از f و k. گراف دوم سه رأس درجهٔ ۴ دارد که عبارت‌اند از u، w و z.

ب) برای گراف اول دو حالت درنظر می‌گیریم.

حالت (یک): رأسهای f و k یک رنگ دارند: در اینجا

$$\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

طریق برای رنگ‌آمیزی سرهٔ رأسها وجود دارد.

حالت (دو): رأسهای f و k دو رنگ مختلف دارند: در اینجا می‌توان رأسها را به

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$$

طریق به‌طور سره رنگ کرد.

بنابر قاعدهٔ جمع،

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2 + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$$
$$= \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda^2-5\lambda+8)$$

با استفاده از استدلالی مشابه و با درنظرگرفتن دو حالت برای رأسهای u و z، می‌بینیم که چندجمله‌ای رنگی گراف دوم عبارت است از

$$\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda^2-5\lambda+8)$$

پ) اگر G_1 و G_2 دوگراف باشند به‌طوری‌که $P(G_1,\lambda)=P(G_2,\lambda)$، آن‌گاه G_1 و G_2 الزاماً یکریخت نیستند.

۱۱. الف)
$$P(G_1,\lambda)=\frac{P(K_3,\lambda)\cdot P(K_3,\lambda)}{P(K_1,\lambda)}=\frac{[\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)]^2}{\lambda}$$
$$=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

ب) فرض می‌کنیم C_4 دوری به طول ۴ باشد. با توجه به مثال ۱۱ ۰ ۳۳ می‌دانیم که

$$P(C_4,\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda$$

بنابراین،

$$P(G_2,\lambda)=\frac{P(G_1\cdot\lambda)\cdot P(C_4,\lambda)}{P(K_2,\lambda)}$$
$$=\frac{\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda)}{\lambda(\lambda-1)}$$
$$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda^3-4\lambda^2+6\lambda-3)$$

پ)
$$P(G_3,\lambda)=\frac{P(K_3,\lambda)\cdot P(G_2,\lambda)}{P(K_2,\lambda)}$$
$$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3(\lambda^3-4\lambda^2+6\lambda-3)$$

ت)
$$P(G_4,\lambda)=\frac{P(K_5,\lambda)\cdot P(G_3,\lambda)}{P(K_4,\lambda)}$$
$$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^4(\lambda^3-4\lambda^2+6\lambda-3)$$

۱۲. الف) رأسی مانند $v\in V$ انتخاب و آن را با یکی از $\Delta+1$ رنگ موجود رنگ کنید. اگر $w\in V$ و w رنگ نشده باشد، با توجه به $\deg(w)\le\Delta$ می‌توانیم w را بدون استفاده از رنگهایی که برای رنگ‌آمیزی رأسهای مجاور به w به‌کار رفته‌اند، رنگ کنیم. این روش را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا همهٔ رأسهای V (به‌طور سره) رنگ شوند.

ب) به‌ازای $n\in\mathbf{Z}^+$، $n\ge 3$، داریم $\chi(K_n)=n=\Delta+1$

۱۳. الف) $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.

ب) از قضیهٔ ۱۰۰۱۱ نتیجه می‌شود.

پ) از قاعدهٔ حاصل‌ضرب نتیجه می‌شود.

ت)

$$\begin{aligned}P(C_n,\lambda) &= P(P_n,\lambda) - P(C_{n-1},\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1} - P(C_{n-1},\lambda)\\ &= \big[(\lambda-1)+1\big](\lambda-1)^{n-1} - P(C_{n-1},\lambda)\\ &= (\lambda-1)^n + (\lambda-1)^{n-1} - P(C_{n-1},\lambda)\\ &\Longrightarrow P(C_n,\lambda) - (\lambda-1)^n = (\lambda-1)^{n-1} - P(C_{n-1},\lambda)\end{aligned}$$

با گذاشتن $n-1$ به جای n می‌بینیم که

$$P(C_{n-1},\lambda)-(\lambda-1)^{n-1} = (\lambda-1)^{n-2}-P(C_{n-2},\lambda) = (-1)\big[P(C_{n-2},\lambda)-(\lambda-1)^{n-2}\big]$$

بنابراین،

$$P(C_n,\lambda) - (\lambda-1)^n = P(C_{n-2},\lambda) - (\lambda-1)^{n-2} = (-1)^2\big[P(C_{n-2},\lambda) - (\lambda-1)^{n-2}\big]$$

ث) با ادامهٔ قسمت (ت) می‌بینیم که

$$\begin{aligned}P(C_n,\lambda) &= (\lambda-1)^n + (-1)^{n-3}\big[P(C_3,\lambda) - (\lambda-1)^3\big]\\ &= (\lambda-1)^n + (-1)^{n-1}\big[\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - (\lambda-1)^3\big]\\ &= (\lambda-1)^n + (-1)^n(\lambda-1)\end{aligned}$$

۱۴. الف) $\chi(W_n) = \chi(C_n) + 1$. ($C_n$، n رأس و W_n، $n+1$ رأس دارد.)

ب) $P(W_n,\lambda) = \lambda P(C_n,\lambda-1) = \lambda\big[(\lambda-2)^n + (-1)^n(\lambda-2)\big]$

پ) (یک) و (دو) $P(W_5,\lambda) = \lambda(\lambda-2)^5 + (-1)^5\lambda(\lambda-2)$. برای k رنگ، $k \geq 4$، تعداد رنگ‌آمیزیهای سره برابر است با

$$P(W_5,k) = k(k-2)^5 + (-1)^5 k(k-2) = k(k-2)\big[(k-2)^4 - 1\big]$$

(سه) وقتی $k \geq 3$، تعداد رنگ‌آمیزیهای سرهٔ اتاقی شش ضلعی برابر است با

$$P(W_6,k) = k(k-2)^6 + (-1)^6 k(k-2) = k(k-2)\big[(k-2)^5 + 1\big]$$

۱۵. با توجه به قضیهٔ ۱۳۰۱۱، در بسط $P(G,\lambda)$ چندجمله‌ای رنگی K_n دقیقاً یک‌بار دیده می‌شود. چون گراف بزرگتری پیش نمی‌آید، این عبارت مشخص می‌کند که درجهٔ $P(G,\lambda)$ برابر با n و ضریب پیشرو آن است.

۱۶. الف)

$$
\begin{array}{llll}
|V|=۱: & P(G,\lambda)=\lambda & & \\
|V|=۲: & |E|=۰: & & P(G,\lambda)=\lambda^{۲} \\
 & |E|=۱: & & P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-۱)=\lambda^{۲}-\lambda \\
|V|=۳: & |E|=۰: & & P(G,\lambda)=\lambda^{۳} \\
 & |E|=۱: & & P(G,\lambda)=\lambda^{۲}(\lambda-۱)=\lambda^{۳}-\lambda^{۲} \\
 & |E|=۲: & & P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-۱)^{۲}=\lambda^{۳}-۲\lambda^{۲}+\lambda \\
 & |E|=۳: & & P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-۱)(\lambda-۲)=\lambda^{۳}-۳\lambda^{۲}+۲\lambda
\end{array}
$$

ب) فرض می‌کنیم $G=(V,E)$ گراف بی‌سوی بی‌طوقه‌ای باشد، که در آن $|V|=n\geq ۴$ و $|E|=k\geq ۱$. (اگر $k=۰$، $P(G,\lambda)=\lambda^{n}$ و نتیجهٔ موردنظر درست است.) با توجه به قضیهٔ ۱۱.۱۰، $P(G,\lambda)=P(G_{e},\lambda)-P(G'_{e},\lambda)$، که در آن $e=\{a,b\}$ یالی از G است. چون G_{e} دارای n رأس و $k-۱$ یال است، بنابر فرض استقرا داریم

$$P(G_{e},\lambda)=\lambda^{n}-(k-۱)\lambda^{n-۱}+c_{n-۲}\lambda^{n-۲}-c_{n-۳}\lambda^{n-۳}+\cdots+(-۱)^{n-۱}c_{۱}\lambda$$

که در آن $k-۱$ ضریب $c_{n-۲}$، $c_{n-۳}$، …، $c_{۱}$ منفی نیستند. (اگر در این فهرست، ضریبی صفر باشد، همهٔ ضریبهای بعدی نیز صفر خواهند بود.) به همین ترتیب، چون G'_{e} دارای $n-۱$ رأس است، بنابر فرض استقرا داریم

$$P(G'_{e},\lambda)=\lambda^{n-۱}-b_{n-۲}\lambda^{n-۲}+b_{n-۳}\lambda^{n-۳}-\cdots+(-۱)^{n-۲}b_{۱}\lambda$$

که در آن $b_{n-۲},b_{n-۳},\ldots,b_{۱}\geq ۰$.

دراین‌صورت،

$$
\begin{aligned}
P(G,\lambda)&=P(G_{e},\lambda)-P(G'_{e},\lambda)\\
&=\lambda^{n}-(k)\lambda^{n-۱}+\left(c_{n-۲}+b_{n-۲}\right)\lambda^{n-۲}+\cdots+(-۱)^{n-۱}(c_{۱}+b_{۱})\lambda
\end{aligned}
$$

پ) این را در قسمت (ب) ثابت کردیم.

۱۷. الف) به‌ازای $n\in\mathbf{Z}^{+}$، $n\geq ۳$، فرض می‌کنیم C_{n} دور n رأسی را نشان دهد.

اگر n فرد باشد، $\chi(C_{n})=۳$. ولی به‌ازای هر v در C_{n}، زیرگراف $C_{n}-v$ مسیری $n-۱$ رأسی است و $\chi(C_{n}-v)=۲$. بنابراین، اگر n فرد باشد C_{n} رنگ‌ـ بحرانی است.

اگر n زوج باشد، داریم $\chi(C_{n})=۲$ و به‌ازای هر v در C_{n} باز هم زیرگراف $C_{n}-v$ مسیری $n-۱$ رأسی است و $\chi(C_{n}-v)=۲$. درنتیجه، دورهایی که تعدادی زوج رأس دارند رنگ ـ بحرانی نیستند.

ب) به‌ازای هر گراف کامل K_{n}، $n\geq ۲$، داریم $\chi(K_{n})=n$ و به‌ازای هر رأس K_{n} مانند v، $K_{n}-v$ با $K_{n-۱}$ یکریخت است و بنابراین، $\chi(K_{n}-v)=n-۱$. درنتیجه، هر گراف کاملی که دست‌کم یک یال داشته باشد رنگ ـ بحرانی است.

پ) فرض کنید G همبند نباشد. فرض می‌کنیم $G_{۱}$ مؤلفه‌ای از G باشد به‌طوری‌که $\chi(G_{۱})=\chi(G)$ و فرض

می‌کنیم G_2 مؤلفهٔ دیگر G را نشان دهد. دراین‌صورت $\chi(G_1) \geq \chi(G_2)$ و به‌ازای هر v در G_2 می‌بینیم که

$$\chi(G-v) = \chi(G_1) = \chi(G)$$

پس G رنگ ـ بحرانی نیست.

ت) اگر این‌طور نباشد، فرض می‌کنیم $v \in V$ و $\deg(v) \leq k-2$. چون G رنگ ـ بحرانی است داریم $\chi(G-v) \leq k-1$ و بنابراین، می‌توانیم رأسهای زیرگراف $G-v$ را با حداکثر $k-1$ رنگ به‌طور سره رنگ کنیم. چون $\deg(v) \leq k-2$، حداکثر $k-2$ رنگ را برای رنگ‌آمیزی همهٔ رأسهای مجاور به v در G به‌کار برده‌ایم. بنابراین، برای رنگ‌آمیزی v به رنگ جدیدی (علاوه‌بر رنگهای لازم برای رنگ‌آمیزی زیرگراف $G-v$) نیاز نداریم و می‌توانیم همهٔ رأسهای G را با حداکثر $k-1$ رنگ، رنگ کنیم. این نتیجه با $\chi(G) = k$ در تناقض است.

تمرینات تکمیلی

۱. $\binom{n}{2} = 56 + 80 = 136 \Longrightarrow n(n-1) = 272 \Longrightarrow n = 17$

۲. الف) به‌ازای $v, w \in V$، اگر v و w در k مؤلفه تفاوت داشته باشند، دراین‌صورت مسیری به طول k از v به w وجود دارد که به این ترتیب به‌دست می‌آید که از v شروع و هر بار یک مؤلفه عوض می‌کنیم تا به رأس w برسیم.

ب) $|V| = 2^n$، $|E| = (n)(2^{n-1})$.

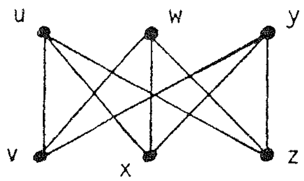
۳. الف) رأسهای K_6 را با a، b، ...، f نشانگذاری کنید. دست‌کم سه یال از پنج یالی که از a می‌گذرند یک رنگ، مثلاً رنگ قرمز، دارند. فرض می‌کنیم این یالها عبارت باشند از $\{a,b\}$، $\{a,c\}$ و $\{a,d\}$. اگر یالهای $\{b,c\}$، $\{c,d\}$ و $\{b,c\}$ آبی باشند، نتیجهٔ موردنظر حاصل شده است. در غیراین‌صورت، یکی از این یالها، مثلاً یال $\{c,d\}$، قرمز است و دراین‌صورت $\{a,c\}$، $\{a,d\}$ و $\{c,d\}$ مثلث قرمزی به‌دست می‌دهند.

ب) هر نفر را یک رأس بگیرید. اگر دو نفر دوست‌اند یک یال قرمز و اگر بیگانه‌اند یک یال آبی بین رأسهای متناظر رسم و سپس از قسمت (الف) استفاده کنید.

۴. الف) $|E| = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$.

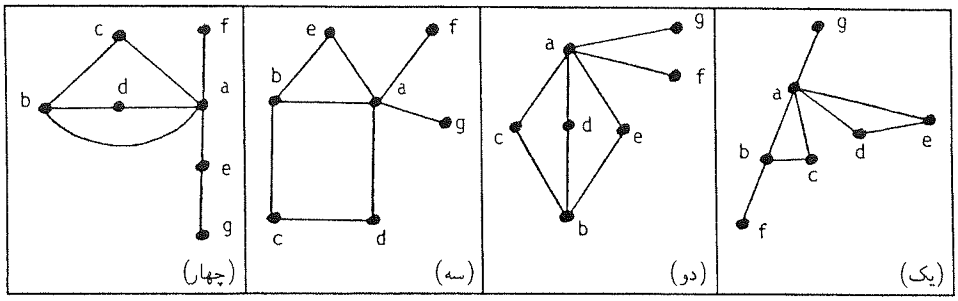
ب) هرگراف بی‌سوی G این ویژگی را دارد که اگر همبند نباشد، $\overline{G}$ همبند است. در این وضعیت داریم $G \cong \overline{G}$ و بنابراین، G همبند است.

۵. الف) می‌توانیم G_2 را مجدداً به‌صورت زیر رسم کنیم:



ب) ۷۲

۶. الف)



ب) هر چهار گراف قسمت (الف) همبندند.

۷. الف) فرض می‌کنیم رأسهای $K_{3,7}$ به‌صورت $V_1 \cup V_2$، که در آن $|V_1| = 3$ و $|V_2| = 7$، افراز شده باشند. دراین‌صورت $3 \times 7 \times 2 \times 6 \times 1 \times 5 = 1260$ مسیر به طول ۵ وجود دارد به‌طوری‌که هر یک از آنها شامل هر سه رأس متعلق به V_1 است.

ب) با توجه به همان مجموعه‌های V_1 و V_2 در قسمت (الف)، می‌بینیم که $\frac{1}{2} \times 3 \times 7 \times 2 \times 6 \times 1$ مسیر به طول ۴ وجود دارد که از رأسی متعلق به V_1 شروع و به رأسی متعلق به V_1 ختم می‌شوند. همچنین، $\frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times 6 \times 2 \times 5$ مسیر به طول ۴ وجود دارد که از رأسی متعلق به V_2 شروع و به رأسی متعلق به V_2 ختم می‌شوند. درنتیجه، $126 + 630 = 756$ مسیر به طول ۴ در $K_{3,7}$ وجود دارد.

پ) (حالت ۱: p فرد است و به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{N}$، $p = 2k + 1$). اگر $k = 0$، mn مسیر به طول $p = 1$ وجود دارد. تعداد مسیرهای به طول $p = 2k + 1 \geq 3$ برابر است با $(m)(n)(m-1)(n-1)\cdots(m-k)(n-k)$.

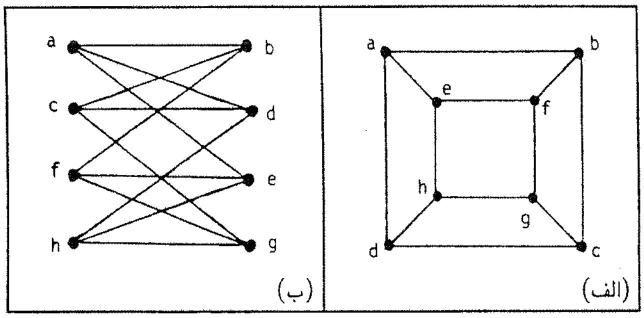
(حالت ۲: p زوج است و به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{Z}^+$، $p = 2k$). اگر $p < 2m$ (یعنی اگر $k < m$)، تعداد مسیرهای به طول p برابر است با

$$\frac{1}{2}(m)(n)(m-1)(n-1)\cdots\big(n-(k-1)\big)(m-k) + \frac{1}{2}(n)(m)(n-1)(m-1)\cdots\big(m-(k-1)\big)(n-k)$$

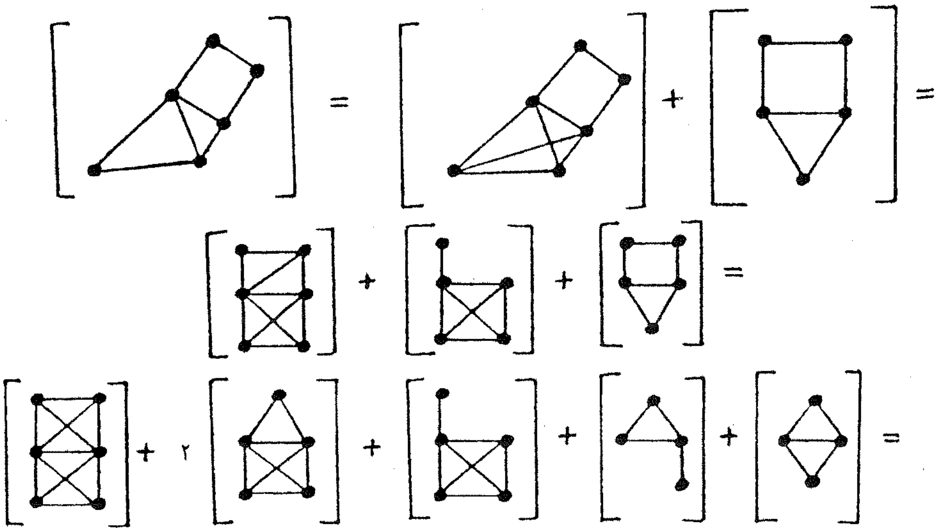
به‌ازای $p = 2m$ می‌بینیم که تعداد مسیرهای به طول $2m$ (یعنی طولانیترین مسیرها) برابر است با

$$\frac{1}{2}(n)(m)(n-1)(m-1)\cdots\big(m-(m-1)\big)(n-m)$$

۸. مطابق قسمت (ب) از شکل زیر، فقط گراف مکعب گرافی دوبخشی است. در هر یک از چهار گراف دیگر (شکلهای ۱۱۰۵۴ (ب) و ۱۱۰۵۵ را ببینید) دورهایی به طول فرد وجود دارد و درنتیجه، این گرافها نمی‌توانند دوبخشی باشند.



.۹



$$= \frac{\lambda^{(۴)}\lambda^{(۴)}}{\lambda^{(۲)}} + ۲\frac{\lambda^{(۳)}\lambda^{(۴)}}{\lambda^{(۲)}} + \frac{\lambda^{(۲)}\lambda^{(۴)}}{\lambda^{(۱)}} + \frac{\lambda^{(۳)}\lambda^{(۲)}}{\lambda^{(۱)}} + \frac{\lambda^{(۳)}\lambda^{(۳)}}{\lambda^{(۲)}}$$

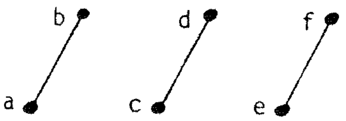
$$= \lambda^{(۳)}(\lambda - ۲)(\lambda^{۲} - ۳\lambda + ۳)$$

۱۰. الف) $(n = ۲)$: $X = \{۱, ۲\}$ و G از یک رأس مانند v که متناظر با X است تشکیل شده است.

$(n = ۳)$: $X = \{۱, ۲, ۳\}$. در اینجا G از سه رأس تنها تشکیل شده است.

$(n = ۴)$: $X = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. در این حالت، G شش رأس دارد و به‌صورت زیر رسم می‌شود:

$d : \{۲, ۴\}$	$a : \{۱, ۲\}$
$e : \{۱, ۴\}$	$b : \{۳, ۴\}$
$f : \{۲, ۳\}$	$c : \{۱, ۳\}$



ب) فرض می‌کنیم $v(\{a,b\})$ و $w(\{x,y\})$ دو رأس G باشند. اگر $\{a,b\}\cap\{x,y\}=\emptyset$، یال $\{v,w\}$ در G قرار دارد. اگر $\{a,b\}\cap\{x,y\}\neq\emptyset$، می‌توانیم بدون کاستن از کلیت فرض کنیم $a=x$ ولی $b\neq y$. بنابراین، a، b و y سه عنصر متمایز در X هستند و چون $|X|\geq ۵$، فرض می‌کنیم $c,d\in X$ به‌گونه‌ای باشند که $c\neq d$ و $c,d\notin\{a,b,y\}$. دراین‌صورت یالی از $\{a,b\}$ به $\{c,d\}$ و از $\{c,d\}$ به $\{x,y\}(x=a)$ وجود دارد، زیرا $\{a,b\}\cap\{c,d\}=\emptyset=\{c,d\}\cap\{x,y\}$. بنابراین، G همبند است.

پ) به‌ازای $n=۵$، G با گراف پترسن، که گرافی نامسطح است، یکریخت است. به‌ازای $n\geq ۶$، G شامل زیرگرافی یکریخت با گراف پترسن است و درنتیجه، G نامسطح است.

۱۱. الف) فرض می‌کنیم I مستقل باشد و $\{a,b\}\in E$. اگر نه a در $V-I$ باشد و نه b، آن‌گاه $a,b\in I$ و چون a و b مجاورند، I مستقل نخواهد بود. برعکس، اگر $I\subseteq V$ و $V-I$ پوششی برای G باشد، دراین‌صورت اگر I مستقل نباشد رأسهایی مانند $x,y\in I$ وجود دارند به‌طوری‌که $\{x,y\}\in E$. ولی از $\{x,y\}\in E$ نتیجه می‌شود که x یا y در $V-I$ قرار دارد.

ب) فرض می‌کنیم I یکی از بزرگترین مجموعه‌های مستقل ماکسیمال در G و K یک پوشش مینیمم باشد. با توجه به قسمت (الف)، $|K|\leq|V-I|=|V|-|I|$ و $|I|\geq|V-K|=|V|-|K|$ یا $|K|+|I|\geq|V|\geq|K|+|I|$.

۱۲. الف) فرض می‌کنیم D یک مجموعهٔ غالب مینیمال برای G باشد. اگر $V-D$ غالب نباشد، رأسی مانند $x\in D$ وجود دارد به‌طوری‌که x به هیچ‌یک از رأسهای $V-D$ مجاور نیست. چون G رأس تنها ندارد، x دست‌کم به یکی از رأسهای $D-\{x\}$ مجاور است. درنتیجه، $D-\{x\}$ یک مجموعهٔ غالب است و این ناقض مینیمال بودن D است.

ب) فرض می‌کنیم I یک مجموعهٔ غالب باشد. اگر I مستقل باشد اما مستقل ماکسیمال نباشد، آن‌گاه رأسی مانند $v\in V$ وجود دارد که v در I نیست و مجاور به هیچ رأسی از I نیست. اما این با غالب بودن مجموعهٔ I متناقض است. برعکس، اگر I مستقل ماکسیمال باشد، آن‌گاه هر رأس از V یا در I قرار دارد یا مجاور به رأسی از I است. بنابراین، I غالب است.

پ) نابرابری $\gamma(G)\leq\beta(G)$ از قسمت (ب) نتیجه می‌شود. برای اثبات نابرابری دوم، فرض می‌کنیم $\chi(G)=m$. می‌توانیم رأسهای G را به m ردهٔ V_i، $۱\leq i\leq m$، به این ترتیب افراز کنیم که بگوییم دو رأس وقتی در یک رده هستند که در G یک رنگ داشته باشند. هر یک از این رده‌ها مجموعهٔ مستقلی است و بنابراین، به‌ازای هر $۱\leq i\leq m$ داریم $|V_i|\leq\beta(G)$. چون $|V|=\sum_{i=۱}^{m}|V_i|$، پس

$$|V|\leq\sum_{i=۱}^{m}\beta(G)=m\beta(G)=\beta(G)\chi(G)$$

۱۳. الف) $v_۱=۲$ و به‌ازای هر $n\geq ۲$ داریم $v_n=v_{n-۱}+۲$.
$v_n^{(p)}=Bn,\ v_n^{(h)}=A(۱^n)=A$.

اگر $v_n^{(p)}$ را در رابطهٔ بازگشتی مفروض بگذاریم، می‌بینیم که $Bn=B(n-۱)+۲$ و بنابراین،

$B=2$. بنابراین، $v_n = A + 2n$ و

$$v_1 = 2 \Longrightarrow 2 = A + 2 \Longrightarrow A = 0$$

درنتیجه، به‌ازای هر $n \geq 1$، $v_n = 2n$.

ب) $e_1 = 0$ و به‌ازای هر $n \geq 2$ داریم $e_n = e_{n-1} + 2v_{n-1} = e_{n-1} + 2\left[2(n-1)\right] = e_{n-1} + 4n - 4$.

$e_n^{(h)} = C(1)^n = C$ و $e_n^{(p)} = Dn^2 + En$.

اگر $e_n^{(p)}$ را در رابطهٔ بازگشتی مفروض برای e_n بگذاریم، می‌بینیم که

$$Dn^2 + En = D(n-1)^2 + E(n-1) + 4n - 4$$

درنتیجه، $Dn^2 + En = Dn^2 - 2Dn + D + En - E + 4n - 4$. از مقایسهٔ ضرایب به‌دست می‌آوریم $-2D + 4 = 0$ یا $D = 2$ و $D - E - 4 = 0$ یا $E = -2$. پس $e_n = C + 2n^2 - 2n$. از $e_1 = 0$ نتیجه می‌شود که $C = 0$. به این ترتیب، به‌ازای هر $n \geq 1$ داریم $e_n = 2n(n-1)$.

پ) $t_2 = 0$ (و $t_1 = 0$) و به‌ازای هر $n \geq 3$ داریم

$$t_n = t_{n-1} + 2e_{n-1} = t_{n-1} + 4(n-1)(n-2) = t_{n-1} + (4n^2 - 12n + 8)$$

در اینجا $t_n^{(h)} = F(1^n) = F$ و $t_n^{(p)} = Gn^3 + Hn^2 + Kn$.

وقتی $t_n^{(p)}$ را در رابطهٔ بازگشتی مفروض بگذاریم، می‌بینیم که

$$Gn^3 + Hn^2 + Kn = G(n-1)^3 + H(n-1)^2 + K(n-1) + 2\left[2(n-1)(n-2)\right]$$

و بنابراین،

$$Gn^3+Hn^2+Kn = Gn^3-3Gn^2+3Gn-G+Hn^2-2Hn+H+Kn-K+4n^2-12n+8$$

درنتیجه، $0 = n^2(-3G+4) + n(3G-2H-12) + (-G+H-K+8)$. بنابراین،

$$-3G + 4 = 0 \Longrightarrow G = \frac{4}{3}$$

$$3G - 2H - 12 = 0 \Longrightarrow 4 - 2H - 12 = 0 \Longrightarrow H = -4$$

$$-G + H - K + 8 = 0 \Longrightarrow \left(-\frac{4}{3}\right) - 4 - K + 8 = 0 \Longrightarrow K = \frac{8}{3}$$

به این ترتیب، $t_n = F + \frac{4}{3}n^3 - 4n^2 + \frac{8}{3}n$. از $t_2 = 0$ نتیجه می‌شود که

$$0 = F + \frac{4}{3} \times 8 - 4 \times 4 + \frac{8}{3} \times 2 = F + \frac{48}{3} - 16 = F$$

پس به‌ازای هر $n \geq 2$ (و درحقیقت به‌ازای هر $n \geq 1$) داریم $t_n = \frac{4}{3}n^3 - 4n^2 + \frac{8}{3}n$.

ت) از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم.

به‌ازای $n = ۱$، گراف $G_۱$ یال ندارد و درنتیجه، عدد رنگی آن ۱ است. بنابراین، گزارهٔ مفروض در این حالت درست است. اگر فرض کنیم این نتیجه به‌ازای $n = k$ درست است، داریم $\chi(G_k) = k$. به‌ازای $n = k + ۱$، هر یک از رأسهای $a_{k+۱}$ و $b_{k+۱}$ (از $G_{k+۱}$) به هر $۲k$ رأس زیرگراف G_k مجاور است. بنابراین، به رنگ جدیدی برای رنگ کردن $a_{k+۱}$ نیاز داریم و چون $\{a_{k+۱}, b_{k+۱}\}$ یالی از $G_{k+۱}$ نیست، می‌توان این رنگ جدید را برای رنگ کردن $b_{k+۱}$ نیز به‌کار برد. پس $\chi(G_{k+۱}) = k + ۱$ و بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

۱۴. الف) $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۳$. به‌ازای $n \geq ۳$، رأسهای P_n را با $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$، ...، v_n چنان نشانگذاری کنید که $\{v_۱, v_۲\}$، $\{v_۲, v_۳\}$، ...، $\{v_{n-۱}, v_n\}$ یالهای آن باشند. برای ساختن زیرمجموعهٔ مستقلی از P_n مانند S، دو حالت درنظر می‌گیریم:

(۱) $v_n \notin S$: دراین‌صورت، S زیرمجموعهٔ مستقلی از $P_{n-۱}$ است و تعداد این نوع زیرمجموعه‌ها $a_{n-۱}$ است.

(۲) $v_n \in S$: دراین‌صورت، $v_{n-۱} \notin S$ و $S - \{v_n\}$ یکی از $a_{n-۲}$ زیرمجموعهٔ مستقل $P_{n-۲}$ است.

بنابراین، $a_۱ = ۲$، $a_۲ = ۳$ و به‌ازای هر $n \geq ۳$، $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$ یا $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۲$ و به‌ازای هر $n \geq ۲$، $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$. پس $a_n = F_{n+۲}$، که در آن $F_{n+۲}$ عدد $(n + ۲)$اُم فیبوناچی است.

ب) زیرگرافی از $G_۱$ را که به‌وسیلهٔ رأسهای ۱، ۲، ۳ و ۴ القا شده است درنظر بگیرید. با توجه به قسمت (الف) می‌دانیم که این زیرگراف، ۸ (۸ برابر است با $F_۶$، یعنی عدد (غیرصفر) ششم فیبوناچی) زیرمجموعهٔ مستقل از $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را به‌دست می‌دهد. بنابراین، گراف $G_۱$ دارای $F_۶ + ۱$ زیرمجموعهٔ مستقل است.

به همین ترتیب، گراف $G_۲$ دارای $F_۷ + ۱$ وگراف G_n دارای $F_{n+۲} + ۱$ زیرمجموعهٔ مستقل است.

پ)
$$H_۱ : ۳ + F_۶ = (۲^۲ - ۱) + F_۶$$
$$H_۲ : ۳ + F_۷ = (۲^۲ - ۱) + F_۷$$
$$H_۳ : ۳ + F_{n+۲} = (۲^۲ - ۱) + F_{n+۲}$$

ت) گراف $G' = (V', E')$، $۲^s - ۱ + m$ زیرمجموعهٔ مستقل دارد.

۱۵. الف) $|V| = ۲n$ و $|E| = n + ۲(n - ۱) = ۳n - ۲$ (که در آن $n \geq ۱$).

ب) چون n یال چنان انتخاب می‌کنیم که هیچ دوتایی از آنها رأس مشترک ندارند، هر رأس فقط یک‌بار در این انتخاب حضور دارد. اکنون دو حالت مانع و جامع زیر را درنظر می‌گیریم:

(۱) یال $\{x_n, y_n\}$ انتخاب شده است: دراین‌صورت $\{x_{n-۱}, x_n\}$ و $\{y_{n-۱}, y_n\}$ انتخاب نشده‌اند و باید $n - ۱$ یال دیگر را از زیرگراف حاصل (که گرافی نردبانی با $n - ۱$ پله است) به $a_{n-۱}$ طریق انتخاب کنیم.

(۲) یال $\{x_n, y_n\}$ انتخاب نشده است: دراین‌صورت برای آنکه x_n و y_n در انتخاب حضور داشته باشند باید یالهای $\{x_{n-۱}, x_n\}$ و $\{y_{n-۱}, y_n\}$ را منظورکنیم. درنتیجه، اکنون باید $n - ۲$ یال دیگر را از زیرگراف

حاصل (که گرافی نردبانی با $n - ۲$ پله است) به $a_{n-۲}$ طریق انتخاب کنیم.

بنابراین، $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۱$ و $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$. این نشان می‌دهد که a_n برابر است با $F_{n+۱}$، یعنی عدد $(n + ۱)$اُم فیبوناچی.

۱۶. دو حالت پیش می‌آید:

(۱) رأس y_n به‌کار نرفته است. دراین‌صورت، $a_{n-۱}$ تا از زیرمجموعه‌های مستقل شامل x_n هستند و $a_{n-۱}$ تا از زیرمجموعه‌های مستقل شامل x_n نیستند.

(۲) رأس y_n در مجموعهٔ مستقل گنجانده شده است. اکنون نمی‌توانیم هیچ‌یک از رأسهای x_n یا $y_{n-۱}$ را به‌کار ببریم. درنتیجه، در هر یک از وضعیتهای زیر، $a_{n-۲}$ تا از این زیرمجموعه‌های مستقل وجود دارد: (یک) $x_{n-۱}$ در زیرمجموعه قرار دارد و (دو) $x_{n-۱}$ در زیرمجموعه قرار ندارد.

این ملاحظات موجب پیدایش رابطهٔ بازگشتی

$$a_n = ۲a_{n-۱} + ۲a_{n-۲}$$

همراه با شرایط آغازی $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۳$ می‌شوند. (از $a_۲ = ۸$ برای تعیین $a_۰ = ۱$ استفاده کردیم.)

برای حل این رابطهٔ بازگشتی، قرار می‌دهیم $a_n = Ar^n$، که در آن $A \neq ۰$ و $r \neq ۰$. این ما را به معادلهٔ مشخصهٔ

$$r^۲ - ۲r - ۲ = ۰$$

و ریشه‌های مشخصهٔ $۱ \pm \sqrt{۳}$ هدایت می‌کند. درنتیجه، $a_n = A_۱\left(۱ + \sqrt{۳}\right)^n + A_۲\left(۱ - \sqrt{۳}\right)^n$، که در آن $A_۱$ و $A_۲$ ثابت‌اند. می‌بینیم که $۱ = a_۰ = A_۱ + A_۲$ و

$$۳ = a_۱ = A_۱\left(۱ + \sqrt{۳}\right) + A_۲\left(۱ - \sqrt{۳}\right) = (A_۱ + A_۲) + \sqrt{۳}(A_۱ - A_۲) = ۱ + \sqrt{۳}(A_۱ - A_۲)$$

درنتیجه، $A_۱ - A_۲ = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$. بنابراین، $A_۱ = \frac{\sqrt{۳} + ۲}{۲\sqrt{۳}}$، $A_۲ = \frac{\sqrt{۳} - ۲}{۲\sqrt{۳}}$ و به‌ازای هر $n \geq ۰$ (یا $n \geq ۱$)

$$a_n = \frac{\sqrt{۳} + ۲}{۲\sqrt{۳}}\left(۱ + \sqrt{۳}\right)^n + \frac{\sqrt{۳} - ۲}{۲\sqrt{۳}}\left(۱ - \sqrt{۳}\right)^n$$

۱۷. اگر رأس y_n در زیرمجموعهٔ مستقل گنجانده شود، دراین‌صورت نمی‌توانیم هیچ‌یک از رأسهای $y_{n-۱}$، $x_{n-۱}$ یا x_n را به‌کار ببریم. $a_{n-۲}$ تا از این نوع زیرمجموعه‌ها وجود دارد. $a_{n-۲}$ تا از زیرمجموعه‌های مستقل هم شامل x_n هستند. علاوه‌براین، $a_{n-۱}$ زیرمجموعهٔ مستقل وجود دارد که نه شامل x_n هستند نه شامل y_n. این ما را به رابطهٔ بازگشتی

$$a_n = a_{n-۱} + ۲a_{n-۲}$$

همراه با شرایط آغازی $a_۱ = ۳$ و $a_۲ = ۵$ هدایت می‌کند.

برای حل این رابطهٔ بازگشتی، فرض می‌کنیم $a_n = Ar^n$، که در آن $A \neq ۰$ و $r \neq ۰$. این ما را به معادلهٔ مشخصهٔ

$$r^۲ - r - ۲ = ۰$$

و ریشه‌های مشخصهٔ ۱– و ۲ هدایت می‌کند. بنابراین، $a_n = A_1(-1)^n + A_2(2^n)$، که در آن A_1 و A_2 ثابت‌اند.

$$a_1 = 3, a_2 = 5 \Longrightarrow 2a_0 = 5 - 3 \Longrightarrow a_0 = 1$$
$$1 = a_0 = A_1 + A_2$$
$$3 = a_1 = -A_1 + 2A_2 = -(1 - A_2) + 2A_2 = -1 + 3A_2$$

پس $A_2 = \frac{4}{3}$ و $A_1 = 1 - A_2 = -\frac{1}{3}$. درنتیجه، به‌ازای $n \geq 0$ (یا $n \geq 1$)

$$a_n = \frac{-1}{3}(-1)^n + \frac{4}{3}(2^n)$$

۱۸. $a_0 = a_1 = 0$. به‌ازای $n \geq 2$، $a_n = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1) > 0$.

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$
$$(d/dx)\left[1/(1-x)\right] = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$
$$(d/dx)\left[1/(1-x)\right] = (d/dx)\left[(1-x)^{-1}\right] = (-1)(1-x)^{-2}(-1)$$
$$= (1-x)^{-2}$$
$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$
$$(d/dx)\left[(1-x)^{-2}\right] = (-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3}$$

بنابراین

$$2(1-x)^{-3} = 2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 4x^3 + \cdots$$
$$2x^2/(1-x)^3 = 2 \cdot 1x^2 + 3 \cdot 2x^3 + 4 \cdot 3x^4 + 5 \cdot 4x^5 + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$

درنتیجه، $f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]x^n$ تابع مولد دنبالهٔ $a_n = \binom{n}{2}$، $n \geq 0$، است.

۱۹. الف) $\gamma(G) = 2$، $\beta(G) = 3$ و $\chi(G) = 4$.

ب) G نه پیگرد اویلری دارد نه مدار اویلری. G دور همیلتونی دارد.

پ) G دوبخشی نیست، ولی مسطح است.

۲۰. الف) (یک) $m = 2$، $n = 8$. (دو) $m = n = 4$.

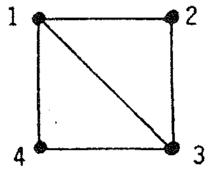
ب) (یک) به‌ازای $m \leq n$، $K_{m,n}$ مدار اویلری دارد، ولی اگر m و n هر دو زوج باشند و $m \neq n$، $K_{m,n}$ دور همیلتونی ندارد.

(دو) وقتی m و n هر دو زوج باشند و $m = n$، $K_{m,n}$ هم مدار اویلری دارد هم دور همیلتونی.

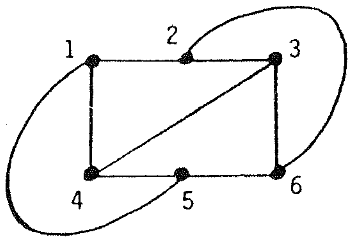
۲۱. الف) $\chi(G) \geq \omega(G)$.

ب) با هم برابرند.

۲۲. الف) (یک) در اینجا رأس ۱ برای یال $\{a, c\}$، ۲ برای $\{a, b\}$، ۳ برای $\{b, c\}$ و ۴ برای $\{c, d\}$ است.



(دو) در اینجا تناظر بین رأسهای $L(G)$ و یالهای G به‌صورت زیر است:



$۱ : \{y, z\}$	$۲ : \{x, z\}$
$۳ : \{w, x\}$	$۴ : \{w, y\}$
$۵ : \{u, y\}$	$۶ : \{u, x\}$

ب) فرض می‌کنیم $v \in V$ و $\deg(v) = k$. دراین‌صورت k یال به‌صورت $\{v_i, v\}$، $۱ \leq i \leq k$، در G وجود دارد. هر جفت از این یالها در v مجاورند و یالی در $L(G)$ به‌دست می‌دهند. بنابراین، تعداد یالهایی که v در $L(G)$ پدید می‌آورد برابر است با $\binom{\deg(v)}{۲}$. روی‌هم $L(G)$

$$\sum_{v \in V} \binom{\deg(v)}{۲} = \frac{۱}{۲} \sum_{v \in V} \deg(v)\left[\deg(v) - ۱\right] = \frac{۱}{۲} \sum_{v \in V} \deg(v)^{۲} - \frac{۱}{۲} \sum_{v \in V} \deg(v)$$

$$= \frac{۱}{۲} \sum_{v \in V} \deg(v)^{۲} - e$$

یال دارد.

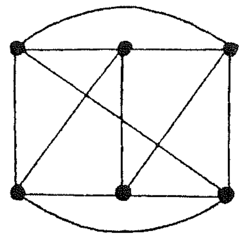
پ) ابتدا ثابت می‌کنیم که $L(G)$ همبند است. فرض می‌کنیم رأسهای $e_۱$ و $e_۲$ در $L(G)$، به‌ترتیب، از یالهای $\{a, b\}$ و $\{x, y\}$ در G پدید آمده باشند. چون G همبند است مسیری از b به x مانند $b \to v_۱ \to v_۲ \to \cdots \to v_k \to x$ در G وجود دارد و درنتیجه، $a \to b \to v_۱ \to \cdots \to v_k \to x \to y$ مسیری از a به y در G است. دراین‌صورت این رأسها و این یالها مسیری از $e_۱$ به $e_۲$ در $L(G)$ تعیین می‌کنند و بنابراین، $L(G)$ همبند است. اکنون به‌ازای هر رأس e در $L(G)$، فرض می‌کنیم $\{a, b\}$ یالی از G باشد که e را به‌دست می‌دهد. دراین‌صورت (در $L(G)$) داریم

$$\deg(e) = \left(\deg(a) - ۱\right) + \left(\deg(b) - ۱\right)$$

$\deg(e)$ عددی صحیح و زوج است، زیرا هم $\deg(a)$ زوج است هم $\deg(b)$. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۱.۳۰،

$L(G)$ مدار اویلری دارد. علاوه‌براین، فهرست مرتب شدهٔ یالهای هر مدار اویلری در G، دور همیلتونی متناظری را برای رأسهای $L(G)$ تعیین می‌کند.

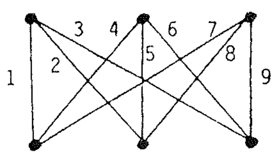
ت) $L(K_۴)$ در شکل زیر رسم شده است. این گراف هم مدار اویلری دارد هم دور همیلتونی. چون به‌ازای هر رأس v در $K_۴$ داریم $\deg(v) = ۳$، $K_۴$ مدار اویلری ندارد.

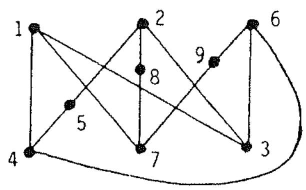


ث) فرض می‌کنیم $G = (V, E)$ دوری همیلتونی مانند $v_۱ - v_۲ - v_۳ - \cdots - v_n - v_۱$ داشته باشد و فرض می‌کنیم، به‌ازای هر $۱ \le i \le n - ۱$، $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ و $e_n = \{v_n, v_۱\}$. دراین‌صورت دوری با رأسهای e_i، $۱ \le i \le n$، در $L(G)$ وجود دارد. اگر $|E| = n$، آنگاه این دور، دوری همیلتونی است. اگر $|E| > n$، فرض می‌کنیم $e \in E$ چنان باشد که به‌ازای هر $۱ \le i \le n$، $e \neq e_i$ و فرض می‌کنیم $e = \{v_i, v_j\}$، $۱ \le i < j \le n$. (این حالتی را هم که G گرافی چندگانه باشد دربرمی‌گیرد.) در $L(G)$ یالهایی مانند $\{e_{i-۱}, e\}$، که در آن $e_{i-۱} = e_n$ هرگاه $i = ۱$، و یالهایی مانند $\{e, e_i\}$ وجود دارد و می‌توانیم، باگذاشتن یالهای $\{e_{i-۱}, e\}$ و $\{e, e_i\}$ به‌جای $\{e_{i-۱}, e_i\}$، دور واقع در $L(G)$ را توسیع دهیم. چون $|E|$ متناهی است، اگر به‌تدریج دور حاضر را به‌همین طریق توسیع دهیم، دوری همیلتونی برای $L(G)$ به‌دست می‌آوریم.

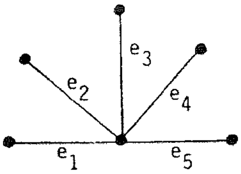
ج) گراف شکل ۱۱ . ۹۹(ب) دور همیلتونی ندارد، ولی همان‌طورکه در قسمت (الف) دیده شد، گراف خطی آن دور همیلتونی دارد.

چ) با فرض $G = K_۵$، $L(G)$ دارای ۱۰ رأس و ۳۰ یال است. چون G همبند است، $L(G)$ نیز همبند است. ولی چون $۳ \times ۱۰ - ۶ < ۳۰$، از فرع ۱۱ . ۳۰ نتیجه می‌شود که $L(G)$ نامسطح است. در $G = K_{۳,۳}$، یالها را مطابق شکل سمت چپ شماره‌گذاری می‌کنیم. دراین‌صورت، گراف شکل سمت راست را به‌عنوان زیرگرافی از $L(G)$ می‌یابیم و بنابراین $L(G)$ نامسطح است.





ح) فرض می‌کنیم G گراف شش رأسی شکل روبه‌رو باشد (که در آن پنج رأس آویزان و یک رأس درجهٔ ۵ وجود دارد). دراین‌صورت در $L(G)$ پنج رأس درجه چهار وجود دارد. پس $L(G) = K_5$ و بنابراین، $L(G)$ نامسطح است.



۲۳. الف) جملهٔ ثابت ۳ است، نه ۰. این با قضیهٔ ۱۱۰۱۱ تناقض دارد.

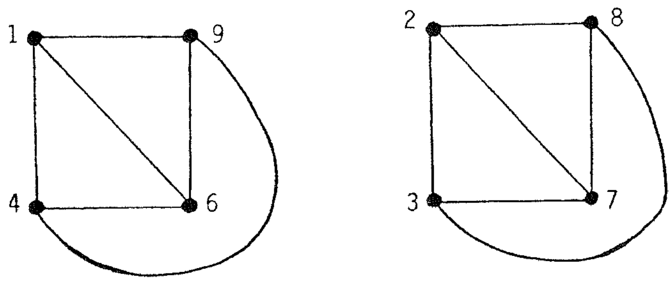
ب) ضریب پیشرو ۳ است، نه ۱. این با نتیجهٔ تمرین ۱۵ از بند ۶۰۱۱ تناقض دارد.

پ) مجموع ضریبها ۱- است، نه ۰. این با قضیهٔ ۱۲۰۱۱ تناقض دارد.

۲۴. الف) $x^3y - xy^3 = xy(x^2 - y^2) = xy(x-y)(x+y)$.

اگر x یا y زوج باشد، xy و $xy(x-y)(x+y)$ هر دو زوج‌اند. وقتی هر دوی x و y فردند، $x-y$، $x+y$ و $xy(x-y)(x+y)$ زوج‌اند.

ب)



پ) با توجه به قسمت (الف)، $x^3y - xy^3 = xy(x-y)(x+y)$ همیشه زوج است. اگر رقم یکان x یا y، ۰ یا ۵ باشد، دراین‌صورت نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید. همچنین، اگر رقم یکان x و y یکی باشد، $x-y$ و درنتیجه، $x^3y - xy^3$ مضرب ۱۰ است. در همهٔ حالتهای دیگر، سه عدد صحیح مثبت x، y و z داریم که رقمهای یکان آنها سه عنصر متمایز از $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ هستند. بنابر اصل لانه کبوتری، دو تا از این عددهای صحیح، مثلاً x و y، باید در یک مؤلفهٔ G باشند (و می‌دانیم که هر مؤلفهٔ G با K_4 یکریخت است). چون این مؤلفه کامل است، $\{x, y\}$ یک یال است و بنابراین، $x+y$ یا $x-y$ بر ۵ بخش‌پذیر است. بنابراین، $x^3y - xy^3$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۲۵. الف) K_n.

ب) $|V| = \sum_{i=1}^{n} p_i$ و $|E| = \sum_{1 \le i < j \le n} p_i p_j$.

پ) $\kappa(\overline{G}) = n$ و $\overline{G}$ دارای $\sum_{i=1}^{n} \binom{p_i}{2}$ یال است.

ت) $n = 2$: $p_1 = 1$ $p_2 \ge 1$

$p_1 = 2$، $p_2 \ge 2$

$n=۳:$ $p_۱=۱$، $p_۲=۱$، $p_۳\geq ۱$

$p_۱=۱$، $p_۲=۲$، $p_۳=۲$

$p_۱=۲$، $p_۲=۲$، $p_۳=۲$

$n=۴:$ $p_۱=۱$، $p_۲=۱$، $p_۳=۱$، $p_۴=۱$

$p_۱=۱$، $p_۲=۱$، $p_۳=۱$، $p_۴=۲$

۲۶. الف)

$n\backslash i$	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱				
۲	−۱	۱			
۳	۲	−۳	۱		
۴	−۶	۱۱	−۶	۱	
۵	۲۴	−۵۰	۳۵	−۱۰	۱

ب)

```
10   Dim s(15,15)
20   For n = 1 To 15
30       s(n,0) = 0
40       s(n,n) = 1
50   Next n
60   Print "(n = 1 ): 1"
70   For i = 2 To 15
80        Print "(n =";i; "): ";
90        For j = 1 to i
100       s(i,j) = s(i-1, j-1) - (i-1)*s(i-1,j)
110       If j <> i Then Print s(i,j); " "; Else Print "1"
120       Next j
130   Next i
140   End
```

پ) $(m=n=۴)$ در اینجا $k=۴$. در این‌صورت،

$\sum_{i=۰}^{۴} s(۴,i)\,S(i,۴)=s(۴,۴)\,S(۴,۴)=۱$ و $\sum_{i=۰}^{۴} S(۴,i)s(i,۴)=S(۴,۴)s(۴,۴)=۱$

$(m=۵$ و $n=۴)$ در اینجا $k=۵$. در این‌صورت،

$$\sum_{i=۰}^{۵} s(۵,i)S(i,۴)=s(۵,۴)S(۴,۴)+s(۵,۵)S(۵,۴)=(-۱۰)(۱)+(۱)(۱۰)=۰$$

و

$$\sum_{i=۰}^{۵} S(۵,i)s(i,۴)=S(۵,۴)s(۴,۴)+S(۵,۵)s(۵,۴)=(۱۰)(۱)+(۱)(-۱۰)=۰$$

۱۲

درختها

بند ۱.۱۲

۱. الف)

ب) ۵

۲. از $|E_۱| = ۱۷$ نتیجه می‌شود که $|V_۱| = ۱۸$. از $|V_۲| = ۲|V_۱| = ۳۶$ نتیجه می‌شود که $|E_۲| = ۳۵$.

۳. الف) فرض می‌کنیم $e_۱$، $e_۲$، …، $e_۷$ تعداد یالهای این هفت درخت و $v_۱$، $v_۲$، …، $v_۷$، به‌ترتیب، تعداد رأسهای آنها باشند. دراین‌صورت به‌ازای هر $۱ \le i \le ۷$ داریم $v_i = e_i + ۱$ و

$$|V_۱| = v_۱ + v_۲ + \cdots + v_۷ = (e_۱ + e_۲ + \cdots + e_۷) + ۷ = ۴۰ + ۷ = ۴۷$$

ب) فرض می‌کنیم n تعداد درختهای $F_۲$ باشد. اگر e_i و v_i، $۱ \le i \le n$، به‌ترتیب، تعداد یالها و رأسهای این درختها را نشان دهند، دراین‌صورت به‌ازای هر $۱ \le i \le n$ داریم $v_i = e_i + ۱$ و

$$\begin{aligned} ۶۲ &= v_۱ + v_۲ + \cdots + v_n = (e_۱ + ۱) + (e_۲ + ۱) + \cdots + (e_n + ۱) \\ &= (e_۱ + e_۲ + \cdots + e_n) + n = ۵۱ + n \end{aligned}$$

بنابراین، $n = ۶۲ - ۵۱ = ۱۱$.

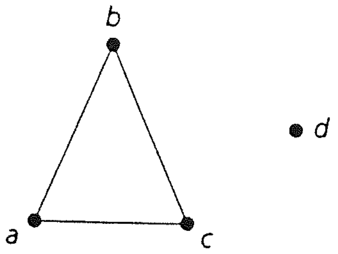
۴. الف) $e = v - \kappa$ ب) $\kappa - ۱$

۵. هر مسیر درختی است که فقط دو رأس آویزان دارد.

۶. الف) چون درخت دور ندارد نمی‌تواند زیرگرافی همسانریخت با $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ داشته باشد.

ب) اگر $T = (V, E)$ درخت باشد، آنگاه T همبند است و بنابر قسمت (الف)، T مسطح است. بنابر قضیهٔ ۱۱.۶، $|V| - |E| + ۱ = ۲$ یا $|V| = |E| + ۱$.

۷.



۸. الف) فرض می‌کنیم x تعداد رأسهای آویزان باشد. دراین‌صورت،

$$۲|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = x + ۴(۲) + ۱(۳) + ۲(۴) + ۱(۵)$$

و

$$|E| = |V| - ۱ = x + ۴ + ۱ + ۲ + ۱ - ۱ = x + ۷$$

بنابراین، $۲(x + ۷) = x + ۲۴$ و $x = ۱۰$.

ب)
$$۲|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = v_۱ + v_۲(۲) + v_۳(۳) + \cdots + v_m(m)$$

$$|E| = |V| - ۱ = (v_۱ + v_۲ + \cdots + v_m) - ۱$$

$$۲(v_۱ + v_۲ + \cdots + v_m - ۱) = v_۱ + ۲v_۲ + \cdots + mv_m$$

بنابراین، $v_۱ = v_۳ + ۲v_۴ + ۳v_۵ + \cdots + (m-۲)v_m + ۲$. پس

$$|V| = v_۱ + v_۲ + \cdots + v_m = [v_۳ + ۲v_۴ + \cdots + (m-۲)v_m + ۲] + v_۲ + v_۳ + \cdots + v_m$$
$$= v_۲ + ۲v_۳ + ۳v_۴ + \cdots + (m-۱)v_m + ۲$$

و

$$|E| = |V| - ۱ = v_۲ + ۲v_۳ + \cdots + (m-۱)v_m + ۱$$

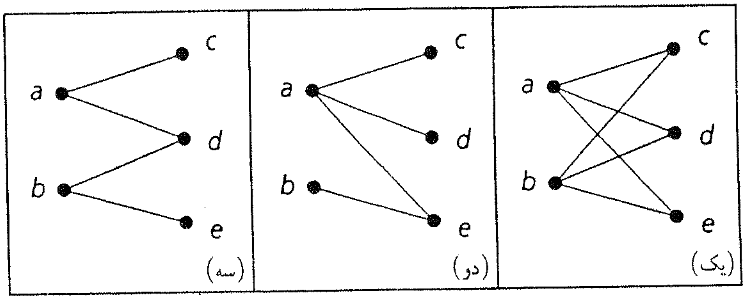
۹. اگر بین هر دو رأس G یک مسیر (یکتا) وجود داشته باشد، G همبند است. اگر G دور داشته باشد، دراین‌صورت دو رأس مانند x و y و دو مسیر متمایز وجود دارد که x و y را به هم وصل می‌کنند. بنابراین، G درخت است.

۱۰. ۳۱

۱۱. چون T درخت است، بین هر دو رأس متمایز T مسیری یکتا وجود دارد. بنابراین، تعداد مسیرهای متمایز در T برابر است با $\binom{n}{۲}$.

۱۲. اگر G دور نداشته باشد، آنگاه G درخت است. دراین‌صورت G باید دست‌کم دو رأس آویزان داشته باشد. گراف مفروض فقط یک رأس آویزان دارد.

۱۳. الف) در قسمت (یک) از شکل زیر، گراف دوبخشی کامل $K_{۲,۳}$ را می‌بینیم. قسمتهای (دو) و (سه)، دو درخت فراگیر غیریکریخت برای $K_{۲,۳}$ هستند.



ب) با تقریب یکریختی، اینها تنها درختهای فراگیر برای $K_{۲,۳}$ هستند.

۱۴. الف) چون گراف G دو مؤلفه دارد، پس $\kappa(G) = ۲$.

ب) مؤلفهٔ حاوی رأس a دارای چهار درخت فراگیر است. هر یک از این درختهای فراگیر را می‌توان با حذف فقط یکی از چهار یال (یک) $\{b,d\}$، (دو) $\{d,g\}$، (سه) $\{g,e\}$ یا (چهار) $\{e,b\}$ از مؤلفهٔ مفروض، به‌دست آورد.

مؤلفهٔ دیگر (یعنی مؤلفه‌ای که شامل رأس m است) دارای هشت درخت فراگیر است. هر یک از این درختهای فراگیر از حذف یک جفت از یالهای مؤلفهٔ مفروض حاصل می‌شود. (یکی از یالهای این جفت باید $\{m,n\}$ یا $\{n,j\}$ باشد. یال دوم یکی از چهار یال $\{m,i\}$، $\{i,j\}$، $\{j,k\}$ و $\{k,m\}$ است.)

درنتیجه، بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، $۴ \times ۸ = ۳۲$ جنگل فراگیر برای گراف G وجود دارد.

۱۵. n : به‌ازای حذف هر یک از n یال، یک درخت فراگیر.

۱۶. الف) ۶: هر یک از شش درخت فراگیر برای $C_۶$ ($C_۶$ یعنی دور شش رأسی) همراه با مسیری که f را به k وصل می‌کند.

ب) $۶ \times ۶ = ۳۶$

پ) $۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$

۱۷. الف) اگر مکمل T مجموعهٔ برشی داشته باشد، دراین‌صورت با حذف این یالها گراف G ناهمبند می‌شود و دو رأس مانند x و y که مسیری بین آنها وجود ندارد پدید می‌آیند. بنابراین، T درخت فراگیری برای G نیست.

ب) اگر مکمل C درخت فراگیر داشته باشد، دراین‌صورت به‌ازای هر دو رأس G مسیری وجود دارد که آنها را به هم وصل می‌کند و این مسیر شامل هیچ‌یک از یالهای C نیست. بنابراین، از حذف کردن یالهای C از G، گراف G ناهمبند نمی‌شود و درنتیجه، C مجموعهٔ برشی برای G نیست.

۱۸. $(e) \Longrightarrow (d)$: فرض می‌کنیم C دوری در G باشد که r رأس و r یال دارد. چون G همبند است، می‌توان هر یک از رأسهای دیگر G را با مسیری در G به رأسی از C وصل کرد. هر یک از این اتصالها دست‌کم یک یال جدید

لازم دارد. درنتیجه، در G داریم $|V| \geq |E|$ و این با $|V| = |E| + ۱$ تناقض دارد. بنابراین، G دور ندارد و همبند است. پس G درخت است. فرض می‌کنیم G' گرافی باشد که از افزودن یال $\{a,b\}$ به G به‌دست می‌آید. چون $\{a,b\} \notin E$، مسیر یکتایی مانند P در G، به طول دست‌کم ۲، وجود دارد که a را به b وصل می‌کند. در G'، $P \cup \{\{a,b\}\}$ دور است. اگر G' دور دیگری مانند $C_۱$ داشته باشد، دراین‌صورت $C_۱$ باید شامل یال $\{a,b\}$ باشد، زیرا در غیراین‌صورت، G دور خواهد داشت. این دور دوم به‌صورت $C_۱ = P_۱ \cup \{\{a,b\}\}$ است، که در آن $P_۱$ مسیری در G است و $P_۱ \neq P$. این نتیجه با قضیهٔ ۱۰.۱۲ تناقض دارد.

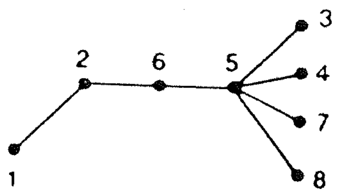
(e) $\Longrightarrow$ (a): اگر G همبند نباشد، فرض می‌کنیم $C_۱$ و $C_۲$ مؤلفه‌هایی از G باشند به‌طوری که $a \in C_۱$ و $b \in C_۲$. اگر یال $\{a,b\}$ را به G بیفزاییم، دوری در G ایجاد نمی‌شود. درنتیجه، G همبند است و دور ندارد، پس G درخت است.

۱۹. الف) (یک) ۳، ۴، ۶، ۳، ۸، ۴

(دو) ۳، ۴، ۶، ۶، ۸، ۴.

ب) هیچ رأس آویزانی از درخت مفروض در این دنباله نیست و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر برای رأسها درست است. اگر یالی مانند $\{x,y\}$ حذف شود و اگر y رأس آویزانی (از درخت مفروض یا از یکی از زیردرختهای حاصل) باشد، دراین‌صورت $\deg(x)$ به اندازهٔ ۱ واحد کاهش می‌یابد و x در این دنباله قرار می‌گیرد. با ادامهٔ این فرایند یا (یک) رأس x رأس آویزانی در یک زیر درخت می‌شود و حذف می‌گردد، ولی در دنباله قرار نمی‌گیرد یا (دو) x به‌عنوان رأسی از آخرین جفت رأسها باقی می‌ماند. در هر حالت، x به تعداد $(\deg(x) - ۱)$ بار در این دنباله فهرست شده است.

پ)



ت) با توجه به دنبالهٔ مفروض، درجهٔ هر رأس این درخت معلوم است.

- (۱) شمارندهٔ i را ۱ کنید.
- (۲) بین رأسهای درجهٔ ۱، رأس v را چنان انتخاب کنید که دارای کوچکترین نشان باشد. به این ترتیب، یال $\{v, x_i\}$ معین می‌شود. v را از مجموعهٔ نشانها حذف کنید و درجهٔ x_i را به اندازهٔ ۱ واحد کم کنید.
- (۳) اگر $i < n - ۲$، i را به اندازهٔ ۱ واحد افزایش دهید و به مرحلهٔ (۲) بازگردید.
- (۴) اگر $i = n - ۲$، رأسهای (با نشانهای) $x_{n-۲}$ و $x_{n-۳}$، درصورتی‌که $x_{n-۲} \neq x_{n-۳}$، با یک یال به هم وصل می‌شوند. (در اینجا رسم درخت تمام می‌شود.)

بند ۲.۱۲

۱. الف) f، h، k، p، q، s، t   ب) a   پ) d

ت) e، f، j، q، s، t   ث) q، t   ج) ۲

چ) k، p، q، s، t   ح) ۴   خ) خیر

د) $m = ۳$

۲. الف)

رأس	مرتبه
p	۳۵
s	۳۶
t	۳۶
v	۳۷
w	۳۸
x	۳۸
y	۳۹
z	۳۹

ب) رأس u، ۳۷ نیا دارد.

پ) رأس y، ۳۹ نیا دارد.

۳. الف) $۱ + w - xy * \pi \mid ۳$

ب) ۰/۴

۴. الف) ۵   ب) $۲ \times ۱ \times ۳$ پ) ۴ (با احتساب ریشه)

ت) $۲ \times ۱ \times ۳ \times x$، $۱ \leq x \leq ۵$، $۲ \times ۱ \times ۳$، $۲ \times ۱ \times ۲$، $۲ \times ۱ \times ۱$، ۲×۱، ۲، ۱.

۵. پیش ترتیب: r, j, h, g, e, d, b, a, c, f, i, k, m, p, s, n, q, t, v, w, u

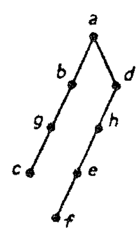
میان‌ترتیب: h, e, a, b, d, c, g, f, j, i, r, m, s, p, k, n, v, t, w, q, u

پس‌ترتیب: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, s, p, m, v, w, t, u, q, n, k, r

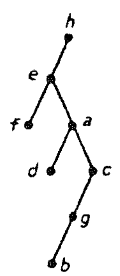
۶. پیش‌ترتیب: ۱, ۲, ۵, ۹, ۱۴, ۱۵, ۱۰, ۱۶, ۱۷, ۳, ۶, ۴, ۷, ۸, ۱۱, ۱۲, ۱۳

پس‌ترتیب: ۱۴, ۱۵, ۹, ۱۶, ۱۷, ۱۰, ۵, ۲, ۶, ۳, ۷, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۸, ۴, ۱

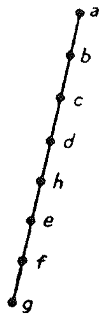
۷. الف) (یک) و (سه)



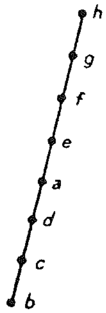
(دو)



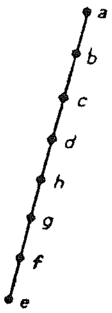
ب) (یک)



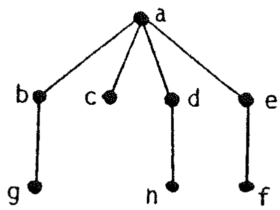
(دو)



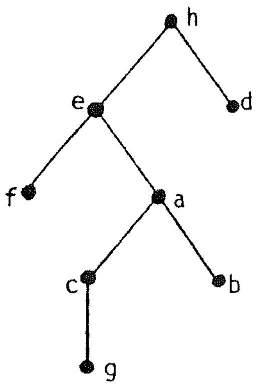
(سه)



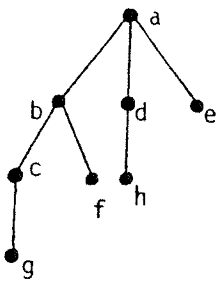
۸. الف) (یک) و (سه)



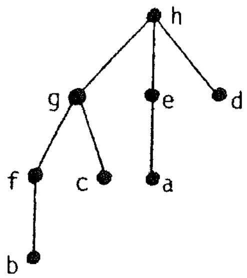
(دو)



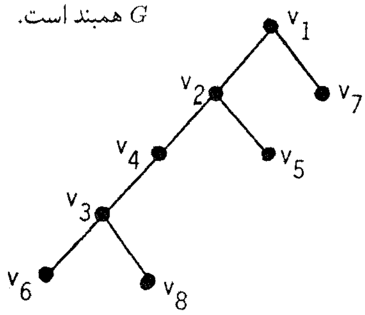
ب) (یک) و (سه)



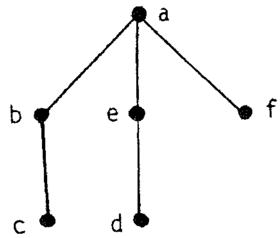
(دو)



۹. G همبند است.

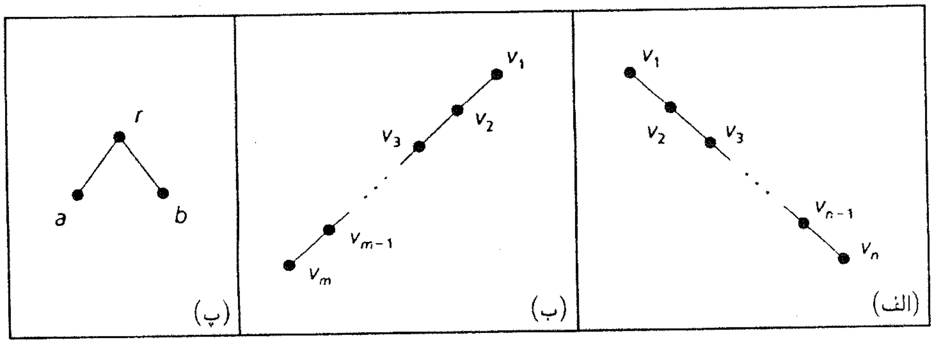


۱۰. (یک)، (دو) و (سه)



۱۱. الف) درخت قسمت (الف) از شکل زیر، n رأس دارد و فهرست پیش‌ترتیبی و میان‌ترتیبی این رأسها عبارت است از:

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$$



ب) در قسمت (ب) از این شکل، یک درخت دودویی m رأسی داریم و فهرست پس‌ترتیبی و میان‌ترتیبی این رأسها عبارت است از

$$v_m, v_{m-1}, \ldots, v_3, v_2, v_1$$

پ) اگر قرار است T_1 و T_2 دو درخت دودویی کامل باشند، دیگر نمی‌توانیم فقط فرض کنیم $|V_1| \geq 3$ و

$|V_۲| \geq ۳$. باید دربارهٔ تعداد رأسها نظر مشخصتری ارائه کنیم. بویژه، نه $|V_۱|$ می‌تواند زوج باشد نه $|V_۲|$. ولی حتی این نظر هم به اندازهٔ کافی خوب نیست. درحقیقت، هر درخت دودویی کامل با سه رأس یا بیشتر، باید شامل زیردرختی نظیر درخت قسمت (پ) از شکل قبل باشد. اگر چگونگی فهرست شدن این سه رأس را درنظر بگیریم:

پیش‌ترتیب: r, a, b

پس‌ترتیب: a, b, r

میان‌ترتیب: a, r, b

می‌بینیم که در درخت دودویی کامل دیگر امکان ندارد که فهرست میان‌ترتیبی با فهرست پیش‌ترتیبی یکی باشد.

۱۲. الف) در اینجا ارتفاع ماکسیمم برابر با $n - ۱$ است.

ب) در این حالت n باید فرد باشد و ارتفاع ماکسیمم برابر با $\frac{n-۱}{۲}$ است.

۱۳. قضیهٔ ۱۲ ۰ ۶

الف) هر رأس درونی m فرزند دارد و بنابراین، mi رأس وجود دارد که فرزندان رأس دیگری هستند. این امر دربارهٔ همهٔ رأسهای درخت، به استثنای ریشه، درست است. بنابراین، $n = mi + ۱$.

ب) $$\ell + i = n = mi + ۱ \Longrightarrow \ell = (m - ۱)i + ۱$$

پ) $$\ell = (m - ۱)i + ۱ \Longrightarrow i = \frac{\ell - ۱}{m - ۱}$$

$$n = mi + ۱ \Longrightarrow i = \frac{n - ۱}{m}$$

(فرع ۱۲ ۰ ۱)

چون این درخت درخت متعادلی است، بنابر قضیهٔ ۱۲ ۰ ۷ داریم $m^{h-۱} < \ell \leq m^h$.

$$m^{h-۱} < \ell \leq m^h \Longrightarrow \log_m(m^{h-۱}) < \log_m(\ell) \leq \log_m(m^h)$$

$$\Longrightarrow (h - ۱) < \log_m \ell \leq h \Longrightarrow h = \lceil \log_m \ell \rceil$$

۱۴. با توجه به قضیهٔ ۱۲ ۰ ۶ (پ) داریم

الف) $$(\ell - ۱)/(m - ۱) = (n - ۱)/m \Longrightarrow (n - ۱)(m - ۱) = m(\ell - ۱) \Longrightarrow$$

$$n - ۱ = (m\ell - m)/(m - ۱) \Longrightarrow n = [(m\ell - m)/(m - ۱)] + ۱ =$$

$$[(m\ell - m) + (m - ۱)]/(m - ۱) = (m\ell - ۱)/(m - ۱)$$

ب) $$(\ell - ۱)/(m - ۱) = (n - ۱)/m \Longrightarrow \ell - ۱ = (m - ۱)(n - ۱)/m \Longrightarrow$$

$$\ell = [(m - ۱)(n - ۱) + m]/m = [(m - ۱)n + ۱]/m$$

۱۵. الف) با توجه به قسمت (الف) از قضیهٔ ۶۰۱۲ داریم

$$|V| = \text{تعداد رأسهای } T = ۳i + ۱ = ۳ \times ۳۴ + ۱ = ۱۰۳$$

بنابراین، تعداد یالهای T برابر با ۱۰۲ = ۱ − ۱۰۳ است. از قسمت (ب) در همین قضیه نتیجه می‌گیریم که تعداد برگهای T برابر است با ۶۹ = ۱ + ۳۴ × (۱ − ۳).

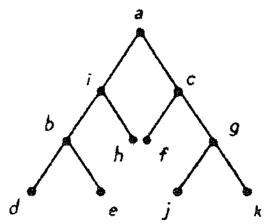
[می‌توانیم تعداد برگها را به این طریق نیز به‌دست آوریم که بنویسیم $|V| - i = ۱۰۳ - ۳۴ = ۶۹$.]

ب) از قسمت (پ) در قضیهٔ ۶۰۱۲ نتیجه می‌شود که درخت مفروض

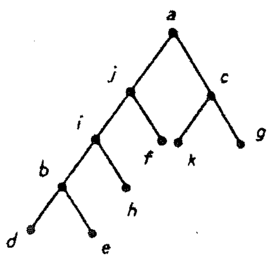
$$\frac{۸۱۷ - ۱}{۵ - ۱} = \frac{۸۱۶}{۴} = ۲۰۴$$

رأس داخلی دارد.

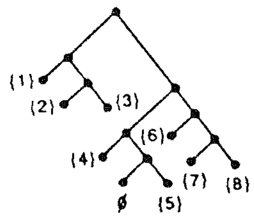
۱۶. الف)



ب)



۱۷. الف)



ب) ۹ و ۵ پ) $h(m - ۱)$ و $(h - ۱) + (m - ۱)$.

۱۸. الف) با توجه به قضیهٔ ۶۰۱۲ (پ) و با فرض $\ell = ۲۵$ و $m = ۲$، نتیجه می‌گیریم که

$$i = \frac{۲۵ - ۱}{۲ - ۱} = ۲۴$$

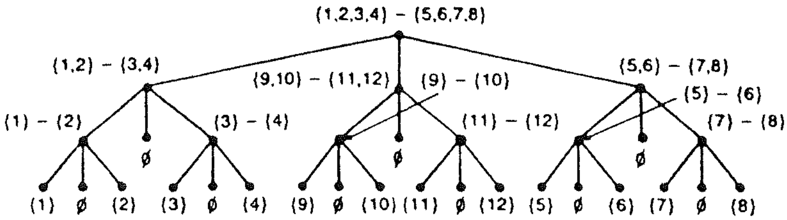
بنابراین، ۲۴ بستهٔ توپ تنیس باز می‌شود و ۲۴ مسابقه انجام می‌گیرد.

ب) ۴ یا ۵ پ) ۱۲۰ = (۲۴)(۵) بازی

۱۹. ۲۱۸۴۵ و $۱ + m + m^۲ + \cdots + m^{h-۱} = \frac{m^h - ۱}{m - ۱}$

۲۰. $۲(۵ + ۵^۲ + ۵^۳ + ۵^۴ + ۵^۵ + ۵^۶ + ۵^۷)$ و $۲(۵^۵ + ۵^۶ + ۵^۷)$

.۲۱



۲۲. تعداد رأسهای واقع در مرتبهٔ $h-1$ برابر است با m^{h-1}. بین این رأسها، $m^{h-1}-b_{h-1}$ تا از ℓ برگ T مشاهده می‌شوند. هر یک از b_{h-1} گره شاخه‌ای در m برگ (واقع در مرتبهٔ h) به حساب می‌آید. بنابراین،

$$\ell = m^{h-1} - b_{h-1} + mb_{h-1} = m^{h-1} + (m-1)b_{h-1}$$

بند ۳.۱۲

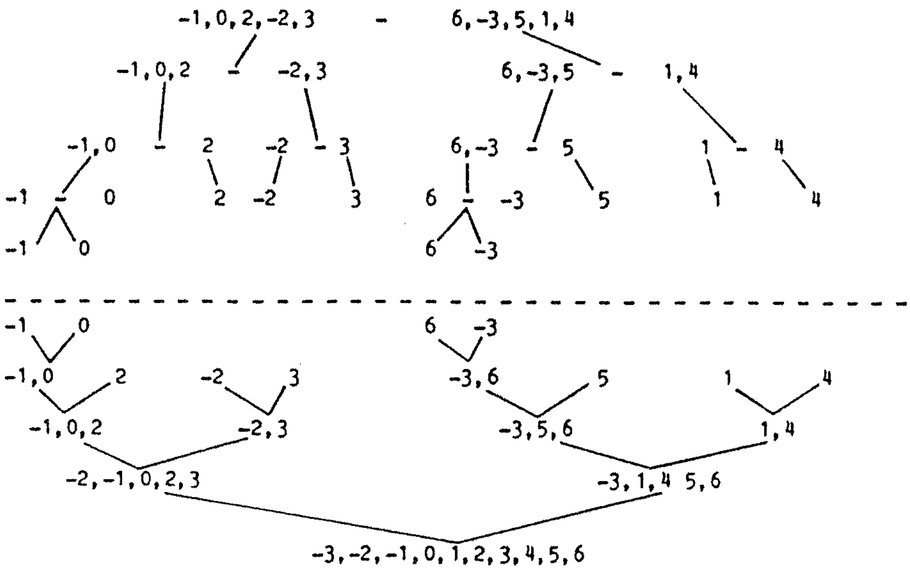
۱. الف) $L_1 : 1, 3, 5, 7, 9$ ، $L_2 : 2, 4, 6, 8, 10$

ب) فرض می‌کنیم $m < n$. دراین‌صورت

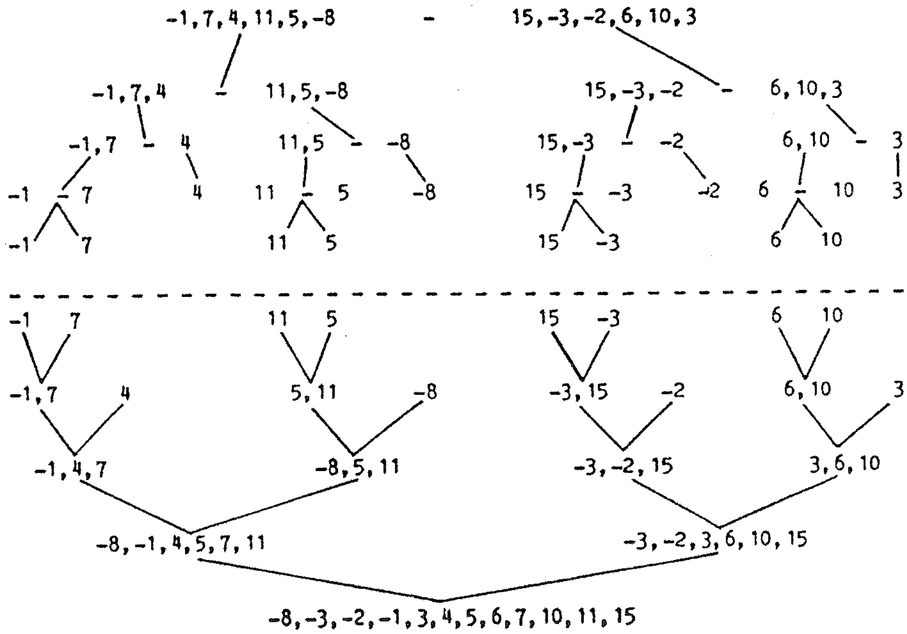
$$L_1 : 1, 3, 5, 7, \ldots, 2m-3, m+n$$

$$L_2 : 2, 4, 6, 8, \ldots, 2m-2, 2m-1, 2m+1, \ldots, m+n-1$$

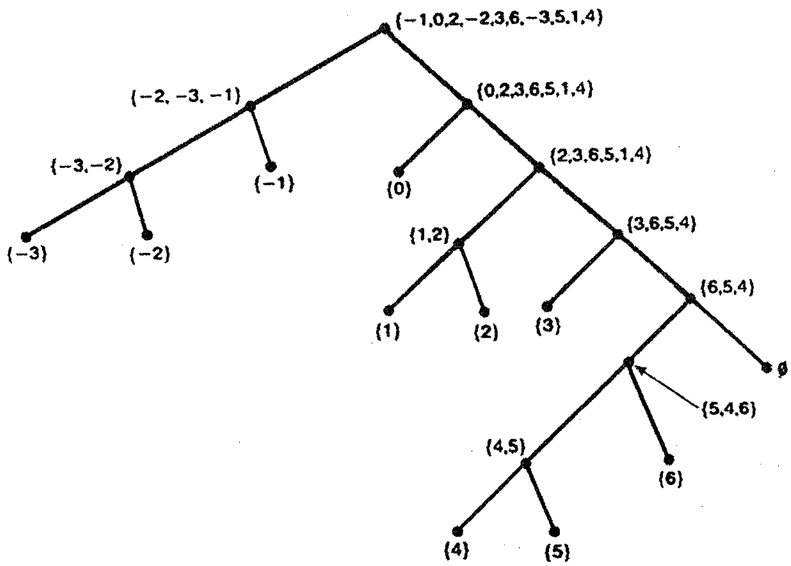
۲. الف)



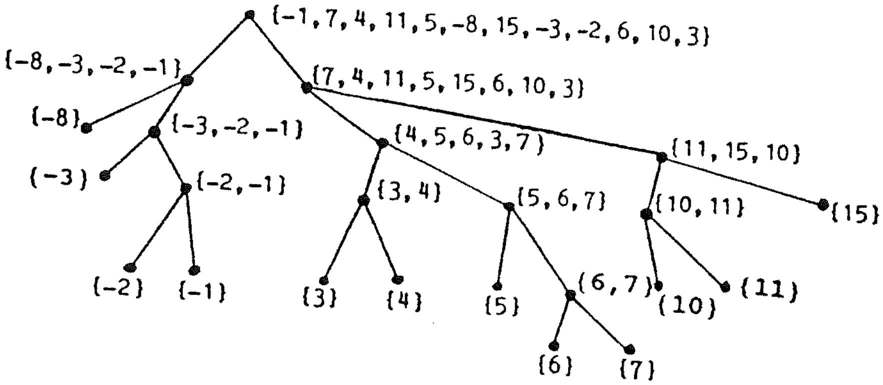
ب)


-1, 7, 4, 11, 5, -8
15, -3, -2, 6, 10, 3
-1, 7, 4
11, 5, -8
15, -3, -2
6, 10, 3
-1, 7
4
11, 5
-8
15, -3
-2
6, 10
3
-1
7
4
11
5
-8
15
-3
-2
6
10
3
-1
7
11
5
15
-3
6
10
-1
7
11
5
15
-3
6
10
-1, 7
4
5, 11
-8
-3, 15
-2
6, 10
3
-1, 4, 7
-8, 5, 11
-3, -2, 15
3, 6, 10
-8, -1, 4, 5, 7, 11
-3, -2, 3, 6, 10, 15
-8, -3, -2, -1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 15

۳. الف)


(-1,0,2,-2,3,6,-3,5,1,4)
(-2, -3, -1)
(0,2,3,6,5,1,4)
(-3,-2)
(-1)
(0)
(2,3,6,5,1,4)
(-3)
(-2)
(1,2)
(3,6,5,4)
(1)
(2)
(3)
(6,5,4)
ø
(5,4,6)
(4,5)
(6)
(4)
(5)

ب)



۴. برای اثبات این نتیجه، اصل استقرای قوی را به‌کار می‌بریم. می‌دانیم که $g(۱) \leq g(۲) \leq g(۳) \leq g(۴)$. بنابراین، فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $i, j \in \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$،

$$i < j \Longrightarrow g(i) \leq g(j)$$

با درنظرگرفتن $n + ۱$، دو حالت را باید بررسی کنیم.

(۱) اگر $n + ۱$ فرد باشد، به‌ازای عددی مانند $k \in \mathbf{Z}^+$ داریم $n + ۱ = ۲k + ۱$. در بدترین حالت،

$$\begin{aligned} g(n+۱) &= g(۲k+۱) = g(k) + g(k+۱) + [k + (k+۱) - ۱] \\ &= g(k) + g(k+۱) + ۲k \geq g(k) + g(k) + (۲k - ۱) \\ &= g(۲k) = g(n) \end{aligned}$$

زیرا بنابر فرض استقرا، $g(k + ۱) \geq g(k)$.

(۲) اگر $n + ۱$ زوج باشد، به‌ازای عددی مانند $t \in \mathbf{Z}^+$ داریم $n + ۱ = ۲t$. در بدترین حالت،

$$\begin{aligned} g(n+۱) &= g(۲t) = g(t) + g(t) + (t + t - ۱) \\ &= g(t) + g(t) + (۲t - ۱) \geq g(t) + g(t-۱) + (۲t - ۲) \\ &= g(۲t - ۱) = g(n) \end{aligned}$$

زیرا بنابر فرض استقرا، $g(t) \geq g(t - ۱)$.

درنتیجه، g تابعی افزایشی است.

بند ۴.۱۲

۱. الف) tear ب) tatener پ) rant

۲. $x = y = z = ۱$

۳.

h : ۱۰۱	e : ۰۱	a : ۰۰۱
i : ۱۱	f : ۱۰۰۱	b : ۰۰۰۰۰۱
j : ۰۰۰۰۰۰	g : ۰۰۰۰۱	c : ۱۰۰۰
		d : ۰۰۰۱

۴. الف) $۲^{۳}$ ب) $۲^{۷}$ پ) $۲^{۱۲}$ ت) ۲^{h}

۵. چون این درخت $m^{۷} = ۲۷۹۹۳۶$ برگ دارد، پس $m = ۶$. با توجه به قضیهٔ ۱۲ ۰ ۶ می‌بینیم که تعداد رأسهای درونی برابر است با $۵۵۹۸۷ = \frac{۲۷۹۹۳۵}{۵} = \frac{m^{۷} - ۱}{m - ۱}$.

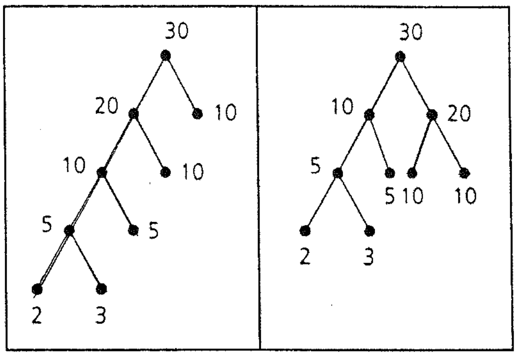
۶. الف) برای ادغام فهرستهای $L_۱$ و $L_۲$ حداکثر $۱۱۴ = ۱ - ۴۰ + ۷۵$ و برای ادغام فهرستهای $L_۳$ و $L_۴$ حداکثر $۱۵۹ = ۱ - ۵۰ + ۱۱۰$ مقایسه لازم داریم. دراین‌صورت، برای ادغام دو فهرست حاصل، حداکثر $۲۷۴ = ۱ - ۱۶۰ + ۱۱۵$ مقایسه لازم داریم. به این ترتیب، تعداد کل مقایسه‌های لازم حداکثر $۵۷۴ = ۱۷۴ + ۱۵۹ + ۱۱۴$ است.

ب) حداکثر ۱۱۴، حداکثر ۲۲۴ (روی‌هم، حداکثر ۳۳۸)، حداکثر ۲۷۴ (روی‌هم، حداکثر ۶۱۲).

پ) $L_۲$ و $L_۴$ را ادغام کنید، سپس فهرست حاصل (از ادغام $L_۲$ و $L_۴$) را با $L_۱$ و سرانجام، فهرست جدید (حاصل از ادغام $L_۱$، $L_۲$ و $L_۴$) را با $L_۳$ ادغام کنید. روی‌هم به حداکثر $۵۲۷ = ۲۷۴ + ۱۶۴ + ۸۹$ مقایسه نیاز داریم.

ت) برای مینیمم کردن تعداد مقایسه‌ها در فرایند مرتب‌سازی،درخت بهینه‌ای با وزنهای w_i، $۱ \leq i \leq n$، که در آن $w_i = |L_i|$، رسم کنید.

۷.



قسمت (الف) از مرحلهٔ (۲) را در الگوریتم درخت هافمن به‌صورت زیر ترسیم کنید. اگر n تا ($n > ۲$) از این نوع درختها دارای کمترین وزن ریشه‌ای w و w' باشند، دراین‌صورت،

(یک) اگر $w < w'$ و وزن ریشهٔ $n - ۱$ تا از این درختها w' باشد، درختی (با وزن ریشه‌ای w') باکمترین ارتفاع انتخاب کنید.

(دو) اگر $w = w'$ (و کمترین وزن ریشه‌ای همهٔ این n درخت یکی باشد) دو درخت (با وزن ریشه‌ای w) با کمترین ارتفاع انتخاب کنید.

بند ۵.۱۲

۱. نقاط مفصلی عبارت‌اند از b، e، f، h، j و k. مؤلفه‌های دو همبند عبارت‌اند از

$$B_1 : \{\{a,b\}\};\ B_2 : \{\{d,e\}\};$$

$$B_3 : \{\{b,c\},\{c,f\},\{f,e\},\{e,b\}\};\ B_4 : \{\{f,g\},\{g,h\},\{h,f\}\};$$

$$B_5 : \{\{h,i\},\{i,j\},\{j,h\}\};$$

$$B_6 : \{\{j,k\}\};$$

$$B_7 : \{\{k,p\},\{p,n\},\{n,m\},\{m,k\},\{p,m\}\}$$

۲. اگر هر مسیری که از x به y می‌رود شامل رأس z باشد، دراین‌صورت شکافتن رأس z به دست‌کم دو مؤلفهٔ C_x و C_y، که در آن $x \in C_x$ و $y \in C_y$، منجر می‌شود. در غیراین‌صورت، مسیری وجود دارد که x و y را به هم وصل می‌کند و شامل رأس z نیست. برعکس، اگر z یک نقطهٔ مفصلی G باشد، دراین‌صورت شکافتن z به دست‌کم دو مؤلفهٔ C_1 و C_2 برای G منجر می‌شود. دو رأس مانند $x \in C_1$ و $y \in C_2$ انتخاب کنید. چون G همبند است، دست‌کم یک مسیر از x به y وجود دارد، ولی چون با شکافتن z، x و y مجزا می‌شوند، هر مسیری که x و y را به‌هم وصل کند شامل رأس z است.

۳. الف) T می‌تواند حداقل یک و حداکثر $n - 2$ نقطهٔ مفصلی داشته باشد. اگر T یک رأس درجهٔ $(n - 1)$ داشته باشد، تنها نقطهٔ مفصلی همین رأس است. اگر T مسیری با n رأس و $n - 1$ یال باشد، دراین‌صورت هر یک از $n - 2$ رأس درجهٔ ۲ یک نقطهٔ مفصلی است.

ب) در همهٔ حالتها، هر درخت n رأسی $n - 1$ مؤلفهٔ دو همبند دارد. هر یال یک مؤلفهٔ دو همبند است.

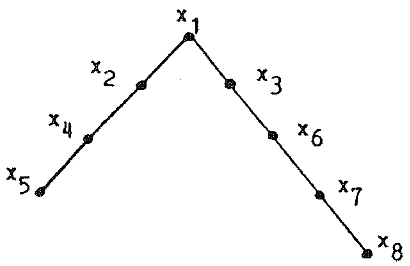
۴. الف) با توجه به تمرین ۲، اگر v یک نقطهٔ مفصلی T باشد، رأسهایی مانند x و y وجود دارند به‌طوری که هر مسیری که از x به y برود شامل رأس v است. بنابراین، $\deg(v) > 1$. برعکس، اگر $\deg(v) > 1$، فرض می‌کنیم $a, b \in V$ چنان باشد که $\{a,v\} \in E$ و $\{v,b\} \in E$. دراین‌صورت، پس از شکافتن رأس v، این درخت به دو مؤلفهٔ C_a و C_b، که به ترتیب شامل a و b هستند، مجزا می‌شود. در غیراین‌صورت، مسیر دیگری از a به b هست که شامل رأس v نیست. این با قضیهٔ ۱۲ . ۱ تناقض دارد.

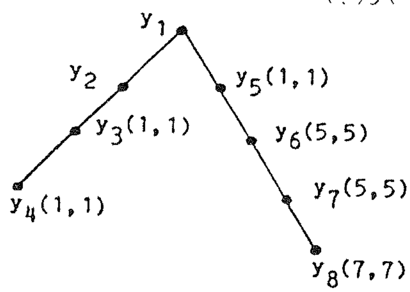
ب) چون G همبند است، G درخت فراگیری مانند $T = (V, E')$ دارد. این درخت دست‌کم دو رأس آویزان دارد. فرض می‌کنیم v رأس آویزانی در T باشد. اگر v یک نقطهٔ مفصلی G باشد، رأسهایی مانند x و y در G وجود دارند به‌طوری‌که هر مسیری که x و y را به هم وصل کند شامل v است. دراین‌صورت، یکی از این مسیرها باید در T باشد. درنتیجه، $\deg_T(v) > 1$، که این هم با فرض آویزان بودن رأس v تناقض دارد.

۵. $\chi(G) = \max\{\chi(B_i) | 1 \le i \le k\}$

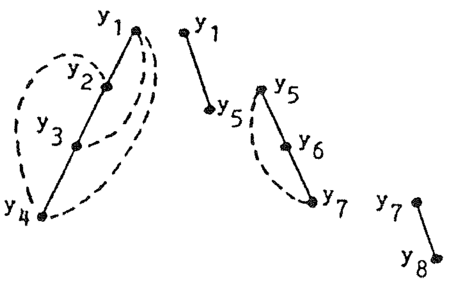
۶. (ماتریس اول)

(الف) و (ب)



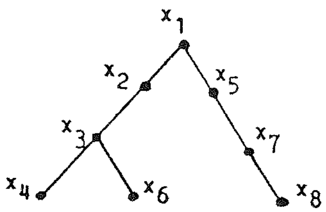


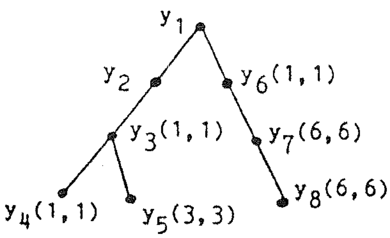
سه نقطهٔ مفصلی و چهار مؤلفهٔ دو همبند وجود دارد.



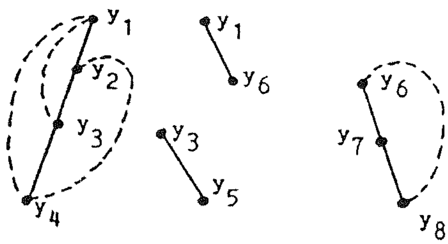
(ماتریس دوم)

(الف) و (ب)





سه نقطهٔ مفصلی و چهار مؤلفهٔ دوهمبند وجود دارد.



۷. همواره داریم $\text{low}(y_\text{۲}) = \text{low}(y_\text{۱}) = \text{۱}$. (یادداشت: رأسهای $y_\text{۱}$ و $y_\text{۲}$ همیشه در یک مؤلفهٔ دوهمبند قرار دارند.)

۸. الف) مجموعهٔ رأسهای هر یک از دوگراف مجموعهٔ $V - \{v\}$ است. اگر $e = \{x, y\}$ یالی از $\overline{G - v}$ باشد، آن‌گاه e در $G - v$ نیست و چون $x \neq v$ و $y \neq v$، پس $e \in \overline{G} - v$. برعکس، اگر $e = \{x, y\}$ یالی در $\overline{G} - v$ باشد، آن‌گاه $x \neq v$، $y \neq v$ و e نه یالی از G است نه از زیرگراف $G - v$. درنتیجه، e یالی از $\overline{G - v}$ است. چون $\overline{G - v}$ و $\overline{G} - v$ یک مجموعه رأس و یک مجموعه یال دارند. این دوگراف برابرند.

ب) اگر v یک نقطهٔ مفصلی G باشد، دراین‌صورت $\kappa(G - v) > \kappa(G)$ و بنابراین، $G - v$ همبند نیست. پس $\overline{G - v}$ همبند است. بنابراین، $\kappa(\overline{G} - v) = \kappa(\overline{G - v}) = \text{۱} \leq \kappa(\overline{G})$ و درنتیجه، v نمی‌تواند نقطهٔ مفصلی $\overline{G}$ باشد.

۹. برهان: اگر این طور نباشد، فرض می‌کنیم $v \in V$ یک نقطهٔ مفصلی G باشد. دراین‌صورت $\kappa(G - v) > \kappa(G) = \text{۱}$. (با توجه به تمرین ۱۷ از بند ۱۱ ۶۰ می‌دانیم که G همبند است.) $G - v$ ناهمبند و دارای مؤلفه‌های $H_\text{۱}$، $H_\text{۲}$، $\ldots$، H_t است، که در آن $t \geq \text{۲}$. به‌ازای $\text{۱} \leq i \leq t$، فرض می‌کنیم $v_i \in H_i$. دراین‌صورت $H_i + v$ زیرگرافی از $G - v_{i+\text{۱}}$ است و $\chi(H_i + v) \leq \chi(G - v_{i+\text{۱}}) < \chi(G)$. (در اینجا $v_{t+\text{۱}} = v_\text{۱}$.) اکنون فرض می‌کنیم $\chi(G) = n$ و فرض می‌کنیم $\{c_\text{۱}, c_\text{۲}, \ldots, c_n\}$ مجموعه‌ای از n رنگ باشد. به‌ازای هر $\text{۱} \leq i \leq t$، می‌توانیم رأسهای $H_i + v$ را با حداکثر $n - \text{۱}$ رنگ به‌طور سره رنگ کنیم (و می‌توانیم در رنگ‌آمیزی همهٔ این t زیرگراف، $c_\text{۱}$ را برای رنگ‌آمیزی رأس v به‌کار ببریم). دراین‌صورت می‌توانیم این t زیرگراف را در رأس v به‌هم وصل کنیم و رنگ‌آمیزی سره‌ای از رأسهای G، که در آن کمتر از n ($n = \chi(G)$) رنگ به‌کار می‌رود، به‌دست آوریم.

تمرینات تکمیلی

۱. الف) اگر G درخت باشد، G را درختی ریشه‌دار می‌گیریم. دراین‌صورت λ انتخاب برای رنگ‌آمیزی ریشهٔ G و $(\lambda - \text{۱})$ انتخاب برای رنگ‌آمیزی هر یک از اعقاب ریشه وجود دارد. اکنون نتیجهٔ مطلوب از قاعدهٔ حاصل‌ضرب به‌دست می‌آید. برعکس، اگر $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - \text{۱})^{n-\text{۱}}$، چون عامل λ فقط یک‌بار دیده می‌شود، گراف همبند است. از

$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - \text{۱})^{n-\text{۱}} = \lambda^n - (n - \text{۱})\lambda^{n-\text{۱}} + \cdots + (-\text{۱})^{n-\text{۱}}\lambda$$

نتیجه می‌شود که G دارای n رأس و $(n - \text{۱})$ یال است. پس، با توجه به قسمت (ت) از قضیهٔ ۱۲ ۵۰، G درخت است.

ب) با توجه به قسمت (الف)، $P(G, \text{۲}) = \text{۰}$، درحالی‌که $P(G, \text{۲}) = \text{۲} > \text{۰}$ و درنتیجه $\chi(G) = \text{۲}$.

پ) در گرافی مانند $G = (V, E)$، اگر $e \in E$، آن‌گاه $P(G, \lambda) = P(G_e, \lambda) - P(G'_e, \lambda)$ و بنابراین، $P(G, \lambda) \leq P(G_e, \lambda)$. اگر G همبند باشد ولی درخت نباشد، از هر دور G یالی حذف کنید تا زیرگرافی که به‌دست می‌آید درخت فراگیری مانند T برای G بشود. دراین‌صورت

$$P(G, \lambda) \leq P(T, \lambda) = \lambda(\lambda - \text{۱})^{n-\text{۱}}$$

[یادآور می‌شویم که $P(G, \lambda)$ تعداد طرق رنگ‌آمیزی سرهٔ رأسهای G با استفاده از λ رنگ است. بنابراین، $P(G, \lambda) \leq P(T, \lambda)$ نابرابری‌ای بین دو عدد است نه بین دو چندجمله‌ای.]

۲. مسأله را با درخت چهارتایی کاملی که رئیس جمهور در نقش ریشهٔ درخت است مدلسازی کنید.

الف) چون ۱۲۵ کارمند اجرایی (یا ۱۲۵ رأس) وجود دارد، تعداد یالها (یا پیامهای تلفنی) ۱۲۴ است.

ب) با توجه به قضیهٔ ۱۲ ۰ ۶ (ب) داریم $i = \frac{۱۲۵ - ۱}{۴} = ۶۱$. بنابراین، علاوه‌بر رئیس جمهور، ۶۰ نفر از کارمندان اجرایی پیام می‌فرستند.

۳. الف) ۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰۱۰۰

ب) چون آخرین دو رأسی که در پیمایش پیش‌ترتیبی دیده می‌شوند برگ‌اند، آخرین دو نماد واقع در دنبالهٔ مشخصهٔ هر درخت دودویی کامل عبارت‌اند از ۰۰.

۴. الف)
$$\{-۲, ۵\} \ \{-۱۰, ۳۵\} \ \{۲, ۷\} \ \{-۵, ۱۸\} \ \{۶, ۱۵\} \ \{۴, ۹\} \ \{۳, ۲۳\} \ \{۱, ۱۱\}$$
$$\{۲, ۵, ۶, ۱۵\} \ \{-۱۰, ۴, ۹, ۳۵\} \ \{۲, ۳, ۷, ۲۳\} \ \{-۵, ۱, ۱۱, ۱۸\}$$
$$\{-۲, ۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۱۵, ۲۳\} \ \{-۱۰, -۵, ۱, ۴, ۹, ۱۱, ۱۸, ۳۵\}$$
$$\{-۱۰, -۵, -۲, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۹, ۱۱, ۱۵, ۱۸, ۲۳, ۳۵\}$$

ب) $\sum_{i=۱}^{k} (۲^i - ۱) ۲^{k-i}$

۵. الف) ۳۲ برگ، ۳۱ رأس داخلی و ۶۲ یال.

ب) ۲^h، $۲^h - ۱$ رأس داخلی و $۲(۲^h - ۱)$ یال.

۶. $\sum_{i=۱}^{m} ۲^{-d_i} = \sum_{i=۱}^{۲^h} ۲^{-d_i} = (۲^h)(۲^{-h}) = ۱$.

۷. فرض می‌کنیم که $G = (V, E)$ همبند باشد، در غیراین‌صورت با مؤلفه‌ای از G کار می‌کنیم. چون G همبند است و به‌ازای هر $v \in V$ داریم $\deg(v) \geq ۲$، از قضیهٔ ۱۲ ۰ ۴ نتیجه می‌گیریم که G درخت نیست. ولی هر گراف همبند که درخت نباشد باید دور داشته باشد.

۸. با توجه به قسمت اول از تعریف $\mathcal{R}$، رابطهٔ مفروض بازتابی است. برای اثبات ویژگی پادتقارن، فرض می‌کنیم $x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}x$، که در آن $x, y \in V$. از $x\mathcal{R}y$ نتیجه می‌شود که x روی مسیری است که از r به y می‌رود. اگر $x \neq y$، آن‌گاه وقتی تنها مسیر r به y را می‌پیماییم، x قبل از y دیده می‌شود. بنابراین، با توجه به یکتایی این مسیر، نمی‌توانیم داشته باشیم $y\mathcal{R}x$. پس

$$(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$$

سرانجام، فرض می‌کنیم $x, y, z \in V$، که در آن $x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}z$. دراین‌صورت x روی مسیر r به y و y روی تنها مسیر r به z قرار دارد. چون این دو مسیر یکتا هستند، مسیر r به z باید شامل x باشد. پس $x\mathcal{R}z$ و $\mathcal{R}$ ترایاست.

۹. به‌ازای $۱ \leq i < n$ فرض می‌کنیم x_i تعداد رأسهایی مانند v باشد به‌طوری که $\deg(v) = i$. دراین‌صورت

$|E|+1 = |V| = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$ و بنابراین، $2|E| = 2(-1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})$. ولی

$$2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = \left(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + (n-1)x_{n-1}\right)$$

از حل $2(-1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) = x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1}$ نسبت به x_1، می‌بینیم که

$$x_1 = 2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \cdots + (n-3)x_{n-1} = 2 + \sum_{\deg(v_i)\geq 3} [\deg(v_i) - 2]$$

۱۰. الف) به‌ازای هر $e \in E$، $e = e$. پس $e\mathcal{R}e$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است.

اگر $e_1, e_2 \in E$ به‌گونه‌ای باشند که $e_1 \neq e_2$ و $e_1\mathcal{R}e_2$، آن‌گاه e_1 و e_2 یالهایی از دوری مانند C در G هستند. بنابراین، e_2 و e_1 یالهایی از دور C هستند. پس $e_2\mathcal{R}e_1$ و $\mathcal{R}$ متقارن است.

فرض می‌کنیم e_1، e_2 و e_3 سه یال متمایز باشند به‌طوری‌که $e_1\mathcal{R}e_2$ و $e_2\mathcal{R}e_3$. فرض می‌کنیم C_1 دوری از G، حاوی e_1 و e_2 و C_2 دوری حاوی e_2 و e_3 باشد. اگر $C_1 \neq C_2$، فرض می‌کنیم C دوری از G باشد که به‌وسیلهٔ یالهای C_1 و C_2، با حذف یالهای مشترک، ساخته می‌شود. (بنابراین، $C = C_1 \Delta C_2$.)

چون e_1 و e_3 روی C قرار دارند، پس $e_1\mathcal{R}e_3$ و $\mathcal{R}$ ترایاست.

ب) افرازی از مجموعهٔ E که به‌وسیلهٔ $\mathcal{R}$ القا می‌شود، مؤلفه‌های دوهمبند G را به‌دست می‌دهد.

۱۱. الف) G^2 با K_5 یکریخت است.

ب) G^2 با K_4 یکریخت است.

پ) G^2 با K_{n+1} یکریخت است و بنابراین، تعداد یالهای جدید برابر است با $\binom{n}{2} = \binom{n+1}{2} - n$.

ت) اگر G^2 نقطه‌ای مفصلی مانند x داشته باشد، رأسهایی مانند $u, v \in V$ وجود دارند به‌طوری‌که هر مسیری در G^2 که از u به v برود از x می‌گذرد. (این مطلب از تمرین ۲ در بند ۱۲ ۰ ۵ نتیجه می‌شود.) چون G همبند است، مسیری مانند P در G وجود دارد که از u به v می‌رود. اگر x روی این مسیر (که مسیری در G^2 نیز هست) نباشد. دراین‌صورت این امر را که x نقطه‌ای مفصلی است نقض کرده‌ایم. بنابراین مسیر P (در G) از x می‌گذرد و می‌توانیم بنویسیم:

$$P: u \to u_1 \to \cdots \to u_{n-1} \to u_n \to x \to v_m \to v_{m-1} \to \cdots \to v_1 \to v$$

دراین‌صورت، در G^2 یال $\{u_n, v_m\}$ را اضافه می‌کنیم و مسیر P' (در G^2) که با

$$P': u \to u_1 \to \cdots \to u_{n-1} \to u_n \to v_m \to v_{m-1} \to \cdots \to v_1 \to v$$

بیان می‌شود از x نمی‌گذرد. بنابراین، x نقطهٔ مفصلی G^2 نیست و G^2 نقطهٔ مفصلی ندارد.

۱۲. الف) برای تعیین مقدار مینیمم $|V|$، شش برگ در مرتبهٔ ۸ داریم و $6^7 - 1$ برگ دیگر در مرتبهٔ ۷ قرار دارند. چون تعداد برگها $6^7 + 5$ است، از قسمت (پ) در قضیهٔ ۱۲ ۰ ۶ نتیجه می‌شود که

$$|V| = \frac{6}{5}\left[(6^7 + 5) - 1\right] + 1 = 335929$$

برای تعیین مقدار ماکسیمم $|V|$، یک برگ در مرتبهٔ ۷ داریم و $(۶)(۱-۶^۷)$ برگ دیگر در مرتبهٔ ۸ قرار دارند. بنابراین، روی‌هم $۶^۸-۵=۱+(۶-۶^۸)$ برگ وجود دارد. باز هم با استفاده از قسمت (پ) در قضیهٔ ۶.۱۲، می‌بینیم که $|V|=\frac{۶}{۵}\left[(۶^۸-۵)-۱\right]+۱=۲۰۱۵۵۳۳$.

ب) فرض می‌کنیم ℓ تعداد برگهای T را نشان دهد. در حالت مربوط به مینیمم،

$$|V|=\left(\frac{m}{m-۱}\right)\left[m^{h-۱}+(m-۱)-۱\right]+۱ \quad \text{و} \quad \ell=(m^{h-۱}-۱)+m=m^{h-۱}+(m-۱)$$

در حالت مربوط به ماکسیمم داریم

$$|V|=\left(\frac{m}{m-۱}\right)\left[m^h-m\right]+۱ \quad \text{و} \quad \ell=m(m^{h-۱}-۱)+۱=m^h-m+۱$$

۱۳. الف) به‌ازای $n\geq ۳$، $\ell_n=\ell_{n-۱}+\ell_{n-۲}$ و $\ell_۱=\ell_۲=۱$. چون این همان رابطهٔ بازگشتی فیبوناچی است، داریم $\ell_n=F_n$ که در آن، به‌ازای هر $n\geq ۱$، عدد nاُم فیبوناچی است.

ب) به‌ازای $n\geq ۳$، $i_n=i_{n-۱}+i_{n-۲}+۱$ و $i_۱=i_۲=۰$. جمعوند «۱+» به این سبب حضور دارد که ریشه را، که رأسی درونی است، به‌حساب می‌آوریم.

(قسمت همگن جواب):

$$i_n^{(h)}=i_{n-۱}^{(h)}+i_{n-۲}^{(h)}\,,\ n\geq ۳$$

$$i_n^{(h)}=A\alpha^n+B\beta^n\text{، که درآن } \alpha=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \text{ و } \beta=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

(قسمت خصوصی جواب):

$$i_n^{(p)}=C\text{، که در آن } C \text{ ثابت است}$$

پس از جایگذاری در رابطهٔ بازگشتی $i_n=i_{n-۱}+i_{n-۲}+۱$، $n\geq ۳$، می‌بینیم که $C=C+C+۱$ و بنابراین، $C=-۱$. پس $i_n=A\alpha^n+B\beta^n-۱$. با توجه به $i_۱=i_۲=۰$ داریم

$$۰=i_۱=A\alpha+B\beta-۱$$
$$۰=i_۲=A\alpha^۲+B\beta^۲-۱$$

و در نتیجه،

$$B=\frac{\alpha-۱}{\beta(\alpha-\beta)}=\frac{[(۱+\sqrt{۵})/۲]-۱}{\left[(۱-\sqrt{۵})/۲\right](\sqrt{۵})}=\frac{۱+\sqrt{۵}-۲}{(۱-\sqrt{۵})(\sqrt{۵})}=\frac{-۱}{\sqrt{۵}}$$

پس $A=\frac{۱-B\beta}{\alpha}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$. بنابراین،

$$i_n=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\alpha^n-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\beta^n-۱=F_n-۱$$

که در آن، به‌ازای $n\geq ۱$، F_n عدد nاُم فیبوناچی را نشان می‌دهد.

پ) به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $v_n = \ell_n + i_n$. درنتیجه، $v_n = F_n + F_n - ۱ = ۲F_n - ۱$، که در آن، مانند قسمتهای (الف) و (ب)، F_n عدد nاُم فیبوناچی را نشان می‌دهد.

ت) اگر ht_n ارتفاع T_n باشد، دراین‌صورت به‌ازای هر $n \geq ۲$ داریم $ht_{n+۱} = ht_n + ۱$ و $ht_۲ = ۰$.

(قسمت همگن جواب):

$$ht_{n+۱}^{(h)} = ht_n^{(h)}, n \geq ۲$$

$ht_n^{(h)} = A$، که در آن A ثابت است

(قسمت خصوصی جواب):

$ht_n^{(p)} = Bn$، که در آن B ثابت است

پس از جایگذاری $ht_p^{(h)} = Bn$ در $ht_{n+۱} = ht_n + ۱$، می‌بینیم که $B(n+۱) = Bn + ۱$.

پس $B = ۱$، $ht_n^{(p)} = n$ و $ht_n = n + A$.

با توجه به $ht_۲ = ۰ = ۲ + A$ داریم $A = -۲$. درنتیجه، به‌ازای هر $n \geq ۲$، ارتفاع T_n برابراست با $ht_n = n - ۲$ و $ht_۱ = ۰$.

۱۴. الف) در گراف $G_۳$ از شکل ۱۲ . ۴۵ (ت)، روی‌هم ۱۲ درخت فراگیر متمایز وجود دارد.

ب) گراف $G_{n+۱}$ را درنظر بگیرید. در اینجا، درختهای فراگیر متمایز به سه دستهٔ جامع و مانع زیر تعلق دارند:

(۱) یال $\{a, n+۱\}$ به‌کار رفته است: در اینجا می‌توانیم هر یک از t_n درخت فراگیر متمایز G_n را مورداستفاده قرار دهیم و درنتیجه، درخت فراگیری برای $G_{n+۱}$ به‌دست می‌آید.

(۲) یال $\{n+۱, b\}$ به‌کار رفته است: در اینجا وضعیتی مشابه (۱) داریم و t_n درخت فراگیر متمایز اضافی برای $G_{n+۱}$ به‌دست می‌آید.

(۳) هر دو یال $\{a, n+۱\}$ و $\{n+۱, b\}$ به‌کار رفته‌اند: در اینجا به‌ازای هر رأس i، $۱ \leq i \leq n$، دو انتخاب داریم: گنجاندن یال $\{a, i\}$ یا گنجاندن یال $\{i, b\}$ (ولی نه هر دو حالت). به این ترتیب، ۲^n درخت فراگیر متمایز دیگر را برای $G_{n+۱}$ به‌دست می‌آوریم.

نتیجه‌های به‌دست آمده در (۱)، (۲) و (۳) ما را به رابطهٔ بازگشتی زیر هدایت می‌کنند:

$$t_{n+۱} = ۲t_n + ۲^n, \quad t_۱ = ۱, \quad n \geq ۱ \qquad (*)$$

(جواب همگن): $t_{n+۱} = ۲t_n$

$t_n^{(h)} = A(۲^n)$، که در آن A ثابت است

(جواب خصوصی): $t_n^{(p)} = Bn(۲^n)$، که در آن B ثابت است.

پس از جایگذاری $t_n^{(p)}$ در معادلهٔ $(*)$ می‌بینیم که

$$B(n+۱)(۲^{n+۱}) = ۲Bn(۲^n) + ۲^n$$

$$Bn(2^{n+1}) + B(2^{n+1}) = Bn(2^{n+1}) + 2^n$$

درنتیجه، $2B(2^n) = 2^n$. پس $2B = 1$ یا $B = \frac{1}{2}$. بنابراین،

$$t_n = A(2^n) + \frac{1}{2}n(2^n) = A(2^n) + n2^{n-1}$$

چون $t_1 = 1 = A(2) + 1$، پس $A = 0$ و بنابراین، به‌ازای هر $n \geq 1$ داریم $t_n = n2^{n-1}$.

۱۵. الف) برای درختهای فراگیر G، دو حالت جامع و مانع زیر را داریم:

(یک) یال $\{x_1, y_1\}$ در درخت فراگیر قرار دارد: این درختهای فراگیر در b_n حساب شده‌اند.

(دو) یال $\{x_1, y_1\}$ در درخت فراگیر قرار ندارد: در این حالت یالهای $\{x_1, x_2\}$ و $\{y_1, y_2\}$ هر دو در درخت فراگیر هستند. با حذف یالهای $\{x_1, x_2\}$، $\{y_1, y_2\}$ و $\{x_1, y_1\}$ از گراف نردبانی اصلی، اکنون درخت فراگیری برای گراف نردبانی کوچکتر حاصل، که $n - 1$ پله دارد، لازم داریم. دراین حالت، تعداد درختهای فراگیر a_{n-1} است.

ب) دراینجا سه حالت جامع و مانع وجود دارد:

(یک) یالهای $\{x_1, x_2\}$ و $\{y_1, y_2\}$ هر دو در درخت فراگیر قرار دارند: $\{x_1, x_2\}$، $\{y_1, y_2\}$ و $\{x_1, y_1\}$ را ازگراف حذف کنید. دراین‌صورت، b_{n-1} تعداد آن درختهای فراگیری برای گراف نردبانی $n - 1$ «پله‌ای» است که یال $\{x_2, y_2\}$ در آنها گنجانده شده است. در هر یک از اینها یال $\{x_2, y_2\}$ را حذف و یالهای $\{x_1, x_2\}$، $\{y_1, y_2\}$ و $\{x_1, y_1\}$ را اضافه کنید.

(دو) یال $\{x_1, x_2\}$ در درخت فراگیر هست ولی یال $\{y_1, y_2\}$ نیست: اکنون از حذف یالهای $\{x_1, y_1\}$، $\{x_1, x_2\}$ و $\{y_1, y_2\}$ از G زیرگرافی نردبانی با $n - 1$ پله حاصل می‌شود. این زیرگراف a_{n-1} درخت فراگیر دارد.

(سه) در این حالت یال $\{y_1, y_2\}$ در درخت فراگیر هست ولی یال $\{x_1, x_2\}$ نیست: مانند حالت (دو)، a_{n-1} درخت فراگیر وجود دارد.

براساس استدلال قبل، به‌ازای هر $n \geq 2$ داریم $b_n = b_{n-1} + 2a_{n-1}$.

پ)

$$a_n = a_{n-1} + b_n$$

$$b_n = b_{n-1} + 2a_{n-1}$$

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + 2a_{n-1} = 3a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$b_n = a_n - a_{n-1} \Longrightarrow b_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$$

$$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} = 4a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 3, a_1 = 1, a_2 = 4$$

$$a_n - 4a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

$$r^2 - 4r + 1 = 0$$

$$r = (1/2)(4 \pm \sqrt{16 - 4}) = 2 \pm \sqrt{3}$$

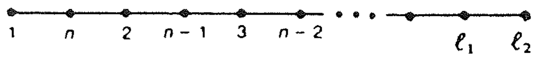
بنابراین، $a_n = A(۲+\sqrt{۳})^n + B(۲-\sqrt{۳})^n$. اکنون می‌بینیم که

$$a_{\circ} = \circ \Longrightarrow A + B = \circ \Longrightarrow B = -A$$

$$a_{۱} = ۱ = A(۲+\sqrt{۳}) - A(۲-\sqrt{۳}) = ۲A\sqrt{۳} \Longrightarrow B = \frac{-۱}{۲\sqrt{۳}} \text{ و } A = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$$

درنتیجه، به‌ازای هر $n \geq \circ$ داریم $a_n = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\left[(۲+\sqrt{۳})^n - (۲-\sqrt{۳})^n\right]$.

۱۶.

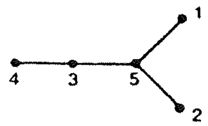


الف) اگر n زوج باشد، $\ell_{۱} = \frac{n}{۲}$ و $\ell_{۲} = \ell_{۱} + ۱$.
اگر n فرد باشد، $\ell_{۱} = \ell_{۲} + ۱$ و $\ell_{۲} = \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil$.

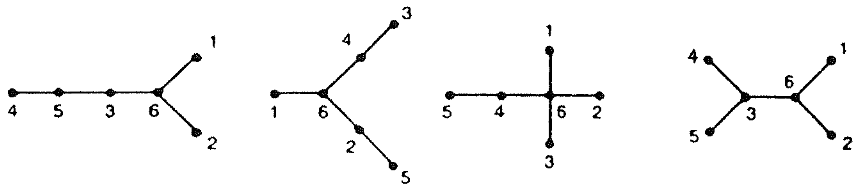
ب) رأس درجهٔ ۱ را با نشان ۱ نشانگذاری کنید. n رأس دیگر را با نشانهای ۲، ۳، . . .، n، $n+۱$ نشانگذاری کنید (برای هر رأس یک نشان).

پ) به‌ازای $|V| = ۴$، تنها درختها عبارت‌اند از مسیری به طول ۳ و $K_{۱,۳}$. این درختها، به‌ترتیب، مانند قسمتهای (الف) و (ب) بررسی می‌شوند.

به‌ازای $|V| = ۵$ سه درخت وجود دارد: (۱) مسیری به طول ۴، (۲) $K_{۱,۴}$ و (۳) درختی که یک رأس درجهٔ ۳ دارد. درختهای (۱) و (۲)، به‌ترتیب، مانند قسمتهای (الف) و (ب) بررسی می‌شوند. درخت سوم را می‌توان به‌صورت زیر نشانگذاری کرد.



به‌ازای $|V| = ۶$ شش درخت وجود دارد. مسیر به طول ۵ و $K_{۱,۵}$، به‌ترتیب، مانند قسمتهای (الف) و (ب) بررسی می‌شوند. چهار درخت دیگر را می‌توان به‌صورت زیر نشانگذاری کرد.



۱۷. الف) (یک) ۳ (دو) ۵

ب) $a_{۱} = ۲$، $a_{۲} = ۳$ و به‌ازای $n \geq ۳$ داریم $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$. دیده می‌شود که $a_n = F_{n+۱}$، که در آن $F_{n+۱}$ عدد $(n+۱)$اُم فیبوناچی است.

۱۳

بهینه‌سازی و تطابق

بند ۱.۱۳

۱. الف) اگر این‌طور نباشد، فرض می‌کنیم $1 \leq i \leq m$ کوچکترین اندیسی باشد که در $v_i \in \overline{S}$ صدق می‌کند. دراین‌صورت $d(v_0, v_i) < d(v_0, v_{m+1})$ و این با انتخاب v_{m+1}، به‌عنوان رأسی مانند $v \in \overline{S}$ که به‌ازای آن $d(v_0, v)$ مینیمم است، در تناقض است.

ب) فرض می‌کنیم مسیر سودار کوتاهتری (در G) وجود دارد که از v_0 به v_k می‌رود. اگر این مسیر از رأسی متعلق به $\overline{S}$ بگذرد، آن‌گاه با توجه به قسمت (الف) به تناقض می‌رسیم. در غیر این‌صورت، مسیر سودار کوتاهتری از v_0 به v_k مانند P'' داریم که رأسهای آن در S قرار دارند. به این ترتیب،

$$P'' \cup \{(v_k, v_{k+1}), (v_{k+1}, v_{k+2}), \ldots, (v_{m-1}, v_m), (v_m, v_{m+1})\}$$

مسیر سوداری (در G) از v_0 به v_{m+1} و کوتاهتر از مسیر P است.

۲. الف) مقادیر آغازی: $(\text{counter} = 0)$ $a = v_0$، $S_0 = \{a\}$. a را با $(-, 0)$ و شش رأس دیگر را با $(-, \infty)$ نشانگذاری کنید.

تکرار اول: $\overline{S}_0 = \{b, c, f, g, h, i\}$

$L(b) = 14$ ، $L(g) = 10$ ، $L(h) = 17$.

بنابراین، نشانهای زیر را داریم: $g : (10, a)$، $b : (14, a)$، $h : (17, a)$.

اگر v یکی از رأسهای c، f و i باشد، داریم $L(v) = \infty$. پس $v_1 = g$، $S_1 = \{a, g\}$ و counter به ۱ افزایش می‌یابد.

تکرار دوم: $\overline{S}_1 = \{b, c, f, h, i\}$

$14 > L(b) = 13 = L(g) + wt(g, b)$ و بنابراین، اکنون b با $(13, g)$ نشانگذاری می‌شود.

$17 > L(h) = 16 = L(g) + wt(g, h)$ و بنابراین، اکنون h با $(16, g)$ نشانگذاری می‌شود.

$L(i) = ۱۴ = L(g) + wt(g,i) < \infty$ و بنابراین، اکنون i با $(۱۴, g)$ نشانگذاری می‌شود. رأسهای c و f هنوز دارای نشان $(-, \infty)$ هستند. حال می‌بینیم که $v_۲ = b$. قرار می‌دهیم $S_۲ = \{a, g, b\}$ و counter را به ۲ افزایش می‌دهیم.

تکرارسوم: $\bar{S}_۲ = \{c, f, h, i\}$

$L(c) = ۲۲ = L(b) + wt(b,c)$ و c با $(۲۲, b)$ نشانگذاری می‌شود.

$L(f) = ۲۳ = L(b) + wt(b,f)$ و f با $(۲۳, b)$ نشانگذاری می‌شود.

$L(h) = ۱۶$ و h با $(۱۶, g)$ نشانگذاری می‌شود.

$L(i) = ۱۴$ و i با $(۱۴, g)$ نشانگذاری می‌شود.

اکنون داریم $v_۳ = i$ و $S_۳ = \{a, g, b, i\}$ و counter به ۳ افزایش می‌یابد.

تکرارچهارم: $\bar{S}_۳ = \{c, f, h\}$

$L(c) = ۲۲$ و c با $(۲۲, b)$ نشانگذاری می‌شود.

$L(h) = ۱۵ = L(i) + wt(i,h) < ۱۶$ و h با $(۱۵, i)$ نشانگذاری می‌شود.

$L(f) = ۲۱ = L(i) + wt(i,f) < ۲۳$ و f با $(۲۱, i)$ نشانگذاری می‌شود.

در اینجا داریم $v_۴ = h$، $S_۴ = \{a, g, b, i, h\}$ و اکنون مقدار ۴ را به counter نسبت می‌دهیم.

تکرارپنجم: $\bar{S}_۴ = \{c, f\}$

$L(c) = ۲۲$ و c با $(۲۲, b)$ نشانگذاری می‌شود.

$L(f) = ۲۱$ و f با $(۲۱, i)$ نشانگذاری می‌شود.

اکنون $v_۵ = f$، $S_۵ = \{a, g, b, i, h, f\}$ و counter به ۵ افزایش می‌یابد.

تکرارششم: $\bar{S}_۵ = \{c\}$

$L(c) = ۲۲$ و c با $(۲۲, b)$ نشانگذاری می‌شود.

در اینجا $v_۶ = c$، $S_۶ = \{a, g, b, i, h, f, c\}$ و اکنون $۶ = ۷ - ۱ = |V| - ۱$ و بنابراین، الگوریتم خاتمه می‌یابد.

ب) $c: \{a,g\}, \{g,b\}, \{b,c\}$ $\quad f: \{a,g\}, \{g,i\}, \{i,f\}$ $\quad i: \{a,g\}, \{g,i\}$

۳. الف) $d(a,b) = ۵$، $d(a,c) = ۶$، $d(a,f) = ۱۲$، $d(a,g) = ۱۶$ و $d(a,h) = ۱۲$.

ب) $f: \{(a,c), (c,f)\}$ $\quad g: \{(a,b), (b,h), (h,g)\}$

$h: \{(a,b), (b,h)\}$

۴. الف) رأسهای G را به‌صورت $[a, b, c, f, g, h]$ مرتب کنید.

آرایهٔ نشانهای زیر را برای $L_۰$ به‌دست می‌آوریم: $[\infty, \infty, ۰, \infty, \infty, \infty]$ و $S_۰ = \{c\}$. به‌همین ترتیب، آرایه‌های بعد را به‌دست می‌آوریم:

$$L_۱: [\infty, \infty, ۰, ۶, \infty, ۱۱];\ S_۱ = \{c, f\}$$

$L_{۲} : [۱۱, \infty, ۰, ۶, ۱۵, ۱۰];\ S_{۲} = \{c, f, h\}$

$L_{۳} : [۱۷, \infty, ۰, ۶, ۱۴, ۱۰];\ S_{۳} = \{c, f, h, g\}$

$L_{۴} : [۱۷, \infty, ۰, ۶, ۱۴, ۱۰];\ S_{۴} = \{c, f, h, g, a\}$

$L_{۵} : [۱۷, ۲۲, ۰, ۶, ۱۴, ۱۰];\ S_{۵} = \{c, f, h, g, a, b\}$

ب) رأسهای G را به‌صورت $[a, b, c, f, g, h, i]$ مرتب کنید.
آرایه‌های زیر را برای این شش تکرار به‌دست می‌آوریم:

$L_{۰} : [۰, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty];\ S_{۰} = \{a\}$

$L_{۱} : [۰, ۱۴, \infty, \infty, ۱۰, ۱۷, \infty];\ S_{۱} = \{a, g\}$

$L_{۲} : [۰, ۱۳, \infty, \infty, ۱۰, ۱۶, ۱۴];\ S_{۲} = \{a, g, b\}$

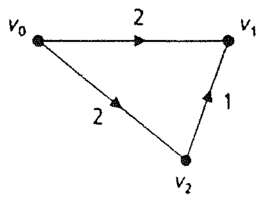
$L_{۳} : [۰, ۱۳, ۲۲, ۲۳, ۱۰, ۱۶, ۱۴];\ S_{۳} = \{a, g, b, i\}$

$L_{۴} : [۰, ۱۳, ۲۲, ۲۱, ۱۰, ۱۵, ۱۴];\ S_{۴} = \{a, g, b, i, h\}$

$L_{۵} : [۰, ۱۳, ۲۲, ۲۱, ۱۰, ۱۵, ۱۴];\ S_{۵} = \{a, g, b, i, h, f\}$

$L_{۶} : [۰, ۱۳, ۲۲, ۲۱, ۱۰, ۱۵, ۱۴];\ S_{۶} = \{a, g, b, i, h, f, c\}$

۵. نادرست. گراف وزندار زیر را درنظر بگیرید:



بند ۲.۱۳

۱. الگوریتم کروسکال، دنبالهٔ زیر (از جنگلها) راکه به درخت فراگیر مینیمالی به وزن ۱۸ مانند T خاتمه می‌یابد پدید می‌آورد:

(۱) $F_{۱} = \{\{e, h\}\}$، (۲) $F_{۲} = F_{۱} \cup \{\{a, b\}\}$،
(۳) $F_{۳} = F_{۲} \cup \{\{b, c\}\}$، (۴) $F_{۴} = F_{۳} \cup \{\{d, e\}\}$،
(۵) $F_{۵} = F_{۴} \cup \{\{e, f\}\}$، (۶) $F_{۶} = F_{۵} \cup \{\{a, e\}\}$،
(۷) $F_{۷} = F_{۶} \cup \{\{d, g\}\}$، (۸) $F_{۸} = T = F_{۷} \cup \{\{f, i\}\}$

۲. $C - E(۵۸)$؛ $E - B(۷۹)$؛ $B - D(۱۲۱)$؛ $D - G(۱۵۱)$؛ $G - F(۵۸)$؛ $F - A(۱۱۳)$.

۳. الف) $A-D(168)$؛ $G-D(51)$؛ $E-C(58)$؛ $F-G(58)$؛ $E-B(79)$؛ $D-B(121)$.

ب) $B-C(132)$؛ $A-D(168)$؛ $G-D(51)$؛ $C-E(58)$؛ $F-G(58)$؛ $D-B(121)$.

۴. با یالهای مشخص شده شروع کنید، مگر آنکه دور یا دورهایی حاصل شود. (اگر این وضع پیش آید، در هر یک از این دورها یال دارای وزن ماکسیمم را حذف کنید.) سپس با شروع از مرحلهٔ ۲، الگوریتم کروسکال را به‌کار ببرید.

۵. الف) برای تعیین درخت بهینه‌ای با وزن ماکسیمال، به‌جای هر دو حضور «کوچک» در الگوریتم کروسکال، «بزرگ» بگذارید.

ب) این یالها را به‌کار ببرید: $E-A(303)$؛ $B-A(290)$؛ $C-A(277)$؛ $B-F(201)$؛ $C-G(198)$؛ $D-A(168)$.

۶. اثبات برای الگوریتم پریم مشابه اثبات برای الگوریتم کروسکال است.

برهان: فرض می‌کنیم $n=|V|$ و T درخت فراگیری برای G باشد که به‌وسیلهٔ الگوریتم پریم به‌دست آمده است. یالهای T به‌صورت e_1، e_2، …، e_{n-1} نشانگذاری شده‌اند که در آن، به‌ازای اندیسی مانند $1 \le i \le n-1$، زیردرخت S_i از T که پس از تکرار iاُم الگوریتم به‌دست می‌آید شامل یالهای e_1، e_2، …، e_i است. برای هر درخت بهینهٔ T' از G، $d(T')$ را نظیر آنچه در برهان قضیهٔ ۱۳ ۱۰ دیدیم تعریف کنید. فرض می‌کنیم T_1 درخت بهینه‌ای برای G باشد که در آن، $d(T_1)=r$ ماکسیمال است. ثابت می‌کنیم که $T=T_1$.

اگر این‌طور نباشد، دراین‌صورت $r<n-1$ و یالی مانند $e_r=\{x,y\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $e_r \in T$ و $e_r \notin T_1$. ولی چون T_1 درخت فراگیری برای G است، مسیر یکتایی مانند P هست که x و y را در T_1 به هم وصل می‌کند. فرض می‌کنیم $x \in S_{r-1}$ و $y \notin S_{r-1}$. یالی مانند e'_r در P چنان انتخاب کنید که رأسی از S_{r-1} را به رأسی که در S_{r-1} نیست وصل کند. بنابر شرط مینیمال بودن در مرحلهٔ ۲ از الگوریتم پریم، داریم $\mathrm{wt}(e'_r) \ge \mathrm{wt}(e_r)$. با افزودن یال e_r به T_1، e_r همراه با یالهای P دور می‌سازند. اگر یال e'_r را حذف کنید، این دور مسیر می‌شود و زیرگراف جدیدی از G به‌دست می‌آید. چون این یک زیرگراف همبند با n رأس و $n-1$ یال است، پس درختی است که در آن $\mathrm{wt}(T_2)=\mathrm{wt}(T_1)+\mathrm{wt}(e_r)-\mathrm{wt}(e'_r)$. با توجه به $\mathrm{wt}(e'_r) \ge \mathrm{wt}(e_r)$، می‌بینیم که $\mathrm{wt}(T_2) \le \mathrm{wt}(T_1)$ و چون T_1 بهینه است، پس $\mathrm{wt}(T_2)=\mathrm{wt}(T_1)$. دراین‌صورت T_2 درخت بهینه‌ای برای گراف G است به‌طوری‌که $d(T_2)>r$ و این هم با انتخاب T_1 (که در آن، $d(T_1)$ ماکسیمال است) در تناقض است.

۷. وقتی وزنهای یالها متمایز باشند، در هر مرحله از الگوریتم کروسکال یال یکتایی انتخاب می‌شود.

بند ۳.۱۳

۱. الف) $s=2$، $t=4$، $w=5$، $x=9$ و $y=4$

ب) ۱۸

پ) (یک) $P=\{a,b,h,d,g,i\}$، $\overline{P}=\{z\}$

(دو) $P=\{a,b,h,d,g\}$، $\overline{P}=\{i,z\}$

(سه) $P=\{a,h\}$، $\overline{P}=\{b,d,g,i,z\}$

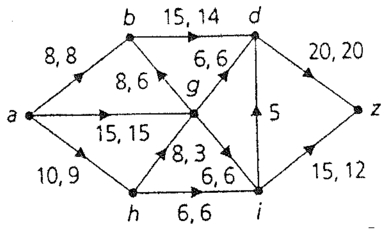
۲. این نتیجه از ملاحظاتی که بعد از برهان قضیهٔ ۱۳ ۰ ۳ بیان کردیم به‌دست می‌آید، یعنی

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{\substack{x\in P \\ y\in \overline{P}}} f(x,y) - \sum_{\substack{w\in P \\ v\in \overline{P}}} f(v,w)$$

اگر $\mathrm{val}(f) = c(P,\overline{P}) = \sum_{\substack{x\in P \\ y\in \overline{P}}} c(x,y)$ ، چون $0 \leq f(x,y) \leq c(x,y)$، $x \in P$ و $y \in\overline{P}$، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $e = (x,y)$، $x \in P$ و $y \in\overline{P}$، داریم $f(e) = c(e)$ و به‌ازای هر $e = (v,w)$، $v \in\overline{P}$ و $w \in P$، داریم $f(e) = 0$. برعکس، اگر شرایط (الف) و (ب) برقرار باشند، دراین‌صورت،

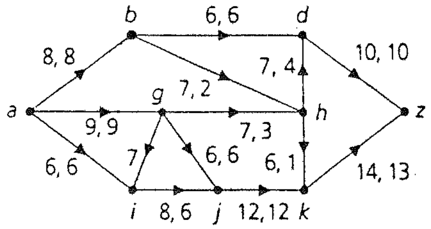
$$\mathrm{val}(f) = \sum_{\substack{x\in P \\ y\in \overline{P}}} f(x,y) - \sum_{\substack{w\in P \\ v\in \overline{P}}} f(v,w) = \sum_{\substack{x\in P \\ y\in \overline{P}}} c(x,y) - 0 = c(P,\overline{P})$$

۳. (۱)



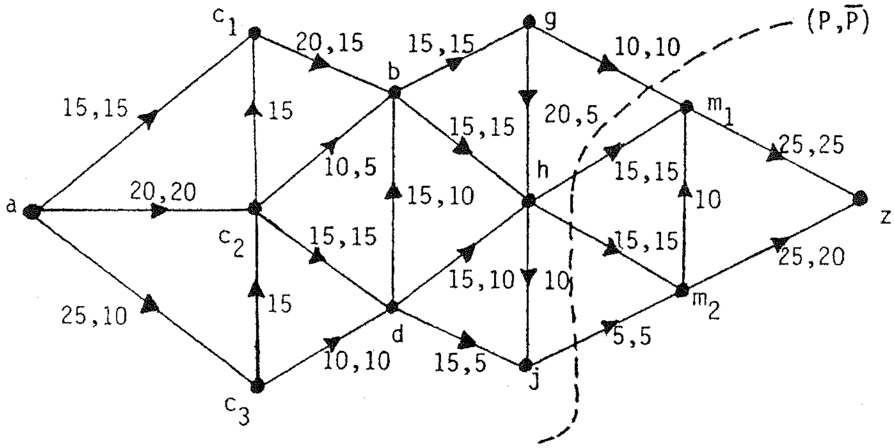
شارش ماکسیمال ۳۲ است که به‌ازای $\overline{P}= \{i,z\}$ ، $P = \{a,b,d,g,h\}$ برابر است با $c(P,\overline{P})$.

(۲)

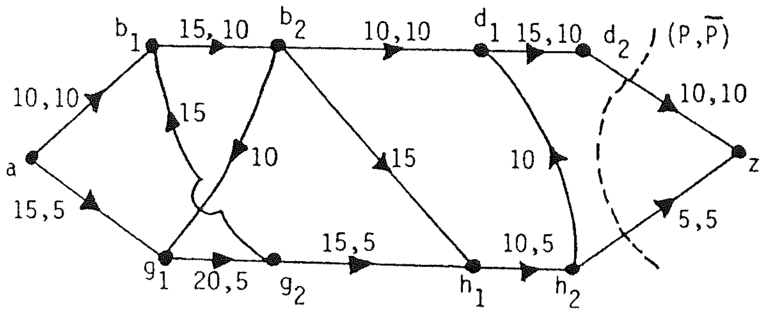


شارش ماکسیمال ۲۳ است که به‌ازای $\overline{P}= \{b,g,i,j,d,h,k,z\}$ ، $P = \{a\}$ برابر است با $c(P,\overline{P})$.

۴. (مثال ۱۳ ۰ ۱۰)



(مثال ۱۳ . ۱۱)



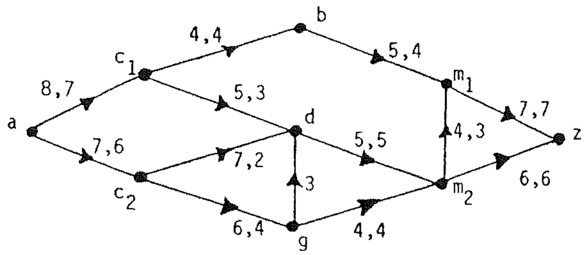
(مثال ۱۳ . ۱۲) چهار پیک باید فرستاده شوند، برای هر یک از مسیرهای زیر (که دو به‌دو جدا از هم‌اند) یک پیک.

(۱) $a \to b \to h \to p \to z$ (۲) $a \to d \to i \to m \to q \to z$

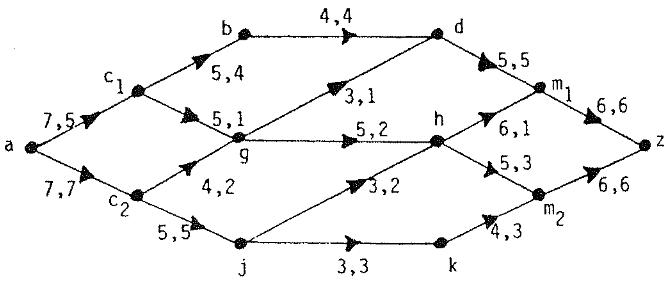
(۳) $a \to f \to j \to n \to r \to z$ (۴) $a \to g \to k \to s \to z$

۵. در اینجا به‌ازای هر $e \in E$، $c(e)$ یک عدد صحیح مثبت است و به‌ازای هر $e \in E$، شارش اولیه به‌صورت $f(e) = 0$ تعریف می‌شود. نتیجهٔ موردنظر از این نکته به‌دست می‌آید که در هرکاربرد روش نشانگذاری، افزایش شارش از مؤلفهٔ دوم نشان، که همیشه یک عدد صحیح مثبت است، ناشی می‌شود و وقتی رأسی نشان منفی دارد، کاهش شارش منجر به مقداری منفی برای شارش نمی‌شود.

۶. الف)

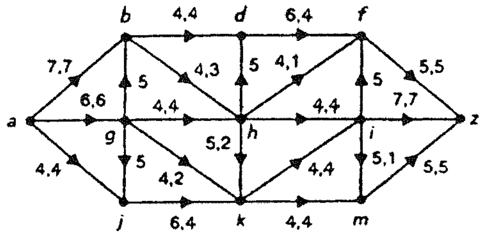


ب)



در هر یک از این دو وضعیت، تقاضاهای هر دو شرکت برآورده می‌شوند.

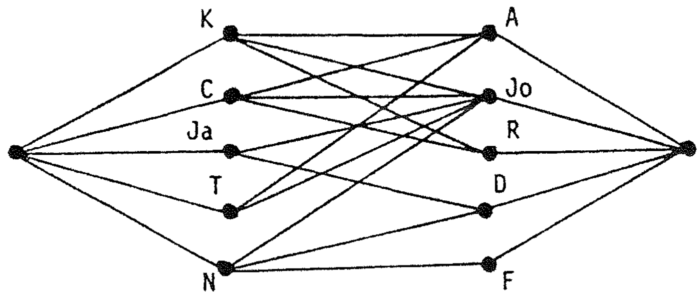
.۷



بند ۴.۱۳

۱. $\frac{۱}{۱۴} = \frac{۵}{\binom{۸}{۲}}$

۲. الف، ب و پ)



یالهای {فرهاد ,فرانتس} ، {جلال ,یورگن} ، {مهرداد ,هلموت} و {فرشید ,والتر} تطابق کاملی به‌دست می‌دهند که یوهان را درکنار افشین و والتر را درکنار فرشید قرار می‌دهد.

ت) خیر. هر تطابق کامل باید شامل یال {فرشید ,والتر} باشد.

۳. فرض می‌کنیم این کمیته‌ها به ترتیبی که در تمرین فهرست شده‌اند با $c_۱$، $c_۲$، . . .، $c_۶$ نشان داده شوند.

الف) عضوها را به‌صورت زیر انتخاب کنید: $A - c_۱$، $G - c_۲$، $M - c_۳$، $N - c_۴$، $K - c_۵$ و $R - c_۶$.

ب) غیر عضوها را به‌صورت زیر انتخاب کنید: $K - c_۱$، $A - c_۲$، $G - c_۳$، $J - c_۴$، $M - c_۵$ و $P - c_۶$.

۴. الف) $۴ \times ۳ = ۱۲$

ب) $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۴! = ۲۴$

پ) $۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ = \frac{۹!}{۴!} = P(۹, ۵)$

ت) $n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-m+۱) = \frac{n!}{(n-m)!} = P(n, m)$

۵. الف) یکی از تک ـ عاملیهای گرافی مانند $G = (V, E)$ از یالهایی تشکیل شده است که رأس مشترک ندارند. پس این تک ـ عاملی شامل تعدادی زوج رأس است و چون G را پدید می‌آورد، باید $|V|$ زوج باشد.

ب) گراف پترسن را که در متن درس در شکل ۱۱ ۰ ۴۸ (الف) آمده است درنظر بگیرید. یالهای

$$\{e, a\} \quad \{b, c\} \quad \{d, i\} \quad \{g, j\} \quad \{f, h\}$$

یک تک ـ عاملی برای این گراف به‌دست می‌دهند.

پ) $۱۵ = ۳ \times ۵$ تک ـ عاملی برای گراف $K_۶$ وجود دارد.

ت) رأسهای $K_{۲n}$ را با ۱، ۲، ۳، . . .، $۲n - ۱$، $۲n$ نشانگذاری کنید. می‌توانیم رأس ۱ را با هر یک از $۲n - ۱$ رأس دیگر جفت کنیم و دراین‌صورت، درحالتی که $n \geq ۲$، با مسألهٔ یافتن یک تک ـ عاملی برای گراف $K_{۲n-۲}$ مواجه می‌شویم. درنتیجه، $a_۱ = ۱$ و

$$a_n = (۲n - ۱)a_{n-۱}$$

می‌بینیم که

$$a_n = (۲n - ۱)a_{n-۱} = (۲n - ۱)(۲n - ۳)a_{n-۲} = (۲n - ۱)(۲n - ۳)(۲n - ۵)a_{n-۳}$$

$$= \cdots = (۲n - ۱)(۲n - ۳)(۲n - ۵) \cdots (۵)(۳)(۱)$$

$$= \frac{(۲n)(۲n - ۱)(۲n - ۲)(۲n - ۳) \cdots (۴)(۳)(۲)(۱)}{(۲n)(۲n - ۲) \cdots (۴)(۲)} = \frac{(۲n)!}{۲^n(n!)}$$

۶. (فرع ۱۳ ۰ ۳) فرض می‌کنیم $A \subseteq X$. چون به‌ازای هر $x \in X$، $\deg(x) \geq k$، دست‌کم $k|A|$ یال وجود دارد که از رأسهای متعلق به A خارج می‌شوند. این یالها به $|R(A)|$ رأس متعلق به y وارد می‌شوند. چون به‌ازای هر $y \in Y$، $\deg(y) \leq k$، پس $k|A| \leq k|R(A)|$. بنابراین، داریم $|A| \leq |R(A)|$ و (بنابر قضیهٔ ۱۳ ۰ ۵) تطابق کاملی از X در Y وجود دارد.

۷. بله، مسئول موردنظر می‌تواند این انتسابها را انجام دهد. فرض می‌کنیم X مجموعهٔ دانشجویان متقاضی و Y مجموعهٔ مشاغل پاره‌وقت باشد. دراین‌صورت به‌ازای هر $x \in X$ و هر $y \in Y$، اگر متقاضی x برای شغل y مناسب باشد، یال (x, y) را رسم کنید. به این ترتیب، به‌ازای هر $x \in X$ و $y \in Y$، $\deg(x) \geq ۴ \geq \deg(y)$ و نتیجهٔ مطلوب از فرع ۱۳ ۰ ۳ به‌دست می‌آید.

۸. الف) $۴ \in A_۱$، $۳ \in A_۲$، $۱ \in A_۳$ و $۲ \in A_۴$.

ب) $۲ \in A_۱$، $۴ \in A_۲$، $۵ \in A_۳$، $۱ \in A_۴$ و $۳ \in A_۵$.

پ) چون $۵ > ۴ = |\cup_{i=۱}^{۵} A_i|$، دستگاهی از نماینده‌های متمایز وجود ندارد.

۹. الف) (۱) به‌ازای $۱ \leq i \leq ۴$، i را از A_i انتخاب کنید.

(۲) به‌ازای $۱ \leq i \leq ۳$، $i + ۱$ را از A_i و ۱ را از $A_۴$ انتخاب کنید.

ب) ۲

۱۰. الف) اگر دستگاهی از نمایندههای متمایز وجود داشته باشد، دراینصورت $|\cup_{i=1}^{n} A_i| \geq n$، یعنی $k \geq n$، زیرا بهازای هر $1 \leq i \leq n$، $|A_i| = k$ $|\cup_{i=1}^{n} A_i| = |A_i| = k$. برعکس، اگر دستگاهی از نمایندههای متمایز وجود نداشته باشد، دراینصورت بهازای اندیسی مانند $1 \leq i \leq n$، اجتماع i تا از مجموعههای A_1، A_2، ...، A_n کمتر از i عنصر دارد. بنابراین، $k < i \leq n$ یا $k < n$.

ب) $P(k, n)$

۱۱. برهان: بهازای هر زیرمجموعهٔ X مانند A، فرض کنید G_A زیرگرافی از G باشد که بهوسیلهٔ رأسهای $A \cup R(A)$ القا شده است. اگر e تعداد یالهای G_A باشد، آنگاه $e \geq 4|A|$، زیرا بهازای هر $a \in A$، $\deg(a) \geq 4$. به همین ترتیب، $e \leq 5|R(A)|$، زیرا بهازای هر $b \in R(A)$، $\deg(b) \leq 5$. بنابراین، $5|R(A)| \geq 4|A|$ و

$$\delta(A) = |A| - |R(A)| \leq |A| - \frac{4}{5}|A| = \frac{1}{5}|A| \leq \frac{1}{5}|X| = 2$$

دراینصورت با توجه به $\delta(G) = \max\{\delta(A) | A \subseteq X\}$ داریم $\delta(G) \leq 2$.

۱۲. فرض میکنیم $\emptyset \neq A \subseteq X$ و $E_1 \subseteq E$، که در آن $E_1 = \{\{a, b\} | a \in A, b \in R(A)\}$. چون بهازای $a \in A$ داریم $\deg(a) \geq 3$، پس $|E_1| \geq 3|A|$. بهازای هر $b \in R(A) \subseteq Y$، $\deg(b) \leq 7$ و بنابراین، $|E_1| \leq 7|R(A)|$. بنابراین، $3|A| \leq 7|R(A)|$ و $\delta(A) = |A| - |R(A)| \leq |A| - \frac{3}{7}|A| = \frac{4}{7}|A|$. چون $|X| \leq 50$ و $A \subseteq X$، $\delta(A) \leq \frac{4}{7} \times 50 = \frac{200}{7}$ و $\delta(G) = \max\{\delta(A) | A \subseteq X\} \leq 28$.

۱۳. الف) $\delta(G) = 1$. یکی از تطابقهای ماکسیمال از X در Y عبارت است از

$$\{\{x_1, y_2\}, \{x_2, y_3\}, \{x_3, y_1\}, \{x_5, y_4\}\}$$

ب) اگر $\delta(G) = 0$، تطابق کاملی از X در Y وجود دارد و $\beta(G) = |Y|$ یا $|Y| = \beta(G) - \delta(G)$. اگر $\delta(G) = k > 0$، فرض میکنیم $A \subseteq X$، که در آن $|A| - |R(A)| = k$. دراینصورت $A \cup (Y - R(A))$ یکی از بزرگترین مجموعههای مستقل ماکسیمال در G است و

$$\beta(G) = |A| + |Y - R(A)| = |Y| + \big(|A| - |R(A)|\big) = |Y| + \delta(G)$$

و بنابراین، $|Y| = \beta(G) - \delta(G)$.

پ) شکل ۱۳ . ۲۷ (الف): $\{x_1, x_2, x_3, y_2, y_4, y_5\}$

شکل ۱۳ . ۲۸: $\{x_3, x_4, y_2, y_3, y_4\}$

۱۴. الف)
$$\sum_{a \in A} \deg(a) = (\text{تعداد یالهایی از } G \text{ که از رأسهای } A \text{ میگذرند})$$
$$\leq (\text{تعداد یالهایی از } G \text{ که از رأسهای } R(A) \text{ میگذرند})$$
$$= \sum_{b \in R(A)} \deg(b)$$

ب) $2n = \sum_{a \in A} \deg(a) \leq \sum_{b \in R(A)} \deg(b) \leq 3|R(A)|$ و بنابراین، $|R(A)| \geq \frac{2}{3}n$.

پ) $\delta(A) = |A| - |R(A)| \leq n - \frac{۲}{۳}n = \frac{۱}{۳}n$

ت) $\delta(G) = \max\{\delta(A)|$ زیرمجموعه‌ای (ناتهی) از این n خط ورودی است $A\} \leq \frac{۱}{۳}n$

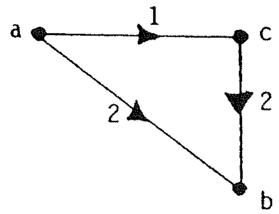
$\leq \frac{۱}{۳} \times ۹ = ۳$

بنابراین، می‌توانیم تطابق ماکسیمالی با $۶ = ۳ - ۹$ خط ورودی به‌دست آوریم.

تمرینات تکمیلی

۱. $d(a,b) = ۵$، $d(a,c) = ۱۱$، $d(a,d) = ۷$، $d(a,e) = ۸$، $d(a,f) = ۱۹$، $d(a,g) = ۹$ و $d(a,h) = ۱۴$.
(توجه داشته باشید که طوقهٔ واقع در رأس g و یالهای (c,a) به وزن ۹ و (f,e) به وزن ۵ حائز اهمیت نیستند.)

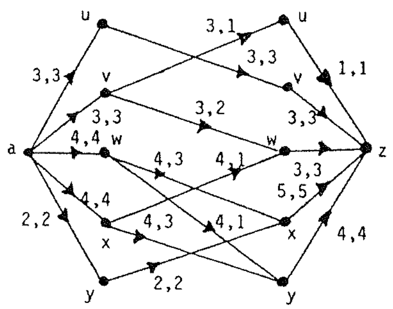
۲. این الگوریتم صحیح نیست. گراف سودار وزندار زیر یک مثال نقض به‌دست می‌دهد:

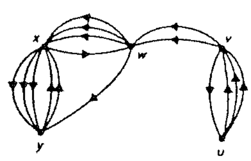


۳. الف) یال $e_۱$ همیشه در مرحلهٔ اول از الگوریتم کروسکال انتخاب می‌شود.
ب) باز هم با استفاده از الگوریتم کروسکال، یال $e_۲$ در اولین کاربرد مرحلهٔ ۲ انتخاب می‌شود، مگر آنکه هر یک از دو یال $e_۱$ و $e_۲$ از دو رأس یکسان بگذرند، یعنی یالهای $e_۱$ و $e_۲$ مدار تشکیل دهند و G گرافی چندگانه باشد.

۴. الف) هنگام به کارگیری الگوریتم کروسکال، تنها حالتی که در آن مجبوریم یال $e_۱$ را به‌عنوان آخرین انتخاب درنظر بگیریم وقتی است که رأسی مانند v درگراف وجود داشته باشد به‌طوری‌که $e_۱ = \{w,v\}$ و v رأس آویزانی در G باشد. در اینجا این وضع روی نمی‌دهد، زیرا $e_۱$ جزئی از یک دور است.
ب) این نتیجهٔ نادرستی است. فرض کنید G گراف $K_۳$ باشد که در آن، وزنهای $\text{wt}(e_۱) = ۳$، $\text{wt}(e_۲) = ۲$ و $\text{wt}(e_۳) = ۱$ به یالها نسبت داده شده است.

۵.





شبکهٔ حمل و نقل نمودار سمت چپ، با استفاده از درجه‌های داخلی رأسها به‌عنوان ظرفیتهای یالهایی که به مقصد z ختم می‌شوند، تعیین می‌شود. درجه‌های خارجی برای ظرفیتهای یالهایی که از مبداء a شروع می‌شوند به‌کار می‌روند.

۶. الف) یکی از انتخابهای ممکن عبارت است از

$$qs : q;\ tq : t;\ ut : u;\ pgr : p;\ srt : r$$

ب) نه انتخاب وجود دارد که هر یک از آنها دستگاهی از نماینده‌های متمایز تعیین می‌کند. درنتیجه، احتمال اینکه این انتخاب دستگاهی از نماینده‌های متمایز به‌دست دهد برابر است با $\frac{۹}{۲^۳ \times ۳^۲}$.

۷. تعداد دستگاههای متفاوت متشکل از نماینده‌های متمایز برابر است با d_n، یعنی برابر است با تعداد پریشهای $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$.

۸. الف) $!۵$، $n!$

ب) هر درایهٔ B نامنفی است و مجموع درایه‌های واقع در هر سطر یا ستون برابر است با ۱.

پ)

$$B = (۰\cdot ۱)\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + (۰\cdot ۲)\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} + (۰\cdot ۳)\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + (۰\cdot ۴)\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

ت) مجموع درایه‌های r سطر B برابر است با r، زیرا مجموع درایه‌های هر سطر B برابر است با ۱. وقتی همهٔ درایه‌های واقع در s ستون را با هم جمع می‌کنیم، عدد s را به‌دست می‌آوریم. بنابراین، درایه‌هایی که در اینجا درنظر می‌گیریم مجموعی کمتر از یا برابر با s دارند. درنتیجه، هم $r > s$ را داریم هم $r \leq s$، یعنی به تناقض می‌رسیم.

چون این تطابق کاملی از X در Y است، n یال به‌صورت $\{x_i, y_i\}$ داریم، که در آن هر یک از x_iها و y_iها، $۱ \leq i, j \leq n$ ، دقیقاً یک‌بار حضور دارد. این یالها با n عدد نامنفی b_{ij}، به‌طوری که هیچ دوتایی از آنها در یک سطر یا یک ستون B قرار ندارند، تعیین می‌شوند. اگر بنویسیم $B = c_۱ P_۱ + B_۱$، که در آن $c_۱$ کوچکترین درایهٔ B و $P_۱$ یک ماتریس جایگشتی $n \times n$ است، مجموع درایه‌های هر سطر و مجموع درایه‌های هر ستون $B_۱$ برابر است با $۱ - c_۱$، که در آن $۰ \leq ۱ - c_۱ < ۱$.

ث) اکنون استدلال قسمت (ت) را برای ماتریس $B_۱$ تکرار می‌کنیم و $B = c_۱ P_۱ + c_۲ P_۲ + B_۲$ را به‌دست می‌آوریم، که در آن مجموع درایه‌های هر سطر و مجموع درایه‌های هر ستون $B_۲$ برابر است با $۱ - c_۱ - c_۲$، ضمن اینکه $۰ \leq ۱ - c_۱ - c_۲ < ۱ - c_۱$. این فرایند را آنقدر ادامه می‌دهیم تا $B = c_۱ P_۱ + c_۲ P_۲ + \cdots + c_k P_k + B_k$ را به‌دست آوریم، که در آن هر درایهٔ B_k برابر با ۰ است.

۹. رأسهایی (ازگراف خطی $L(G)$) که با E' تعیین می‌شوند یک مجموعهٔ مستقل ماکسیمال تشکیل می‌دهند.

قسمت چهارم

جبر کاربردی نوین

۱۴
حلقه و حساب مدولی

بند ۱.۱۴

۱. (مثال ۱۴ ۰ ۵): $-a = a$، $-b = e$، $-c = d$، $-d = c$ و $-e = b$.

(مثال ۱۴ ۰ ۶): $-s = s$، $-t = y$، $-v = x$، $-w = w$، $-x = v$ و $-y = t$.

۲. الف) این مجموعه با جمع و ضرب معمولی حلقه نیست، زیرا وارون جمعی وجود ندارد.

ب، پ و ت) این مجموعه‌ها با جمع و ضرب معمولی حلقه‌اند.

ث) این مجموعه حلقه نیست، زیرا نسبت به ضرب بسته نیست.

۳. الف)

$$\begin{aligned}(a+b)+c &= (b+a)+c && \text{قانون تعویض‌پذیری } +\\ &= b+(a+c) && \text{قانون شرکت‌پذیری } +\\ &= b+(c+a) && \text{قانون تعویض‌پذیری } +\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}d+a(b+c) &= d+(ab+ac) && \text{قانون پخش‌پذیری· نسبت به } +\\ &= (d+ab)+ac && \text{قانون شرکت‌پذیری } +\\ &= (ab+d)+ac && \text{قانون تعویض‌پذیری } +\\ &= ab+(d+ac) && \text{قانون شرکت‌پذیری } +\end{aligned}$$

پ)

$$\begin{aligned}c(d+b)+ab &= ab+c(d+b) && \text{قانون تعویض‌پذیری } +\\ &= ab+(cd+cb) && \text{قانون پخش‌پذیری ·نسبت به } +\\ &= ab+(cb+cd) && \text{قانون تعویض‌پذیری } +\\ &= (ab+cb)+cd && \text{قانون شرکت‌پذیری } +\\ &= (a+c)b+cd && \text{قانون پخش‌پذیری ·نسبت به } +\end{aligned}$$

ت)

$$\begin{aligned}a(bc)+(ab)d &= (ab)c+(ab)d && \text{قانون شرکت‌پذیری.}\\ &= (ab)(c+d) && \text{قانون پخش‌پذیری·نسبت به}+\\ &= (ab)(d+c) && \text{قانون تعویض‌پذیری } +\end{aligned}$$

۴. خیر. گرچه برای این تعریف از عمل + عنصر همانی وجود دارد و آن هم عبارت است از $\emptyset$، ولی وارون جمعی وجود ندارد.

۵. الف) (یک) عمل دوتایی بستهٔ $\oplus$ شرکت‌پذیر است. به‌ازای هر $a, b, c \in \mathbf{Z}$ می‌بینیم که

$$(a \oplus b) \oplus c = (a + b - ۱) \oplus c = (a + b - ۱) + c - ۱ = a + b + c - ۲$$

و

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c - ۱) = a + (b + c - ۱) - ۱ = a + b + c - ۲$$

(دو) برای عمل دوتایی $\odot$، به‌ازای هر $a, b, c \in \mathbf{Z}$ داریم

$$\begin{aligned}(a \odot b) \odot c = (a + b - ab) \odot c &= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c \\ &= a + b - ab + c - ac - bc + abc \\ &= a + b + c - ab - ac - bc + abc\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}a \odot (b \odot c) = a \odot (b + c - bc) &= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) \\ &= a + b + c - bc - ab - ac + abc \\ &= a + b + c - ab - ac - bc + abc\end{aligned}$$

در نتیجه، این عمل دوتایی نیز شرکت‌پذیر است.

(سه) سرانجام، به‌ازای هر سه عدد صحیح a، b و c می‌بینیم که

$$\begin{aligned}(b \oplus c) \odot a = (b + c - ۱) \odot a &= (b + c - ۱) + a - (b + c - ۱)a \\ &= b + c - ۱ + a - ba - ca + a \\ &= ۲a + b + c - ۱ - ba - ca\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(b \odot a) \oplus (c \odot a) &= (b + a - ba) \oplus (c + a - ca) \\ &= (b + a - ba) + (c + a - ca) - ۱ \\ &= ۲a + b + c - ۱ - ba - ca\end{aligned}$$

بنابراین، قانون دوم پخش‌پذیری نیز برقرار است.

ب) به‌ازای هر $a, b \in \mathbf{Z}$ داریم

$$a \odot b = a + b - ab = b + a - ba = b \odot a$$

زیرا در $\mathbf{Z}$ هر دو عمل جمع و ضرب معمولی تعویض‌پذیرند. بنابراین، $(\mathbf{Z}, \oplus, \odot)$ حلقه‌ای تعویض‌پذیر است.

پ) علاوه‌بر ۰، تنها عنصر یکهٔ دیگر ۲ است، زیرا $\circ = (\text{۲} \times \text{۲}) - \text{۲} + \text{۲} = \text{۲} \odot \text{۲}$ و می‌دانیم که ۰ عنصر یک برای $(\mathbf{Z}, \oplus, \odot)$ است.

ت) این حلقه حوزهٔ صحیح است، ولی هیأت نیست. با توجه به اینکه ۱ عنصر صفر است، به‌ازای هر $a, b \in \mathbf{Z}$ می‌بینیم که

$$a \odot b = \text{۱} \Longrightarrow a + b - ab = \text{۱} \Longrightarrow a(\text{۱} - b) = (\text{۱} - b) \Longrightarrow (a - \text{۱})(\text{۱} - b) = \circ$$
$$\Longrightarrow b = \text{۱} \text{ یا } a = \text{۱}$$

بنابراین، مقسوم‌علیه سرهٔ صفر در $(\mathbf{Z}, \oplus, \odot)$ وجود ندارد.

۶. در اینجا با قوانین پخش‌پذیری مشکل داریم. به‌ازای $a, b, c \in \mathbf{Z}$ می‌بینیم که

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c - \text{۷}) = a + (b + c - \text{۷}) - \text{۳}a(b + c - \text{۷}) \\ &= a + b + c - \text{۳}ab - \text{۳}ac + \text{۲۱}a - \text{۷} \\ &= \text{۲۲}a + b + c - \text{۳}ab - \text{۳}ac - \text{۷} \end{aligned}$$

درحالی‌که

$$\begin{aligned} (a \odot b) \oplus (a \odot c) &= (a + b - \text{۳}ab) \oplus (a + c - \text{۳}ac) \\ &= (a + b - \text{۳}ab) + (a + c - \text{۳}ac) - \text{۷} \\ &= \text{۲}a + b + c - \text{۳}ab - \text{۳}ac - \text{۷} \end{aligned}$$

بنابراین، اگر $a \neq \circ$، آن‌گاه $a \odot (b \oplus c) \neq (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

۷. فرض می‌کنیم k و m دو عدد صحیح ثابت باشند. همهٔ آن مقادیری را برای k و m بیابید که به‌ازای آنها، $(\mathbf{Z}, \oplus, \odot)$ با عملهای دوتایی

$$x \oplus y = x + y - k$$
$$x \odot y = x + y - mxy$$

که در آن $x, y \in \mathbf{Z}$، حلقه بشود.

با توجه به تمرین قبل، می‌دانیم که باید شرایطی را دربارهٔ k و m تعیین کنیم که به‌ازای آنها قوانین پخش‌پذیری برقرار باشند. چون $\odot$ تعویض‌پذیر است، می‌توانیم توجه خود را بر یکی از این قوانین متمرکز کنیم.

اگر $x, y, z \in \mathbf{Z}$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} & x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z) \\ & \Longrightarrow x \odot (y + z - k) = (x + y - mxy) \oplus (x + z - mxz) \\ & \Longrightarrow x + (y + z - k) - mx(y + z - k) = (x + y - mxy) + (x + z - mxz) - k \\ & \Longrightarrow x + y + z - k - mxy - mxz + mkx = x + y - mxy + x + z - mxz - k \\ & \Longrightarrow mkx = x \Longrightarrow mk = \text{۱} \Longrightarrow m = k = \text{۱} \text{ یا } m = k = -\text{۱} \end{aligned}$$

زیرا $m, k \in \mathbf{Z}$.

۸. الف) x

ب) $-s = t$، $-t = s$، $-x = x$ و $-y = y$

پ) $t(s + xy) = y$

ت) بله، این حلقه تعویض‌پذیر است.

ث) خیر، عنصر یک وجود ندارد.

ج) عنصرهای s و y جفتی از مقسوم‌علیه‌های (سرهٔ) صفرند.

۹. الف) یکی از قوانین پخش‌پذیری را تحقیق می‌کنیم. اگر $a, b, c \in \mathbf{Q}$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c + ۷) \\ &= a + (b + c + ۷) + [a(b + c + ۷)]/۷ \\ &= a + b + c + ۷ + (ab/۷) + (ac/۷) + a \end{aligned}$$

درحالی‌که

$$\begin{aligned} (a \odot b) \oplus (a \odot c) &= (a \odot b) + (a \odot c) + ۷ \\ &= a + b + (ab/۷) + a + c + (ac/۷) + ۷ \\ &= a + b + c + ۷ + (ab/۷) + (ac/۷) + a \end{aligned}$$

همچنین عدد حقیقی ۷− عنصر صفر و وارون جمعی هر عدد گویا مانند a، $a - ۱۴-$ است.

ب) چون به‌ازای هر $a, b \in \mathbf{Q}$ داریم

$$a \odot b = a + b + \frac{ab}{۷} = b + a + \frac{ba}{۷} = b \odot a$$

حلقهٔ $(\mathbf{Q}, \oplus, \odot)$ تعویض‌پذیر است.

پ) به‌ازای هر $a \in \mathbf{Q}$ می‌بینیم که

$$a = a \odot u = a + u + \frac{au}{۷} \Longrightarrow u\left(۱ + \frac{a}{۷}\right) = ۰$$

چون a دلخواه است، از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که $u = ۰$. بنابراین، عدد گویای ۰ عنصر یک برای این حلقه است.

اکنون فرض می‌کنیم $a \in \mathbf{Q}$ و $a \neq -۷$ (یعنی فرض می‌کنیم a عنصر صفر حلقه نباشد). آیا می‌توانیم عددی مانند $b \in \mathbf{Q}$ چنان بیابیم که $a \odot b = ۰$، یعنی به‌طوری که $a + b + \frac{ab}{۷} = ۰$؟ ملاحظه می‌کنیم که

$$a + b + \frac{ab}{۷} = ۰ \Longrightarrow b\left(۱ + \frac{a}{۷}\right) = -a \Longrightarrow b = \frac{-a}{۱ + \frac{a}{۷}}$$

بنابراین، هر عدد گویا، غیر از ۷− یکه است.

ت) با توجه به قسمت (پ) می‌دانیم که $(\mathbf{Q}, \oplus, \odot)$ هیأت است. برای تحقیق اینکه این هیأت حوزهٔ صحیح

هم هست، فرض می‌کنیم $a,b \in \mathbf{Q}$ و $a \odot b = -۷$، دراین‌صورت

$$a \odot b = -۷ \Longrightarrow a + b + \frac{ab}{۷} = -۷ \Longrightarrow a\left(۱ + \frac{b}{۷}\right) = -b - ۷$$

$$\Longrightarrow a(۷ + b) = (-۱)(۷ + b)(۷) \Longrightarrow (a + ۷)(b + ۷) = ۰$$

$$\Longrightarrow b + ۷ = ۰ \text{ یا } a + ۷ = ۰ \Longrightarrow b = -۷ \text{ یا } a = -۷$$

در نتیجه، مقسوم‌علیه سرهٔ صفر (که مقصود عدد گویای -۷ است) وجود ندارد و $(\mathbf{Q}, \oplus, \odot)$ حوزهٔ صحیح است.

۱۰. الف) $k = ۳$ و $m = -۳$.

ب) عنصر صفر عدد k است. بنابراین، داریم $k - (-۹) + ۶ = k = (-۹) \oplus ۶$. پس $۲k = -۳$ و $k = -\frac{۳}{۲}$. (در اینجا $m = \frac{۳}{۲}$.)

پ) عنصر یک همان عدد گویای ۰ است. بنابراین، باید

$$۰ = ۲ \odot \frac{۱}{۸} = ۲ + \frac{۱}{۸} + \frac{۲ \times (۱/۸)}{m}$$

این تساوی وقتی روی می‌دهد که $\frac{۱}{۴}m = -\frac{۱۷}{۸}$ یا $۴m = -\frac{۸}{۱۷}$. پس $m = -\frac{۲}{۱۷}$ و $k = \frac{۲}{۱۷}$.

۱۱. الف) مثلاً

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = (c + di) + (a + bi)$$

زیرا جمع در $\mathbf{Z}$ تعویض‌پذیر است. به‌همین ترتیب، ویژگیهای لازم دیگر برای آنکه R حلقهٔ تعویض‌پذیر یکداری باشد از ویژگیهای متناظر $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ به‌دست می‌آیند. سرانجام، در ارتباط با مقسوم‌علیه‌های صفر می‌بینیم که اگر $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i = ۰$ و $a + bi \neq ۰$، دست‌کم یکی از دو عدد a و b صفر نیست. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $a \neq ۰$. دراین‌صورت از $ac - bd = ۰$ و $bc + ad = ۰$ نتیجه می‌شود که $c = \frac{bd}{a}$ و $d = -\frac{bc}{a}$. پس با توجه به اینکه $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ و $a \neq ۰$،

$$cd = \left(\frac{bd}{a}\right)\left(-\frac{bc}{a}\right) = \left(-\frac{b^۲}{a^۲}\right)(cd) \Longrightarrow cd\left(۱ + \frac{b^۲}{a^۲}\right) = ۰ \Longrightarrow cd(a^۲ + b^۲) = ۰$$

$$\Longrightarrow d = ۰ \text{ یا } c = ۰$$

از $c = ۰$ و $d = -\frac{bc}{a}$ نتیجه می‌شود که $d = ۰$. همچنین، از $d = ۰$ و $c = \frac{bd}{a}$ نتیجه می‌شود که $c = ۰$. بنابراین، $c + di = ۰$ و R حوزهٔ صحیح است.

ب) $a + bi$ یکه‌ای از R است هرگاه عنصری مانند $c + di \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که $(a + bi)(c + di) = ۱$. دراین‌صورت

$$۱ = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i \Longrightarrow ac - bd = ۱,\ bc + ad = ۰$$

$$\Longrightarrow c = \frac{a}{a^۲ + b^۲},\ d = \frac{-b}{a^۲ + b^۲}$$

از طرف دیگر،

$$c,d \in \mathbf{Z} \Longrightarrow a^۲ + b^۲ = ۱ \Longrightarrow (a = ۰, b = \pm ۱) \text{ یا } (a = \pm ۱, b = ۰)$$

بنابراین، یکه‌های R عبارت‌اند از ۱، ۱−، i و $-i$.

۱۲. الف)

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Longrightarrow a + ۲c = ۱, ۳a, ۷c = ۰, b + ۲d = ۰, ۳b + ۷d = ۱$$

$$\Longrightarrow a = ۷, b = -۲, c = -۳, d = ۱$$

ب)

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -\frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \in M_۲(\mathbf{Q})$$

ولی ماتریس اخیر به $M_۲(\mathbf{Z})$ تعلق ندارد.

۱۳. اگر $ad - bc \neq ۰$، آن‌گاه

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۱۴. فرض می‌کنیم $\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳\}$ و $R = \mathcal{P}(\mathcal{U})$. دراین‌صورت $(R, \Delta, \cap)$ حلقه‌ای هشت عنصری است. برای به دست آوردن حلقه‌ای ۱۶ عنصری، $\mathcal{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را درنظر بگیرید. به‌طورکلی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، اگر $\mathcal{U} = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $R = \mathcal{P}(\mathcal{U})$، آن‌گاه $(R, \Delta, \cap)$ حلقه‌ای است که در آن $|R| = ۲^n$.

۱۵. الف)

$$xx = x(t + y) = xt + xy = t + y = x$$

$$yt = (x + t)t = xt + tt = t + t = s$$

$$yy = y(t + x) = yt + yx = s + s = s$$

$$tx = (y + x)x = yx + xx = s + x = x$$

$$ty = (y + x)y = yy + xy = s + y = y$$

ب) چون $tx = x \neq t = xt$، این حلقه تعویض‌پذیر نیست.

پ) عنصر یک و در نتیجه، عنصر یکه وجود ندارد. ت) این حلقه نه حوزهٔ صحیح است نه هیأت.

بند ۲.۱۴

۱. (قضیهٔ ۱۴ · ۵ (الف)). فرض می‌کنیم $u_۱, u_۲ \in R$ دو عنصر یک باشند. دراین‌صورت $u_۱ = u_۱u_۲ = u_۲$. برابری سمت چپ به این جهت برقرار است که $u_۲$ عنصر یک است و برابری سمت راست از این امر نتیجه می‌شود که $u_۱$ عنصر یک است.

(قضیهٔ ۱۴ ۰ ۵ (ب)). فرض می‌کنیم $y_1, y_2 \in R$ به‌گونه‌ای باشند که $xy_1 = y_1x = u = xy_2 = y_2x$، که در آن u عنصر یک حلقهٔ R است. دراین‌صورت

$$y_1 = uy_1 = (y_2x)y_1 = y_2(xy_1) = y_2u = y_2$$

(قضیهٔ ۱۴ ۰ ۱۰ (ب)). اگر S زیرحلقه‌ای از R باشد، از $a, b \in S$ نتیجه می‌شود که $a+b \in S$ و $ab \in S$. برعکس، فرض می‌کنیم $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. $T = \{x_i + x_1 | 1 \leq i \leq n\} \subseteq S$. از $x_i + x_1 = x_j + x_1$ نتیجه می‌شود که $x_i = x_j$. پس $|T| = n$ و $T = S$. بنابراین، به‌ازای اندیسی مانند $1 \leq i \leq n$ داریم $x_i + x_1 = x_1$ و در نتیجه، $x_i = z$ عنصر صفر R است. به‌ازای هر $x \in S$، $x + S = \{x + x_i | 1 \leq i \leq n\} = S$. با توجه به $z \in S$، عنصری مانند $x_j \in S$ وجود دارد و به‌طوری‌که $x + x_j = z$. پس $-x = x_j \in S$. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۴ ۰ ۹، S زیرحلقه‌ای از R است.

۲. الف) $a(b-c) = a[b+(-c)] = ab + a(-c) = ab + [a(-c)] = ab + (-ac) = ab - ac$

ب) این قسمت نیز به‌طور مشابهی ثابت می‌شود.

۳. الف) $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = aua^{-1} = aa^{-1} = u$ و $(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}ub = b^{-1}b = u$ و بنابراین، ab عنصر یکه است. چون وارون ضربی هر عنصر یکه یکتاست، نتیجه می‌گیریم که $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

ب) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$، $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$، $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -15 \\ -9 & 34 \end{bmatrix}$

$(BA)^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -39 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$ و $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -15 \\ -9 & 34 \end{bmatrix}$.

۴. فرض می‌کنیم u عنصر یکِ R و x یکه باشد. بنابراین، عنصری مانند $y \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $xy = yx = u$. اگر $xw = z$ (z عنصر صفر R است)، آن‌گاه $y(xw) = yz = z$ و $y(xw) = (yx)w = uw = w$. پس x مقسوم‌علیه صفر نیست.

۵. $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.

۶. خیر. مثلاً ۱ و ۱− یکه‌های $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ هستند، ولی $1 + (-1) = 0$ یکه نیست.

۷. الف) زیرحلقه‌ها عبارت‌اند از $\{x\}$، $\{x, y\}$ و $\{x, y, s, t\}$.

ب) هر یک از زیرحلقه‌های قسمت (الف) ایده‌آل نیز هست.

۸. الف) $S = \{x, w\}$.

$$\begin{array}{ll} s+s=s & s\cdot s=s \\ s+w=w+s=w & s\cdot w=w\cdot s=s \\ w+w=s & w\cdot w=w \end{array}$$

$$-s = s, -w = w$$

از قضیهٔ ۱۴ ۰ ۹ نتیجه می‌شود که $(S, +, \cdot)$ زیرحلقهٔ $(R, +, \cdot)$ است.

به‌ازای هر $r \in R$ داریم $s = sr = rs$ و $rw = wr$ برابر با s یا w است. پس $(S, +, \cdot)$ ایده‌آلی از $(R, +, \cdot)$ است.

ب) $T = \{s, v, x\}$

$\cdot$	s	v	x
s	s	s	s
v	s	x	v
x	s	v	x

$+$	s	v	x
s	s	v	x
v	v	x	s
s	x	s	v

$$-s = s, -v = x, -x = v$$

از قضیهٔ ۹٫۱۴ نتیجه می‌شود که $(T, +, \cdot)$ زیرحلقهٔ $(R, +, \cdot)$ است. همچنین، به‌ازای هر $r \in R$، عنصرهای rs، sr، rv، vr، rx و xr متعلق به T هستند و بنابراین، $(T, +, \cdot)$ ایده‌آلی از $(R, +, \cdot)$ است.

۹. مجموعهٔ S تهی نیست چون به‌ازای $x = y = 0$ داریم $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$.

به‌ازای $\begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v & w \\ v & w \end{bmatrix} \in S$، که در آن $x, y, v, w \in \mathbf{Z}$، می‌بینیم که

(یک) $\begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v & w \\ v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-v & y-w \\ x-v & y-w \end{bmatrix}$ عنصری از S است و

(دو) $\begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & w \\ v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xv+yv & xw+yw \\ xv+yv & xw+yw \end{bmatrix}$ نیز عنصری از S است.

درنتیجه، زیرمجموعهٔ ناتهی S (از R) نسبت به تفریق و ضرب بسته است. پس بنابر قضیهٔ ۱۰٫۱۴، S زیرحلقهٔ R است.

۱۰. به‌ازای $x = y = 0$ داریم $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$ و بنابراین، S تهی نیست.

اکنون دو عنصر دلخواه مجموعهٔ S، یعنی دو ماتریس به‌صورت

$$\begin{bmatrix} x & x-y \\ x-y & y \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} v & v-w \\ v-w & w \end{bmatrix}$$

را، که در آنها $x, y, v, w \in \mathbf{Z}$، درنظر بگیرید. دراین‌صورت

(یک)

$$\begin{bmatrix} x & x-y \\ x-y & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v & v-w \\ v-w & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-v & (x-y)-(v-w) \\ (x-y)-(v-w) & y-w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x-v & (x-v)-(y-w) \\ (x-v)-(y-w) & y-w \end{bmatrix}$$

که عنصری از S است و

(دو)

$$\begin{bmatrix} x & x-y \\ x-y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & v-w \\ v-w & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xv+(x-y)(v-w) & x(v-w)+(x-y)w \\ (x-y)v+y(v-w) & (x-y)(v-w)+yw \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} xv+xv-yv-xw+yw & xv-xw+xw-yw \\ xv-yv+yv-yw & xv-yv-xw+yw+yw \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} xv+xv-yv-xw+yw & xv-yw \\ xv-yw & xv-yv-xw+yw+yw \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix}$$

که در آن $a = xv+xv-yv-xw+yw$ و $b = xv-yv-xw+yw+yw$. باز هم می‌بینیم که ماتریس حاصل عنصری از S است.

بنابراین، مجموعهٔ ناتهی S نسبت به تفریق و ضرب بسته است و از قضیهٔ ۱۴ ۰ ۱۰ نتیجه می‌شود که S زیرحلقهٔ R است.

۱۱.
$$z \in S, T \Longrightarrow z \in S \cap T \Longrightarrow S \cap T \neq \emptyset$$

$$a, b \in S \cap T \Longrightarrow a, b \in T, a, b \in S \Longrightarrow a+b, ab \in T, a+b, ab \in S$$

$$\Longrightarrow a+b, ab \in S \cap T$$

$$a \in S \cap T \Longrightarrow a \in S, a \in T \Longrightarrow -a \in S, -a \in T \Longrightarrow -a \in S \cap T$$

بنابراین، $S \cap T$ زیرحلقهٔ R است.

۱۲. با توجه به تمرین ۱۱، $S \cap T$ زیرحلقه‌ای از R است. به‌ازای $r \in R$ و $x \in S \cap T$، داریم $rx \in S$، $rx \in T$، $xr \in T$ و $xr \in S$، زیرا S و T دو ایده‌آل در R هستند. اکنون از $rx, xr \in S \cap T$ نتیجه می‌شود که $S \cap T$ ایده‌آلی از R است.

۱۳. اگر این‌طور نباشد، عنصرهایی مانند $a, b \in S$ وجود دارند به‌طوری‌که $a \in T_1$، $a \notin T_2$ و $b \in T_2$، $b \notin T_1$. چون S زیرحلقهٔ R است، پس $a+b \in S$. بنابراین $a+b \in T_1$ یا $a+b \in T_2$.

بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $a+b \in T_1$. چون $a \in T_1$، داریم $-a \in T_1$. با توجه به اینکه T_1 نسبت به جمع بسته است، می‌بینیم که

$$(-a)+(a+b) = (-a+a)+b = b \in T_1$$

و این تناقض است. بنابراین،

$$S \subseteq T_1 \cup T_2 \Longrightarrow S \subseteq T_1 \text{ یا } S \subseteq T_2$$

۱۴. الف) اگر r مقسوم‌علیه سرهٔ صفر باشد، کار تمام است. در غیراین‌صورت، تابع $f : R \to R$ را، که در آن به‌ازای هر $a \in R$ داریم $f(a) = ar$، درنظر بگیرید. این تابع یک به‌یک است. درحقیقت، اگر f یک به‌یک نباشد، به‌ازای دو عنصر متمایز در R مانند a_1 و a_2 داریم $f(a_1) = f(a_2)$. ولی

$$f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 r = a_2 r \Longrightarrow (a_1 - a_2)r = z$$

که در آن z عنصر صفر R است. چون $a_1 - a_2 \neq z$ و $r \neq z$، می‌بینیم که r مقسوم‌علیه سرهٔ صفر است. علاوه‌بر این، چون R متناهی است از قضیهٔ ۱۱۰۵ نتیجه می‌شود که f پوشا نیز هست. بنابراین، عنصری مانند s در R وجود دارد به‌طوری که $sr = f(s) = u$. چون R تعویض‌پذیر است داریم $rs = u$. اکنون با توجه به $rs = u = sr$ می‌بینیم که r یکه‌ای از R است.

ب) اگر R نامتناهی باشد، نتیجهٔ قسمت (الف) دیگر معتبر نیست. حلقهٔ تعویض‌پذیر یکدار از $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ را درنظر بگیرید. به‌ازای هر عدد صحیح n، اگر $n \neq -1, 0, 1$، آن‌گاه n نه مقسوم‌علیه صفر است نه یکه.

۱۵. الف) از قضیهٔ ۹۰۱۴ نتیجه می‌شود.

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ پ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ت) S حوزهٔ صحیح است، درحالی که R حلقهٔ تعویض‌ناپذیر یکدار است.

ث) S ایده‌آلی از R نیست. مثلاً داریم $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، ولی ماتریس حاصل‌ضرب در S نیست.

۱۶. الف) دو ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} d & 0 \\ e & f \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$$

را در S درنظر بگیرید. دراین‌صورت

$$AB = \begin{bmatrix} ad & 0 \\ bd + ce & cf \end{bmatrix} \quad , \quad A + B = \begin{bmatrix} a + d & 0 \\ b + e & c + f \end{bmatrix}$$

که در آن $a + d, b + e, c + f, ad, bd + ce, cf \in \mathbf{Z}$. بنابراین، $A + B \in S$ و $AB \in S$. همچنین،

$$\begin{bmatrix} -a & 0 \\ -b & -c \end{bmatrix} = -A \quad , \quad \begin{bmatrix} -a & 0 \\ -b & -c \end{bmatrix} \in S$$

پس، با توجه به قضیهٔ ۹۰۱۴، S زیرحلقه‌ای از $M_2(\mathbf{Z})$ است. ولی S ایده‌آلی از $M_2(\mathbf{Z})$ نیست. درحقیقت،

داریم
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \in M_۲(\mathbf{Z}) \ , \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \in S$$

ولی $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \notin S$

ب) فرض می‌کنیم $A = \begin{bmatrix} ۲a & ۲b \\ ۲c & ۲d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲e & ۲f \\ ۲g & ۲h \end{bmatrix}$ دو عنصر T باشند. دراین‌صورت

$$A + B = \begin{bmatrix} ۲a + ۲e & ۲b + ۲f \\ ۲c + ۲g & ۲d + ۲h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲(a + e) & ۲(b + f) \\ ۲(c + g) & ۲(d + h) \end{bmatrix}$$

و

$$AB = \begin{bmatrix} ۴ae + ۴bg & ۴af + ۴bh \\ ۴ce + ۴dg & ۴cf + ۴dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲(۲ae + ۲bg) & ۲(۲af + ۲bh) \\ ۲(۲ce + ۲dg) & ۲(۲cf + ۲dh) \end{bmatrix}$$

بنابراین، $A + B \in T$ و $AB \in T$. همچنین،

$$\begin{bmatrix} -۲a & -۲b \\ -۲c & -۲d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲(-a) & ۲(-b) \\ ۲(-c) & ۲(-d) \end{bmatrix}$$

وارون جمعی A است و در T قرار دارد. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۴ . ۹، T زیرحلقهٔ $M_۲(\mathbf{Z})$ است. اگر $\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in M_۲(\mathbf{Z})$ = C، دراین‌صورت،

$$CA = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲a & ۲b \\ ۲c & ۲d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲aw + ۲cx & ۲bw + ۲dx \\ ۲ay + ۲cz & ۲by + ۲dz \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲(aw + cx) & ۲(bw + dx) \\ ۲(ay + cz) & ۲(by + dz) \end{bmatrix}$$

و

$$AC = \begin{bmatrix} ۲a & ۲b \\ ۲c & ۲d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲aw + ۲by & ۲ax + ۲bz \\ ۲cw + ۲dy & ۲cx + ۲dz \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲(aw + by) & ۲(ax + bz) \\ ۲(cw + dy) & ۲(cx + dz) \end{bmatrix}$$

پس $CA, AC \in T$ و بنابراین، T ایده‌آلی از $M_۲(\mathbf{Z})$ است.

۱۷. چون $za = z$، پس $z \in N(a)$ و $N(a) \neq \emptyset$. اگر $r_۱, r_۲ \in N(a)$، آن‌گاه

$$(r_۱ - r_۲)a = -r_۱ a - r_۲ a = z - z = z$$

و بنابراین، $r_1 - r_2 \in N(a)$. سرانجام، اگر $r \in N(a)$ و $s \in R$، می‌بینیم که

$$(rs)a = (sr)a = s(ra) = sz = z$$

و بنابراین، $rs, sr \in N(a)$ پس با توجه به تعریف ۱۴ ۰ ۶، $N(a)$ ایده‌آل است.

۱۸. الف) $I \subseteq R$. به‌ازای هر $r \in R$، $ru = r \in I$ و بنابراین، $R \subseteq I$ پس $I = R$.

ب) فرض می‌کنیم $x \in I$ و x یکه‌ای از R باشد. فرض می‌کنیم $y \in R$ به‌گونه‌ای باشد که $xy = yx = u$. دراین‌صورت از $y \in R$ و $x \in I$ نتیجه می‌شود که $yx = u \in I$. اکنون نتیجهٔ مطلوب از قسمت (الف) به‌دست می‌آید.

۱۹. دو ایده‌آل: R و $\{z\}$، که در آن z عضو صفر R است.

۲۰. الف) چون $u^{-1} = u$، $a^{-1} = b$ و $b^{-1} = a$، پس هر عنصر غیرصفر در $(R, +, \cdot)$ یکه است. بنابراین، $(R, +, \cdot)$ هیأت است.

ب) $\{u, z\}$ زیرحلقه است. از طرف دیگر، $a \in R$ و $u \in \{u, z\}$، ولی $au \notin \{u, z\}$. پس $\{u, z\}$ ایده‌آل نیست.

پ) از $x + by = z$ نتیجه می‌شود که $x = -by$. پس

$$u = y + b(-by) = y - ay = y + ay = (u + a)y = by$$

و $y = ub^{-1} = b^{-1} = a$. بنابراین، $x = -by = -ba = -u = u$.

۲۱. الف) $a = au \in aR$ و بنابراین، $aR \neq \emptyset$. اگر $ar_1, ar_2 \in aR$، دراین‌صورت

$$ar_1 - ar_2 = a(r_1 - r_2) \in aR$$

همچنین، به‌ازای $ar_1 \in aR$ و $r \in R$ داریم

$$r(ar_1) = ar_1(r) = a(r_1 r) \in aR$$

بنابراین، aR ایده‌آلی از R است.

ب) فرض می‌کنیم $a \in R$ و $a \neq z$. دراین‌صورت $a = au \in aR$ و درنتیجه، $aR = R$. چون $u \in R = aR$، به‌ازای عنصری مانند $r \in R$ داریم $u = ar$ و درنتیجه، $r = a^{-1}$. بنابراین، R هیأت است.

۲۲. الف) اگر z_S، z_T، به ترتیب، عنصرهای صفر S و T را نشان دهند، آن‌گاه به‌ازای هر $s \in S$ و $t \in T$ داریم

$$(s, t) \oplus (z_S, z_T) = (s + z_S, t +' z_T) = (s, t) = (z_S + s, z_T +' t) = (z_S, z_T) \oplus (s, t)$$

و بنابراین، (z_S, z_T) عنصر صفر R است. به‌ازای $(s, t), (s_1, t_1), (s_2, t_2) \in R$ می‌بینیم که

$$(s, t) \odot [(s_1, t_1) \oplus (s_2, t_2)] =$$
$$(s, t) \odot (s_1 + s_2, t_1 +' t_2)] = (s \cdot (s_1 + s_2), t \cdot' (t_1 +' t_2)) =$$

$$(s\cdot s_۱+s\cdot s_۲, t\cdot' t_۱+' t\cdot' t_۲)=(s\cdot s_۱, t\cdot' t_۱)\oplus(s\cdot s_۲, t\cdot' t_۲)$$
$$=((s,t)\odot(s_۱,t_۱))\oplus((s,t)\odot(s_۲,t_۲))$$

به این ترتیب، این قانون پخش‌پذیری از قانون متناظر در هر یک از حلقه‌های S و T نتیجه می‌شود. به‌همین ترتیب، دیده می‌شود که ویژگیهای دیگر حلقه نیز دربارهٔ $(R,\oplus,\odot)$ برقرارند.

ب) به‌ازای هر $(s_۱,t_۱),(s_۲,t_۲)\in R$ داریم

$$(s_۱,t_۱)\odot(s_۲,t_۲)=(s_۱\cdot_۲, t_۱\cdot' t_۲)=(s_۲\cdot s_۱, t_۲\cdot' t_۱)=(s_۲\cdot t_۲)\odot(s_۱,t_۱)$$

پ) $u_R=(u_S,u_T)$

ت) خیر. فرض می‌کنیم هر دوی S و T برابر باشند با هیأت اعداد گویا. در $S\times T$، عنصر $(۲,۰)$ وارون ضربی ندارد. (همچنین، $(۲,۰)$ و $(۰,۲)$ دو مقسوم‌علیه سرهٔ صفر، یعنی $(۰,۰)$، هستند.)

۲۳. الف) $(۴۹)\binom{۲}{۲}$ ب) $۷^۴$

پ) بله، عنصر (u,u,u,u) ت) $۴^۲$

۲۴. چون $۱+۱=۲$ و $۱-۴=۳$، می‌دانیم که $(۲,۱,۱)$ و $(۳,۴,-۱)$ دو عنصر S هستند. می‌بینیم که $(۲,۱,۱)\odot(۳,۴-۱)=(۲\times۳,۱\times۴,۱\times(-۱))=(۶,۴,-۱)$ و $(۶,۴,-۱)$ در S نیست، زیرا $(-۱)+۴\neq۶$. درنتیجه، S نسبت به ضرب بسته نیست و بنابراین، زیرحلقهٔ $(\mathbf{Z}^۳,\oplus,\odot)$ نیست.

[یادداشت: مجموعهٔ S ناتهی و نسبت به تفریق بسته است.]

۲۵. الف) هر یک از عنصرهای $(۰,۱,۱)$، $\left(۰,۱,\frac{۲}{۳}\right)$، $(۲,۰,-۵)$ و $\left(۰,۰,-\frac{۱}{۲}\right)$ مقسوم‌علیه سرهٔ صفر در R است. مثلاً، در مورد $(۱,۱,۰)$، عنصر (غیرصفر) $(۰,۰,۱)$ را درنظر بگیرید. می‌بینیم که $(۱,۱,۰)\cdot(۰,۰,۱)=(۱\times۰,۱\times۰,۰\times۱)=(۰,۰,۰)$.

ب) فرض می‌کنیم $(m,n,s)\in R$. دراین‌صورت (m,n,s) مقسوم‌علیه سرهٔ صفر است اگر و فقط اگر دست‌کم یکی از سه عدد m، n و s صفر نباشد و دست‌کم یکی از سه عدد m، n و s صفر باشد. به بیان دیگر، (m,n,s) مقسوم‌علیه صفر است اگر و فقط اگر $|m|+|n|+|s|\neq۰$ و $mns=۰$.

پ) هر یک از عنصرهای $(۱,۱,۱)$، $\left(-۱,۱,\frac{۱}{۳}\right)$، $(۱,-۱,۵)$ و $(-۱,-۱,۷)$ یکه‌ای از R است. مثلاً در مورد $(۱,-۱,۷)$ می‌بینیم که وارون ضربی آن عبارت است از $\left(۱,-۱,\frac{۱}{۷}\right)$، زیرا

$$(۱,-۱,۷)\times\left(۱,-۱,\frac{۱}{۷}\right)=\left(۱\times۱,(-۱)\times(-۱),۷\times\frac{۱}{۷}\right)=(۱,۱,۱)$$

و می‌دانیم که $(۱,۱,۱)$ عنصر یک R است. همچنین، $\left(۱,-۱,\frac{۱}{۷}\right)\times(۱,-۱,۷)=(۱,۱,۱)$

ت) فرض می‌کنیم $(m,n,s)\in R$. دراین‌صورت (m,n,s) یکه‌ای از R است اگر و فقط اگر

$m = \pm ۱$، $n = \pm ۱$ و $s \neq ۰$. [علاوه‌بر این، وقتی (m, n, s) یکه‌ای از R است، می‌بینیم که $(m, n, s)^{-۱} = (m^{-۱}, n^{-۱}, s^{-۱}) = (m, n, s^{-۱})$.]

۲۶. الف) با توجه به تعریف بازگشتی مفروض، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $m \in \mathbf{Z}^+$ و $n = ۱$ درست است. فرض می‌کنیم این نتیجه به‌ازای هر $m \in \mathbf{Z}^+$ و $n = k$ $(k \geq ۱)$ درست باشد. اکنون $m \in \mathbf{Z}^+$ و $n = k + ۱$ را درنظر بگیرید. با توجه به فرض استقرا و تعریفی که در تمرین آمده است می‌بینیم که

$$(m+n)a = \big(m + (k+۱)\big)a = \big((m+۱) + k\big)a = (m+۱)a + ka =$$
$$(ma + a) + ka = ma + (ka + a) = ma + \big[(k+۱)a\big] = ma + na$$

بنابراین، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $m, n \in \mathbf{Z}^+$ درست است. اگر m یا n برابر با ۰ باشد باز هم این نتیجه درست است. اگر m و n هر دو منفی باشند، به‌ازای دو عدد مانند $m_۱, n_۱ \in \mathbf{Z}^+$ داریم $m = -m_۱$ و $n = -n_۱$. دراین‌صورت

$$(m+n)(a) = (-m_۱ - n_۱)(a) = (m_۱ + n_۱)(-a) = m_۱(-a) + n_۱(-a)$$
$$= (-m_۱)a + (-n_۱)a = ma + na$$

سرانجام، فرض می‌کنیم $mn < ۰$. حالت $m > ۰$ و $n = -n_۱ < ۰$ را درنظر می‌گیریم. دراین‌صورت $(m+n)a = (m - n_۱)(a)$. اگر $m = n_۱$، نتیجهٔ موردنظر آشکار است. اگر $m > n_۱$ آن‌گاه $m = s + n_۱$ و

$$(m+n)a = \big((s+n_۱) - n_۱\big)a = sa = sa + n_۱a - n_۱a = (s+n_۱)a - n_۱a$$
$$= ma + na$$

اگر $m < n_۱$، آن‌گاه $n_۱ = t + m$ و

$$(m+n)a = \big(m - (t+m)\big)a = (-t)a = t(-a) = t(-a) + m(-a) - m(-a)$$
$$= -m(-a) + (m+t)(-a) = ma + na$$

(اثبات حالت مربوط به $m < ۰$ و $n > ۰$ نیز به‌همین ترتیب انجام می‌گیرد.) درنتیجه، به‌ازای هر $m, n \in \mathbf{Z}$ داریم $(m+n)a = ma + na$.

پ) به‌ازای $n = ۱$ داریم $n(a+b) = a + b = na + nb$. درستی این نتیجه را به‌ازای $n = k$ $(k \geq ۱)$ مفروض می‌گیریم و حالت $n = k + ۱$ را بررسی می‌کنیم. می‌بینیم که

$$n(a+b) = (k+۱)(a+b) = \big(k(a+b)\big) + (a+b) = (ka + kb) + (a+b)$$
$$= (ka + a) + (kb + b) = (k+۱)a + (k+۱)b = na + nb$$

و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است. اگر $n < ۰$، فرض می‌کنیم $n = -m$.

دراین‌صورت

$$n(a+b)=(-m)(a+b)=m\big(-(a+b)\big)=m\big((-a)+(-b)\big)$$
$$=m(-a)+m(-b)=(-m)(a)+(-m)(b)=na+nb$$

پس این نتیجه به‌ازای هر $n\in\mathbf{Z}$ درست است.

ب، ت و ث) اثبات این قسمتها نیز به همین ترتیب انجام می‌گیرد.

۲۷. الف) به‌ازای هر $m\in\mathbf{Z}^+$ داریم $(a^m)(a^1)=a^m a=a^{m+1}$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n=1$ درست است. درستی این نتیجه را به‌ازای هر $m\in\mathbf{Z}^+$ و $n=k$ $(k\geq 1)$ مفروض می‌گیریم. به‌ازای $m\in\mathbf{Z}^+$ و $n=k+1$ می‌بینیم که

$$(a^m)(a^n)=(a^m)(a^{k+1})=(a^m)(a^k a)=(a^m a^k)(a)=(a^{m+k})(a)=a^{(m+k)+1}$$
$$=a^{m+(k+1)}=a^{m+n}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $m,n\in\mathbf{Z}^+$ درست است.

به‌همین ترتیب، به‌ازای هر $m\in\mathbf{Z}^+$ و $n=1$ داریم $(a^m)^n=a^{mn}$. درستی این نتیجه را به‌ازای $m\in\mathbf{Z}^+$ و $n=k$ $(k\geq 1)$ مفروض می‌گیریم و حالت مربوط به $m\in\mathbf{Z}^+$ و $n=k+1$ را بررسی می‌کنیم. دراین‌صورت با توجه به اولین نتیجه،

$$(a^m)^{k+1}=(a^m)^k(a^m)=(a^{mk})(a^m)=a^{mk+m}=a^{m(k+1)}=a^{mn}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $m,n\in\mathbf{Z}^+$ درست است.

ب) اگر R عنصر یکی مانند u داشته باشد، به‌ازای $a\in R$ و $a\neq z$ تعریف می‌کنیم $a^0=u$. اگر a یکه‌ای از R باشد، a^{-n} را به‌ازای هر $n\in\mathbf{Z}^+$ برابر با $(a^{-1})^n$ تعریف می‌کنیم.

بند ۳.۱٤

۱. الف) ۶−، ۱، ۸، ۱۴   ب) ۹−، ۲، ۱۳، ۲۴   پ) ۷−، ۱۰، ۲۷، ۴۴

۲. برهان: ملاحظه می‌کنیم که

$$b\equiv c(\text{پیمانهٔ } n)\Longrightarrow \big(b=c+mn\text{ ، }m\in\mathbf{Z}\text{ به‌ازای عددی مانند }\big)\Longrightarrow ab=ac+m(an)$$
$$\Longrightarrow ab\equiv ac(\text{پیمانهٔ } an)$$

۳. برهان: چون $a\equiv b(\text{پیمانهٔ } n)$، می‌توانیم به‌ازای عددی مانند $k\in\mathbf{Z}$ بنویسیم $a=b+kn$. از $m|n$ نتیجه می‌شود که به‌ازای عددی مانند $\ell\in\mathbf{Z}$ داریم $n=\ell m$. بنابراین، $a=b+kn=b+(k\ell)m$ و $a\equiv b(\text{پیمانهٔ } m)$.

۴. برهان: اگر $3|n$، آن‌گاه $n\equiv 0(\text{پیمانهٔ } 3)$ و $2n\equiv 0(\text{پیمانهٔ } 3)$. بنابراین، $2n+1\equiv 1(\text{پیمانهٔ } 3)$ و $2n-1\equiv 2(\text{پیمانهٔ } 3)$.

اگر $n \nmid ۳$، دراین‌صورت دقیقاً یکی از حالتهای زیر پیش می‌آید:

الف) $n \equiv ۱$ (پیمانهٔ ۳). دراین حالت داریم $۲n \equiv ۲$ (پیمانهٔ ۳) و بنابراین، $۲n + ۱ \equiv ۰$ (پیمانهٔ ۳)، درحالی‌که $۲n - ۱ \equiv ۲$ (پیمانهٔ ۳). بنابراین، $۳|(۲n + ۱)$.

ب) $n \equiv ۲$ (پیمانهٔ ۳). دراین حالت داریم $۲n \equiv ۱$ (پیمانهٔ ۳) و بنابراین، $۲n - ۱ \equiv ۰$ (پیمانهٔ ۳)، درحالی‌که $۲n + ۱ \equiv ۲$ (پیمانهٔ ۳). بنابراین، $۳|(۲n - ۱)$.

۵. برهان: اگر n فرد باشد، $n - ۱$ عدد ۱، ۲، ۳، ...، $n - ۳$، $n - ۲$ و $n - ۱$ را به‌صورت $\frac{n-۱}{۲}$ جفت زیر درنظر می‌گیریم:

$$۱ \text{ و } n - ۱،\ ۲ \text{ و } n - ۲،\ ۳ \text{ و } n - ۳،\ \ldots،\ n - \left(\frac{n-۱}{۲}\right) - ۱ \text{ و } n - \left(\frac{n-۱}{۲}\right)$$

مجموع عددهای هریک ازاین جفتها برابر با n است‌که با ۰ به پیمانهٔ n همنهشت است. پس $\sum_{i=۱}^{n-۱} \equiv ۰$ (پیمانهٔ n).

اگر n زوج باشد، $n - ۱$ عدد ۱، ۲، ۳، ...، $\frac{n}{۲} - ۱$، $\frac{n}{۲}$، $\frac{n}{۲} + ۱$، ...، $n - ۳$، $n - ۲$ و $n - ۱$ را به‌صورت $\frac{n}{۲} - ۱$ جفت ۱ و $n - ۱$، ۲ و $n - ۲$، ۳ و $n - ۳$، ...، $\frac{n}{۲} - ۱$ و $\frac{n}{۲} + ۱$ و عدد تنهای $\frac{n}{۲}$ درنظر می‌گیریم. مجموع عددهای هر یک از این جفتها برابر است با n که با ۰ به پیمانهٔ n همنهشت است. بنابراین، $\sum_{i=۱}^{n-۱} i \equiv \frac{n}{۲}$ (پیمانهٔ n).

۶. (قضیهٔ ۱۴ · ۱۱) به‌ازای هر $a \in \mathbf{Z}$ داریم $a - a = ۰ \times n$. پس $a \equiv a$ (پیمانهٔ n) و این رابطهٔ بازتابی است. اگر $a, b \in \mathbf{Z}$، دراین‌صورت

$$a \equiv b (\text{پیمانهٔ } n) \Longrightarrow a - b = kn, k \in \mathbf{Z} \Longrightarrow b - a = (-k)n \Longrightarrow b \equiv a (\text{پیمانهٔ } n)$$

بنابراین، رابطهٔ مفروض متقارن است. سرانجام، فرض می‌کنیم $a, b, c \in \mathbf{Z}$ چنان باشند که $a \equiv b$ (پیمانهٔ n) و $b \equiv c$ (پیمانهٔ n). دراین‌صورت به‌ازای دو عدد مانند $k, m \in \mathbf{Z}$ داریم $a - b = kn$ و $b - c = mn$. پس $(a - b) + (b - c) = a - c = (k + m)n$. در نتیجه، $a \equiv c$ (پیمانهٔ n) و این رابطه ترایاست.

(قضیهٔ ۱۴ · ۱۲) به‌ازای هر $[a], [b], [c] \in \mathbf{Z}_n$ می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
\big([a] + [b]\big) + [c] &= [a + b] + [c] = \big[(a + b) + c\big] \\
&= \big[a + (b + c)\big] \qquad (\text{زیرا } a, b, c \in \mathbf{Z} \text{ و جمع در } \mathbf{Z} \text{ شرکت‌پذیر است}) \\
&= [a] + [b + c] = [a] + \big([b] + [c]\big)
\end{aligned}$$

بنابراین، جمع رده‌های هم‌ارزی در $\mathbf{Z}_n$ شرکت‌پذیر است. به‌همین ترتیب، همهٔ ویژگیهای لازم دیگر برای آنکه $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ حلقه‌ای تعویض‌پذیر با عنصر یکِ [۱] باشد از ویژگیهای متناظر حلقهٔ $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ نتیجه می‌شوند.

۷. الف) به‌ازای هر $a \in \mathbf{Z}^+$ داریم $\tau(a) = \tau(a)$ و بنابراین، رابطهٔ مفروض بازتابی است. اگر $a, b \in \mathbf{Z}^+$، از $\tau(a) = \tau(b)$ نتیجه می‌شودکه $\tau(b) = \tau(a)$. پس این رابطه متقارن است. سرانجام، به‌ازای $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$، از $\tau(a) = \tau(b)$ و $\tau(b) = \tau(c)$ نتیجه می‌شود که $\tau(a) = \tau(c)$ و درنتیجه، این رابطه ترایاست.

ب) خیر، $۲\mathcal{R}۳$ و $۳\mathcal{R}۵$، ولی $۵\not\mathcal{R}۸$. همچنین، $۲\mathcal{R}۳$ و $۲\mathcal{R}۵$، ولی $۴\not\mathcal{R}۱۵$.

۸.

$$\mathbf{Z}_{۱۱}: [۱]^{-۱} = [۱], [۲]^{-۱} = [۶], [۳]^{-۱} = [۴], [۴]^{-۱} = [۳], [۵]^{-۱} = [۹], [۶]^{-۱} = [۲],$$
$$[۷]^{-۱} = [۸], [۸]^{-۱} = [۷], [۹]^{-۱} = [۵], [۱۰]^{-۱} = [۱۰]$$

$$\mathbf{Z}_{۱۳}: [۱]^{-۱} = [۱], [۲]^{-۱} = [۷], [۳]^{-۱} = [۹], [۴]^{-۱} = [۱۰], [۵]^{-۱} = [۸], [۶]^{-۱} = [۱۱],$$
$$[۷]^{-۱} = [۲], [۸]^{-۱} = [۵], [۹]^{-۱} = [۳], [۱۰]^{-۱} = [۴], [۱۱]^{-۱} = [۶], [۱۲]^{-۱} = [۱۲]$$

$$\mathbf{Z}_{۱۷}: [۱]^{-۱} = [۱], [۲]^{-۱} = [۹], [۳]^{-۱} = [۶], [۴]^{-۱} = [۱۳], [۵]^{-۱} = [۷], [۶]^{-۱} = [۳],$$
$$[۷]^{-۱} = [۵], [۸]^{-۱} = [۱۵], [۹]^{-۱} = [۲], [۱۰]^{-۱} = [۱۲], [۱۱]^{-۱} = [۱۴], [۱۲]^{-۱} = [۱۰],$$
$$[۱۳]^{-۱} = [۴], [۱۴]^{-۱} = [۱۱], [۱۵]^{-۱} = [۸], [۱۶]^{-۱} = [۱۶]$$

۹. الف)
$$۱۰۰۹ = ۵۹(۱۷) + ۶$$
$$۱۷ = ۲(۶) + ۵$$
$$۶ = ۱(۵) + ۱$$

بنابراین،

$$۱ = ۶ - ۵ = ۶ - [۱۷ - ۲(۶)] = ۳(۶) - ۱۷ = ۳[۱۰۰۹ - ۵۹(۱۷)] - ۱۷$$
$$= ۳(۱۰۰۹) - ۱۷۸(۱۷)$$

پس

$$۱ \equiv (-۱۷۸)(۱۷)\ (\text{پیمانهٔ } ۱۰۰۹)$$

و بنابراین،

$$[۱۷]^{-۱} = [-۱۷۸] = [-۱۷۸ + ۱۰۰۹] = [۸۳۱]$$

ب) $[۱۰۰]^{-۱} = [۱۱۱]$ پ) $[۷۷۷]^{-۱} = [۷۳۵]$

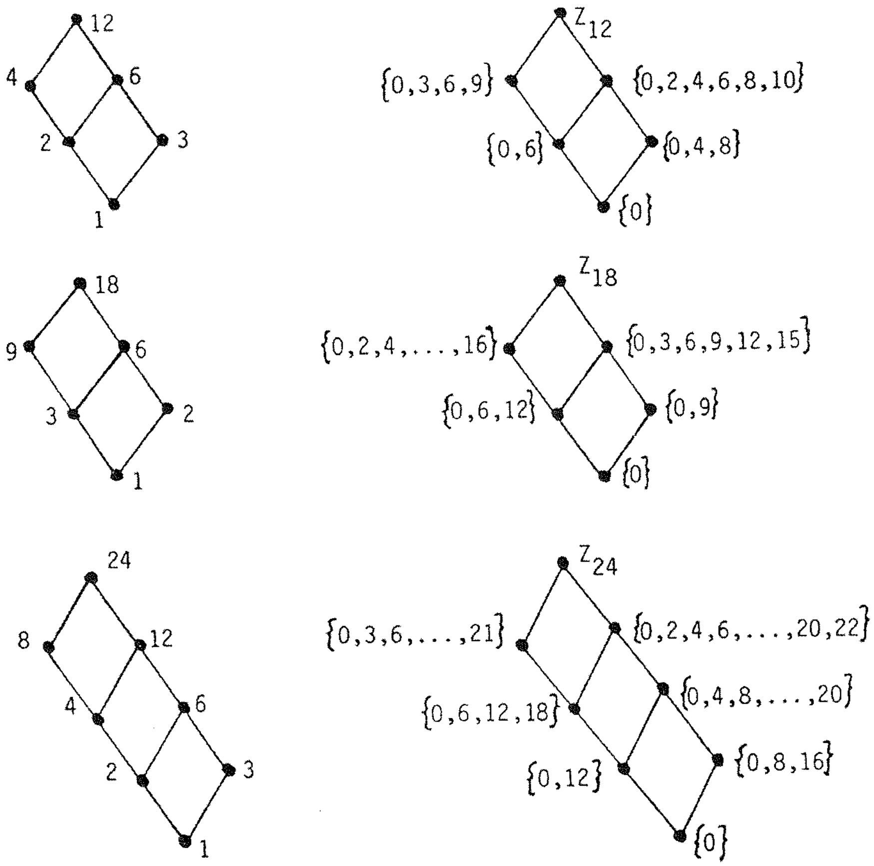
۱۰. الف)

$$\mathbf{Z}_{۱۲}: \{۰\}, \{۰, ۶\}, \{۰, ۴, ۸\}, \{۰, ۳, ۶, ۹\}, \{۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲\}, \mathbf{Z}_{۱۲}$$

$$\mathbf{Z}_{۱۸}: \{۰\}, \{۰, ۹\}, \{۰, ۶, ۱۲\}, \{۰, ۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵\}, \{۰, ۲, ۴, ۶, \ldots, ۱۶\}, \mathbf{Z}_{۱۸}$$

$$\mathbf{Z}_{۲۴}: \{۰\}, \{۰, ۱۲\}, \{۰, ۸, ۱۶\}, \{۰, ۶, ۱۲, ۱۸\}, \{۰, ۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰\},$$
$$\{۰, ۳, ۶, \ldots, ۱۸, ۲۱\}, \{۰, ۲, ۴, ۶, \cdots, ۲۰, ۲۲\}, \mathbf{Z}_{۲۴}$$

ب)



پ) تعداد زیرحلقه‌های $\mathbf{Z}_n$ برابر است با $\tau(n)$، یعنی تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n.

۱۱. الف) ۱۶ یکه، ۰ مقسوم‌علیه سرهٔ صفر. ب) ۷۲ یکه، ۴۴ مقسوم‌علیه سرهٔ صفر.

پ) ۱۱۱۶ یکه، ۰ مقسوم‌علیه سرهٔ صفر.

۱۲. فرض می‌کنیم a_1، a_2، …، a_n فهرستی از n، $n \ge 1$، عدد صحیح متوالی باشد. به‌ازای $1 \le i \le n$، فرض می‌کنیم b_i باقیماندهٔ حاصل از تقسیم a_i بر n باشد. پس $b_i \equiv a_i$ (پیمانهٔ n) و $0 \le b_i \le n-1$. دراین‌صورت،

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

بنابراین، به‌ازای اندیسی مانند $1 \le i \le n$ داریم $b_i = 0$. درنتیجه،

$$b_i = 0 \iff a_i \equiv 0 \ (\text{پیمانهٔ } n) \iff n | a_i$$

۱۳. $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\} = \{1, 4, 7, 10, \ldots, 997, 1000\} \cup \{2, 5, 8, \ldots, 995, 998\}$
$\cup \{3, 6, 9, \ldots, 999\}$

در این افراز، ردهٔ اول ۳۳۴ عنصر دارد، درحالی‌که هر یک از دو ردهٔ دیگر دارای ۳۳۳ عنصر است. اگر هر سه عنصر را از یک رده انتخاب کنیم، مجموع آنها بر سه بخش‌پذیر خواهد بود. اگر از هر یک از این سه رده یک عدد انتخاب کنیم، مجموع آنها بر سه بخش‌پذیر است. درنتیجه، احتمال اینکه مجموع سه عنصر انتخاب شده از $\{1, 2, 3, \ldots, 999\}$ بر سه بخش‌پذیر باشد برابر است با $\left[\binom{334}{3} + 2\binom{333}{3} + \binom{334}{1}\binom{333}{1}^2\right] / \binom{1000}{3}$.

۱۴. الف) (یک) به‌ازای $m = 1$ این نتیجه درست است. درستی این نتیجه را به‌ازای $m = k$ مفروض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم

$$c \equiv d(\text{پیمانهٔ } n) \Longrightarrow c^k \equiv d^k(\text{پیمانهٔ } n)$$

و حالت $m = k + 1$ را درنظر می‌گیریم. با توجه به $c \equiv d(\text{پیمانهٔ } n)$ و $c^k \equiv (d^k)(\text{پیمانهٔ } n)$ داریم $c^m = c^{k+1} = (c^k)(c) \equiv (d^k)(d)(\text{پیمانهٔ } n)$. بنابراین، $c^m = c^{k+1} \equiv d^{k+1} = d^m(\text{پیمانهٔ } n)$.

بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $m \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

(دو) این نتیجه هم با استفاده از استقرا ثابت می‌شود.

ب) چون $10 \equiv 1(\text{پیمانهٔ } 9)$، به‌ازای هر $k \geq 0$ و هر $a \in \mathbf{Z}$، $0 \leq a \leq 9$، داریم $10^k \equiv 1^k = 1(\text{پیمانهٔ } 9)$ و $(a)(10^k) \equiv a(\text{پیمانهٔ } 9)$. درنتیجه،

$$x_n \times 10^n + x_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + x_1 \times 10 + x_0 \equiv x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 + x_0 (\text{پیمانهٔ } 9)$$

۱۵. الف) به‌ازای $n = 0$ داریم

$$10^0 = 1 = 1(-1)^0$$

و بنابراین، $10^0 \equiv (-1)^0(\text{پیمانهٔ } 11)$. [چون $11 = (-1) - 10$، پس $10 \equiv (-1)(\text{پیمانهٔ } 11)$ یا $10^1 \equiv (-1)^1(\text{پیمانهٔ } 11)$. بنابراین، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = 0$ و $n = 1$ درست است.] درستی این نتیجه را به‌ازای $n = k \geq 1$ مفروض می‌گیریم و حالت مربوط به $k + 1$ را بررسی می‌کنیم. با توجه به $10^k \equiv (-1)^k(\text{پیمانهٔ } 11)$ و $10 \equiv (-1)(\text{پیمانهٔ } 11)$ داریم

$$10^{k+1} = 10^k \times 10 \equiv (-1)^k(-1) = (-1)^{k+1}(\text{پیمانهٔ } 11)$$

به‌این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ درست است.

ب) اگر $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1 x_0 = x_n \times 10^n + x_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + x_2 \times 10^2 + x_1 \times 10 + x_0$ یک عدد صحیح $(n + 1)$ رقمی را نشان دهد، آنگاه

$$x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1 x_0 \equiv (-1)^n x_n + (-1)^{n-1} x_{n-1} + \cdots + x_2 - x_1 + x_0 (\text{پیمانهٔ } 11)$$

برهان:

$$\begin{aligned} x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1 x_0 &= x_n \times 10^n + x_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + x_2 \times 10^2 + x_1 \times 10 + x_0 \\ &\equiv x_n(-1)^n + x_{n-1}(-1)^{n-1} + \cdots + x_2(-1)^2 + x_1(-1) + x_0 \\ &= (-1)^n x_n + (-1)^{n-1} x_{n-1} + \cdots + x_2 - x_1 + x_0 (\text{پیمانهٔ } 11) \end{aligned}$$

پ) (یک) $d = ۱$

(دو) $d = ۴$

۱۶. (پیمانهٔ ۱۰) $۳^۵ = ۲۴۳ \equiv ۳$

(پیمانهٔ ۱۰) $۳^{۵۵} \equiv ۳^{۱۱}$ و (پیمانهٔ ۱۰) $۳^{۱۱} = ۳^۵ \times ۳^۵ \times ۳ \equiv ۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷ \equiv ۷$ بنابراین، رقم یکان $۳^{۵۵}$ برابر است با ۷.

۱۷. به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$ داریم

$$۹^{۲k+۱} = (۹^۲)^k(۹) = (۸۱)^k(۹) \equiv (۱)^k(۹) \quad (\text{پیمانهٔ } ۱۰) \equiv ۹ \; (\text{پیمانهٔ } ۱۰)$$

بنابراین، رقم یکان برابر است با ۹.

۱۸. اگر در $\mathbf{Z}_p$ داشته باشیم $a^۲ = a$، آن‌گاه (پیمانهٔ p) $a^۲ \equiv a$ و درنتیجه، $p|(a^۲ - a)$. چون p اول است می‌بینیم که

$$p|(a^۲ - a) \Longrightarrow p|a(a - ۱) \Longrightarrow p|(a - ۱) \text{ یا } p|a$$

با توجه به $۰ \leq a < p$، از $p|a$ نتیجه می‌شود که $a = ۰$ و از $p|(a - ۱)$ نتیجه می‌شود که $a = ۱$. بنابراین، تنها عنصرهایی از $\mathbf{Z}_p$ که در $a^۲ = a$ صدق می‌کنند عبارت‌اند از $a = ۰$ و $a = ۱$. [به بیان دیگر، $a = ۰$ و $a = ۱$ تنها عنصرهای خودتوان $\mathbf{Z}_p$ نسبت به ضرب هستند.]

۱۹. فرض می‌کنیم $g = \gcd(a, n)$ و $h = \gcd(b, n)$. دراین‌صورت،

$$a \equiv b \;\; (\text{پیمانهٔ } n) \Longrightarrow a = b + kn, k \in \mathbf{Z} \Longrightarrow g|b, h|a$$

از طرف دیگر،

$$h|a, h|n \Longrightarrow h|g \;\; \text{و} \;\; g|b, g|n \Longrightarrow g|h$$

چون $g > ۰, h > ۰$، پس $g = h$.

۲۰. الف) $۱ = ۱$، $۲^۶ = ۶۴ = ۷(۹) + ۱$، $۳^۶ = ۷۲۹ = ۷(۱۰۴) + ۱$، $۴^۶ = ۴۰۹۶ = ۷(۵۸۵) + ۱$، $۵^۶ = ۱۵۶۲۵ = ۷(۲۲۳۲) + ۱$ و $۶^۶ = ۴۶۶۵۶ = ۷(۶۶۶۵) + ۱$.

ب) اگر $\gcd(n, ۷) = ۱$، دراین‌صورت به‌ازای عددی مانند $۱ \leq i \leq ۶$ داریم (پیمانهٔ ۷) $n \equiv i$. درنتیجه، (پیمانهٔ ۷) $n^۶ \equiv i^۶ \equiv ۱$. اکنون می‌بینیم که

$$n^۶ \equiv ۱ \;\; (\text{پیمانهٔ } ۷) \Longleftrightarrow ۷|(n^۶ - ۱)$$

۲۱. الف) (پیمانهٔ ۵) $۱ + ۲ + ۳ = ۶ \equiv ۱$، (پیمانهٔ ۳) $۰ + ۴ = ۴ \equiv ۱$ و

$$h(۱۲۳ - ۰۴ - ۲۲۷۵) = ۱۱۲۰۲ + ۲ + ۷ + ۵ = ۱۶ \equiv ۲ \;\; (\text{پیمانهٔ } ۷)$$

ب) فرض می‌کنیم $n = ۱۱۲ - ۴۳ - ۸۲۹۵$. دراین‌صورت

$$h(۱۱۲ - ۴۳ - ۸۲۹۵) = ۴۱۳$$

۲۲.

```
Program Hashing (input, output);
Var
      ssnum: array[1..9] of integer;
      i, a, b, c, result: integer;
Begin
      Writeln ('Input the social security number, ',
               'without hyphens, one digit at a time. ');
      Writeln ('Input the 1st digit and then type a return. ');
      Read (ssnum[1]);
      Writeln ('The 1st digit is ', ssnum[1]:0);

      Writeln ('Input the 2nd digit and then type a return. ');
      Read (ssnum[2]);
      Writeln ('The 2nd digit is ', ssnum[2]:0);

      Writeln ('Input the 3rd digit and then type a return. ');
      Read (ssnum[3]);
      Writeln ('The 3rd digit is ', ssnum[3]:0);

      For i := 4 to 9 do
            Begin
             Writeln ('Input the ', i:0, '-th digit and then type a return. ');
             Read (ssnum[i]);
             Writeln ('The ', i:0, '-th digit is ', ssnum[i]:0)
             End;
      a := (ssnum[1] + ssnum[2] + ssnum[3]) Mod 5;
      b := (ssnum[4] + ssnum[5]) Mod 3;
      c := (ssnum[6] + ssnum[7] + ssnum[8] + ssnum[9]) Mod 7;
      result := 100*a + 10*b + c;
      Writeln ('The hashing function assigns the result ',
                    result:0, ' to this social security number.')
End.
```

بند ٤.١٤

۱. $s \to ۰$، $t \to ۱$، $v \to ۲$، $w \to ۳$، $x \to ۴$ و $y \to ۵$.

۲. (قضیهٔ ۱۴.۱۵ (ت)) این نتیجه به‌ازای $n = ۱$ درست است. درستی نتیجه را به ازای $n = k$ مفروض می‌گیریم و حالت $n = k + ۱$ را بررسی می‌کنیم. دراین‌صورت،

$$f(a^{k+۱}) = f(a^k a) = f(a^k)f(a) = [f(a)]^k f(a) = [f(a)]^{k+۱}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

(قضیهٔ ۱۴ ۰ ۱۶ (الف)) به‌ازای $s \in S$، عنصری مانند $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(r) = s$، زیرا f پوشاست. چون $r = u_R r = r u_R$، پس

$$s = f(r) = f(ru_R) = f(r)f(u_R) = sf(u_R) \quad \text{و} \quad s = f(r) = f(u_R r) = f(u_R)f(r) = f(u_R)s$$

بنابراین، $f(u_R)$ عنصر یکِ S است.

(قضیهٔ ۱۴ ۰ ۱۶ (ب)) چون a یکه‌ای از R است، عنصری مانند $b \in R$ وجود دارد به‌طوری که $ab = ba = u_R$. دراین‌صورت با توجه به قسمت (الف) داریم

$$u_S = f(u_R) = f(ab) = f(a)f(b) = f(ba) = f(b)f(a)$$

و بنابراین، $f(a)$ یکه‌ای از S است. چون $b = a^{-1}$، پس $f(b) = f(a^{-1})$ وارون ضربی $f(a)$ است. بنابر قضیهٔ ۱۴ ۰ ۵(ب) داریم $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

(قضیهٔ ۱۴ ۰ ۱۶ (پ)) فرض می‌کنیم $s_1, s_2 \in S$. دراین‌صورت عنصرهایی مانند $r_1, r_2 \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که، به‌ازای $1 \le i \le 2$، $f(r_i) = s_i$. بنابراین،

$$s_1 s_2 = f(r_1)f(r_2) = f(r_1 r_2) = f(r_2 r_1) = f(r_2)f(r_1) = s_2 s_1$$

و درنتیجه، S تعویض‌پذیر است.

۳. فرض می‌کنیم $(R, +, \cdot)$، $(S, \oplus, \odot)$ و $(T, +', \cdot')$ سه حلقه باشند. به‌ازای هر $a, b \in R$ داریم

$$(g\circ f)(a+b) = g\big(f(a+b)\big) = g\big(f(a)+f(b)\big) = g\big(f(a)\big) +' g\big(f(b)\big) = (g\circ f)(a) +' (g\circ f)(b)$$

همچنین،

$$(g\circ f)(a\cdot b) = g\big(f(a\cdot b)\big) = g\big(f(a)\odot f(b)\big) = g\big(f(a)\big) \cdot' g\big(f(b)\big) = (g\circ f)(a) \cdot' (g\circ f)(b)$$

بنابراین، $g\circ f$ همریختی حلقه است.

۴. $f : \mathbf{R} \to S$ را به‌ازای $r \in \mathbf{R}$ با $f(r) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ تعریف کنید. دراین‌صورت f تابع یک به یکی از $\mathbf{R}$ روی S است. به‌ازای هر $r, s \in \mathbf{R}$ داریم

$$f(r+s) = \begin{bmatrix} r+s & 0 \\ 0 & r+s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = f(r) + f(s)$$

و

$$f(rs) = \begin{bmatrix} rs & 0 \\ 0 & rs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = f(r)f(s)$$

۵. الف) چون $f(z_R) = z_S$، پس $z_R \in K$ و $K \neq \emptyset$. اگر $x, y \in K$، آن‌گاه

$$f(x-y) = f\big(x + (-y)\big) = f(x) \oplus f(-y) = f(x) \ominus f(y) = z_S \ominus z_S = z_S$$

و بنابراین، $x - y \in K$. سرانجام، اگر $x \in K$ و $r \in R$، آن‌گاه

$$f(xr) = f(x) \odot f(r) = z_S \odot f(r) = z_S \quad \text{و} \quad f(rx) = f(r) \odot f(x) = f(r) \odot z_S = z_S$$

پس $rx, xr \in K$، درنتیجه، K ایده‌آلی از R است.

ب) هسته عبارت است از $\{6n | n \in \mathbf{Z}\}$.

پ) اگر f یک به‌یک باشد، به‌ازای هر $x \in K$ داریم

$$[f(x) = z_S = f(z_R)] \Longrightarrow [x = z_R]$$

وبنابراین، $K = \{z_R\}$. برعکس، اگر $K = \{z_R\}$، فرض می‌کنیم $x, y \in R$ چنان باشندکه $f(x) = f(y)$. دراین‌صورت $z_S = f(x) \ominus f(y) = f(x-y)$ وبنابراین، $x - y \in K = \{z_R\}$. درنتیجه، $x - y = z_R$ و بنابراین، $x = y$. پس f یک به‌یک است.

۶. الف) $f\big[(۱۲)(۲۳) + ۱۸\big] = f(۱۳) \cdot f(۲۳) + f(۱۸) = (۱, ۱, ۳) \cdot (۱, ۲, ۳) + (۰, ۰, ۳)$

$$= (۱, ۲, ۴) + (۰, ۰, ۳) = (۱, ۲, ۲) = f(۱۷)$$

و بنابراین، در $\mathbf{Z}_{۳۰}$ داریم $۱۷ = ۱۸ + (۲۳)(۱۳)$.

ب) $f\big[(۱۱)(۲۱) - ۲۰\big] = f(۱۱) \cdot f(۲۱) - f(۲۰) = (۱, ۲, ۱) \cdot (۱, ۰, ۱) - (۰, ۲, ۰)$

$$= (۱, ۰, ۱) - (۰, ۲, ۰) = (۱, -۲, ۱) = (۱, ۱, ۱) = f(۱)$$

و بنابراین، در $\mathbf{Z}_{۳۰}$ داریم $۱ = ۲۰ - (۲۱)(۱۱)$.

پ) ۲۴ ت) ۲۹

۷. الف)

$f(x)$ (در $\mathbf{Z}_۴ \times \mathbf{Z}_۵$)	x (در $\mathbf{Z}_{۲۰}$)	$f(x)$ (در $\mathbf{Z}_۴ \times \mathbf{Z}_۵$)	x (در $\mathbf{Z}_{۲۰}$)
(۲, ۰)	۱۰	(۰, ۰)	۰
(۳, ۱)	۱۱	(۱, ۱)	۱
(۰, ۲)	۱۲	(۲, ۲)	۲
(۱, ۳)	۱۳	(۳, ۳)	۳
(۲, ۴)	۱۴	(۰, ۴)	۴
(۳, ۰)	۱۵	(۱, ۰)	۵
(۰, ۱)	۱۶	(۲, ۱)	۶
(۱, ۲)	۱۷	(۳, ۲)	۷
(۲, ۳)	۱۸	(۰, ۳)	۸
(۳, ۴)	۱۹	(۱, ۴)	۹

ب) (یک) $f\big((17)(19)+(12)(14)\big) = (1,2)(3,4)+(0,2)(2,4) = (3,3)+(0,3) = (3,1)$
و $f^{-1}(3,1) = 11$.

(دو) $f\big((18)(11)-(9)(15)\big) = (2,3)(3,1)-(1,4)(3,0) = (2,3)-(3,0) = (3,3)$ و
$f^{-1}(3,3) = 3$.

۸. $f(ma+tb) = mf(a)+tf(b) = m(1,0)+t(0,1) = (m,t)$

۹. الف) ۴ ب) ۱ پ) خیر

۱۰. الف) در هر یک از دو حلقهٔ $\mathbf{Z}_{15}$ و $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_5$، $\phi(15) = 15 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 8$ یکه وجود دارد.

ب) بله. $f : \mathbf{Z}_{15} \to \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_5$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:
$f(0)=(0,0)$، $f(1)=(1,1)$، $f(2)=(2,2)$، $f(3)=(0,3)$، $f(4)=(1,4)$، $f(5)=(2,0)$،
$f(6)=(0,1)$، $f(7)=(1,2)$، $f(8)=(2,3)$، $f(9)=(0,4)$، $f(10)=(1,0)$،
$f(11)=(2,1)$، $f(12)=(0,2)$، $f(13)=(1,3)$ و $f(14)=(2,4)$. به‌طورکلی، $f(x)=(a,b)$،
که در آن $0 \le x \le 14$ و $0 \le a \le 2$ و $0 \le b \le 4$ چنان‌اند که (پیمانهٔ ۳) $x \equiv a$ و (پیمانهٔ ۵) $x \equiv b$.

۱۱. الف) $\phi(p^2) = p^2\left(1-\frac{1}{p}\right) = p(p-1)$

ب) $\phi(p)\cdot\phi(p) = (p-1)^2$

پ) $\phi(pq) = pq\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right) = (p-1)(q-1)$

ت) $\phi(p)\cdot\phi(q) = (p-1)(q-1)$

ث) $\phi(p^3) = p^3\left(1-\frac{1}{p}\right) = p^3-p^2 = p^2(p-1)$

ج) $\phi(p^2)\cdot\phi(p) = (p^2-p)(p-1) = p(p-1)^2$

چ) $\big(\phi(p)\big)^3 = (p-1)^3$

ح) $\phi(p^2q) = (p^2q)\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right) = (p^2-p)(q-1)$

خ) $\phi(p^2)\cdot\phi(q) = (p^2-p)(q-1)$

د) $\phi(p)\cdot\phi(p)\cdot\phi(q) = (p-1)^2(q-1)$

ذ) $\phi(pqr) = (pqr)\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right) = (p-1)(q-1)(r-1)$

ر) $\phi(pq)\phi(r) = \left[(pq)\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\right]\left[r\left(1-\frac{1}{r}\right)\right] = (p-1)(q-1)(r-1)$

ز) $\phi(p)\phi(qr) = \left[p\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\left[(qr)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\right] = (p-1)(q-1)(r-1)$

ژ) $\phi(p)\phi(q)\phi(r) = \left[p\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\left[q\left(1-\frac{1}{q}\right)\right]\left[r\left(1-\frac{1}{r}\right)\right] = (p-1)(q-1)(r-1)$

س)

$$\begin{aligned}\phi(p^a)\phi(q^b)\phi(r^c) &= \left[p^a\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\left[q^b\left(1-\frac{1}{q}\right)\right]\left[r^c\left(1-\frac{1}{r}\right)\right]\\ &= (p^a-p^{a-1})(q^b-q^{b-1})(r^c-r^{c-1})\end{aligned}$$

۱۲. (۱) (پ) و (ت) (۲) (ب) و (خ)
(۳) (ذ)، (ر)، (ز) و (ژ) (و (س)، درصورتی‌که داشته باشیم $a=b=c=1$).

۱۳. خیر، $\mathbf{Z}_2$ دو یکه دارد، درحالی‌که حلقهٔ مثال ۱۴۰۴ فقط یک یکه دارد.

۱۴. چون $J \neq \emptyset$، پس $f^{-1}(J) \neq \emptyset$. اگر $a_1, a_2 \in f^{-1}(J)$، دراین‌صورت، $f(a_1), f(a_2) \in J$. چون J ایده‌آل است، $f(a_1)+f(a_2)=f(a_1+a_2) \in J$ و بنابراین، $a_1+a_2 \in f^{-1}(J)$. همچنین، $f(a_1)f(a_2)=f(a_1a_2) \in J$ و $a_1a_2 \in f^{-1}(J)$. سرانجام،

$$a \in f^{-1}(J) \Longrightarrow f(a) \in J \Longrightarrow -f(a) \in J \Longrightarrow f(-a) \in J \Longrightarrow -a \in f^{-1}(J)$$

و بنابراین، $f^{-1}(J)$ زیرحلقه‌ای از R است.

اکنون فرض می‌کنیم $r \in R$ و $a \in f^{-1}(J)$. دراین‌صورت $f(ra)=f(r)f(a)$، که در آن $f(r) \in S$ و $f(a) \in J$. چون J ایده‌آلی از S است، داریم $f(ra) \in J$ و در نتیجه، $ra \in f^{-1}(J)$. به همین ترتیب می‌بینیم که $ar \in f^{-1}(J)$. پس $f^{-1}(J)$ ایده‌آلی از R است.

۱۵. بهتر است که صورت ارائه شده در برنامه را به‌کار ببریم، زیرا ضرب ماتریسی دقیقتر از وارون‌گیری ماتریسی است. اگر اول وارون را محاسبه کنیم، ممکن است هنگامی که وارون به توان چهار می‌رسد، با انباشتگی خطای گرد شده مواجه شویم.

تمرینات تکمیلی

۱. الف) نادرست. فرض کنید $R=\mathbf{Z}$ و $S=\mathbf{Z}^+$.

ب) نادرست. فرض کنید $R=\mathbf{Z}$ و $S=\{2x \mid x \in \mathbf{Z}\}$.

پ) نادرست. فرض کنید $R=M_2(\mathbf{Z})$ و $S=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \middle| a \in \mathbf{Z}\right\}$.

ت و ث) درست.

ج) نادرست. $(\mathbf{Z},+,\cdot)$ زیرحلقه‌ای از $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ است (ولی هیأت نیست).

چ) نادرست. به‌ازای هر عدد اول مانند p، $\left\{\frac{a}{p^n} \middle| a,n \in \mathbf{Z}, n \geq 0\right\}$ زیرحلقه‌ای از $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ است.

ح) نادرست. $f(6)=12=f(2\times 3)$، ولی $f(2)\cdot f(3)=4\times 6=24$.

خ) نادرست. هیأت تعریف شده در جدول ۱۴۰۶ را درنظر بگیرید.

د) درست.

۲. $(\text{تعویض‌پذیر}\ R) \iff (ba = ab \text{ ، } a, b \in R \text{ به‌ازای هر })$

$\iff (a^۲ + ab + ba + b^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ \text{ ، } a, b \in R \text{ به‌ازای هر })$

$\iff ((a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ \text{ ، } a, b \in R \text{ به‌ازای هر })$

۳. الف) $a + a = (a+a)^۲ = a^۲ + a^۲ + a^۲ + a^۲ = (a+a) + (a+a) \Longrightarrow a + a = ۲a = z$

ب) به‌ازای هر $a \in R$، از $a + a = z$ نتیجه می‌شود که $a = -a$. به‌ازای $a, b \in R$ داریم

$$(a+b) = (a+b)^۲ = a^۲ + ab + ba + b^۲ = a + ab + ba + b \Longrightarrow ab + ba = z$$

$$\Longrightarrow ab = -ba = ba$$

بنابراین، R تعویض‌پذیر است.

۴. الف) فرض می‌کنیم $z = x + iy$، $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$.

(یک) $\overline{z_۱ + z_۲} = \overline{(x_۱ + x_۲) + i(y_۱ + y_۲)} = (x_۱ + x_۲) - i(y_۱ + y_۲) = (x_۱ - iy_۱) + (x_۲ - iy_۲) = \overline{z_۱} + \overline{z_۲}$

(دو) $\overline{z_۱ z_۲} = \overline{(x_۱x_۲ - y_۱y_۲) + i(x_۱y_۲ + x_۲y_۱)} = (x_۱x_۲ - y_۱y_۲) - i(x_۱y_۲ + x_ۂy_۱) = (x_۱ - iy_۱)(x_۲ - iy_۲) = \overline{z_۱}\,\overline{z_۲}$

(سه) این نتیجه از قسمت (دو) و از اصل استقرای ریاضی به‌دست می‌آید.

(چهار) $\overline{(z^{-۱})} = \overline{\left(\frac{x}{x^۲ + y^۲} - i\frac{y}{x^۲ + y^۲}\right)} = \frac{x}{x^۲ + y^۲} + i\frac{y}{x^۲ + y^۲} = (x - iy)^{-۱} = (\bar{z})^{-۱}$

(پنج) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = ۲x \in \mathbf{R}$

(شش) به‌ازای $z \neq ۰$، $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^۲ + y^۲ \in \mathbf{R}^+$.

ب) تابع $f : C \to C$ تابعی یک به‌یک و پوشاست. از آنچه در (یک) و (دو) از قسمت (الف) دیدیم نتیجه می‌گیریم که f عملهای حلقه را حفظ می‌کند. بنابراین، f یکریختی است.

۵. چون به‌ازای هر $a \in R$ داریم $az = z = za$، پس $z \in C$ و $C \neq \emptyset$. اگر $x, y \in C$، دراین‌صورت به‌ازای هر $a \in R$،

$$(x + y)a = xa + ya = ax + ay = a(x + y)\text{، } (xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y$$

و $(-x)a = -(xa) = -(ax) = a(-x)$. بنابراین، $x + y$، xy و $-x$ به C تعلق دارند. درنتیجه، C زیرحلقهٔ R است.

۶. الف) (یک) $۲^۴$ (دو) $۳^۴$ (سه) $p^۴$

ب) (یک) $(۲^۲ - ۱)(۲^۲ - ۲) = ۳ \times ۲ = ۶$

(دو) $(۳^۲ - ۱)(۳^۲ - ۳) = ۸ \times ۶ = ۴۸$

(سه) $(p^۲ - ۱)(p^۲ - p)$

۷. الف) چون $a^3 = b^3$ و $a^5 = b^5$، پس $a^5 = (b^3)(b^2) = (a^3)(b^2)$. درنتیجه، $(a^3)(a^2) = (a^3)(b^2)$. با توجه به $a^3 \neq z$ داریم $a^2 = b^2$.

اکنون با توجه به $a^3 = b^3$ و $a^2 = b^2$ داریم $(a^2)(a) = a^3 = b^3 = (b^2)(b) = (a^2)(b)$ و چون $a^2 \neq z$، پس $a = b$.

ب) چون m و n نسبت به هم اول‌اند، دو عدد مانند $s, t \in \mathbf{Z}$ وجود دارند به‌طوری‌که $ms + nt = 1$. چون $m > 0$ و $n > 0$، پس یکی از دو عدد s و t باید مثبت و دیگری باید منفی باشد. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم s منفی باشد، که درنتیجه $nt = 1 - ms > 0$. دراین‌صورت،

$$a^n = b^n \Longrightarrow (a^n)^t = (b^n)^t \Longrightarrow a^{nt} = b^{nt} \Longrightarrow a^{1-ms} = b^{1-ms}$$
$$\Longrightarrow a(a^m)^{(-s)} = b(b^m)^{(-s)}$$

با توجه به $-s > 0$ و $a^m = b^m$ داریم $(a^m)^{(-s)} = (b^m)^{(-s)}$. درنتیجه،

$$\left(\left[(a^m)^{(-s)} = (b^m)^{(-s)} \neq z\right] \wedge \left[a(a^m)^{(-s)} = b(b^m)^{(-s)}\right]\right) \Longrightarrow a = b$$

زیرا در هر حوزهٔ صحیح می‌توانیم قانون حذف را برای ضرب به‌کار ببریم.

۸. الف) $\mathbf{R}^+$ نسبت به $\oplus$ و $\odot$ بسته است. به‌ازای هر $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ داریم

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (bc) = a(bc) = (ab)c = (ab) \oplus c = (a \oplus b) \oplus c$$
$$a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$$

و $a = a \oplus 1 = 1 \oplus a$. پس $\oplus$ تعویض‌پذیر و شرکت‌پذیر است و ۱ عنصر همانی آن است. همچنین، به‌ازای هر $a \in \mathbf{R}^+$، داریم $a^{-1} \in \mathbf{R}^+$ و a^{-1} وارون (جمعی) a است.

اکنون $\odot$ را درنظر بگیرید. به‌ازای $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ می‌بینیم که

$$a \odot (b \odot c) = a \odot (b^{\log_2 c}) = a^{\log_2 (b^{\log_2 c})} = a^{(\log_2 c)(\log_2 b)}$$

و

$$(a \odot b) \odot c = (a^{\log_2 b}) \odot c = a^{(\log_2 b)(\log_2 c)}$$

پس $\odot$ شرکت‌پذیر است. همچنین، به‌ازای $a, b \in \mathbf{R}^+$ ملاحظه می‌شود که

$$\log_2 b \log_2 a = \log_2 a \log_2 b \Longrightarrow \log_2 [a^{\log_2 b}] = \log_2 [b^{\log_2 a}] \Longrightarrow a^{\log_2 b} = b^{\log_2 a}$$
$$\Longrightarrow a \odot b = b \odot a$$

و بنابراین $\odot$ تعویض‌پذیر است. علاوه‌براین، به‌ازای هر $a \in \mathbf{R}^+$ داریم

$$a \odot 2 = a^{\log_2 2} = a^1 = a$$

پس عدد ۲ عنصر همانی ضرب است. سرانجام، می‌بینیم که

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot (bc) = a^{\log_{۲}(bc)} = a^{\log_{۲} b + \log_{۲} c} = \left(a^{\log_{۲} b}\right)\left(a^{\log_{۲} c}\right)$$
$$= (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

بنابراین، قانون پخش‌پذیری برقرار است و درنتیجه، $(\mathbf{R}^+, \oplus, \odot)$ حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار است.

ب) به‌ازای هر $a \in \mathbf{R}^+$، $a \neq ۱$، می‌بینیم که

$$a \odot ۲^{\log_{۲} a} = a^{\log_{۲}\left(۲^{\log_{۲} a}\right)} = a^{(\log_{a} ۲)(\log_{۲} ۲)} = a^{\log_{a} ۲} = ۲$$

و می‌دانیم که ۲ عنصر یکِ حلقه است. پس $(\mathbf{R}^+, \oplus, \odot)$ هیأت است.

۹. فرض می‌کنیم $x = a_{۱} + b_{۱}$ و $y = a_{۲} + b_{۲}$، که در آن $a_{۱}, a_{۲} \in A$ و $b_{۱}, b_{۲} \in B$. دراین‌صورت $x - y = (a_{۱} - a_{۲}) + (b_{۱} - b_{۲}) \in A + B$. اگر $r \in R$ و $a + b \in A + B$، که در آن $a \in A$ و $b \in B$، آن‌گاه $ra \in A$ و $rb \in B$ و $r(a+b) \in A + B$. به‌همین ترتیب، $(a+b)r \in A + B$. پس $A + B$ ایده‌آلی از R است.

۱۰. الف) به‌ازای $۰ < k < p$ داریم

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p \times (p-۱)!}{k!(p-k)!}$$

از طرف دیگر $\dfrac{(p-۱)!}{k!(p-k)!}$ عددی صحیح است، زیرا به‌ازای هر $۰ < k < p$، اگر p اول باشد، هیچ‌یک از عددهای ۲، ۳، ...، $\max\{k, p-k\}$ عدد p را نمی‌شمارد.

ب) $(a+b)^p = \sum_{k=۰}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$. بنابر قسمت (الف)، به‌ازای $۰ < k < p$ داریم

$$\binom{p}{k} \equiv ۰ \,(\text{پیمانهٔ } p)$$

پس $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \,(\text{پیمانهٔ } p)$.

۱۱. عددهای $x_{۱}$، $x_{۱} + x_{۲}$، $x_{۱} + x_{۲} + x_{۳}$، ...، $x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} + \ldots + x_{n}$ را درنظر بگیرید. اگر یکی از این عددها با ۰ به پیمانهٔ n همنهشت باشد، نتیجهٔ موردنظر حاصل است. اگر این‌طور نباشد، اندیسهایی مانند $۱ \leq i < j \leq n$ وجود دارند به‌طوری که

$$(x_{۱} + x_{۲} + \cdots + x_{i}) \equiv (x_{۱} + \cdots + x_{i} + x_{i+۱} + \cdots + x_{j}) (\text{پیمانهٔ } n)$$

بنابراین، عدد n عدد $(x_{i+۱} + \cdots + x_{j})$ را نمی‌شمارد.

۱۲. الف) $۴ = \binom{۳}{۲} + ۱$، که در آن عدد ۱ برای جواب $x = y = z = ۰$ آمده است و عدد $\binom{۳}{۲}$ تعداد جوابهایی را به‌دست می‌دهد که در آنها دقیقاً مقدار دوتا از x، y و z برابر با ۱ است.

ب) $۹ = ۲\binom{۳}{۲} + ۱ + ۱ + ۱ \cdot ۰$ $x = y = z = ۰$ یک جواب، $x = y = z = ۱$ یک جواب و $x = y = z = ۲$ نیز یک جواب است. جمعوند $۲\binom{۳}{۲} = ۶$ تعداد جوابهایی را به‌دست می‌دهد که در آنها دقیقاً مقدار یکی از x، y یا z برابر با ۰ است و دو متغیر دیگر مقادیر ۱ و ۲ دارند.

۱۳. الف) به‌ازای هر $t \in \mathbb{N}$،

$$
\begin{array}{ll}
۳^{۴t+۱} \equiv ۳ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰) & ۷^{۴t+۱} \equiv ۷ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰) \\
۳^{۴t+۲} \equiv ۹ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰) & ۷^{۴t+۲} \equiv ۹ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰) \\
۳^{۴t+۳} \equiv ۷ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰) & ۷^{۴t+۳} \equiv ۳ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰) \\
۳^{۴t+۴} \equiv ۱ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰) & ۷^{۴t+۴} \equiv ۱ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰)
\end{array}
$$

بنابراین، برای آنکه رقم یکان $۳^n + ۷^m$ رقم ۸ باشد باید (یک) (پیمانهٔ ۴) $m \equiv ۱$ و (پیمانهٔ ۴) $n \equiv ۰$ یا (دو) (پیمانهٔ ۴) $m \equiv ۰$ و (پیمانهٔ ۴) $n \equiv ۳$.

در حالت (یک)، ۲۵ انتخاب برای m (یعنی ۱، ۵، ۹، ...، ۹۳، ۹۷) و ۲۵ انتخاب برای n (یعنی ۴، ۸، ۱۲، ...، ۹۶، ۱۰۰)، یعنی روی هم $۶۲۵ = ۲۵^۲$ انتخاب برای جفت m و n، وجود دارد. همچنین، ۶۲۵ انتخاب برای جفت m و n در حالت (دو) وجود دارد. درنتیجه، روی‌هم به $۱۲۵۰ = ۶۲۵ + ۶۲۵$ طریق می‌توانیم m و n را انتخاب کنیم.

ب) در حالت (یک)، ۳۲ انتخاب برای m و ۳۱ انتخاب برای n و $۹۹۲ = ۳۱ \times ۳۲$ انتخاب برای جفت m و n وجود دارد. در حالت (دو)، ۳۱ انتخاب برای هر یک از m و n و درنتیجه، $۹۶۱ = ۳۱^۲$ انتخاب برای جفت m و n وجود دارد. بنابراین، در این وضعیت می‌توانیم m و n را به $۱۹۵۳ = ۹۶۱ + ۹۹۲$ طریق انتخاب کنیم.

پ) $۱۰۰۰۰ = (۱۰۰)^۲$ طریق برای انتخاب جفت m و n وجود دارد. در اینجا سه حالت درنظر می‌گیریم:

(یک) (پیمانهٔ ۴) $m \equiv ۲$ و (پیمانهٔ ۴) $n \equiv ۱$،

(دو) (پیمانهٔ ۴) $m \equiv ۳$ و (پیمانهٔ ۴) $n \equiv ۲$

و

(سه) (پیمانهٔ ۴) $m \equiv ۰$ و (پیمانهٔ ۴) $n \equiv ۰$.

در هر حالت، $۶۲۵ = (۲۵)^۲$ طریق برای انتخاب m و n وجود دارد. بنابراین، روی‌هم ۱۸۷۵ انتخاب در اختیار داریم.

درنتیجه، احتمال وقوع پیشامد مطرح شده عبارت است از

$$\frac{۱۸۷۵}{۱۰۰۰۰} = ۰/۱۸۷۵ = ۳\left[\left(\frac{۲۵}{۱۰۰}\right)\left(\frac{۲۵}{۱۰۰}\right)\right] = \frac{۳}{۱۶}$$

۱۴. برهان:

الف) به‌ازای $n = ۲$ و $k = ۱$ داریم $۱ = ۱^۳$ و (پیمانهٔ ۲) $۱ \equiv ۱^۳$. اگر $n > ۲$، آن‌گاه

$$k^۳ - k = k(k^۲ - ۱) = k(k-۱)(k+۱) \neq ۰$$

که در آن $k - ۱$ و $k + ۱$ هر دو زوج‌اند. بنابراین، $n = ۲k$ عدد $k^۳ - k$ را می‌شمارد و بنابراین، (پیمانهٔ n) $k^۳ \equiv k$.

ب) اگر $n = ۴k$، نتیجه می‌گیریم که (پیمانهٔ n) $(۲k)^۳ = (۴k)(۲k^۲) = n(۲k^۲) \equiv ۰$.

پ) یادآور می‌شویم که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y داریم $x^۳ + y^۳ = (x+y)(x^۲ - xy + y^۲)$.

(یک) اگر n زوج و $\frac{n}{۲}$ فرد باشد، آن‌گاه

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} i^۳ = ۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + \left(\frac{n}{۲} - ۱\right)^۳ + \left(\frac{n}{۲}\right)^۳ + \left(\frac{n}{۲} + ۱\right)^۳ + \cdots + (n-۱)^۳$$

جفتهای زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
۱^۳ + (n-۱)^۳ &= [۱ + (n-۱)][۱^۲ - ۱(n-۱) + (n-۱)^۲] && \equiv ۰ \ (\text{پیمانهٔ } n) \\
&\vdots && \vdots \\
۲^۳ + (n-۲)^۳ &= [۲ + (n-۲)][۲^۲ - ۲(n-۲) + (n-۲)^۲] && \equiv ۰ \ (\text{پیمانهٔ } n) \\
&\vdots && \vdots \\
\left(\frac{n}{۲}-۱\right)^۳ + \left(\frac{n}{۲}+۱\right)^۳ &= \left[\left(\frac{n}{۲} - ۱\right) + \left(\frac{n}{۲} + ۱\right)\right] \times && \equiv ۰ \ (\text{پیمانهٔ } n) \\
&\quad \left[\left(\frac{n}{۲} - ۱\right)^۲ - \left(\frac{n}{۲} - ۱\right)\left(\frac{n}{۲}\right) + ۱ + \left(\frac{n}{۲} + ۱\right)^۲\right]
\end{aligned}$$

درنتیجه، بنابر قسمت (الف)، اگر n زوج و $\frac{n}{۲}$ فرد باشد، آن‌گاه

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} i^۳ \equiv \left(\frac{n}{۲}\right)^۳ \equiv \left(\frac{n}{۲}\right) \ (\text{پیمانهٔ } n)$$

(دو) اگر n زوج و بر ۴ بخش‌پذیر باشد، دراین صورت با استدلالی مشابه با (یک) و با توجه به قسمت (ب) داریم

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} i^۳ \equiv \left(\frac{n}{۲}\right)^۳ \equiv ۰ \ (\text{پیمانهٔ } n)$$

(سه) سرانجام، حالتی را درنظر بگیرید که n فرد باشد. با استدلالی مشابه با استدلال (یک) داریم

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} i^۳ = \sum_{i=۱}^{(n-۱)/۲} [i^۳ + (n-i)^۳] = \sum_{i=۱}^{(n-۱)/۲} \left(i + (n-i)\right)\left[i^۲ - i(n-i) + (n-i)^۲\right]$$

که در آن هر یک از جمعوندها دارای عامل n است و به‌همین سبب با ۰ به پیمانهٔ n همنهشت است. درنتیجه، (پیمانهٔ n) $\sum_{i=۱}^{n-۱} i^۳ \equiv ۰$.

۱۵. الف)

$$\begin{aligned}
S_{۸۶۴۲} &= \left(\frac{۱}{۳}\right)(۸۶۴۲)(۱۷۲۸۳)(۱۷۲۸۵) \\
&= (۸۶۴۲)(۵۷۶۱)(۱۷۲۸۵)
\end{aligned}$$

$$۸۶۴۲ \equiv ۲ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰)$$

$$۵۷۶۱ \equiv ۱ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰)$$

$$۱۷۲۸۵ \equiv ۵ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰)$$

بنابراین، $S_{۸۶۴۲} \equiv ۰$ (پیمانهٔ ۱۰) . به بیان دیگر، رقم یکان $S_{۸۶۴۲}$ رقم ۰ است.

ب) $S_{۱۲۳۴۵} = \left(\frac{۱}{۳}\right)(۱۲۳۴۵)(۲۴۶۸۹)(۲۴۶۹۱) = (۴۱۱۵)(۲۴۶۸۹)(۲۴۶۹۱)$ و بنابراین،

$$S_{۱۲۳۴۵} \equiv (۵)(۹)(۱) \equiv ۵ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰)$$

پس رقم یکان عدد $S_{۱۲۳۴۵}$ رقم ۵ است.

پ) $S_{۳۷۱۲۰} = \frac{۱}{۳}(۳۷۱۲۰)(۷۴۲۳۹)(۷۴۲۴۱) = (۳۷۱۲۰)(۷۴۲۳۹)(۲۴۷۴۷)$ و بنابراین،

$$S_{۳۷۱۲۰} \equiv (۰)(۹)(۷) \equiv ۰ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰)$$

پس رقم یکان عدد $S_{۳۷۱۲۰}$ رقم ۰ است.

ت) نخست ملاحظه می‌شود که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، دقیقاً یکی از سه عدد n، $۲n - ۱$ و $۲n + ۱$ بر ۳ بخش‌پذیر است. زیرا اگر $n \nmid ۳$، یا

(۱) $n \equiv ۱$ (پیمانهٔ ۳) و درنتیجه، $۲n + ۱ \equiv ۰$ (پیمانهٔ ۳) یا

(۲) $n \equiv ۲$ (پیمانهٔ ۳) و درنتیجه، $۲n - ۱ \equiv ۰$ (پیمانهٔ ۳) .

اکنون فرض می‌کنیم که رقم یکان عدد n رقم ۵ باشد.

دراین صورت $S_n = \left(\frac{۱}{۳}\right) \times n(۲n-۱)(۲n+۱)$، که درآن رقم‌یکان عدد $۲n-۱$ رقم ۹ ورقم‌یکان عدد $۲n+۱$ رقم ۱ است. اگر $۳|n$، رقم یکان عدد $\frac{n}{۳}$ رقم ۵ است. درغیراین‌صورت، یا $۳|(۲n-۱)$ یا $۳|(۲n+۱)$ و رقم یکان عدد n رقم ۵ است. در هر سه حالت داریم $\left(\frac{۱}{۳}\right) \times n(۲n-۱)(۲n+۱) \equiv ۵$ (پیمانهٔ ۱۰) و رقم یکان عدد S_n رقم ۵ است.

اگر رقم یکان عدد n رقم ۰ باشد، دراین‌صورت در

$$S_n = \left(\frac{۱}{۳}\right) \times n(۲n - ۱)(۲n + ۱)$$

رقم یکان عدد $۲n - ۱$ رقم ۹ و رقم یکان عدد $۲n + ۱$ رقم ۱ است. اگر $۳|n$، رقم یکان عدد $\frac{n}{۳}$ رقم ۰ است. درغیراین‌صورت، $۳|(۲n - ۱)$ یا $۳|(۲n + ۱)$ و رقم یکان عدد n باز هم رقم ۰ است. در هر سه حالت، نتیجه می‌گیریم که

$$\left(\frac{۱}{۳}\right) \times n(۲n - ۱)(۲n + ۱) \equiv ۰ \ (\text{پیمانهٔ } ۱۰)$$

و رقم یکان عدد S_n رقم ۰ است.

.۱۶

```
Program Reversal (input, output);
Var
        posint, rightdigit: integer;
Begin
        Writeln ('Input the positive integer whose digits are to be reversed.');
        Read (posint);
        Write ('The reversal of', posint: 0, ' is ');
        While posint > 0 do
        Begin
                rightdigit := posint Mod 10;
                Write (rightdigit:0);
                posint := posint Div 10
        End;
        Writeln
End.
```

۱۵

جبر بولی و توابع کلیدزنی

بند ۱.۱۵

۱. الف) ۱ ب) ۱ پ) ۱ ت) ۱ ث) ۱

۲. الف) چون مقدار x برابر با ۱ است، مقدار $w + xy + x$، بدون توجه به مقادیر y و w، برابر با ۱ است.

ب) سه انتساب: (۱) y : ۱، w : ۱، (۲) y : ۰، w : ۱ و (۳) y : ۱، w : ۰.

پ) دو انتساب: (۱) y : ۱، w : ۱ و (۲) y : ۰، w : ۱.

ت) دو انتساب: (۱) y : ۱، w : ۱ و (۲) y : ۰، w : ۱.

۳. الف) ۲^n ب) $۲^{(۲^n)}$

۴. الف) (یک) $\overline{w}\,\overline{x}\, yz$ (دو) $\overline{w}\, xy\,\overline{z}$

(سه) $\overline{w}\, xyz$ (چهار) $\overline{w}\overline{x}\overline{y}\overline{z}$

ب) (یک) $w + x + \overline{y} + \overline{z}$ (دو) $w + \overline{x} + \overline{y} + z$

(سه) $w + \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$ (چهار) $w + x + y + z$

۵.

x	y	z	$\overline{x+y}$	$\overline{x}z$	$\overline{\overline{(x+y)} + (\overline{x}\,z)}$
۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۱

الف) $xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$ d.n.f.

$(x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+\bar{z})$ c.n.f.

ب) $f = \sum m(۲,۴,۵,۶,۷) = \prod M(۰,۱,۳)$

۶. الف) $g(w,x,y,z) = (wz + xyz)(x + \bar{x}\bar{y}z) = wxz + xyz + w\bar{x}\bar{y}z$

$$= wx(y+\bar{y})z + (w+\bar{w})xyz + w\bar{x}\bar{y}z$$

$$= wxyz + wx\bar{y}z + wxyz + \bar{w}xyz + w\bar{x}\bar{y}z$$

درنتیجه، d.n.f برای g عبارت است از $wxyz + wx\bar{y}z + \bar{w}xyz + w\bar{x}\bar{y}z$ که مجموع چهار کمین لفظ است.

با توجه به d.n.f برای g، می‌دانیم که c.n.f برای g حاصل‌ضرب ۱۲ بیشین لفظ است. نشانهای دودویی برای کمین لفظهای قبل عبارت‌اند از:

$wxyz$: ۱۱۱۱(= ۱۵) $\qquad$ $wx\bar{y}z$: ۱۱۰۱(= ۱۳)

$\bar{w}xyz$: ۰۱۱۱(= ۷) $\qquad$ $w\bar{x}\bar{y}z$: ۱۰۰۱(= ۹)

درنتیجه، بیشین لفظهای زیر را داریم

۰۰۰۰(= ۰)	$w+x+y+z$	۰۰۰۱(= ۱)	$w+x+y+\bar{z}$	۰۰۱۰(= ۲)	$w+x+\bar{y}+z$
۰۱۱۰(= ۳)	$w+x+\bar{y}+\bar{z}$	۰۱۰۰(= ۴)	$w+\bar{x}+y+z$	۰۱۰۱(= ۵)	$w+\bar{x}+y+\bar{z}$
۰۱۱۰(= ۶)	$w+\bar{x}+\bar{y}+z$	۱۰۰۰(= ۸)	$\bar{w}+x+y+z$	۱۰۱۰(= ۱۰)	$\bar{w}+x+\bar{y}+z$
۱۰۱۱(= ۱۱)	$\bar{w}+x+\bar{y}+\bar{z}$	۱۱۰۰(= ۱۲)	$\bar{w}+\bar{x}+y+z$	۱۱۱۰(= ۱۴)	$\bar{w}+\bar{x}+\bar{y}+z$

و c.n.f برای g حاصل‌ضرب این ۱۲ بیشین لفظ است.

ب) $g = \sum m(۷,۹,۱۳,۱۵) = \prod M(۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸,۱۰,۱۱,۱۲,۱۴)$

۷. الف) $۲^{۶۴}$ $\quad$ ب) $۲^{۶}$ $\quad$ پ) $۲^{۶}$ $\quad$ ت) $۲^{۴۹}$ $\quad$ ث) $۲^{۷}$ $\quad$ ج) $۲^{۳۲}$؛ $۲^{۸}$

۸. الف) $f(w,x,y,z) = \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}xy\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz$

ب) $f(w,x,y,z) = \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}xyz + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}yz + wx\bar{y}\bar{z}$

$$+ wx\bar{y}z + wxy\bar{z} + wxyz$$

۹. $m + k = ۲^n$

۱۰. اگر $x = ۰$، آن‌گاه

$$x + y + z = xyz \Longrightarrow x + y + z = ۰ \Longrightarrow y = z = ۰$$

اگر $x = ۱$، آن‌گاه

$$x + y + z = xyz \Longrightarrow ۱ = xyz \Longrightarrow y = z = ۱$$

۱۱. الف) $xy+(x+y)\bar z+y = y(x+۱)+(x+y)\bar z = y+x\bar z+y\bar z = y(۱+\bar z)+x\bar z = y+x\bar z$

ب) $x+y+\overline{(\bar x+y+z)} = x+y+x\bar y\bar z = x(۱+\bar y\bar z)+y = x+y$

پ) $yz+wz+z+[wz(xy+wz)] = z(y+۱)+wx+wxyz+wz$

$$= z+wx(۱+yz)+wz = z+wx+wz$$

$$= z(۱+w)+wx = z+wx$$

ت) $x_۱+\bar x_۱ x_۲+\bar x_۱\bar x_۲ x_۳+\bar x_۱\bar x_۲\bar x_۳ x_۴+\cdots=$

$$(x_۱+\bar x_۱)(x_۱+x_۲)+\bar x_۱\bar x_۲ x_۳+\bar x_۱\bar x_۲\bar x_۳ x_۴+\cdots=$$

$$(x_۱+x_۲)+\overline{(x_۱+x_۲)}x_۳+\bar x_۱\bar x_۲\bar x_۳ x_۴+\cdots=$$

$$\left[(x_۱+x_۲)+\overline{(x_۱+x_۲)}\right](x_۱+x_۲+x_۳)+\bar x_۱\bar x_۲\bar x_۳ x_۴+\cdots=$$

$$(x_۱+x_۲+x_۳)+\overline{(x_۱+x_۲+x_۳)}x_۴+\cdots = x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+\cdots$$

۱۲. $x+\bar x y=۰ \Longrightarrow x=۰=\bar x y \Longrightarrow x=y=۰; \bar x y=\bar x z, x=y=۰$

$$\Longrightarrow z=۰; \bar x y+\bar x\bar z+zw=\bar z w, x=y=z=۰ \Longrightarrow w=۱$$

۱۳. الف) (یک)

f	g	h	fg	$\bar f h$	gh	$fg+\bar f h+gh$	$fg+\bar f h$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱

می‌توانیم به طریق زیر نیز عمل کنیم:

$$fg+\bar f h = (fg+\bar f)(fg+h) = (f+\bar f)(g+\bar f)(fg+h) = ۱(g+\bar f)(fg+h)$$

$$= fgg+gh+\bar f fg+\bar f h = fg+gh+۰g+\bar f h = fg+gh+\bar f h$$

(دو) $fg+f\bar g+\bar f g+\bar f\bar g = f(g+\bar g)+\bar f(g+\bar g) = f\cdot ۱+\bar f\cdot ۱ = f+\bar f = ۱$

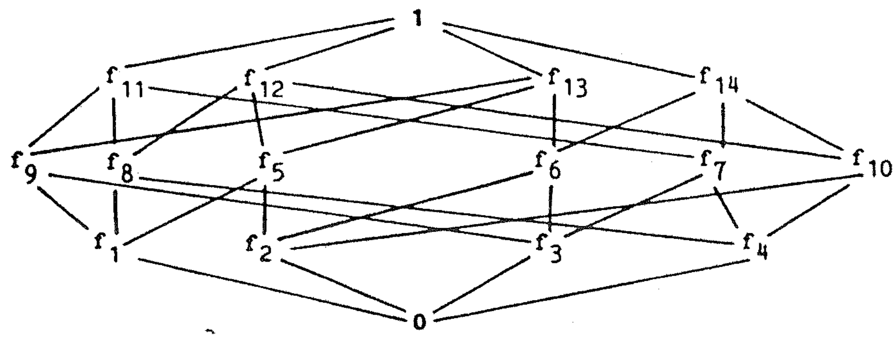
ب) (یک) $(f+g)(f+h)(g+h) = (f+g)(\bar f+h)$

(دو) $(f+g)(f+\bar g)(\bar f+g)(\bar f+\bar g) = ۰$

۱۴. الف) به‌ازای هر $f \in F_n$، مقدار f برابر با ۱ است هرگاه مقدار f برابر با ۱ باشد و بنابراین، رابطهٔ مفروض بازتابی است. اگر $f, g \in F_n$ و $f \leq g$ و $g \leq f$، آن‌گاه اگر مقدار f به‌ازای انتساب معینی از مقادیر بولی به n متغیر آن برابر با ۱ شود، مقدار g نیز ۱ می‌شود، زیرا $f \leq g$. به‌همین ترتیب، وقتی مقدار g برابر با ۱ است، مقدار f نیز ۱ است، زیرا $g \leq f$. بنابراین، f و g همزمان مقدار ۱ را اختیار می‌کنند و درنتیجه، $f = g$. پس رابطهٔ مفروض پادمتقارن است. سرانجام، اگر $f, g, h \in F_n$ چنان باشند که $f \leq g$ و $g \leq h$، دراین‌صورت اگر مقدار f برابر با ۱ باشد مقدار g نیز ۱ است (زیرا $f \leq g$) و مقدار h نیز ۱ می‌شود (زیرا $g \leq h$). بنابراین، $f \leq h$ و این رابطه ترایاست.

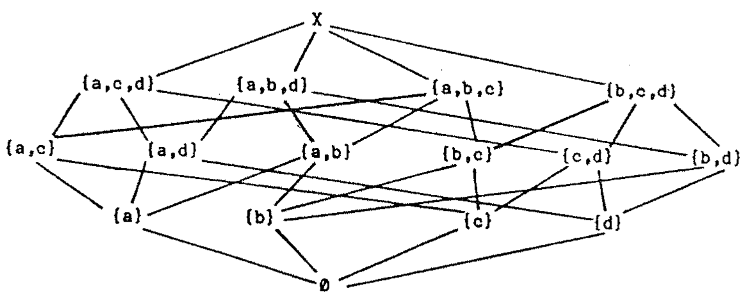
ب) مقدار fg برابر با ۱ است اگر و فقط اگر هم مقدار f برابر با ۱ باشد هم مقدار g. پس $fg \leq f$. وقتی مقدار f برابر با ۱ است مقدار $f + g$ نیز ۱ می‌شود و بنابراین، $f \leq f + g$.

پ)



کمین لفظها	بیشین لفظها	
$f_1(x,y) = xy$	$f_{11}(x,y) = x + \bar{y}$	$f_5(x,y) = y,\ f_6(x,y) = \bar{x},$
$f_2(x,y) = \bar{x}y$	$f_{12}(x,y) = x + y$	$f_7(x,y) = \bar{y},\ f_8(x,y) = x,$
$f_3(x,y) = \bar{x}\bar{y}$	$f_{13}(x,y) = \bar{x} + y$	$f_9(x,y) = xy + \bar{x}\bar{y}$
$f_4(x,y) = x\bar{y}$	$f_{14}(x,y) = \bar{x} + \bar{y}$	$f_{10}(x,y) = \bar{x}y + x\bar{y}$

فرض می‌کنیم $X = \{a, b, c, d\}$.



اگر نشانهای رأسها را نادیده بگیریم، دو نمودار هاسهٔ بالا از نظر ساختاری یکی هستند.

۱۵. الف) $f \oplus f = ۰$، $f \oplus \bar{f} = ۱$، $f \oplus ۱ = \bar{f}$ و $f \oplus ۰ = f$.

ب) (یک) $f\bar{g} + \bar{f}g = ۰ \Longrightarrow f\bar{g} + \bar{f}g = ۰ \Longleftrightarrow f \oplus g = ۰$

$$[f\bar{g} = ۰ \text{ و } f = ۱] \Longrightarrow g = ۱$$

$$[\bar{f}g = ۰ \text{ و } f = ۰] \Longrightarrow g = ۰$$

بنابراین، $f = g$.

(سه) $\bar{f} \oplus \bar{g} = \bar{f}\,\bar{\bar{g}} + \bar{\bar{f}}\,\bar{g} = \bar{f}g + f\bar{g} = f\bar{g} + \bar{f}g = f \oplus g$

(چهار) این تنها نتیجه‌ای است که درست نیست. وقتی مقدار f برابر با ۱، مقدار g برابر با ۰ و مقدار h برابر با ۱ (یا مقدار g برابر با ۱ و مقدار h برابر با ۰) است، مقدار $f \oplus gh$ برابر با ۱ و مقدار $(f \oplus g)(f \oplus h)$ برابر با ۰ می‌شود.

(پنج)
$$fg \oplus fh = \overline{fg}\,fh + fg\,\overline{fh} = (\bar{f} + \bar{g})fh + fg(\bar{f} + \bar{h})$$
$$= \bar{f}fh + f\bar{g}h + f\bar{f}g + fg\bar{h} = f\bar{g}h + fg\bar{h} = f(\bar{g}h + g\bar{h}) = f(g \oplus h)$$

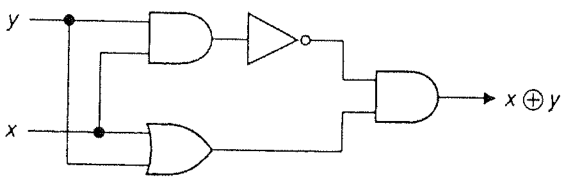
(شش) $\bar{f} \oplus g = \bar{f}\bar{g} + fg = fg + \bar{f}\bar{g} = f \oplus \bar{g}$.

$$\overline{f \oplus g} = \overline{f\bar{g} + \bar{f}g} = (\bar{f} + g)(f + \bar{g}) = \bar{f}\bar{g} + fg = \bar{f} \oplus g$$

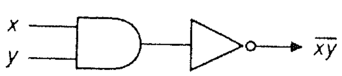
(هفت)
$$\left[f \oplus g = f \oplus h\right] \Longrightarrow \left[f \oplus (f \oplus g) = f \oplus (f \oplus h)\right]$$
$$\Longrightarrow \left[(f \oplus f) \oplus g = (f \oplus f) \oplus h\right]$$
$$\Longrightarrow \left[۰ \oplus g = ۰ \oplus h\right] \Longrightarrow [g = h]$$

بند ۲.۱۵

۱. الف) $x \oplus y = (x + y)(\overline{xy})$

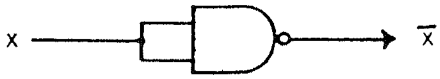


ب) $\overline{xy}$

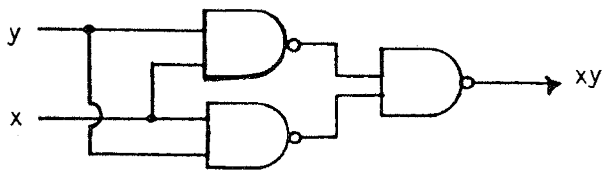


پ) $\overline{x+y}$

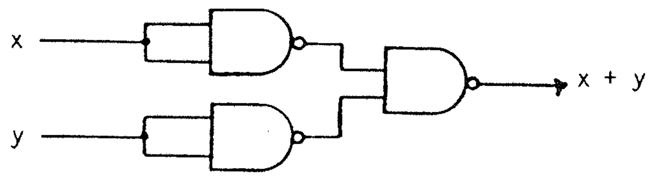
۲. الف)



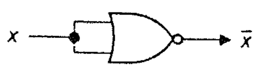
ب)



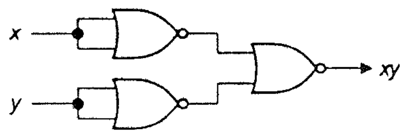
پ)



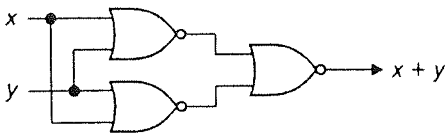
۳. الف)



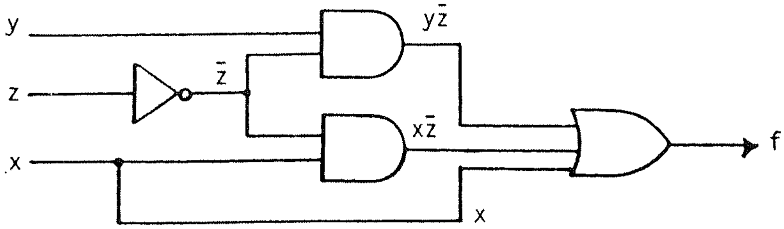
ب)



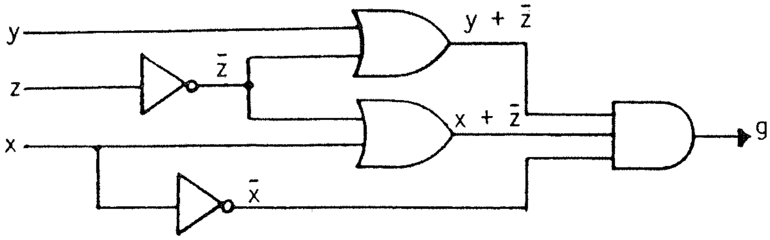
پ)



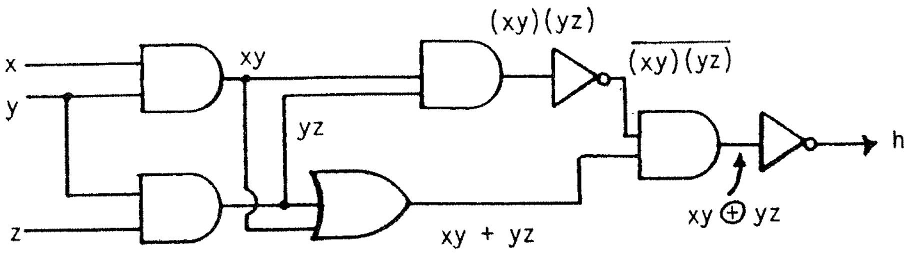
۴. الف)



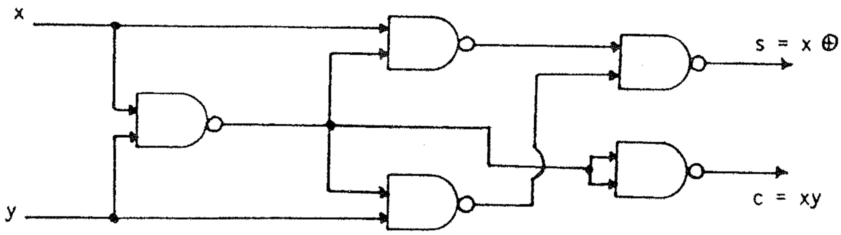
ب)



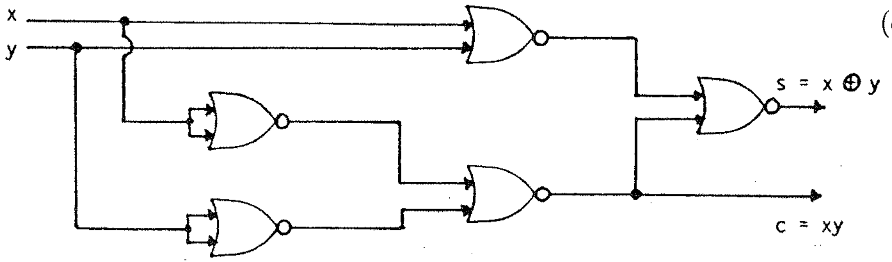
پ)



۵. $f(w,x,y,z) = \overline{w}\,\overline{x}\; y\,\overline{z} + (w + x + \overline{y})z$



۶. الف)



ب)

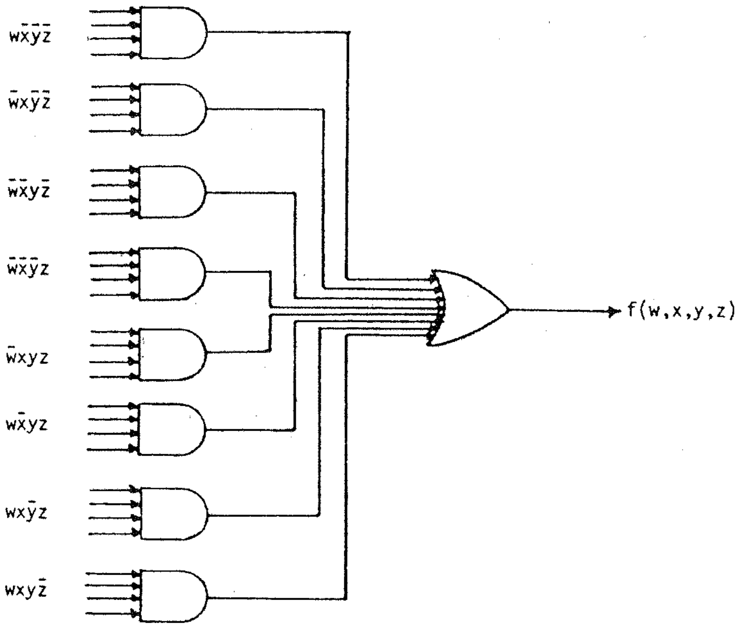
۷. الف) خروجی $(x+\bar{y})(x+y)+y$ است که به‌صورت $x+(\bar{y}\,y)+y = x+0+y = x+y$ ساده می‌شود و شبکهٔ هم‌ارز ساده‌تری را که در شکل ۸۰۱۵(الف) آمده است در اختیار ما می‌گذارد.

ب) در اینجا خروجی عبارت است از $\overline{(x+\bar{y})}+(\bar{x}\bar{y}+y)$ که به‌صورت

$$\bar{x}\,\bar{\bar{y}}+\bar{x}\bar{y}+y=\bar{x}\,y+\bar{x}\bar{y}+y=\bar{x}\,(y+\bar{y})+y=\bar{x}\,(1)+y=\bar{x}+y$$

ساده می‌شود. این عمل به شبکهٔ هم‌ارز ساده‌تری که در شکل ۸۰۱۵ (ب) آمده است منجر می‌شود.

۸. پ)



۹. الف) $f(w,x,y)=\bar{x}y+x\bar{y}$

$w\backslash xy$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰		۱		۱
۱		۱		۱

ب) $f(w,x,y)=x$

پ) $f(w,x,y,z)=xz+\bar{x}\bar{z}$

$wx\backslash yz$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰	۱			۱
۰۱		۱	۱	
۱۱		۱	۱	
۱۰	۱			۱

ت) $f(w,x,y,z)=xz+\bar{x}\bar{z}+w\bar{y}z$ یا $xz+\bar{x}\bar{z}+w\bar{x}\bar{y}$

ث)

$wx\backslash yz$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰				
۰۱		۱		۱
۱۱	۱	۱	۱	۱
۱۰	۱		۱	

$f(w,x,y,z)=w\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}z+wyz+xy\bar{z}$

ج)

$wx\backslash yz$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰		۱	۱	۱
۰۱	۱			
۱۱				
۱۰				۱
$(v=۰)$				

$wx\backslash yz$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰		۱	۱	۱
۰۱			۱	۱
۱۱	۱		۱	۱
۱۰			۱	
$(v=۱)$				

$f(v,w,x,y,z)=\bar{v}\bar{w}\,x\,\bar{y}\bar{z}+vwx\bar{z}+\bar{v}\bar{x}\,y\bar{z}+\bar{w}\bar{x}z+v\bar{w}y+vyz$

۱۰.

$wx\backslash yz$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰	۰	۰		۰
۰۱	۰	۰		
۱۱	۰	۰		۰
۱۰				۰

$f(w,x,y,z)=(w+y)(\bar{x}+y)(\bar{w}+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+z)$

۱۱. الف) ۲ ب) ۳ پ) ۴ ت) $k+1$

۱۲. الف) ۶۴ ب) ۳۲ پ) ۱۶ ت) ۸

۱۳. الف) $|f^{-1}(0)| = |f^{-1}(1)| = 8$ ب) $|f^{-1}(0)| = 12$ ، $|f^{-1}(1)| = 4$

پ) $|f^{-1}(0)| = 14$ ، $|f^{-1}(1)| = 2$ ت) $|f^{-1}(0)| = 4$ ، $|f^{-1}(1)| = 12$

ث) $|f^{-1}(0)| = 6$ ، $|f^{-1}(1)| = 10$ ج) $|f^{-1}(0)| = 7$ ، $|f^{-1}(1)| = 9$

بند ۳.۱۵

۱.
$$f(u,v,w,x,y,z) = (v+w+x+y)(u+w)(v+z)(u+y+z) =$$
$$(uv+uw+ux+uy+vw+w+wx+wy)(v+z)(u+y+z) =$$
$$(uv+ux+uy+(u+v+1+x+y)w)(v+z)(u+y+z) =$$
$$(uv+ux+uy+w)(uv+vy+vz+uz+yz+z) =$$
$$(uv+ux+uy+w)(uv+vy+z) =$$
$$(uv+uvx+uvy+uvw+uvy+uvxy+uvy+wvy+uvz+uxz+uyz+wz) =$$
$$uv+wvy+uxz+uyz+wz$$

۲. به‌خاطر اندازهٔ این جدول، فقط دوتا از ساده‌سازیها را نشان می‌دهیم.

$cd\backslash ef$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	0

$(a=0, b=0)$

$cd\backslash ef$	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

$(a=0, b=1)$

$cd\backslash ef$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

$(a=1, b=0)$

$cd\backslash ef$	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

$(a=1, b=1)$

$$g(a,b,c,d,e,f) = bf+be+ad+df+de+cf+ace$$

۳. الف و پ) درست‌اند.

ب) در شکل ۱۲۰۱۵، فرض کنید

$$D_1 = \{c, d\} \quad , \quad D_2 = \{a, g\}$$

ت) در شکل ۱۲۰۱۵، فرض کنید

$$D_1 = \{a\} \quad , \quad D_2 = \{d\}$$

۴. الف)

$$(a+b+c+d+e)(a+b+c+f)(a+b+c+d+f)(a+c+d+e+g)\times$$
$$(a+d+e+g)(b+c+f+g)(d+e+f+g) = (a+b+c+d+e)\times$$
$$(a+b+c+f)(a+d+e+g)(b+c+f+g)(d+e+f+g) =$$
$$(a+b+c+df+ef)(a+d+e+g)(b+c+f+g)(d+e+f+g) =$$
$$(a+b+c+df+ef)(d+e+g+af)(b+c+f+g) =$$
$$[(b+c)+(a+df+ef)(f+g)](d+e+g+af) =$$
$$[b+c+af+df+ag+dfg+efg](d+e+g+af) =$$
$$[b+c+af+df+ef+ag](d+e+g+af) =$$
$$bd+cd+adf+df+def+adg+be+ce+aef+def+ef+aeg$$
$$+bg+cg+afg+dfg+efg+ag+abf+acf+af+adf+aef+afg =$$
$$bd+cd+df+ag+ef+be+ce+af+bg+cg$$

ب) اگر D یک مجموعهٔ غالب مینیمال باشد، هر شهر (یعنی هر رأس) متعلق به D را یک مرکز ارتباطاتی تلقی کنید. همهٔ یالهای $\{x, y\}$ متعلق به گراف را، که در آنها نه x متعلق به D است نه y، حذف کنید. دراین‌صورت هر دو شهر s و t می‌توانند یا مستقیماً یا به‌طور غیرمستقیم، با استفاده از مراکز ارتباطاتی متعلق به D، با هم ارتباط مخابراتی داشته باشند.

۵. الف)

$wx \backslash yz$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰		۱	۱	
۰۱		۱	۱	
۱۱	✓	✓	✓	✓
۱۰		۱	✓	✓

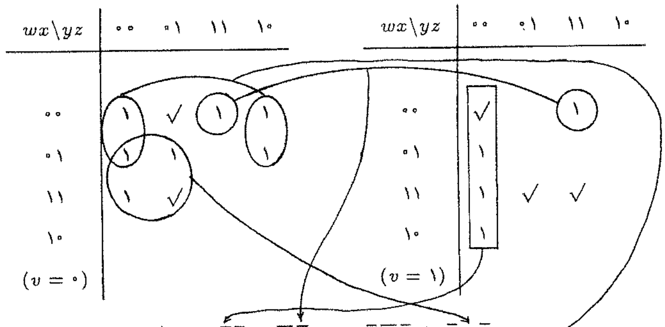
$f(w, x, y, z) = z$

ب)

$wx \backslash yz$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰	۱			
۰۱	✓	۱		۱
۱۱		۱		۱
۱۰	۱	✓	✓	

$f(w, x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z}$

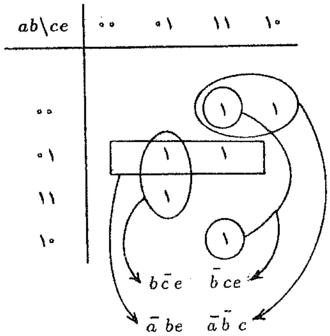
پ)

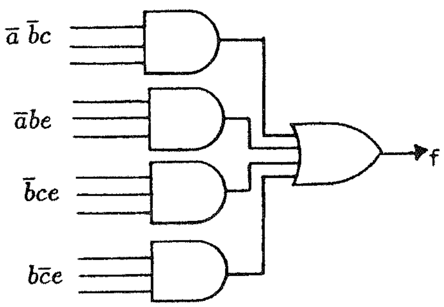


$f(v,w,x,y,z)=v\bar{y}\bar{z}+\bar{w}\bar{x}\,yz+\bar{v}\bar{w}\bar{z}+\bar{v}\,x\,\bar{y}$

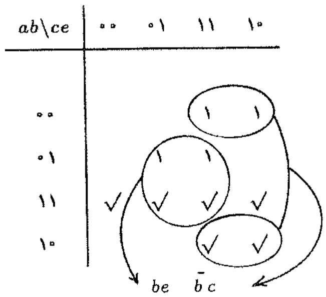
۶. الف) $f(a,b,c,e)=\bar{a}\bar{b}\,c\bar{e}\;(۲)+\bar{a}\bar{b}\,ce(۳)+\bar{a}\,b\,\bar{c}\,e(۵)+\bar{a}\,bce(۷)+a\,\bar{b}\,ce(۱۱)+ab\bar{c}e(۱۳)$

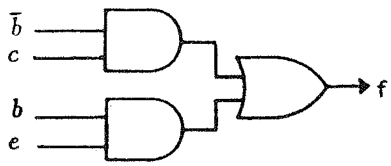
ب) $f=\sum m(۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳)$





پ) $f=\sum m(۲,۳,۵,۷)+d(۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵)$





بند ٤.١۵

۱. (قانون دوم پخش‌پذیری). فرض می‌کنیم $x=۲^{k_۱}۳^{k_۲}۵^{k_۳}$، $y=۲^{m_۱}۳^{m_۲}۵^{m_۳}$ و $z=۲^{n_۱}۳^{n_۲}۵^{n_۳}$، که در آن به‌ازای $۱\le i\le ۳$ داریم $۰\le k_i,m_i,n_i$.

$\gcd(y,z)=۲^{s_۱}۳^{s_۲}۵^{s_۳}$، که در آن به‌ازای هر $۱\le i\le ۳$، $s_i=\min\{m_i,n_i\}$.

$$\text{lcm}(x,\gcd(y,z))=۲^{t_۱}۳^{t_۲}۵^{t_۳}$$

که در آن به‌ازای هر $۱ \le i \le ۳$، $t_i = \max\{k_i, s_i\}$. همچنین،

$$\mathrm{lcm}(x, y) = ۲^{u_۱}۳^{u_۲}۵^{u_۳}$$

و

$$\mathrm{lcm}(x, z) = ۲^{v_۱}۳^{v_۲}۵^{v_۳}$$

که در آن به‌ازای هر $۱ \le i \le ۳$ داریم $u_i = \max\{k_i, m_i\}$ و $v_i = \max\{k_i, n_i\}$. ضمناً اگر به‌ازای هر $۱ \le i \le ۳$ قرار دهیم $w_i = \min\{u_i, v_i\}$، آن‌گاه

$$\gcd(\mathrm{lcm}(x, y), \mathrm{lcm}(x, z)) = ۲^{w_۱}۳^{w_۲}۵^{w_۳}$$

برای اثبات اینکه $\mathrm{lcm}(x, \gcd(y, z)) = \gcd(\mathrm{lcm}(x, y), \mathrm{lcm}(x, z))$، باید نشان دهیم که به‌ازای هر $۱ \le i \le ۳$، $t_i = w_i$. اگر $k_i = ۰$، دراین‌صورت $t_i = s_i$، $u_i = m_i$، $v_i = n_i$ و

$$w_i = \min\{u_i, v_i\} = \min\{m_i, n_i\} = s_i = t_i$$

اگر $k_i = ۱$، دراین‌صورت $t_i = ۱ = u_i = v_i = w_i$.

(قوانین همانی) $x + ۰ =$ ک.م.م.x و ۱(یعنی عنصر صفر) $= x$

$x \cdot ۱ =$ ب.م.م.x و ۳۰(یعنی عنصر یک) $= x$

زیرا x مقسوم‌علیه ۳۰ است.

(قوانین وارون)

$x + \bar{x} =$ ک.م.م.x و $\frac{۳۰}{x} = ۳۰$

و می‌دانیم که ۳۰ عنصر یکِ این جبر بولی است.

$x\bar{x} =$ ب.م.م.x و $\frac{۳۰}{x} = ۱$

و می‌دانیم که ۱ عنصر صفر این جبر بولی است.

۲. ب)′

$x + xy = x \cdot ۱ + xy$	تعریف ۱۵ . ۵ (پ)′
$= x(۱ + y)$	تعریف ۱۵ . ۵ (ب)
$= x \cdot ۱$	قضیهٔ ۱۵ . ۳ (الف)′
$= x$	تعریف ۱۵ . ۵ (پ)′

ب) از اصل دوگانی نتیجه می‌شود.

ح) $۱ = x + \bar{x} = \overline{\bar{x}x} = \bar{۰}$

ح)′ از اصل دوگانی نتیجه می‌شود.

خ) $x\bar{y} = ۰ \Longrightarrow x = x \cdot ۱ = x(y + \bar{y}) = xy + x\bar{y} = xy + ۰ = xy$

$xy = x \Longrightarrow ۰ = x\bar{x} = x(\overline{xy}) = x(\bar{x} + \bar{y}) = x\bar{x} + x\bar{y} = ۰ + x\bar{y} = x\bar{y}$

خ)' از اصل دوگانی نتیجه می‌شود.

۳. الف) ۳۰ ب) ۳۰ پ) ۱ ت) ۲۱ ث) ۳۰ ج) ۷۰

۴. الف) $x+y=xy+y=y(x+1)=y\cdot 1=y$

ب) $x\leq y \Longrightarrow x+y=y \Longrightarrow \overline{x+y}=\bar{y} \Longrightarrow \bar{x}\bar{y}=\bar{y} \Longrightarrow \bar{y}\leq \bar{x}$

۵. الف) از $0\leq w$ نتیجه می‌شود که $w\cdot 0=w$. ولی بنابر قضیهٔ ۱۵ ۰ ۳ (الف)، $w\cdot 0=0$.

ب) از $x\leq 1$ نتیجه می‌شود که $1\cdot x=1$ و با توجه به تعریف جبر بولی، $1\cdot x=x$.

پ) از $y\leq z$ نتیجه می‌شود که $yz=y$ و از $y\leq \bar{z}$ نتیجه می‌شود که $y\bar{z}=y$. بنابراین،

$$y=yz=(y\bar{z})z=y(\bar{z}z)=y\cdot 0=0$$

۶. برهان:

الف) از $w\leq x$ نتیجه می‌شود $wx=w$ و از $y\leq z$ نتیجه می‌شود $yz=y$. درنتیجه، $(wx)(yz)=wy$ و می‌بینیم که

$$wy=(wx)(yz)=(wy)(xz)\Longrightarrow wy\leq xz$$

ب) مانند قسمت (الف) از $w\leq x$ نتیجه می‌شود $wx=w$ و از $y\leq z$ نتیجه می‌شود $yz=y$. بنابراین، با توجه به قانون جذب (قضیهٔ ۱۵ ۰ ۳ (ب)').

$$(w+y)(x+z)=wx+wz+yx+yz=(w+wz)+(y+yx)=w+y$$

ولی

$$(w+y)(x+z)=w+y\Longrightarrow w+y\leq x+z$$

۷. $x\leq y$ اگر و فقط اگر $x=xy$. دوگان $x=xy$ عبارت است از $x=x+y$.

$$x+y=x\Longrightarrow xy=(x+y)y=xy+y=y(x+1)=y\cdot 1=y$$

و $xy=y$ اگر و فقط اگر $y\leq x$. درنتیجه، دوگان $x\leq y$ عبارت است از $y\leq x$.

۸. 2^n

۹. با توجه به قضیهٔ ۱۵ ۰ ۵ (الف) و اینکه x_1 و x_2 دو اتم متمایزند، اگر $0\neq x_1$ و $0\neq x_2$، آن‌گاه

$$x_1=x_1x_2=x_2x_1=x_2$$

و این هم تناقض است.

۱۰. الف) چون $B_1\neq\emptyset$، فرض می‌کنیم $x\in B_1$. از $x\in B_1$ نتیجه می‌شود که $\bar{x}\in B_1$. چون از $x,\bar{x}\in B_1$ نتیجه می‌شود که $x\bar{x}=0$ و $x+\bar{x}=1\in B_1$، پس $|B_1|\geq 2$.

ب) (۱) $\{1,2,15,30\}$ (۲) $\{1,5,6,30\}$

پ) ۵

ت) اگر $x,y\in B_1$، آن‌گاه $\overline{\bar{x}+\bar{y}}=xy\in B_1$

ث) از $x,y\in B_1\cap B_2$ نتیجه می‌شود که $x,y\in B_1$ و $x,y\in B_2$. چون هر B_i، $i=1,2$، یک زیرجبر

است پس $\bar{x} \in B_1$ و $\bar{x} \in B_2$ و بنابراین، $\bar{x} \in B_1 \cap B_2$، $x + y \in B_1$ و $x + y \in B_2$. پس $x + y \in B_1 \cap B_2$، با توجه به قسمت (ت) نتیجه می‌گیریم که $B_1 \cap B_2$ یک زیرجبر B است.

۱۱. خیر. فرض کنید $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$ و $B = \{\mathcal{P}(\mathcal{U}), \cup, \cap, ^-, \emptyset, \mathcal{U}\}$. اگر $B_1 = \{\emptyset, \mathcal{U}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$، آن‌گاه B_1 در شرایط بیان شده صدق می‌کند ولی زیرجبر B نیست. مثلاً، $\overline{\{a\}} \notin B_1$.

۱۲. اگر هم ۰ و هم $'۰$ عنصر صفر B باشند، آن‌گاه $۰ = ۰ + ۰' = ۰'$. به‌همین ترتیب، اگر هم ۱ عنصر یکِ B باشد هم $'۱$، آن‌گاه $۱' = ۱ \cdot ۱' = ۱$.

۱۳. ت) چون x اتم B_1 است داریم $x \neq ۰$ و بنابراین، $f(x) \neq ۰$. فرض می‌کنیم $y \in B_2$ چنان باشد که $y \neq ۰$ و $y \leq f(x)$. چون f یکریختی است، عنصری مانند $z \in B_1$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(z) = y$. همچنین، $f^{-1} : B_2 \to B_1$ یکریختی است و بنابراین،

$$f(z) \leq f(x) \Longrightarrow z \leq x$$

چون x اتم است و $۰ < z \leq x$، داریم $z = x$ و بنابراین، $f(x) = y = f(z)$. پس $f(x)$ اتم است.

۱۴. الف) $f(۳۵) = f(۵ + ۷) = f(۵) \cup f(۷) = \{c\} \cup \{d\} = \{c, d\}$

$$f(۱۱۰) = f(۲ + ۵ + ۱۱) = \{a, c, e\}$$

$$f(۲۱۰) = f(۲ + ۳ + ۵ + ۷) = \{a, b, c, d\}$$

$$f(۳۳۰) = f(۲ + ۳ + ۵ + ۱۱) = \{a, b, c, e\}$$

ب) !۵ (زیرا هر یکریختی جبرهای بولی متناهی باید اتمها را به هم نظیر کند).

۱۵. الف)
$$f(xy) = f(\overline{\bar{x} + \bar{y}}) = \overline{f(\bar{x} + \bar{y})} = \overline{f(\bar{x}) + f(\bar{y})} = \overline{f(\bar{x})} \cdot \overline{f(\bar{y})}$$
$$= f(\bar{\bar{x}}) \cdot f(\bar{\bar{y}}) = f(x) \cdot f(y)$$

ب) فرض می‌کنیم B_1 و B_2 دو جبر بولی و $f : B_1 \to B_2$ یک به‌یک و پوشا باشد. دراین‌صورت f یکریختی است هرگاه به‌ازای هر $x, y \in B_1$ داشته باشیم $f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$ و $f(xy) = f(x) f(y)$. [این امر از قسمت (الف) و با توجه به اصل دوگانی ثابت می‌شود.]

۱۶. فرض می‌کنیم $S \subseteq \mathcal{U}$. اگر $S = \emptyset$، آن‌گاه $S = f(۰)$. اگر $S \neq \emptyset$، فرض می‌کنیم $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$، که در آن $c_i = ۱$ هرگاه $i \in S$ و $c_i = ۰$ هرگاه $i \notin S$. پس $f(x) = S$. بنابراین، f پوشاست.

چون $|B| = |\mathcal{P}(\mathcal{U})| = ۲^n$، در قضیهٔ ۵ ۰ ۱۰ نتیجه می‌شود که f یک به‌یک نیز هست.

۱۷. به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$، بنابر قضیهٔ ۱۵ ۰ ۵(ب) داریم

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x_i = x_1 x_i + x_2 x_i + \cdots + x_{i-1} x_i + x_i x_i + x_{i+1} x_i + \cdots + x_n x_i$$
$$= ۰ + ۰ + \cdots + ۰ + x_i + ۰ + \cdots + ۰ = x_i$$

با توجه به قضیهٔ ۱۵ ۰ ۷، می‌بینیم که به‌ازای هر $x \in B$ داریم $x = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x$. چون عنصر یک (بنابر تمرین ۱۲) یکتاست، پس $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = ۱$.

تمرینات تکمیلی

۱. الف) (یک) وقتی $n=2$، x_1+x_2 مجموع بولی x_1 و x_2 را نشان می‌دهد. به‌ازای $n\geq 2$،

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}$$

را به‌طور بازگشتی برابر با $(x_1+x_2+\cdots+x_n)+x_{n+1}$ تعریف می‌کنیم. [تعریف مشابهی نیز می‌توان برای حاصل‌ضرب بولی ارائه کرد.]

به‌ازای $n=2$، $\overline{x_1+x_2}=\overline{x_1}\,\overline{x_2}$ درست است، زیرا این یکی از قوانین دمورگان است. درستی نتیجهٔ موردنظر را به‌ازای $n=k\ (k\geq 2)$ مفروض می‌گیریم و حالت $n=k+1$ را بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که:

$$\begin{aligned}\overline{(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})}&=\overline{(x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}}\\&=\overline{(x_1+x_2+\cdots+x_k)}\cdot\overline{x}_{k+1}\\&=\overline{x}_1\overline{x}_2\cdots\overline{x}_k\overline{x_{k+1}}\end{aligned}$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای متناهی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n\geq 2$ درست است.

(دو) این قسمت با استفاده از اصل دوگانی از قسمت (یک) نتیجه می‌شود.

(سه) $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\overline{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)}=(x_1+x_2+\cdots+x_n)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\cdots+\overline{x}_x)$

اگر به‌ازای هر $1\leq i\leq n$ داشته باشیم $x_i=0$ یا اگر به‌ازای هر $1\leq i\leq n$ داشته باشیم $\overline{x}_i=0$، آن‌گاه مقدار عبارت بالا 0 است. در هر یک از این دو حالت مقدار عبارت $x_1\overline{x}_2+x_2\overline{x}_3+\cdots+x_n\overline{x}_1$ برابر با 0 است. در هر حالت دیگر، مقدار عبارت بالا برابر با 1 است و عنصرهایی مانند x_i و x_{i+1}، $1\leq i\leq n-1$، وجود دارد به‌طوری‌که مقدار یکی از آنها 1 و مقدار دیگری 0 یا مقدار x_n برابر با $0(1)$ و مقدار x_1 برابر با $1(0)$ است. در این حالتها، مقدار $x_1\overline{x}_2+x_2\overline{x}_3+\cdots+x_n\overline{x}_1$ نیز 1 است.

ب) $\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}=(x_1+\overline{x}_2)(x_2+\overline{x}_3)\cdots(x_{n-1}+\overline{x}_n)(x_n+\overline{x}_1)$

۲. $y=4$، $z=7$ و $x=16$ یا $x=25$

۳. فرض می‌کنیم v، w، x، y و z نشان دهند که فرشید، به ترتیب، فرهاد، جلال، احسان، محسن و محمود را دعوت می‌کند. اکنون می‌توان شرطهای (الف) تا (ث) را به صورت زیر بیان کرد:

الف) $(v\rightarrow w)\Longleftrightarrow(\overline{v}+w)$

ب) $(x\rightarrow vy)\Longleftrightarrow(\overline{x}+vy)$

پ) $\overline{w}z+w\overline{z}$

ت) $yz+\overline{y}\overline{z}$

ث) $x+y+xy\Longleftrightarrow x+y$

$$(\bar{v}+w)(\bar{x}+vy)(\bar{w}z+w\bar{z})(yz+\bar{y}\bar{z})(x+y)$$

$$\Longleftrightarrow (\bar{v}+w)(\bar{x}y+vy)(\bar{w}z+w\bar{z})(yz+\bar{y}\bar{z})$$

$$\Longleftrightarrow (\bar{v}+w)(\bar{x}y+vy)(\bar{w}yz+w\bar{y}\bar{z}) \Longleftrightarrow (\bar{v}+w)(\bar{w}\bar{x}yz+\bar{w}vyz)$$

$$\Longleftrightarrow \bar{v}\bar{w}\bar{x}yz$$

درنتیجه، برای آنکه فرشید بتواند ضیافت خود را با توجه به شرایط (الف) تا (ث) برگزار کند، فقط یک راه وجود دارد و آن این است که فقط محسن و محمود را از بین این پنج دوست دعوت کند.

۴. $h=\sum m(۲,۴,۶,۸)+d(۰,۱۰,۱۲,۱۴)$

۵. برهان: اگر $x \le z$ و $y \le z$، در این‌صورت با توجه به یکی از تمرینات قبل داریم $x+y \le z+z$. اکنون بنابر قانون خودتوانی داریم $z+z=z$.

برعکس، فرض می‌کنیم $x+y \le z$. می‌بینیم که $x \le x+y$، زیرا با توجه به قانون خودتوانی و قانون جذب داریم:

$$x(x+y)=x+xy=x$$

چون $x \le x+y$ و $x+y \le z$، داریم $x \le z$، زیرا هر ترتیب جزئی دارای ویژگی ترایایی است. [اثبات $y \le z$ نیز به‌طور مشابهی انجام می‌گیرد.]

۶. گزاره: فرض کنیم $\mathcal{B}$ جبری بولی باشد که با $\le$ جزئاً مرتب شده است. اگر $x,y,z \in \mathcal{B}$، آن‌گاه $xy \ge z$ اگر و فقط اگر $x \ge z$ و $y \ge z$.

برهان: اگر $x \ge z$ و $y \ge z$، در این‌صورت با توجه به یکی از تمرینات قبل داریم $xy \ge zz$. اکنون نتیجهٔ مطلوب از قانون خودتوانی به‌دست می‌آید، زیرا $zz=z$.

برعکس، فرض می‌کنیم $xy \ge z$. ادعا می‌کنیم که $x \ge xy$. درحقیقت،

$$(xy)x=x(yx)=x(xy)=(xx)y=xy$$

چون $\le$ ترایاست، پس

$$x \ge xy,\ xy \ge z \Longrightarrow x \ge z$$

[اثبات $y \ge z$ به‌طور مشابهی انجام می‌گیرد.]

۷. برهان:

الف) $x \le y \Longrightarrow x+\bar{x} \le y+\bar{x} \Longrightarrow ۱ \le y+\bar{x} \Longrightarrow y+\bar{x}=\bar{x}+y=۱$

برعکس، $\bar{x}+y=۱ \Longrightarrow x(\bar{x}+y)=x\cdot ۱ \Longrightarrow \underbrace{x\bar{x}}_{۰}+xy=x \Longrightarrow xy=x \Longrightarrow x \le y$

ب) $x \le \bar{y} \Longrightarrow x\bar{y}=x \Longrightarrow xy=(x\bar{y})y=x(\bar{y}y)=x\cdot ۰=۰$

برعکس،

$$xy=۰ \Longrightarrow x=x\cdot ۱=x(y+\bar{y})=xy+x\bar{y}=x\bar{y}$$

و

$$x=x\bar{y} \Longrightarrow x \le \bar{y}$$

۸. برهان: اگر $y = x$، آن‌گاه $x\bar{y} + \bar{x}y = x\bar{x} + \bar{x}x = ۰ + ۰ = ۰$.

برعکس، فرض می‌کنیم $x\bar{y} + \bar{x}y = ۰$. دراین‌صورت

$x = x + ۰ \quad = x + (x\bar{y} + \bar{x}y)$	
$= (x + x\bar{y}) + \bar{x}y$	بنابر قانون شرکت‌پذیری +
$= x + x\bar{y}$	بنابر قانون جذب (قضیهٔ ۱۵ ۰ ۳ (ب)′)
$= (x + \bar{x})(x + y)$	بنابر قانون پخش‌پذیری + نسبت به.
$= ۱(x + y)$	
$= x + y$	
$= (x + y)۱$	
$= (x + y)(\bar{y} + y)$	
$= x\bar{y} + y$	بنابر قانون پخش‌پذیری + نسبت به. (و قانون تعویض‌پذیری +)
$= x\bar{y} + (\bar{x}y + y)$	بنابر قانون جذب (قضیهٔ ۱۵ ۰ ۳ (ب)′)
$= (x\bar{y} + \bar{x}y) + y$	بنابر قانون شرکت‌پذیری +
$= ۰ + y = y$	

۹. الف) $f(w, x, y, z) = \bar{w}\bar{x} + xy$

$wx \backslash yz$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰	۱	۱	۱	۱
۰۱			۱	۱
۱۱			۱	۱
۱۰				

ب)

$wx \backslash yz$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰	۱		۱	
۰۱		۱	۱	
۱۱	۱	۱	۱	
۱۰	۱			
$(v = ۰)$				

$wx \backslash yz$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰	۱			
۰۱		۱	۱	
۱۱	۱	۱	۱	
۱۰	۱			
$(v = ۱)$				

$$g(v, w, x, y, z) = \bar{v}\bar{w}yz + xz + w\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

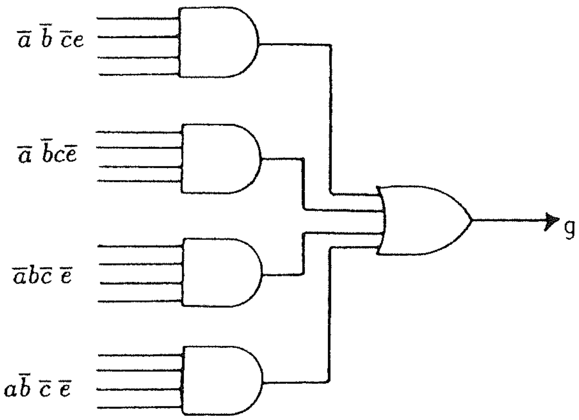
۱۰.

t	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
x	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
y	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
f	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱

۱۱. الف) $۲^{(۲n-۱)}$ ب) $۲^{۴}$ و $۲^{n+۱}$

۱۲. الف) $g(a,b,c,e)=\bar{a}\bar{b}\bar{c}e(۱)+\bar{a}\bar{b}c\bar{e}\ (۲)+\bar{a}b\bar{c}\bar{e}\ (۴)\ +\ a\bar{b}\bar{c}\bar{e}\ (۸)$

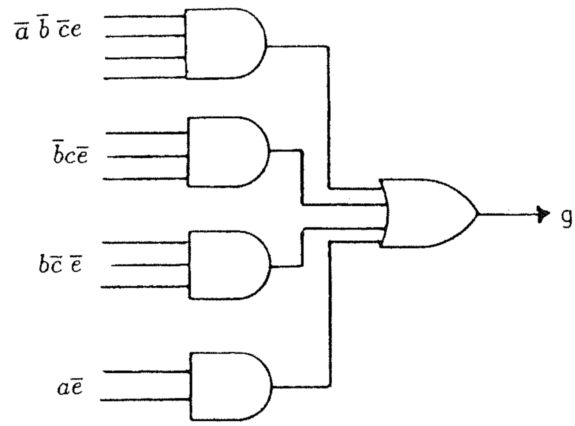
ب)



پ) $g(a,b,c,e)=\sum m(۱,۲,۴,۸)+d(۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵)$

$ab\backslash ce$	۰۰	۰۱	۱۱	۱۰
۰۰		۱		۱
۰۱	۱			
۱۱	√	√	√	√
۱۰	۱		√	√

$g(a,b,c,e)=\bar{a}\bar{b}\bar{c}e+\bar{b}c\bar{e}+b\bar{c}\bar{e}+a\bar{e}$



۱۳. الف) $۵ \times ۳ \times ۲^۲ = ۶۰$ و بنابراین، ۶۰ دارای ۱۲ مقسوم‌علیه است. چون ۱۲ توانی از ۲ نیست، این مقسوم‌علیه‌ها نمی‌توانند جبر بولی تشکیل دهند.

ب) $۵ \times ۳ \times ۲^۳ = ۱۲۰$ و بنابراین، ۱۲۰ دارای ۱۶ مقسوم‌علیه است. فرض می‌کنیم $x = ۴$. دراین‌صورت $\bar{x} = \frac{۱۲۰}{۴} = ۳۰$ و

$$x \cdot \bar{x} = \gcd(x, \bar{x}) = \gcd(۴, ۳۰) = ۲$$

به این ترتیب، $x \cdot \bar{x}$ برابر با ۱ نمی‌شود. بنابراین، با وجود آنکه تعداد مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ برابر با $۲^۴ = ۱۶$ است، ولی این مقسوم‌علیه‌ها جبر بول تشکیل نمی‌دهند.

۱۴. !۴

۱۵. اگر $c \le a$، آن‌گاه $ac = c$ و بنابراین، $ab + c = ab + ac = a(b + c)$. برعکس، اگر

$$ab + c = a(b + c) = ab + ac$$

دراین‌صورت

$$ac = ac + ۰ = ac + (ab + \overline{ab}) = (ab + ac) + \overline{ab} = (ab + c) + \overline{ab} = c + (ab + \overline{ab}) = c$$

و بنابراین،

$$ac = c \Longrightarrow c \le a$$

۱۶

گروهها، نظریهٔ کدگذاری و روش شمارش پولیا

بند ۱.۱۶

۱. الف) بله. ۱ عنصر همانی است و هر عنصر، وارون خودش است.

ب) خیر. این مجموعه نسبت به جمع بسته نیست و عنصر همانی ندارد.

پ) خیر. این مجموعه نسبت به جمع بسته نیست.

ت) بله. ۰ عنصر همانی است. وارون $10n$ عبارت است از $10(-n)$ یا $-10n$.

ث) خیر. تابع $f : A \to A$، که در آن به‌ازای هر $x \in A$ داریم $f(x) = 1$، وارون‌پذیر نیست.

ج) بله. 1_A عنصر همانی است و وارون $g : A \to A$ تابع $g^{-1} : A \to A$ است.

چ) بله. ۰ عنصر همانی است. وارون $\frac{a}{2^n}$ عبارت است از $-\frac{a}{2^n}$.

۲. پ) $ab = ac \Longrightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \Longrightarrow (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c \Longrightarrow eb = ec \Longrightarrow b = c$

ت) $ba = ca \Longrightarrow (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} \Longrightarrow b(aa^{-1}) = c(aa^{-1}) \Longrightarrow be = ce \Longrightarrow b = c$

۳. عمل تفریق عمل دوتایی (بستهٔ) شرکت‌پذیری نیست، زیرا مثلاً،

$$(3-2)-4 = -3 \neq 5 = 3-(2-4)$$

۴. (یک) به‌ازای هر $a, b, c \in G$،

$$\begin{aligned}(a\circ b)\circ c &= (a+b+ab)\circ c = a+b+ab+c+(a+b+ab)c \\ &= a+b+ab+c+ac+bc+abc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\circ(b\circ c) &= a\circ(b+c+bc) = a+b+c+bc+a(b+c+bc) \\ &= a+b+c+bc+ab+ac+abc\end{aligned}$$

چون به‌ازای هر $a, b, c \in G$ داریم $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. پس این عمل دوتایی (بسته) عملی شرکت‌پذیر است.

(دو) اگر $x, y \in G$، آن‌گاه $x \circ y = x + y + xy = y + x + yx = y \circ x$ و بنابراین، این عمل دوتایی (بسته) عملی تعویض‌پذیر نیز هست.

(سه) آیا می‌توانیم عنصری مانند $a \in G$ بیابیم که به‌ازای هر $x \in G$ داشته باشیم $x = x \circ a$؟

$$x = x \circ a \Longrightarrow x = x + a + xa \Longrightarrow ۰ = a(۱ + x) \Longrightarrow a = ۰$$

و بنابراین، ۰ عنصر همانی برای این عمل دوتایی (بسته) است.

(چهار) آیا به‌ازای هر $x \in G$ می‌توانیم عنصری مانند $y \in G$ بیابیم به‌طوری که $x \circ y = ۰$؟ ملاحظه می‌کنیم که

$$۰ = x \circ y = x + y + xy \Longrightarrow -x = y(۱ + x) \Longrightarrow y = -x(۱ + x)^{-۱}$$

بنابراین، وارون x عبارت است از $-x(۱ + x)^{-۱}$.

از ویژگیهای (یک) تا (چهار) نتیجه می‌شود که $(G, \circ)$ گروهی آبلی است.

۵. چون از $x, y \in \mathbf{Z}$ نتیجه می‌شود که $x + y + ۱ \in \mathbf{Z}$، این عمل یک عمل دوتایی (بسته) است (یا $\mathbf{Z}$ نسبت به $\circ$ بسته است). به‌ازای هر $w, x, y \in \mathbf{Z}$ داریم

$$\begin{aligned} w \circ (x \circ y) &= w \circ (x + y + ۱) = w + (x + y + ۱) + ۱ \\ &= (w + x + ۱) + y + ۱ = (w \circ x) \circ y \end{aligned}$$

و در نتیجه، این عمل دوتایی (بسته) عملی شرکت‌پذیر است. علاوه‌براین، به‌ازای هر $x, y \in \mathbf{Z}$

$$x \circ y = x + y + ۱ = y + x + ۱ = y \circ x$$

پس $\circ$ تعویض‌پذیر نیز هست. اگر $x \in \mathbf{Z}$، آن‌گاه $x \circ (-۱) = x + (-۱) + ۱ = x$ [و به‌همین ترتیب دیده می‌شود که $(-۱) \circ x = x$]. پس -۱ عنصر همانی برای $\circ$ است. سرانجام، به‌ازای هر $x \in \mathbf{Z}$ داریم $-x - ۲ \in \mathbf{Z}$ و

$$x \circ (-x - ۲) = x + (-x - ۲) + ۱ = -۱$$

[و به‌همین ترتیب دیده می‌شود که $(-x - ۲) + x = -۱$.] بنابراین، $-x - ۲$ وارون x نسبت به $\circ$ است. در نتیجه، $(\mathbf{Z}, \circ)$ گروهی آبلی است.

۶. (یک) به‌ازای هر $(a, b), (u, v), (x, y) \in S$ داریم

$$\begin{aligned} (a, b) \circ \big[(u, v) \circ (x, y)\big] &= (a, b) \circ (ux, vx + y) = (aux, bux + vx + y) \\ \big[(a, b) \circ (u, v)\big] \circ (x, y) &= (au, bu + v) \circ (x, y) = (aux, (bu + v)x + y) \\ &= (aux, bux + vx + y) \end{aligned}$$

بنابراین، عمل دوتایی (بستهٔ) مفروض عملی شرکت‌پذیر است.

(دو) برای یافتن عنصر همانی، باید در جستجوی عنصری مانند $(a,b) \in S$ باشیم به‌طوری‌که به‌ازای هر $(u,v) \in S$ در $(a,b)\circ(u,v) = (u,v) = (u,v)\circ(a,b)$ صدق کند.

$$(u,v) = (u,v)\circ(a,b) = (ua, va+b) \Longrightarrow v = va+b \text{ و } u = ua \Longrightarrow b = ۰ \text{ و } a = ۱$$

علاوه‌براین، داریم $(۱,۰)\circ(u,v) = (۱\cdot u, ۰\cdot u + v) = (u,v)$ و بنابراین، $(۱,۰)$ عنصر همانی برای این عمل دوتایی (بسته) است.

(سه) اگر $(a,b) \in S$ مفروض باشد، آیا می‌توانیم عنصری مانند $(c,d) \in S$ را به‌طوری که

$$(a,b)\circ(c,d) = (c,d)\circ(a,b) = (۱,۰)$$

بیابیم؟

$$(۱,۰) = (a,b)\circ(c,d) = (ac, bc+d) \Longrightarrow ۱ = ac, ۰ = bc+d \Longrightarrow c = a^{-۱}, d = -ba^{-۱}$$

چون $\left(a^{-۱}, -ba^{-۱}\right)\circ(a,b) = (a^{-۱}a, (-ba^{-۱})a+b) = (۱,۰)$ ، عنصر $(a^{-۱}, -ba^{-۱})$ وارون (a,b) برای این عمل دوتایی (بسته) است.

با توجه به ویژگیهای (یک) تا (سه) نتیجه می‌گیریم که $(S,\circ)$ گروه است. چون $(۱,۲),(۲,۳) \in S$ و $(۱,۲)\circ(۲,۳) = (۲,۷)$ ، درحالی که $(۲,۳)\circ(۱,۲) = (۲,۵)$، این گروه گروهی غیرآبلی است.

۷. $U_{۲۰} = \{۱,۳,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}$

$U_{۲۴} = \{۱,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳\}$

۸. برهان: فرض می‌کنیم G آبلی باشد و $a,b \in G$. دراین‌صورت با استفاده از ویژگی شرکت‌پذیری گروهها و آبلی بودن این گروه داریم

$$(ab)^۲ = (ab)(ab) = a(ba)b = a(ab)b = (aa)(bb) = a^۲b^۲$$

برعکس، فرض می‌کنیم G گروهی باشد که در آن به‌ازای هر $a,b \in G$ داریم $(ab)^۲ = a^۲b^۲$. اگر $x,y \in G$، آن‌گاه با توجه به قضیهٔ ۱۶ ۱۰ (پ) و قضیهٔ ۱۶ ۱۰ (ت) داریم

$$(xy)^۲ = x^۲y^۲ \Longrightarrow (xy)(xy) = x^۲y^۲ \Longrightarrow x(yx)y = x(xy^۲) \Longrightarrow (yx)y = xy^۲$$
$$\Longrightarrow (yx)y = (xy)y \Longrightarrow yx = xy$$

بنابراین، گروه G گروهی آبلی است.

۹. الف) این نتیجه از قضیهٔ ۱۶ ۱۰ (ب) به‌دست می‌آید، زیرا هم $(a^{-۱})^{-۱}$ وارون $a^{-۱}$ است هم a.

ب) $(b^{-۱}a^{-۱})(ab) = b^{-۱}(a^{-۱}a)b = b^{-۱}(e)b = b^{-۱}b = e$ و

$$(ab)(b^{-۱}a^{-۱}) = a(bb^{-۱})a^{-۱} = a(e)a^{-۱} = aa^{-۱} = e$$

بنابراین، $b^{-۱}a^{-۱}$ وارونی برای ab است و بنابر قضیهٔ ۱۶ ۱۰ (ب)، $(ab)^{-۱} = b^{-۱}a^{-۱}$.

۱۰. از آبلی بودن G نتیجه می‌شود که $a^{-۱}b^{-۱} = b^{-۱}a^{-۱}$. بنابر تمرین ۹ (ب)، $(ab)^{-۱} = b^{-۱}a^{-۱}$. بنابراین، از آبلی بودن G نتیجه می‌شود که $(ab)^{-۱} = a^{-۱}b^{-۱}$. برعکس، اگر $a, b \in G$، آن‌گاه

$$a^{-۱}b^{-۱} = (ab)^{-۱} \Longrightarrow a^{-۱}b^{-۱} = b^{-۱}a^{-۱} \Longrightarrow ba^{-۱}b^{-۱} = a^{-۱} \Longrightarrow ba^{-۱} = a^{-۱}b$$

$$\Longrightarrow b = a^{-۱}ba \Longrightarrow ab = ba \Longrightarrow \quad G \text{ آبلی است}$$

۱۱. الف) $\{۰\}$، $\{۰, ۶\}$، $\{۰, ۴, ۸\}$، $\{۰, ۳, ۶, ۹\}$، $\{۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$، $\mathbf{Z}_{۱۲}$.

ب) $\{۱\}$، $\{۱, ۱۰\}$، $\{۱, ۳, ۴, ۵, ۹\}$، $\mathbf{Z}^*_{۱۱}$.

پ) $\{\pi_۰\}$، $\{\pi_۰, \pi_۱, \pi_۲\}$، $\{\pi_۰, r_۱\}$، $\{\pi_۰, r_۲\}$، $\{\pi_۰, r_۳\}$، $S_۳$.

۱۳. الف) هشت حرکت صُلب برای مربع وجود دارد که عبارت‌اند از

- $\pi_۰$، $\pi_۱$، $\pi_۲$ و $\pi_۳$، که در آن به‌ازای هر $۰ \leq i \leq ۳$، π_i دوران به‌اندازهٔ $i(۹۰^\circ)$ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است،
- $r_۱$: بازتاب نسبت به محور قائم،
- $r_۲$: بازتاب نسبت به محور افقی،
- $r_۳$: بازتاب نسبت به قطری که از گوشهٔ چپ پایین به گوشهٔ راست بالا می‌رود،
- $r_۴$: بازتاب نسبت به قطری که از گوشهٔ چپ بالا به گوشهٔ راست پایین می‌رود.

ب)

$\circ$	$\pi_۰$	$\pi_۱$	$\pi_۲$	$\pi_۳$	$r_۱$	$r_۲$	$r_۳$	$r_۴$
$\pi_۰$	$\pi_۰$	$\pi_۱$	$\pi_۲$	$\pi_۳$	$r_۱$	$r_۲$	$r_۳$	$r_۴$
$\pi_۱$	$\pi_۱$	$\pi_۲$	$\pi_۳$	$\pi_۰$	$r_۳$	$r_۴$	$r_۲$	$r_۱$
$\pi_۲$	$\pi_۲$	$\pi_۳$	$\pi_۰$	$\pi_۱$	$r_۲$	$r_۱$	$r_۴$	$r_۳$
$\pi_۳$	$\pi_۳$	$\pi_۰$	$\pi_۱$	$\pi_۳$	$r_۴$	$r_۳$	$r_۱$	$r_۲$
$r_۱$	$r_۱$	$r_۴$	$r_۲$	$r_۳$	$\pi_۰$	$\pi_۲$	$\pi_۳$	$\pi_۱$
$r_۲$	$r_۲$	$r_۳$	$r_۱$	$r_۴$	$\pi_۲$	$\pi_۰$	$\pi_۱$	$\pi_۳$
$r_۳$	$r_۳$	$r_۱$	$r_۴$	$r_۲$	$\pi_۱$	$\pi_۳$	$\pi_۰$	$\pi_۲$
$r_۴$	$r_۴$	$r_۲$	$r_۳$	$r_۱$	$\pi_۳$	$\pi_۱$	$\pi_۲$	$\pi_۰$

$\pi_۰$ عنصر همانی این گروه است.

وارون هر بازتاب همان بازتاب است. وارون دوران $\pi_۱$ دوران $\pi_۳$ است. وارون دوران $\pi_۲$ خود $\pi_۲$ است. همچنین، وارون $\pi_۰$ خود $\pi_۰$ است.

۱۳. الف) ۱۰ حرکت صُلب وجود دارد: پنج دوران به اندازه‌های $i(۷۲^\circ)$، $۰ \leq i \leq ۴$، و پنج بازتاب نسبت به خطهایی که رأسها را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کنند.

ب) برای هر n ضلعی منتظم $۲n(n \geq ۳)$ حرکت صُلب وجود دارد: n دوران به اندازه‌های $i\left(\frac{۳۶۰^\circ}{n}\right)$،

$0 \leq i \leq n-1$ و n بازتاب. اگر n فرد باشد، هر یک از این بازتابها بازتاب نسبت به خطی است که یک رأس را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند. اگر n زوج باشد، $\frac{n}{2}$ تا از بازتابها نسبت به خطهایی هستند که از رأسهای مقابل می‌گذرند و $\frac{n}{2}$ تا از بازتابها نسبت به خطهایی که وسط ضلعهای مقابل را به‌هم وصل می‌کنند.

۱۴.

$$\alpha^{3} = \binom{12345}{12345}, \qquad \beta\alpha = \binom{12345}{32514}, \qquad \alpha\beta = \binom{12345}{15234},$$

$$\beta^{-1} = \binom{12345}{21453}, \qquad \alpha^{-1} = \binom{12345}{31245}, \qquad \beta_{2} = \binom{12345}{12534},$$

$$\beta^{-1}\alpha^{-1} = \binom{12345}{13452}, \qquad (\beta\alpha)^{-1} = \binom{12345}{42153}, \qquad (\alpha\beta)^{-1} = \binom{12345}{13452}.$$

۱۵. چون به‌ازای هر $g \in G$ داریم $eg = ge$، پس $e \in H$ و $H \neq \emptyset$. اگر $x, y \in H$، آن‌گاه به‌ازای هر $g \in G$، $xg = gx$ و $yg = gy$. درنتیجه، به‌ازای هر $g \in G$ داریم

$$xy(g) = x(yg) = x(gy) = (xg)y = (gx)y = g(xy)$$

بنابراین، $xy \in H$. سرانجام، به‌ازای هر $x \in H$ و $g \in G$ داریم $g^{-1}x = xg^{-1}$. پس $(xg^{-1})^{-1} = (g^{-1}x)^{-1}$ یا $gx^{-1} = x^{-1}g$ و در نتیجه، $x^{-1} \in H$. بنابراین، H زیرگروه G است.

۱۶. الف)

$$\omega^{2} = i \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\omega^{4} = -1 \qquad \omega^{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

$$\omega^{6} = -i \qquad \omega^{5} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$$

$$\omega^{8} = 1 \qquad \omega^{7} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

ب) فرض می‌کنیم $S = \{\omega^{n} | 1 \leq n \leq 8\}$. به‌ازای هر $1 \leq j, k \leq 8$ داریم $\omega^{j} \cdot \omega^{k} = \omega^{m}$، که در آن $m = j + k$ (پیمانهٔ ۸) و $1 \leq m \leq 8$. بنابراین، S نسبت به عمل دوتایی ضرب بسته است. می‌دانیم که عمل ضرب در دستگاه اعداد مختلط تعویض‌پذیر و شرکت‌پذیر است. بنابراین، عمل ضرب بالا در S، نیز این ویژگیها را دارد.

عنصر $\omega^{8} = 1$ عنصر همانی است و به‌ازای هر $1 \leq n \leq 7$ داریم $(\omega^{n})^{-1} = \omega^{8-n}$. پس هر عنصر S وارون ضربی در S دارد.

درنتیجه، S با عمل ضرب گروهی آبلی است.

۱۷. الف) فرض می‌کنیم $(g_{1}, h_{1}), (g_{2}, h_{2}) \in G \times H$. دراین‌صورت

$$(g_{1}, h_{1}) \cdot (g_{2}, h_{2}) = (g_{1} \circ g_{2}, h_{1} * h_{2})$$

که در آن $g_1 \circ g_2 \in G$ و $h_1 * h_2 \in H$، زیرا $(G, \circ)$ و $(H, *)$ بسته‌اند. بنابراین، $G \times H$ بسته است.
به‌ازای $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \cdot (g_3, h_3) \in G \times H$ داریم

$$[(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2)] \cdot (g_3, h_3) = (g_1 \circ g_2, h_1 * h_2) \cdot (g_3, h_3) =$$
$$\big((g_1 \circ g_2) \circ g_3, (h_1 * h_2) * h_3\big) = \big(g_1 \circ (g_2 \circ g_3), h_1 * (h_2 * h_3)\big) =$$
$$(g_1, h_1) \cdot (g_2 \circ g_3, h_2 * h_3) = (g_1, h_1) \cdot \big[(g_2, h_2) \cdot (g_3, h_3)\big]$$

زیرا عملهای G و H شرکت‌پذیرند. بنابراین، عمل در $G \times H$ شرکت‌پذیر است.

فرض می‌کنیم e_G, e_H، به ترتیب، عنصرهای همانی G و H را نشان دهند. دراین‌صورت (e_G, e_H) عنصر همانی در $G \times H$ است.

سرانجام، فرض می‌کنیم $(g, h) \in G \times H$. اگر g^{-1} وارون g در G و h^{-1} وارون h در H باشد، (g^{-1}, h^{-1}) وارون (g, h) در $G \times H$ است.

ب) (یک) ۲۱۶

(دو) $H_1 = \{(x, 0, 0) | x \in \mathbf{Z}_6\}$ یک زیرگروه مرتبهٔ ۶ است. $H_2 = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbf{Z}_6, y = 0, 3\}$ یک زیرگروه مرتبهٔ ۱۲ است. مرتبهٔ زیرگروه $H_3 = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbf{Z}_6\}$ برابر با ۳۶ است.

(سه) $(4, 3, 2) = -(2, 3, 4)$، $(2, 0, 4) = -(4, 0, 2)$ و $(1, 5, 4) = -(5, 1, 2)$.

۱۸. چون $e \in H$ و $e \in K$، داریم $e \in H \cap K$ و $H \cap K \neq \emptyset$. اکنون فرض می‌کنیم $x, y \in H \cap K$. با توجه به زیرگروه بودن H و K می‌بینیم که

$$x, y \in H \cap K \Longrightarrow x, y \in K \text{ و } x, y \in H \Longrightarrow xy \in K \text{ و } xy \in H \Longrightarrow xy \in H \cap K$$

$$x \in H \cap K \Longrightarrow x \in K \text{ و } x \in H \Longrightarrow x^{-1} \in K \text{ و } x^{-1} \in H \Longrightarrow x^{-1} \in H \cap K$$

درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۶ · ۲، $H \cap K$ زیرگروه G است.

بند ۲.۱۶

۱. پ) اگر $n = 0$، نتیجهٔ موردنظر از قضیهٔ ۱۶ · ۵(الف) به‌دست می‌آید. بنابراین، $n \in \mathbf{Z}^+$ را درنظر بگیرید.
به‌ازای $n = 1$ داریم $f(a^n) = f(a^1) = f(a) = \big[f(a)\big]^1 = \big[f(a)\big]^n$ و بنابراین، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای $n = 1$ درست است. اکنون درستی این نتیجه را به‌ازای $n = k \geq 1$ مفروض می‌گیریم و حالت $n = k + 1$ را بررسی می‌کنیم. دراین‌صورت

$$f(a^n) = f(a^{k+1}) = f(a^k \cdot a) = f(a^k) \cdot f(a) = \big[f(a)\big]^k \cdot f(a) = \big[f(a)\big]^{k+1} = \big[f(a)\big]^n$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \geq 1$ درست است.

همان‌گونه که در مطالب بعد از قضیهٔ ۱۶ · ۱ تعریف کردیم، به‌ازای هر $n \geq 1$ داریم $a^{-n} = (a^{-1})^n$.

بنابراین، با توجه به آنچه در بالا دیدیم، $f(a^{-n}) = f\left[(a^{-۱})^n\right] = \left[f(a^{-۱})\right]^n$. دراین‌صورت، با توجه به قضیهٔ ۱۶ ۱۰ (ب)، $\left[f(a^{-۱})\right]^n = \left[\left(f(a)\right)^{-۱}\right]^n = \left[f(a)\right]^{-n}$. بنابراین، $f(a^{-n}) = \left[f(a)\right]^{-n}$.

درنتیجه، به‌ازای هر $a \in G$ و هر $n \in \mathbf{Z}$ داریم $f(a^n) = [f(a)]^n$.

۲. فرض کنیم $(G, +)$، $(H, *)$ و $(K, \cdot)$ گروههای مفروض باشند. چون f و g همریختی‌اند به‌ازای هر $x, y \in G$ داریم

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+y) &= g\big(f(x+y)\big) = g\big(f(x) * f(y)\big) = \big(g(f(x))\big) \cdot \big(g(f(y))\big)\\ &= \big((g \circ f)(x)\big) \cdot \big((g \circ f)(y)\big)\end{aligned}$$

بنابراین، $g \circ f : G \to K$ همریختی گروه است.

۳. اگر $a + b\sqrt{۳} = c + d\sqrt{۳}$، آن‌گاه $a - c = (d-b)\sqrt{۳}$. اگر $d - b \neq ۰$، می‌بینیم که $\sqrt{۳} = \dfrac{a-c}{d-b}$ و این ناقض گنگ بودن $\sqrt{۳}$ است. بنابراین، $d - b = ۰$. درنتیجه، $d = b$ و

$$a - c = (d-b)\sqrt{۳} = ۰ \Longrightarrow a = c$$

برعکس،

$$\left[(a = c) \wedge (b = d)\right] \Longrightarrow \left[(a = c) \wedge (b\sqrt{۳} = d\sqrt{۳})\right] \Longrightarrow a + b\sqrt{۳} = c + d\sqrt{۳}$$

۴. الف)

$$A^۲ = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\ ،\ A^۳ = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \text{ و } A^۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ب) به‌ازای هر $۱ \leq m, n \leq ۴$ داریم $A^m \cdot A^n = A^{m+n} = A^r$، که در آن $۱ \leq r \leq ۴$ و $m + n \equiv r$ (پیمانهٔ ۴). بنابراین، مجموعهٔ $\{A, A^۲, A^۳, A^۴\}$ نسبت به عمل دوتایی ضرب ماتریسی بسته است.

ضرب ماتریسی در مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای حقیقی ۲×۲ یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر است. درنتیجه، وقتی این عمل به این چهار ماتریس محدود شود باز هم شرکت‌پذیر است.

ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = A^۴$ عنصر همانی است و

$$A^{-۱} = A^۳ \qquad (A^۲)^{-۱} = A^{-۲} = A^۲$$

$$(A^۳)^{-۱} = A^{-۳} = A \qquad (A^۴)^{-۱} = A^{-۴} = A^۴ = A^۰$$

بنابراین، هر یک از عنصرها وارون ضربی دارد.

سرانجام، به‌ازای هر $۱ \leq m, n \leq ۴$ داریم $A^m \cdot A^n = A^{m+n} = A^{n+m} = A^n \cdot A^m$ و بنابراین، $\{A, A^۲, A^۳, A^۴\}$ با ضرب ماتریسی معمولی گروهی آبلی است.

پ) $f: G \to \{A, A^2, A^3, A^4\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{lll} f: A \longrightarrow i & \text{یا} & f: A \longrightarrow -i \\ A^2 \longrightarrow -1 = i^2 & & A^2 \longrightarrow -1 = (-i)^2 \\ A^3 \longrightarrow -i = i^3 & & A^3 \longrightarrow i = (-i)^3 \\ A^4 \longrightarrow 1 = i^4 & & A^4 \longrightarrow 1 = (-i)^4 \end{array}$$

در هر دو حالت، f یکریختی‌ای بین دوگروه دوری مرتبهٔ ۴ مفروض است.

۵.
$$\begin{array}{lll} f(0) = (0, 0) & f(1) = (1, 1) & f(2) = (2, 0) \\ f(3) = (0, 1) & f(4) = (1, 0) & f(5) = (2, 1) \end{array}$$

۶. فرض می‌کنیم $x, y \in H$. چون f پوشاست، عنصرهایی مانند $a, b \in G$ وجود دارند به‌طوری که $f(a) = x$ و $f(b) = y$. دراین‌صورت با توجه به آبلی بودن G داریم

$$xy = f(a)f(b) = f(ab) = f(ba) = f(b)f(a) = yx$$

و بنابراین، H آبلی است.

۷. باید عنصر $(4, 6)$ متعلق به $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ را برحسب عنصرهای $(1, 3)$ و $(3, 7)$ بیان کنیم. می‌نویسیم $(4, 6) = a(1, 3) \oplus b(3, 7)$، که در آن $a, b \in \mathbf{Z}$. دراین‌صورت،

$$f(4, 6) = f\big(a(1, 3) \oplus b(3, 7)\big) = f\big(a(1, 3)\big) + f\big(b(3, 7)\big) = af(1, 3) + bf(3, 7)$$

با توجه به $(4, 6) = a(1, 3) \oplus b(3, 7)$ داریم $a + 3b = 4$ و $3a + 7b = 6$. درنتیجه، $a = -5$ و $b = 3$. پس $f(4, 6) = -5g_1 + 3g_2$.

۸. الف) به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}$ می‌بینیم که $(k, 0) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ و $f(k, 0) = k - 0 = k$. پس تابع f پوشاست. علاوه‌براین، اگر $(a, b), (c, d) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$، آن‌گاه

$$f\big((a, b) \oplus (c, d)\big) = f(a+c, b+d) = (a+c)-(b+d) = (a-b)+(c-d) = f(a, b)+f(c, d)$$

درنتیجه، تابع f یک همریختی پوشاست.

ب) اگر $f(a, b) = 0$، دراین‌صورت از $f(a, b) = a - b$ نتیجه می‌شود که $a = b$. همچنین،

$$a = b \Longrightarrow a - b = 0 \Longrightarrow f(a, b) = 0$$

پس $f(a, b) = 0$ اگر و فقط اگر $a = b$ یا $f^{-1}(0) = \{(a, a) | a \in \mathbf{Z}\}$.

پ) چون $f^{-1}(7) = \{(a, b) | f(a, b) = a - b = 7\}$، می‌توانیم بنویسیم

$$f^{-1}(7) = \{(b + 7, b) | b \in \mathbf{Z}\} = \{(a, a - 7) | a \in \mathbf{Z}\}$$

ت) فرض می‌کنیم $(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. می‌بینیم که $(a, b) \in f^{-1}(E)$ اگر و فقط اگر $f(a, b) = a - b$ عددی صحیح و زوج باشد.

[همچنین، $f^{-1}(E) = \{(۲m, ۲n)|m, n \in \mathbf{Z}\} \cup \{(۲m+۱, ۲n+۱)|m, n \in \mathbf{Z}\}$.]

۹. الف) $o(\pi_{\circ}) = ۱$ ، $o(\pi_۱) = o(\pi_۲) = ۳$ و $o(r_۱) = o(r_۲) = o(r_۳) = ۲$.

ب) (شکل ۱۶ . ۶ را ببینید.) $o(\pi_{\circ}) = ۱$ ، $o(\pi_۱) = o(\pi_۳) = ۴$ و

$$o(\pi_۲) = o(r_۱) = o(r_۲) = o(r_۳) = o(r_۴) = ۲$$

۱۰. $n = ۲$: $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}$ دارای مرتبهٔ ۲ است و زیرگروه دوری

$$\left\{\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}\right\}$$

از $S_۵$ را تولید می‌کند.

$n = ۳$: $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}$ دارای مرتبهٔ ۳ است و زیرگروه دوری

$$\left\{\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۱ & ۲ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}\right\}$$

از $S_۵$ را تولید می‌کند.

$n = ۴$: $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ & ۵ \end{pmatrix}$ دارای مرتبهٔ ۴ است و زیرگروه دوری

$$\left\{\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ & ۵ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ & ۵ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ & ۵ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}\right\}$$

از $S_۵$ را تولید می‌کند.

$n = ۵$: $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \end{pmatrix}$ دارای مرتبهٔ ۵ است و زیرگروه دوری

$$\left\{\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}\right\}$$

از $S_۵$ را تولید می‌کند.

۱۱. الف) عنصرهای مرتبهٔ ۱۰ عبارت‌اند از ۴، ۱۲، ۲۸ و ۳۶.

ب) عنصرهای مرتبهٔ ۱۰ عبارت‌اند از $a^۴$، $a^{۱۲}$، $a^{۲۸}$ و $a^{۳۶}$.

۱۲. الف) $U_{۱۲} = \{۱, ۳, ۵, ۹, ۱۱, ۱۳\} = \{a \in \mathbf{Z}^+ | \gcd(a, ۱۴) = ۱ \text{ و } ۱ \leq a \leq ۱۳\}$.

ب) چون

$$۳^۱ = ۳ \qquad ۳^۲ = ۹ \qquad ۳^۳ = ۱۳$$
$$۳^۴ = ۱۱ \qquad ۳^۵ = ۵ \qquad ۳^۶ = ۱$$

می‌دانیم که $U_{۱۴}$ دوری است و $U_{۱۴} = \langle ۳ \rangle$.

همچنین، می‌بینیم که

$$۵^۱ = ۵ \qquad ۵^۲ = ۱۱ \qquad ۵^۳ = ۱۳$$
$$۵^۴ = ۹ \qquad ۵^۵ = ۳ \qquad ۵^۶ = ۱$$

و بنابراین، $U_{۱۴} = \langle ۵ \rangle$.

مولد دیگری برای این گروه وجود ندارد.

۱۳. $\mathbf{Z}_۵^* = \langle ۲ \rangle = \langle ۳ \rangle$، $\mathbf{Z}_۷^* = \langle ۳ \rangle = \langle ۵ \rangle$، $\mathbf{Z}_{۱۱}^* = \langle ۲ \rangle = \langle ۶ \rangle = \langle ۷ \rangle = \langle ۸ \rangle$.

۱۴. فرض می‌کنیم $f : G \to G$ که با $f(a) = a^{-۱}$ تعریف می‌شود یکریختی باشد. به‌ازای هر $a, b \in G$ داریم، $(ab)^{-۱} = f(ab) = f(a)f(b) = a^{-۱}b^{-۱}$. همچنین، می‌بینیم که

$$(ab)^{-۱} = a^{-۱}b^{-۱} \Longrightarrow (ab)^{-۱} = (ba)^{-۱} \Longrightarrow ab = ba$$

پس G آبلی است. برعکس، به‌ازای هر گروه مانند G، تابع $f : G \to G$ که با $f(a) = a^{-۱}$ تعریف می‌شود، یک‌به‌یک و پوشاست. اگر G آبلی باشد، آن‌گاه $f(ab) = (ab)^{-۱} = b^{-۱}a^{-۱} = a^{-۱}b^{-۱} = f(a)f(b)$ و بنابراین، f یکریختی است.

۱۵. این گزاره نادرست است. گروه چهار عنصری کلاین در مثال ۱۶ ۰ ۱۶ یک مثال نقض به دست می‌دهد.

۱۶. الف) با توجه به تمرین ۱۶ در بند ۱۶ ۰ ۱، می‌دانیم که $G = \langle \omega \rangle$. همچنین، داریم $G = \langle \omega^۳ \rangle = \langle \omega^۵ \rangle = \langle \omega^۷ \rangle$.

ب) $f : G \to \mathbf{Z}_۸$ را با $f(\omega^n) = [n]$، $۱ \leq n \leq ۸$، تعریف می‌کنیم. اگر $۱ \leq k, m \leq ۸$، آن‌گاه

$$\omega^k = \omega^m \Longleftrightarrow k = m \Longleftrightarrow [k] = [m] \Longleftrightarrow f(\omega^k) = f(\omega^m)$$

و بنابراین، f تابعی یک‌به‌یک است. چون $|\mathbf{Z}_۸| = |G|$، از قضیهٔ ۵ ۰ ۱۱ نتیجه می‌شود که f پوشا نیز هست. سرانجام، به‌ازای $۱ \leq k, m \leq ۸$ داریم

$$f(\omega^k \cdot \omega^m) = f(\omega^{k+m}) = [k+m] = [k] + [m] = f(\omega^k) + f(\omega^m)$$

بنابراین، f یکریختی است.

یادداشت: سه یکریختی دیگر نیز می‌توان ساخت. هر یک از این یکریختیها با نگارهٔ ω مشخص می‌شود و می‌بینیم که این یکریختیها عبارت‌اند از:

$f_۱ : G \to \mathbf{Z}_۸$، که در آن $f_۱(\omega) = [۳]$،

$f_۲ : G \to \mathbf{Z}_۸$، که در آن $f_۲(\omega) = [۵]$ و

$f_۳ : G \to \mathbf{Z}_۸$، که در آن $f_۳(\omega) = [۷]$.

۱۷. الف) $(\mathbf{Z}_{۱۲},+) = \langle ۱\rangle = \langle ۷\rangle = \langle ۱۱\rangle$

$$(\mathbf{Z}_{۱۶},+) = \langle ۱\rangle = \langle ۳\rangle = \langle ۵\rangle = \langle ۷\rangle = \langle ۹\rangle = \langle ۱۱\rangle = \langle ۱۳\rangle = \langle ۱۵\rangle$$

$$(\mathbf{Z}_{۲۴},+) = \langle ۱\rangle = \langle ۵\rangle = \langle ۷\rangle = \langle ۱۱\rangle = \langle ۱۳\rangle = \langle ۱۷\rangle = \langle ۱۹\rangle = \langle ۲۳\rangle$$

ب) فرض می‌کنیم $G = \langle a^k\rangle$. چون $G = \langle a\rangle$، به‌ازای عددی مانند $s \in \mathbf{Z}$ داریم $(a^k)^s = a$. پس $a^{۱-ks} = e$ و بنابراین، $۱ - ks = tn$، زیرا $o(a) = n$. اکنون می‌بینیم که

$$۱ - ks = tn \Longrightarrow ۱ = ks + tn \Longrightarrow \gcd(k,n) = ۱$$

برعکس، فرض می‌کنیم $G = \langle a\rangle$ و فرض می‌کنیم k چنان باشد که $\gcd(k,n) = ۱$. چون $a^k \in G$، پس $\langle a^k\rangle \subseteq G$. از طرف دیگر،

$$\gcd(k,n) = ۱ \Longrightarrow (۱ = ks + tn \text{ داریم } s,t \in \mathbf{Z} \text{ به‌ازای دو عدد مانند})$$
$$\Longrightarrow a = a^۱ = a^{ks+nt} = (a^k)^s(a^n)^t = (a^k)^s(e)^t = (a^k)^s \in \langle a^k\rangle$$

بنابراین، $G \subseteq \langle a^k\rangle$. پس $G = \langle a^k\rangle$، به بیان دیگر، عنصر a^k گروه G را تولید می‌کند.

پ) $\phi(n)$

۱۸. اگر $k \nmid n$، فرض می‌کنیم $n = qk + r$، که در آن $۰ < r < k$. دراین‌صورت

$$f(a^n) = \big(f(a)\big)^n = \big(f(a)\big)^{qk+r} = \big(f(a)^k\big)^q\big(f(a)^r\big) = \big(f(a)\big)^r \text{ و } f(a^n) = f(e_G) = e_H$$

ولی $\big(f(a)\big)^r = e_H$ و $۰ < r < k$ با $o\big(f(a)\big) = k$ در تناقض‌اند. درنتیجه، $k|n$.

بند ۳.۱۶

۱. الف) $\left\{\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۲&۳&۴&۱\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۳&۴&۱&۲\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۴&۱&۲&۳\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۱&۲&۳&۴\end{pmatrix}\right\}$

ب) $\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۲&۱&۴&۳\end{pmatrix} H = \left\{\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۳&۲&۱&۴\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۴&۳&۲&۱\end{pmatrix},\right.$

$$\left.\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۱&۴&۳&۲\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۲&۱&۴&۳\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۴&۲&۳&۱\end{pmatrix} H = \left\{\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۱&۳&۴&۲\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۲&۴&۱&۳\end{pmatrix},\right.$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}\Bigg\}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \end{pmatrix} H = \Bigg\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۲ & ۱ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}\Bigg\}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \end{pmatrix} H = \Bigg\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۲ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}\Bigg\}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۲ & ۳ \end{pmatrix} H = \Bigg\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۴ & ۱ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}\Bigg\}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{pmatrix} H = H$$

۲. فرض می‌کنیم $K = \langle\beta\rangle = \Bigg\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}\Bigg\}$.

دراین‌صورت،

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{pmatrix} K = K$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۲ & ۳ \end{pmatrix} K = \Bigg\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}\Bigg\}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \end{pmatrix} K = \Bigg\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}\Bigg\}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix} K = \Bigg\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}\Bigg\}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix} K = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۴ & ۲ \end{pmatrix} K = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۴ & ۲ \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \end{pmatrix} K = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix} K = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix} \right\}$$

۳.۱۲

۴. $H = \langle[۳]\rangle = \langle ۳ \rangle = \{۰, ۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱\}$

$۱ + H = \{۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, ۱۹, ۲۲\}$

$۲ + H = \{۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰, ۲۳\}$

$K = \langle[۴]\rangle = \langle ۴ \rangle = \{۰, ۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰\}$

$۱ + K = \{۱, ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱\}$

$۲ + K = \{۲, ۶, ۱۰, ۱۴, ۱۸, ۲۲\}$

$۳ + K = \{۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ۱۹, ۲۳\}$

۵. الف) چون $(۰, ۰) \in H$، پس $H \neq \emptyset$. فرض می‌کنیم $(a, ۰), (b, ۰) \in H$. دراین‌صورت،

$$(a, ۰) + (b, ۰) = (a + b, ۰) \in H$$

همچنین، به‌ازای هر $(a, ۰) \in H$ داریم $(-a, ۰) \in H$. بنابراین، H زیرگروه است.

ب) هر هم‌مجموعه از همهٔ نقاط واقع بر یک خط افقی تشکیل شده است.

۶. فرض می‌کنیم G مجموعهٔ یکه‌های R باشد. چون $u \in G$، پس $G \neq \emptyset$. همچنین، عمل ضرب در G (که از تحدید عمل ضرب R به G حاصل شده است) شرکت‌پذیر است. اگر $x, y \in G$، آن‌گاه داریم $x^{-۱}, y^{-۱} \in R$ (و $x^{-۱}, y^{-۱} \in G$) و

$$(xy)(y^{-۱}x^{-۱}) = u = (y^{-۱}x^{-۱})(xy)$$

بنابراین، $xy \in G$. درنتیجه، G گروهی ضربی است.

۷. از قضیهٔ لاگرانژ می‌دانیم که $|K| = ۶۶ = ۲ \times ۳ \times ۱۱$، $|H|$ را می‌شمارد و $|H|$ نیز $|G| = ۶۶۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵ \times ۱۱$

را می‌شمارد. درنتیجه، چون $K \neq H$ و $H \neq G$، پس $|H|$ یا با $۲(۲ \times ۳ \times ۱۱) = ۱۳۲$ برابر است یا با $۵(۲ \times ۳ \times ۱۱) = ۳۳۰$.

۸. الف) از قضیهٔ لاگرانژ نتیجه می‌شود که $|H| = p_۱^{e_۱} p_۲^{e_۲} p_۳^{e_۳} p_۴^{e_۴}$، که در آن $e_۱ = ۱$، $e_۲$ یا ۱ است یا ۲، $e_۳$ یا ۱ است یا ۲ یا ۳ و $e_۴$ یا ۰ است یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴. به این ترتیب، $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰$ امکان پیش می‌آید. ولی حالت $e_۱ = ۱$ ، $e_۲ = ۱$، $e_۳ = ۱$ و $e_۴ = ۰$ پیش نمی‌آید، زیرا $|H| > |K| = p_۱p_۲p_۳$. همین‌طور، حالت $e_۱ = ۱$، $e_۲ = ۲$، $e_۳ = ۳$ و $e_۴ = ۴$ روی نمی‌دهد، زیرا $|H| < |G| = p_۱p_۲^۲p_۳^۳p_۴^۴$. درنتیجه، $۳۰ - ۲ = ۲۸$ مقدار ممکن برای $|H|$ وجود دارد.

ب) $۴ \times ۲ \times ۱ \times ۵ - ۲ = ۳۸$ مقدار ممکن برای $|H|$ وجود دارد.

پ) در اینجا می‌بینیم که

$$(n_۱ - m_۱ + ۱)(n_۲ - m_۲ + ۱)(n_۳ - m_۳ + ۱)(n_۴ - m_۴ + ۱) - ۲ = \prod_{i=۱}^{۴}(n_i - m_i + ۱) - ۲$$

مقدار ممکن برای $|H|$ وجود دارد.

۹. الف)

	(۱)(۲)(۳)(۴)	(۱۲)(۳۴)	(۱۳)(۲۴)	(۱۴)(۲۳)
(۱)(۲)(۳)(۴)	(۱)(۲)(۳)(۴)	(۱۲)(۳۴)	(۱۳)(۲۴)	(۱۴)(۲۳)
(۱۲)(۳۴)	(۱۲)(۳۴)	(۱)(۲)(۳)(۴)	(۱۴)(۲۳)	(۱۳)(۲۴)
(۱۳)(۲۴)	(۱۳)(۲۴)	(۱۴)(۲۳)	(۱)(۲)(۳)(۴)	(۱۲)(۳۴)
(۱۴)(۲۳)	(۱۴)(۲۳)	(۱۳)(۲۴)	(۱۲)(۳۴)	(۱)(۲)(۳)(۴)

از قضیهٔ ۱۶ ۰ ۳ نتیجه می‌شود که H زیرگروه G است. چون درایه‌های جدول بالا نسبت به قطری که از گوشهٔ چپ بالا به گوشهٔ راست پایین می‌رود متقارن‌اند، H زیرگروهی آبلی از G است.

ب) چون $|G| = ۴! = ۲۴$ و $|H| = ۴$، تعداد هم‌مجموعه‌های چپ H در G برابر است با $۶ = \frac{۲۴}{۴}$.

پ) تابع $f : H \to \mathbf{Z}_۲ \times \mathbf{Z}_۲$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود درنظر بگیرید:

$$f : (۱)(۲)(۳)(۴) \to (۰, ۰) \qquad f : (۱۲)(۳۴) \to (۱, ۰)$$
$$f : (۱۳)(۲۴) \to (۰, ۱) \qquad f : (۱۴)(۲۳) \to (۱, ۱)$$

این تابع، تابعی یک‌به‌یک و پوشاست و به‌ازای هر $x, y \in H$ می‌بینیم که

$$f(x \cdot y) = f(x) \oplus f(y)$$

درنتیجه، f یکریختی است.

[یادداشت: در اینجا پاسخهای ممکن دیگری هم وجود دارد. درحقیقت، شش یکریختی ممکن وجود دارد که می‌توان آنها را تعریف کرد.]

۱۰. $o(a)=k$. دراین‌صورت $k=|\langle a\rangle|$. پس بنابر قضیهٔ لاگرانژ عدد k عدد n را می‌شمارد. بنابراین، $a^n=a^{km}=(a^k)^m=e^m=e$.

۱۱. الف) اگر H زیرگروه سره‌ای از G باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ لاگرانژ $|H|$ برابر است با ۲ یا p. اگر $|H|=۲$، دراین‌صورت $H=\{e,x\}$، که در آن $x^۲=e$، پس $H=\langle x\rangle$. اگر $|H|=p$، فرض می‌کنیم $y\in H$، که در آن $y\neq e$. دراین‌صورت $o(y)=p$ و بنابراین، $H=\langle y\rangle$.

ب) فرض می‌کنیم $x\in G$ و $x\neq e$. دراین‌صورت $o(x)=p$ یا $o(x)=p^۲$. اگر $o(x)=p$، آن‌گاه $|\langle x\rangle|=p$. اگر $o(x)=p^۲$، آن‌گاه $G=\langle x\rangle$ و $\langle x^p\rangle$ یک زیرگروه مرتبهٔ p از G است.

۱۲. فرع ۱۶ ۰ ۱. $|\langle a\rangle|=o(a)$. بنابر قضیهٔ لاگرانژ، $|\langle a\rangle|$، $|G|$ را می‌شمارد و بنابراین، $o(a)||G|$.

فرع ۱۶ ۰ ۲. فرض می‌کنیم G گروهی باشد که در آن $|G|=p$ عددی اول است. فرض می‌کنیم $x\in G$ و $x\neq e$. بنابر فرع ۱۶ ۰ ۱، $o(x)=p$. پس $G=\langle x\rangle$ و G دوری است.

۱۳. الف) فرض می‌کنیم $x\in H\cap K$. از $x\in H$ نتیجه می‌شود که $o(x)|۱۰$ و بنابراین، $o(x)$ یکی از عددهای ۱، ۲، ۵ یا ۱۰ است. به همین ترتیب، از $x\in K$ نتیجه می‌شود که $o(x)|۲۱$. پس $o(x)$ یکی از عددهای ۱، ۳، ۷ یا ۲۱ است. بنابراین، $o(x)=۱$ و $x=e$.

۱۴. الف) به‌ازای هر $a\in G$ داریم $a^{-۱}a=e\in H$. پس $a\mathcal{R}a$ و $\mathcal{R}$ بازتابی است. اگر $a,b\in G$ و $a\mathcal{R}b$، آن‌گاه با توجه به اینکه H زیرگروه است داریم

$$a\mathcal{R}b\Longrightarrow a^{-۱}b\in H\Longrightarrow (a^{-۱}b)^{-۱}\in H\Longrightarrow b^{-۱}a\in H\Longrightarrow b\mathcal{R}a$$

و بنابراین، $\mathcal{R}$ متقارن است. سرانجام، فرض می‌کنیم $a,b,c\in G$ چنان باشند که $a\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}c$. دراین‌صورت داریم $a^{-۱}b\in H$ و $b^{-۱}c\in H$. چون H نسبت به عمل گروه بسته است، داریم $(a^{-۱}b)(b^{-۱}c)=a^{-۱}(bb^{-۱})c=a^{-۱}(e)c=a^{-۱}c\in H$. پس $a\mathcal{R}c$ و $\mathcal{R}$ ترایاست. بنابراین، $\mathcal{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی است.

ب) $$a\mathcal{R}b\Longrightarrow a^{-۱}b\in H\Longrightarrow (a^{-۱}b=h \text{ که در آن } h\in H)$$
$$\Longrightarrow bH=(ah)H=a(hH)=aH$$

$$aH=bH\Longrightarrow a\in bH\Longrightarrow (a=bh \text{ ، } h\in H \text{ به‌ازای عنصری مانند})$$
$$\Longrightarrow (h^{-۱}=a^{-۱}b \text{ که در آن } h^{-۱}\in H)\Longrightarrow a^{-۱}b\in H\Longrightarrow a\mathcal{R}b$$

فرض می‌کنیم $x\in[a]$. دراین‌صورت $x\mathcal{R}a$ و بنابراین، $x^{-۱}a\in H$. چون H زیرگروه است، $(x^{-۱}a)^{-۱}=a^{-۱}x\in H$. پس $a^{-۱}x=h\in H$ و $x=ah\in aH$. بنابراین، $[a]\subseteq aH$. برعکس، اگر $y\in aH$، آن‌گاه به‌ازای عنصری مانند $h_۱\in H$ داریم $y=ah_۱$. اکنون می‌بینیم که

$$y=ah_۱\Longrightarrow a^{-۱}y=h_۱\in H\Longrightarrow a\mathcal{R}y$$

چون $\mathcal{R}$ متقارن است داریم $y\mathcal{R}a$ و بنابراین، $y \in [a]$. بنابراین، $aH \subseteq [a]$. با توجه به دو شمول ثابت شده، نتیجه می‌گیریم که $aH = [a]$.

ت) $f : aH \to H$ را به‌ازای هر $h \in H$ با $f(ah) = h$ تعریف می‌کنیم. می‌بینیم که

$$ah_1 = ah_2 \Longleftrightarrow h_1 = h_2 \Longleftrightarrow f(ah_1) = f(ah_2)$$

پس f تابعی یک به‌یک است. همچنین، به‌ازای $h \in H$ داریم $f^{-1}(h) \supseteq \{ah\}$. پس $f^{-1}(h) \neq \emptyset$ و f پوشاست. بنابراین، f تابعی دوسویی است و بنابراین، $|aH| = |H|$.

ث) چون $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در G است، $\mathcal{R}$ افرازی به‌صورت

$$G = [a_1] \cup [a_2] \cup \cdots \cup [a_t]$$

در G القا می‌کند. بنابراین، به‌ازای هر $1 \leq i \leq t$ داریم $[a_i] = a_iH$ و بنابراین، به‌ازای هر $1 \leq i \leq t$، $|a_iH| = |H| = m$. درنتیجه، $|G| = t|H|$ و $|H|$، $|G|$ را می‌شمارد.

۱۵. الف) تعداد عنصرهای $(\mathbf{Z}_p^*, \cdot)$ برابر است با $p - 1$. پس بنابر تمرین ۱۰، به‌ازای هر $[x] \in (\mathbf{Z}_p^*, \cdot)$ داریم $[x]^{p-1} = [1]$ یا $x^{p-1} \equiv 1$ (پیمانهٔ p) یا $x^p \equiv x$ (پیمانهٔ p). به‌ازای هر $a \in \mathbf{Z}$، اگر $p|a$، آن‌گاه $a \equiv 0$ (پیمانهٔ p) و درنتیجه $a^p \equiv 0 \equiv a$ (پیمانهٔ p). اگر $p \nmid a$، آن‌گاه $a \equiv b$ (پیمانهٔ p)، که در آن $1 \leq b \leq p-1$، و درنتیجه، $a^p \equiv b^p \equiv b \equiv a$ (پیمانهٔ p).

ب) درگروه G که از یکه‌های $\mathbf{Z}_n$ تشکیل شده است، $\phi(n)$ عنصر وجود دارد. اگر $a \in \mathbf{Z}$ و $\gcd(a,n) = 1$، آن‌گاه $[a] \in G$ و درنتیجه، $[a]^{\phi(n)} = [1]$ یا $a^{\phi(n)} \equiv 1$ (پیمانهٔ n).

پ و ت) این نتایج از تمرینهای ۶ و ۱۰ به‌دست می‌آیند. درحقیقت، (پ) و (ت) حالتهای خاصی از تمرین ۱۰ هستند.

بند ۴.۱۶

۱. الف) $e = 0001001$ ب) $r = 1111011$ پ) $c = 0101000$

۲. الف) $(0/95)^8(0/05)$ ب) $(0/95)^7(0/05)^2$

پ) $\binom{9}{1}(0/95)^8(0/05)$ ت) $\binom{9}{2}(0/95)^7(0/05)^2$

ث) $\binom{9}{3}(0/95)^6(0/05)^3$ ج) $\binom{7}{3}(0/95)^6(0/05)^3$

۳. الف) (یک) $D(111101100) = 101$ (دو) $D(000100011) = 000$

(سه) $D(010011111) = 011$

ب) 000000000، 000000001، 100000000

پ) ۶۴

۴. الف) $(0/95)^5 + \binom{5}{1}(0/05)(0/95)^4 + \binom{5}{2}(0/05)^2(0/95)^3$

ب) $\left[(۰٫۹۵)^۵ + \binom{۵}{۱}(۰٫۰۵)(۰٫۹۵)^۴ + \binom{۵}{۲}(۰٫۰۵)^۲(۰٫۹۵)^۳\right]^۳$

پ) $D(r) = ۰۱$

ت) ۰۰۰۰۰۰۰۰۰، ۱۰۰۰۰۰۰۰۰، ۰۰۰۰۰۰۰۰۱

ث) ۲۵۶

بندهای ۵.۱۶ و ۶.۱۶

۱. $S(۱۰۱۰۱۰, ۱) = \{۱۰۱۰۱۰, ۰۰۱۰۱۰, ۱۱۱۰۱۰, ۱۰۰۰۱۰, ۱۰۱۱۱۰, ۱۰۱۰۰۰, ۱۰۱۰۱۱\}$

$S(۱۱۱۱۱۱, ۱) = \{۱۱۱۱۱۱, ۰۱۱۱۱۱, ۱۰۱۱۱۱, ۱۱۰۱۱۱, ۱۱۱۰۱۱, ۱۱۱۱۰۱, ۱۱۱۱۱۰\}$

۲. $S(۰۰۰۰۰۰, ۱) = \{۰۰۰۰۰۰, ۱۰۰۰۰۰, ۰۱۰۰۰۰, ۰۰۱۰۰۰, ۰۰۰۱۰۰, ۰۰۰۰۱۰, ۰۰۰۰۰۱\}$

$S(۰۱۰۱۰۱, ۱) = \{۰۱۰۱۰۱, ۱۱۰۱۰۱, ۰۰۰۱۰۱, ۰۱۱۱۰۱, ۰۱۰۰۰۱, ۰۱۰۱۱۱, ۰۱۰۱۰۰\}$

الف) $D(۱۱۰۱۰۱) = ۰۱$ ب) $D(۱۰۱۰۱۱) = ۱۰$

پ) $D(۰۰۱۱۱۱) = ۰۰$ ت) $D(۱۱۰۰۰۰) = ۰۰$

۳. الف) $|S(x,۱)| = ۱۱$، $|S(x,۲)| = ۵۶$ و $|S(x,۳)| = ۱۷۶$

ب) $|S(x,k)| = ۱ + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{k} = \sum_{i=۰}^{k} \binom{n}{i}$

۴. $k = ۸$ و $n = ۴$.

۵. الف) مینیمم فاصلهٔ بین واژه‌های کد ۳ است. این کد می‌تواند همهٔ خطاهای با وزن حداکثر ۲ را آشکارسازی و همهٔ خطاهای منفرد را تصحیح کند.

ب) مینیمم فاصلهٔ بین واژه‌های کد ۵ است. این کد می‌تواند همهٔ خطاهای با وزن حداکثر ۴ را آشکارسازی و همهٔ خطاهای منفرد با وزن حداکثر ۲ را تصحیح کند.

پ) مینیمم فاصله ۲ است. این کد همهٔ خطاهای منفرد را آشکارسازی می‌کند ولی قدرت تصحیح ندارد.

ت) مینیمم فاصله ۳ است. این کد همهٔ خطاهای با وزن حداکثر ۲ را آشکارسازی و همهٔ خطاهای منفرد را تصحیح می‌کند.

۶. الف) (یک) $H \cdot (۱۱۱۱۰۱)^{tr} = (۱۰۱)^{tr}$ و بنابراین، $c = ۱۱۰۱۰۱$ و $D(c) = ۱۱۰$.

(دو) $H.(۱۱۰۱۰۱)^{tr} = (۰۰۰)^{tr}$ و بنابراین، $c = ۱۱۰۱۰۱$ و $D(c) = ۱۱۰$.

(سه) $H.(۰۰۱۱۱۱)^{tr} = (۰۱۰)^{tr}$ و بنابراین، $c = ۰۰۱۱۰۱$ و $D(c) = ۰۰۱$.

(چهار) $H.(۱۰۰۱۰۰)^{tr} = (۰۱۰)^{tr}$ و بنابراین، $c = ۱۰۰۱۱۰$ و $D(c) = ۱۰۰$.

(پنج) $H.(۱۱۰۰۰۱)^{tr} = (۱۰۰)^{tr}$ و بنابراین، $c = ۱۱۰۱۰۱$ و $D(c) = ۱۱۰$.

(شش) $H.(۱۱۱۱۱۱)^{tr} = (۱۱۱)^{tr}$، که بین ستونهای H دیده نمی‌شود.

با مفروض گرفتن خطای دوگانه،

(۱) اگر ۰۰۱ + ۱۱۰ = ۱۱۱، آن‌گاه $c = ۰۱۱۱۱۰$ و $D(c) = ۰۱۱$،

(۲) اگر ۱۰۰ + ۰۱۱ = ۱۱۱، آن‌گاه $c = ۱۰۱۰۱۱$ و $D(c) = ۱۰۱$،

(۳) اگر ۰۱۰ + ۱۰۱ = ۱۱۱، آن‌گاه $c = ۱۱۰۱۰۱$ و $D(c) = ۱۱۰$.

(هفت) $(۱۰۰)^{tr} = H.(۱۱۱۱۰۰)^{tr}$ و بنابراین، $c = ۱۱۱۰۰۰$ و $D(c) = ۱۱۱$.

(هشت) $(۱۱۱)^{tr} = H.(۰۱۰۱۰۰)^{tr}$، که بین ستونهای H دیده نمی‌شود.

با مفروض گرفتن خطای دوگانه،

(۱) اگر ۰۰۱ + ۱۱۰ = ۱۱۱، آن‌گاه $c = ۱۱۰۱۰۱$ و $D(c) = ۱۱۰$،

(۲) اگر ۱۰۰ + ۰۱۱ = ۱۱۱، آن‌گاه $c = ۰۰۰۰۰۰$ و $D(c) = ۰۰۰$،

(۳) اگر ۰۱۰ + ۱۰۱ = ۱۱۱، آن‌گاه $c = ۰۱۱۱۱۰$ و $D(c) = ۰۱۱$.

ب) خیر. نتایج (شش) و (هشت) یکتا نیستند.

۷. الف) $C = \{۰۰۰۰۰, ۱۰۱۱۰, ۰۱۰۱۱, ۱۱۱۰۱\}$، مینیمم فاصلهٔ بین واژه‌های کد ۳ است و درنتیجه، این کد می‌تواند همهٔ خطاهای با وزن حداکثر ۲ و همهٔ خطاهای منفرد را آشکارسازی کند.

ب)
$$H = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پ) (یک) ۰۱ (دو) ۱۱ (پنج) ۱۱ (شش) ۱۰

نشانگان برای (سه) و (چهار)، $(۱۱۱)^{tr}$ است که ستونی از H نیست. با مفروض گرفتن خطای دوگانه، اگر $(۰۰۱)^{tr} + (۱۱۰)^{tr} = (۱۱۱)^{tr}$، آن‌گاه واژهٔ دریافتی کدگشایی شده (برای (سه)) ۰۱ و (برای (چهار)) ۱۰ است. اگر $(۱۰۰)^{tr} + (۰۱۱)^{tr} = (۱۱۱)^{tr}$، آن‌گاه ۱۰ و ۰۱ را (به‌ترتیب، برای (سه) و (چهار)) به‌دست می‌آوریم.

۸. الف)
$$G = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$C = \{۰۰۰۰۰۰, ۱۰۰۱۱۱, ۰۱۰۰۱۰, ۰۰۱۱۰۱, ۱۱۰۱۰۱, ۱۰۱۰۱۰, ۰۱۱۱۱۱, ۱۱۱۰۰۰\}$$

ب) خیر. ستونهای دوم و پنجم H یکی هستند.

۹. $G = [I_۸|A]$، که در آن $I_۸$ ماتریس همانی ۸ × ۸ و A ستونی است که از ۱ تشکیل شده است. $H = [A^{tr}|۱] = [۱۱۱۱۱۱۱۱|۱]$.

۱۰. الف) به‌ازای هر $x \in \{۰, ۱\}$، $xG = xxxxxxxxx$.

ب) $H = [A|I_۸]$، که در آن $I_۸$ ماتریس همانی ۸ × ۸ و A ستونی است که از ۱ تشکیل شده است.

۱۱. ماتریس مولد (بررسی زوجیت) تمرین ۹ را با ماتریس بررسی زوجیت (مولد) تمرین ۱۰ مقایسه کنید.

۱۲. فرض می‌کنیم $c \in \mathbf{Z}_۲^n$ یک واژهٔ کد باشد. به‌ازای هر $x \in S(c, k)$ ، تابع کدگشای قضیهٔ ۱۶۰۱۳، x را کدگشایی می‌کند و اگر $c_۱$ و $c_۲$ دو واژهٔ کد باشند، $S(c_۱, k) \cap S(c_۲, k) = \emptyset$. چون $x \in S(c, k)$ اگر و فقط اگر $d(x, c) \leq k$، پس $|S(c, k)| = \sum_{i=۰}^{k} \binom{n}{i}$. درنتیجه، $|M(n, k)|\left[\sum_{i=۰}^{k} \binom{n}{i}\right]$ همهٔ واژه‌های دریافتی در $\mathbf{Z}_n^۲$ را که یا واژهٔ کد هستند یا با یک واژهٔ کد حداکثر در k مکان تفاوت دارند به‌دست می‌دهد. بنابراین، $|M(n, k)|[\sum_{i=۰}^{k} \binom{n}{i}] \leq |\mathbf{Z}_۲^n| = ۲^n$.

برای کران پایین (گیلبرت) به خطایابی متوسل می‌شویم. اگر $r \in \mathbf{Z}_۲^n$ و $d(c, r) \leq ۲k$، بنابر قضیهٔ ۱۶۰۱۲ می‌توانیم r را به‌عنوان پیام نادرست آشکارسازی کنیم (بدون آنکه آن را الزاماً تصحیح کنیم). بنابراین، به‌ازای هر واژهٔ کد مانند c ، $S(c, ۲k)$ واژهٔ کد c را همراه با واژه‌های دریافتی r که در $d(c, r) \leq ۲k$ صدق می‌کنند به‌دست می‌دهد، ولی ممکن است به‌ازای دو واژهٔ کد متمایز $c_۱$ و $c_۲$ داشته باشیم $S(c_۱, ۲k) \cap S(c_۲, ۲k) \neq \emptyset$. اگر $۲^n > |M(n, k)|[\sum_{i=۰}^{۲k} \binom{n}{i}]$، عنصری مانند $c^* \in \mathbf{Z}_۲^n$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر واژهٔ کد مانند c، $d(c^*, c) > ۲k$. بنابراین، می‌توانیم c^* را به مجموعهٔ فعلی از واژه‌های کد اضافه کنیم و کد بزرگتری به‌دست آوریم، که در آن مینیمم فاصلهٔ بین واژه‌های کد باز هم $۲k + ۱$ است. ولی این با اندازهٔ ماکسیمال $|M(n, k)|$ در تناقض است و بنابراین، $۲^n \leq |M(n, k)|\left[\sum_{i=۰}^{۲k} \binom{n}{i}\right]$.

بندهای ۷.۱۶ و ۸.۱۶

۱. برای یافتن مینیمم فاصلهٔ بین واژه‌های کد، $\binom{۲۵۶}{۲}$ محاسبه لازم داریم. (هر یک از محاسبه‌ها فاصلهٔ بین دو تا از واژه‌های کد را تعیین می‌کند.) اگر E همریختی گروه باشد، باید وزن ۲۵۵ واژهٔ کد غیرصفر را محاسبه کنیم.

۲. الف)

$$H = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$D(c)$	$c = r + e$	$H.r^{tr}$	واژهٔ دریافتی r
۰۱۰	۰۱۰۰۱۱	$(۰۱۱)^{tr}$	۰۰۰۰۱۱
۱۰۱	۱۰۱۰۱۱	$(۱۰۱)^{tr}$	۱۰۰۰۱۱
۰۱۱	۰۱۱۱۱۰	$(۱۱۰)^{tr}$	۱۱۱۱۱۰
۱۱۰	۱۱۰۱۰۱	$(۱۱۱)^{tr}$	۱۰۰۰۰۱
۰۰۱	۰۰۱۱۰۱	$(۰۰۱)^{tr}$	۰۰۱۱۰۰
۰۱۱	۰۱۱۱۱۰	$(۰۰۰)^{tr}$	۰۱۱۱۱۰
۰۰۱	۰۰۱۱۰۱	$(۰۱۰)^{tr}$	۰۰۱۱۱۱
۱۱۱	۱۱۱۰۰۰	$(۱۰۰)^{tr}$	۱۱۱۱۰۰

ب) اگر ۱۰۰۰۰۱ (که درآخرین سطر جدول ۸۰۱۶ قرار دارد) به جای ۰۱۰۱۰۰ به عنوان سردستهٔ هم مجموعه به‌کار رود، دراین‌صورت به‌ازای $r = ۱۰۰۰۰۱$ داریم $H.r^{tr} = (۱۱۱)^{tr}$. ولی، اگر $r = ۱۰۰۰۰۱$ و

$x = 100001$، آن‌گاه $c = 000000$ (و نه ۱۱۰۱۰۱) و $D(c) = 000$ (و نه ۱۱۰).

۳. الف)

نشانگان	سردستهٔ هم‌مجموعه			
۰۰۰	۰۰۰۰۰	۱۰۱۱۰	۰۱۰۱۱	۱۱۱۰۱
۱۱۰	۱۰۰۰۰	۰۰۱۱۰	۱۱۰۱۱	۰۱۱۰۱
۰۱۱	۰۱۰۰۰	۱۱۱۱۰	۰۰۰۱۱	۱۰۱۰۱
۱۰۰	۰۰۱۰۰	۱۰۰۱۰	۰۱۱۱۱	۱۱۰۰۱
۰۱۰	۰۰۰۱۰	۱۰۱۰۰	۰۱۰۰۱	۱۱۱۱۱
۰۰۱	۰۰۰۰۱	۱۰۱۱۱	۰۱۰۱۰	۱۱۱۰۰
۱۰۱	۱۱۰۰۰	۰۱۱۱۰	۱۰۰۱۱	۰۰۱۰۱
۱۱۱	۰۱۱۰۰	۱۱۰۱۰	۰۰۱۱۱	۱۰۰۰۱

[دو سطر آخر یکتا نیستند.]

ب)

واژهٔ دریافتی	واژهٔ کددار	پیام کدگشایی شده
۱۱۱۱۰	۱۰۱۱۰	۱۰
۱۱۱۰۱	۱۱۱۰۱	۱۱
۱۱۰۱۱	۰۱۰۱۱	۰۱
۱۰۱۰۰	۱۰۱۱۰	۱۰
۱۰۰۱۱	۰۱۰۱۱	۰۱
۱۰۱۰۱	۱۱۱۰۱	۱۱
۱۱۱۱۱	۱۱۱۰۱	۱۱
۰۱۱۰۰	۰۰۰۰۰	۰۰

۴.
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الف)

$$\begin{aligned} (1000)G &= 1000110 & \qquad (1100)G &= 1100011 \\ (1011)G &= 1011010 & \qquad (1110)G &= 1110000 \\ (1001)G &= 1001001 & \qquad (1111)G &= 1111111 \end{aligned}$$

ب)

واژهٔ دریافتی r	$H.r^{tr}$	c	$D(c)$
۱۱۰۰۰۰۱	$(010)^{tr}$	۱۱۰۰۰۱۱	۱۱۰۰
۱۱۱۰۱۱۱	$(111)^{tr}$	۱۱۱۱۱۱۱	۱۱۱۱
۰۰۱۰۰۰۱	$(010)^{tr}$	۰۰۱۰۰۱۱	۰۰۱۰
۰۰۱۱۱۰۰	$(000)^{tr}$	۰۰۱۱۱۰۰	۰۰۱۱

پ)

نشانگان	سردستهٔ هم‌مجموعه
۰۰۰	۰۰۰۰۰۰۰
۱۱۰	۱۰۰۰۰۰۰
۱۰۱	۰۱۰۰۰۰۰
۰۱۱	۰۰۱۰۰۰۰
۱۱۱	۰۰۰۱۰۰۰
۱۰۰	۰۰۰۰۱۰۰
۰۱۰	۰۰۰۰۰۱۰
۰۰۱	۰۰۰۰۰۰۱

ت) همان نتایج قسمت (ب) به‌دست می‌آیند.

۵. الف) G ماتریسی ۶۳×۵۷ و H ماتریسی ۶۳×۶ است.

ب) نرخ برابر است با $\frac{۵۷}{۶۳}$.

۶. نرخ کد تکرار سه‌گانهٔ $(۳,۱)$ عبارت است از $\frac{۱}{۳}$. نرخ کد $(۷,۴)$ همینگ برابر است با $\frac{۴}{۷}$. چون $\frac{۱}{۳} < \frac{۴}{۷}$، کد همینگ مؤثرتر است.

۷. الف) کد $(۷,۴)$ همینگ همهٔ خطاهای منفرد موجود در پیام را تصحیح می‌کند و بنابراین، احتمال کدگشایی صحیح ۱۰۱۱ برابر است با $(۰٫۹۹)^۷ + \binom{۷}{۱}(۰٫۹۹)^۶(۰٫۰۱)$.

ب) $[(۰٫۹۹)^۷ + \binom{۷}{۱}(۰٫۹۹)^۶(۰٫۰۱)]^۵$

بند ۹.۱۶

۱. الف)

$$\pi_۳^* = \begin{pmatrix} C_۱ & C_۲ & C_۳ & C_۴ & C_۵ & C_۶ & C_۷ & C_۸ & C_۹ & C_{۱۰} & C_{۱۱} & C_{۱۲} & C_{۱۳} & C_{۱۴} & C_{۱۵} & C_{۱۶} \\ C_۱ & C_۵ & C_۲ & C_۳ & C_۴ & C_۹ & C_۶ & C_۷ & C_۸ & C_{۱۱} & C_{۱۰} & C_{۱۵} & C_{۱۲} & C_{۱۳} & C_{۱۴} & C_{۱۶} \end{pmatrix}$$

$$r_۲^* = \begin{pmatrix} C_۱ & C_۲ & C_۳ & C_۴ & C_۵ & C_۶ & C_۷ & C_۸ & C_۹ & C_{۱۰} & C_{۱۱} & C_{۱۲} & C_{۱۳} & C_{۱۴} & C_{۱۵} & C_{۱۶} \\ C_۱ & C_۵ & C_۴ & C_۳ & C_۲ & C_۶ & C_۹ & C_۸ & C_۷ & C_{۱۱} & C_{۱۰} & C_{۱۳} & C_{۱۲} & C_{۱۵} & C_{۱۴} & C_{۱۶} \end{pmatrix}$$

ب) $r_۳^{-۱} = r_۳$

$$r_۳^* = (r_۳^{-۱})^* = \begin{pmatrix} C_۱ & C_۲ & C_۳ & C_۴ & C_۵ & C_۶ & C_۷ & C_۸ & C_۹ & C_{۱۰} & C_{۱۱} & C_{۱۲} & C_{۱۳} & C_{۱۴} & C_{۱۵} & C_{۱۶} \\ C_۱ & C_۲ & C_۵ & C_۴ & C_۳ & C_۷ & C_۶ & C_۹ & C_۸ & C_{۱۰} & C_{۱۱} & C_{۱۴} & C_{۱۳} & C_{۱۲} & C_{۱۵} & C_{۱۶} \end{pmatrix}$$

$$= (r_۳^*)^{-۱}$$

پ)

$$\pi_۱^* r_۱^* = \begin{pmatrix} C_۱ & C_۲ & C_۳ & C_۴ & C_۵ & C_۶ & C_۷ & C_۸ & C_۹ & C_{۱۰} & C_{۱۱} & C_{۱۲} & C_{۱۳} & C_{۱۴} & C_{۱۵} & C_{۱۶} \\ C_۱ & C_۲ & C_۵ & C_۴ & C_۳ & C_۷ & C_۶ & C_۹ & C_۸ & C_{۱۰} & C_{۱۱} & C_{۱۴} & C_{۱۳} & C_{۱۲} & C_{۱۵} & C_{۱۶} \end{pmatrix}$$

$$= r_۳^* = (\pi_۱ r_۱)^*$$

۲. $\alpha = (۱۲۴۷۳۶۵)$ $\quad \beta = (۱۳۵)(۲۶۷۴)$

$\gamma = (۱۲۳)(۴۷۶)(۵)$ $\quad \delta = (۱۴)(۲)(۳۷۵)(۶)$

۳. الف) $o(\alpha) = ۷$، $o(\beta) = ۱۲$، $o(\gamma) = ۳$، $o(\delta) = ۶$.

ب) فرض می‌کنیم $\alpha \in S_n$ به‌صورت $\alpha = c_۱ c_۲ \dots c_k$ برابر باشد با حاصل ضرب دورهای جدا از هم. دراین‌صورت $o(\alpha)$ برابر است با کوچکترین مضرب مشترک $\ell(c_۱)$، $\ell(c_۲)$، ...، $\ell(c_k)$، که در آن به‌ازای هر $۱ \leq i \leq k$، $\ell(c_i)$ طول c_i است.

۴. در اینجا G همان گروه مثال ۱۶٫۷ است.

الف) $\Psi(\pi_۲^*) = ۲$ $\quad \Psi(\pi_۱^*) = ۲$ $\quad \Psi(\pi_۰^*) = ۲^۳$

$\Psi(r_۳^*) = ۲^۲$ $\quad \Psi(r_۲^*) = ۲^۲$ $\quad \Psi(r_۱^*) = ۲^۲$

تعداد رنگ‌آمیزیهای متمایز برابر است با $۴ = \frac{۱}{۶}\left[۲^۳ + ۲ + ۲ + ۳(۲^۲)\right]$

ب) $\Psi(\pi_۲^*) = ۳$ $\quad \Psi(\pi_۱^*) = ۳$ $\quad \Psi(\pi_۰^*) = ۳^۳$

$\Psi(r_۳^*) = ۳^۲$ $\quad \Psi(r_۲^*) = ۳^۲$ $\quad \Psi(r_۱^*) = ۳^۲$

تعداد رنگ‌آمیزیهای متمایز برابر است با $۱۰ = \frac{۱}{۶}\left[۳^۳ + ۳ + ۳ + ۳(۳^۲)\right]$.

۵. به‌ازای $۰ \leq i \leq ۴$، فرض می‌کنیم π_i دوران به اندازهٔ $i(۷۲^\circ)$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. همچنین، پنج بازتاب به نامهای r_i، $۱ \leq i \leq ۵$، نسبت به پنج خطی که رأسها را به وسط ضلع مقابلشان وصل می‌کنند وجود دارد. در اینجا $|G| = ۱۰$.

الف) $\Psi(\pi_۰^*) = ۲^۵$ و به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۴$، $\Psi(\pi_i^*) = ۲$ و به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۵$، $\Psi(r_i^*) = ۲^۳$. تعداد آرایشهای متمایز برابر است با $۸ = \frac{۱}{۱۰}\left[۲^۵ + ۴(۲) + ۵(۲^۳)\right]$.

ب) ۳۹

۶. الف) (یک) حرکت مجاز در دو بُعد: در اینجا داریم $G = \{\pi_۰, \pi_۱, \pi_۲, \pi_۳\}$، که در آن به‌ازای هر $۰ \leq i \leq ۳$، π_i مانند مثال ۱۶٫۲۸ است. $\Psi(\pi_۰^*) = ۳^۴$، $\Psi(\pi_۱^*) = \Psi(\pi_۳^*) = ۳$ و $\Psi(\pi_۲^*) = ۳^۲$. تعداد آرایشهای متمایز عبارت است از $۲۴ = \frac{۱}{۴}\left[۳^۴ + ۲(۳) + ۳^۲\right]$.

(دو) حرکت مجاز در سه بُعد: در اینجا G همان گروه مثال ۱۶٫۲۸ است.

$\Psi(\pi_۲^*) = ۳^۲$ $\quad \Psi(\pi_۱^*) = \Psi(\pi_۳^*) = ۳$ $\quad \Psi(\pi_۰^*) = ۳^۴$

$\Psi(r_۳^*) = ۳^۲ = \Psi(r_۴^*)$ $\quad \Psi(r_۱^*) = ۳^۳ = \Psi(r_۲^*)$

تعداد آرایشهای متمایز عبارت است از $۲۱ = \frac{۱}{۸}\left[۳^۴ + ۲(۳) + ۳^۲ + ۲(۳^۳) + ۲(۳^۲)\right]$.

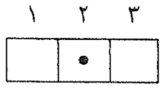
ب) (یک) دو بُعد: ۵۱ $\quad$ (دو) سه بُعد: ۳۹

۷. الف) $G = \{\pi_i | ۰ \leq i \leq ۳\}$، که در آن π_i دوران به اندازهٔ $i \times ۹۰^\circ$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. تعداد دستبندهای متمایز برابر است با $۷۰ = \frac{۱}{۴}(۴^۴ + ۴ + ۴^۲ + ۴)$.

ب) $G = \{\pi_i | ۰ \leq i \leq ۳\} \cup \{r_i | ۱ \leq i \leq ۴\}$، که در آن به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۴$، r_i یکی از دو بازتاب

نسبت به خطی است که از دو مهرهٔ مقابل هم (که در وسط دو نیمدایرهٔ مقابل هم قرار دارند) می‌گذرد. تعداد دستبندهای متمایز برابر است با

$$\frac{۱}{۸}(۴^۴+۴+۴^۲+۴+۴^۳+۴^۳+۴^۲+۴^۲)=۵۵$$

۸. الف)  ، $G=\left\{\pi_۰=\begin{pmatrix}۱&۲&۳\\۱&۲&۳\end{pmatrix},\ \pi_۱=\begin{pmatrix}۱&۲&۳\\۳&۲&۱\end{pmatrix}\right\}$

$\frac{۱}{۲}(۳^۳+۳^۲)=۱۸$ و $\frac{۱}{۲}(۴^۳+۴^۲)=۴۰$

ب) $G=\left\{\pi_۰=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۱&۲&۳&۴\end{pmatrix},\ \pi_۱=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۴&۳&۲&۱\end{pmatrix}\right\}$

$\frac{۱}{۲}(۳^۴+۳^۲)=۴۵$ و $\frac{۱}{۲}(۴^۴+۴^۲)=۱۳۶$

پ) n فرد: $\frac{۱}{۲}\left(۳^n+۳^{\frac{n+۱}{۲}}\right)$ و $\frac{۱}{۲}\left(۴^n+۴^{\frac{n+۱}{۲}}\right)$

n زوج: $\frac{۱}{۲}\left(۳^n+۳^{\frac{n}{۲}}\right)$ و $\frac{۱}{۲}\left(۴^n+۴^{\frac{n}{۲}}\right)$

ت) (الف) $۹=\frac{۱}{۲}(۳\times۲\times۲+۳\times۲)$ و $۲۴=\frac{۱}{۲}(۴\times۳\times۳+۴\times۳)$

(ب) $۱۲=\frac{۱}{۲}(۳\times۲\times۲\times۲+۰)$ و $۵۴=\frac{۱}{۲}(۴\times۳\times۳\times۳+۰)$

۹. آرایش مثلثی شکل:

الف) $G=\{\pi_۰,\pi_۱,\pi_۲\}$ $\qquad \frac{۱}{۳}(۲^۴+۲^۲+۲^۲)=۸$

ب) $G=\{\pi_۰,\pi_۱,\pi_۲,r_۱,r_۲,r_۳\}$ $\qquad \frac{۱}{۶}\left[۲^۴+۲^۲+۲^۲+۳(۲^۳)\right]=۸$

آرایش مربعی شکل:

الف) $G=\{\pi_۰,\pi_۱,\pi_۲,\pi_۳\}$ $\qquad \frac{۱}{۴}\left[۲^۵+۲(۲^۲)+۲^۳\right]=۱۲$

ب) $G=\{\pi_۰,\pi_۱,\pi_۲,\pi_۳,r_۱,r_۲,r_۳,r_۴\}$ $\qquad \frac{۱}{۸}\left[۲^۵+۲(۲^۲)+۲^۳+۲(۲^۳)+۲(۲^۴)\right]=۱۲$

۱۰. $G=\{\pi_۰,\pi_۱,\pi_۲,\pi_۳\}$ $\qquad \frac{۱}{۴}\left[۴^۵+۲(۴^۲)+۴^۳\right]=۲۸۰$

$$\frac{۱}{۴}\left[۴(۳^۴)+۲(۴)(۳)+۴(۳^۲)\right]=۹۶$$

۱۱. الف) ۱۴۰ $\qquad$ ب) ۱۰۲

۱۲. الف) $G=\{\pi_۰,\pi_۱,\pi_۲,\pi_۳\}$ $\qquad \frac{۱}{۴}\left[۲^{۱۶}+۲(۲^۴)+۲^۸\right]=۱۶۴۵۶$

ب) $G=\{\pi_۰,\pi_۱,\pi_۲,\pi_۳,r_۱,r_۲,r_۳,r_۴\}$

$$\frac{۱}{۸}\left[۲^{۱۶}+۲(۲^۴)+۲^۸+۲(۲^۸)+۲(۲^{۱۰})\right]=۸۵۴۸$$

۱۳. $G=\{\pi_i | ۰ \le i \le ۶\}$، که در آن π_i دوران به اندازهٔ $i\left(\frac{۳۶۰^\circ}{۷}\right)$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

$$\frac{۱}{۷}[۳^۷+۶(۳)]=۳۱۵$$

۱۴. الف) اگر e عنصر همانی G باشد، دراین‌صورت $e^*(x)=x$ و بنابراین، $H=\{\pi\in G \big| \pi^*(x)=x\}\neq\emptyset$.

اگر $\pi_۱,\pi_۲\in G$ چنان باشند که $\pi_۱^*(x)=x=\pi_۲^*(x)$، دراین‌صورت $(\pi_۱\pi_۲)^*(x)=x=\pi_۱^*\pi_۲^*(x)$، پس $\pi_۱\pi_۲\in H$. همچنین، اگر $x=\pi_۱^*(x)$، آن‌گاه $(\pi_۱^{-۱})^*(x)=x=(\pi_۱^*)^{-۱}(x)$ و بنابراین،

$$\pi_۱\in H \Longrightarrow \pi_۱^{-۱}\in H$$

درنتیجه، H زیرگروه G است.

ب) $C_۱$: زیرگروه متناظر عبارت است از $\{\pi_۰,r_۱\}$

$C_{۱۵}$: زیرگروه متناظر عبارت است از $\{\pi_۰,r_۲\}$

بند ۱۰.۱۶

۱. الف) $\frac{۱}{۴}\left[۵^۴+۵^۲+۲(۵)\right]=۱۶۵$

ب) $\frac{۱}{۸}\left[۵^۴+۵^۲+۲(۵)+۲(۵^۲)+۲(۵^۳)\right]=۱۲۰$

۲. الف) $\frac{۱}{۵}[۵^۵+۴(۵)]=۶۲۹$

ب) $\frac{۱}{۱۰}\left[۵^۵+۴(۵)+۵(۵^۳)\right]=۳۷۷$

۳. (آرایش مثلثی شکل):

الف) $G=\{\pi_۰,\pi_۱,\pi_۲\}$ $\qquad \frac{۱}{۳}\left[۴^۴+۲(۴^۲)\right]=۹۶$

ب) $G=\{\pi_۰,\pi_۱,\pi_۲,r_۱,r_۲,r_۳\}$ $\qquad \frac{۱}{۶}\left[۴^۴+۲(۴^۲)+۳(۴^۳)\right]=۸۰$

(آرایش مربعی شکل):

الف) $G=\{\pi_۰,\pi_۱,\pi_۲,\pi_۳\}$ $\qquad \frac{۱}{۴}\left[۴^۵+۲(۴^۲)+۴^۳\right]=۲۸۰$

ب) $G=\{\pi_۰,\pi_۱,\pi_۲,\pi_۳,r_۱,r_۲,r_۳,r_۴\}$ $\qquad \frac{۱}{۸}\left[۴^۵+۲(۴^۲)+۴^۳+۲(۴^۳)+۲(۴^۴)\right]=۲۲۰$

(آرایش شش ضلعی):

الف) $G=\{\pi_۰,\pi_۱\}$، که در آن به‌ازای هر $۰\le i\le ۱$ π_i دوران به اندازهٔ $i\times ۱۸۰^\circ$ است.

$$\frac{۱}{۲}(۴^۹+۴^۵)=۱۳۱۵۸۴$$

ب) $G=\{\pi_۰,\pi_۱,r_۱,r_۲\}$، که در آن $r_۱(r_۲)$ بازتاب نسبت به محور قائم (افقی) است.

$$\frac{۱}{۴}(۴^۹+۴^۵+۴^۵+۴^۷)=۷۰۱۴۴$$

۴. الف) $\frac{۱}{۱۲}\left[۳^۶+۲(۳)+۲(۳^۲)+۴(۳^۳)+۳(۳^۴)\right]=۹۲$

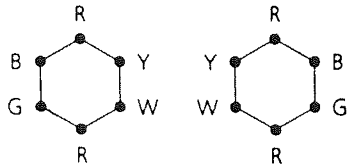
ب) تعداد طرق mـ رنگ‌آمیزی رأسهای شش‌ضلعی منتظمی که می‌تواند در فضا حرکت کند برابر است با

$$\frac{۱}{۱۲}(m^{۶} + ۲m + ۲m^{۲} + ۴m^{۳} + ۳m^{۴})$$

۵. الف) $\frac{۱}{۶}\left[۵^{۶} + ۲(۵) + ۲(۵^{۲}) + ۵^{۳}\right] = ۲۶۳۵$

ب) $\frac{۱}{۱۲}\left[۵^{۶} + ۲(۵) + ۲(۵^{۲}) + ۴(۵^{۳}) + ۳(۵^{۴})\right] = ۱۵۰۵$

پ)



۶. (آرایش مثلثی شکل):

الف) $G = \{\pi_{۰}, \pi_{۱}, \pi_{۲}\}$ $\qquad \frac{۱}{۳}\left[۳^{۶} + ۲(۳^{۲})\right] = ۲۴۹$

ب) $G = \{\pi_{۰}, \pi_{۱}, \pi_{۲}, r_{۱}, r_{۲}, r_{۳}\}$ $\qquad \frac{۱}{۶}\left[۳^{۶} + ۲(۴^{۲}) + ۳(۳^{۴})\right] = ۱۶۵$

(آرایش مربعی شکل):

الف) $G = \{\pi_{۰}, \pi_{۱}, \pi_{۲}, \pi_{۳}\}$ $\qquad \frac{۱}{۴}\left[۳^{۸} + ۲(۳^{۲}) + ۳^{۴}\right] = ۱۶۶۵$

ب) $G = \{\pi_{۰}, \pi_{۱}, \pi_{۲}, \pi_{۳}, r_{۱}, r_{۲}, r_{۳}, r_{۴}\}$ $\qquad \frac{۱}{۸}\left[۳^{۸} + ۲(۳^{۲}) + (۳^{۴}) + ۴(۳^{۵})\right] = ۹۵۴$

(آرایش شش ضلعی):

الف) $G = \{\pi_{۰}, \pi_{۱}\}$ $\qquad \frac{۱}{۲}(۳^{۱۲} + ۳^{۷}) = ۲۳۹۲۵۷۸$

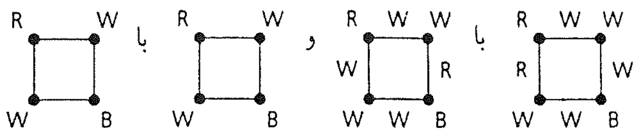
ب) $G = \{\pi_{۰}, \pi_{۱}, r_{۱}, r_{۲}\}$ $\qquad \frac{۱}{۴}(۳^{۱۲} + ۳^{۷} + ۳^{۹} + ۳^{۸}) = ۱۲۰۲۸۵۰$

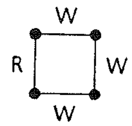
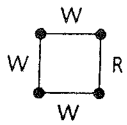
۷. الف) $\frac{۱}{۸}\left[۳^{۴} + ۲(۳) + ۳^{۲} + ۲(۳^{۳}) + ۲(۳^{۲})\right] = ۲۱$

ب) $\frac{۱}{۸}\left[۳^{۸} + ۲(۳^{۲}) + ۳^{۴} + ۲(۳^{۵}) + ۲(۳^{۵})\right] = ۹۵۴$

پ) خیر، $k = ۲۱$، $m = ۲۱$ و بنابراین، $n = ۹۵۴ \neq ۴۴۱ = km$. در اینجا مکان هر یال باید نسبت به مکان رأسهای دیگر درنظر گرفته شود.

مثلاً، با وجود آنکه



هم‌ارز است، ولی  با  هم‌ارز نیست.

بند ۱۱.۱۶

۱. الف) (یک) $\frac{1}{4}\left[(r+w)^4+2(r^4+w^4)+(r^2+w^2)^2\right]=r^4+w^4+r^3w+2r^2w^2+rw^3$

(دو) $\frac{1}{8}\left[(r+w)^4+2(r^4+w^4)+3(r^2+w^2)^2+2(r+w)^2(r^2+w^2)\right]=$
$r^4+w^4+r^3w+2r^2w^2+rw^3$

ب) (یک) $\frac{1}{4}\left[(r+b+w)^4+2(r^4+b^4+w^4)+(r^2+b^2+w^2)^2\right]$

(دو) $\frac{1}{8}\left[(r+b+w)^4+2(r^4+b^4+w^4)+3(r^2+b^2+w^2)^2+2(r+b+w)^2(r^2+b^2+w^2)\right]$

۲. نمایش دوری عنصرهای گروه به‌صورت زیر است:

(۱) x_1^5 برای عنصر همانی

(۲) x_5 برای هر چهار دوران (غیرهمانی)

(۳) $x_1x_2^2$ برای هر پنج بازتاب.

فهرست الگوها عبارت است از $\frac{1}{10}\left[(r+b+w)^5+4(r^5+b^5+w^5)+5(r+b+w)(r^2+b^2+w^2)^2\right]$.

برای سه رأس قرمز، ضرایب جمعوندهایی را که شامل r^3 هستند درنظر می‌گیریم:

$$(r+b+w)^5:\ \binom{5}{3,1,1}+\binom{5}{3,2,0}+\binom{5}{3,0,2}=40$$

$$(r+b+w)(r^2+b^2+w^2)^2:\ \binom{2}{1,1,0}+\binom{2}{1,0,1}=4$$

پاسخ مطلوب عبارت است از $\frac{1}{10}[40+5(4)]=6$.

برای دو رأس قرمز، یک رأس سفید و دو رأس آبی، موارد زیر را درنظر می‌گیریم:

$$(r+b+w)(r^2+b^2+w^2)^2:\ 2\quad,\quad (r+b+w)^5:\ \binom{5}{2,1,2}=30$$

پاسخ مطلوب عبارت است از $\frac{1}{10}[30+5(2)]=4$.

۳. الف) (مثال ۱۶.۳۵ را ببینید)

	حرکت صُلب	نمایش دوری
(۱)	همانی	x_1^6
(۲)	دوران °۹۰	$x_1^2x_4$
	دوران °۱۸۰	$x_1^2x_2^2$
	دوران °۲۷۰	$x_1^2x_4$
(۳)	دورانهای °۱۸۰	x_2^3
(۴)	دورانهای °۱۲۰	x_3^2

دراین‌صورت، تعداد ۲ـ رنگ‌آمیزیهای متمایز وجوه مکعب برابر است با

$$\frac{۱}{۲۴}\left[۲^۶ + ۶(۲^۳) + ۳(۲^۴) + ۶(۲^۳) + ۸(۲^۲)\right] = ۱۰$$

ب) $\frac{۱}{۲۴}[(r+w)^۶ + ۶(r+w)^۲(r^۴+w^۴) + ۳(r+w)^۲(r^۲+w^۲)^۲ + ۶(r^۲+w^۲)^۳ + ۸(r^۳+w^۳)^۲]$

پ) برای سه وجه قرمز و سه وجه سفید، ضرایب جمعوندهایی را درنظر می‌گیریم که شامل $r^۳w^۳$ هستند:

$$(r+w)^۶ : \quad \binom{۶}{۳} = ۲۰$$

$$۳(r+w)^۲(r^۲+w^۲)^۲ : \quad ۱۲$$

$$۸(r^۳+w^۳)^۲ : \quad ۱۶$$

پاسخ مطلوب عبارت است از $\frac{۱}{۲۴}(۲۰ + ۱۲ + ۱۶) = ۲$.

۴. تعداد ترکیبهایی که دست‌کم یک اتم برم دارند عبارت است از

$$۳۶ - \frac{۱}{۱۲}\left[۳^۴ + ۸(۳^۲) + ۳(۳^۲)\right] = ۳۶ - \frac{۱}{۱۲} \times ۱۸۰ = ۲۱$$

برای ترکیبهایی که دقیقاً سه اتم هیدروژن دارند، ضرایب $w^۳x$ و $w^۳y$ را در فهرست الگوها لازم داریم:

$$(w+x+y+z)^۴ : \quad \binom{۴}{۳,۱,۰,۰} + \binom{۴}{۳,۰,۱,۰} = ۸$$

$$۸(w+x+y+z)(w^۳+x^۳+y^۳+z^۳) : \quad ۸(۱+۱) = ۱۶$$

پاسخ مطلوب عبارت است از $\frac{۱}{۱۲}(۸ + ۱۶) = ۲$

۵. فرض می‌کنیم g رنگ سبز و y رنگ طلایی را نشان دهد.

(آرایش مثلثی شکل):

$$\frac{۱}{۶}\left[(g+y)^۴ + ۲(g+y)(g^۳+y^۳) + ۳(g+y)^۲(g^۲+y^۲)\right]$$

(آرایش مربعی شکل):

$$\frac{۱}{۸}\big[(g+y)^۵ + ۲(g+y)(g^۴+y^۴) + (g+y)(g^۲+y^۲)^۲$$
$$+ ۲(g+y)(g^۲+y^۲)^۲ + ۲(g+y)^۳(g^۲+y^۲)\big]$$

(آرایش شش ضلعی):

$$\frac{۱}{۴}\big[(g+y)^۹ + (g+y)(g^۲+y^۲)^۴ + (g+y)(g^۲+y^۲)^۴$$
$$+ (g+y)^۵(g^۲+y^۲)^۲\big]$$

۶. دراینجا $G = \{\pi_i | ۰ \leq i \leq ۶\}$، که در آن π_i دوران به اندازهٔ $i\left(\frac{۳۶۰^\circ}{۷}\right)$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

الف) رنگها را با b (سیاه)، r (قهوه‌ای) و w (سفید) نشان دهید.

فهرست الگوها عبارت است از $\frac{۱}{۷}\left[(b+r+w)^۷ + ۶(b^۷+r^۷+w^۷)\right]$. ضریب $b^۳r^۲w^۲$ در $(b+r+\omega)^۷$ برابر است با $\binom{۷}{۳,۲,۲}$ و بنابراین، پاسخ مطلوب عبارت است از $\frac{۱}{۷}\binom{۷}{۳,۲,۲} = ۳۰$.

ب) $\frac{۱}{۷}\left[۷+\binom{۷}{۵,۱,۱}+\binom{۷}{۳,۲,۲}+\binom{۷}{۱,۳,۳}\right]=\frac{۱}{۷}(۷+۴۲+۲۱۰+۱۴۰)=۵۷$

(برای $w^۷$) (برای $w^۵br$) (برای $w^۳b^۲r^۲$) (برای $wb^۳r^۳$)

پ) به‌ازای $n\in\mathbf{Z}^+$، تعداد طرق nـ رنگ‌آمیزی هفت اسب چرخ و فلک برابر است با $\frac{۱}{۷}(n^۷+۶n)$. چون این عدد صحیح است، عدد ۷ عدد $(n^۷+۶n)$ را می‌شمارد.

۷. الف)

در اینجا $G=\{\pi_۰,\pi_۱\}$، که در آن $\pi_۱$ دوران ۱۸۰° را نشان می‌دهد. تعداد ۲ـ رنگ‌آمیزیهای مربعهای این صفحهٔ شطرنجی برابر است با $\frac{۱}{۲}(۲^۸+۲^۴)=۱۳۶$.

ب) $\frac{۱}{۲}\left[(r+w)^۸+(r^۲+w^۲)^۴\right]$

پ) چهار وجه قرمز و چهار وجه سفید: $\frac{۱}{۲}\left[\binom{۸}{۴}+\binom{۴}{۲}\right]=۳۸$

شش وجه قرمز و دو وجه سفید: $\frac{۱}{۲}\left[\binom{۸}{۶}+\binom{۴}{۱}\right]=۱۶$

۸. در اینجا $G=\{\pi_i|۰\le i\le ۳\}$، که در آن π_i دوران به اندازهٔ $i(۹۰^\circ)$ را (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) نشان می‌دهد.

الف) $\frac{۱}{۴}\left[۲^۸+۲(۲^۲)+۲^۴\right]=۷۰$

ب) $\frac{۱}{۴}\left[۳^۸+۲(۳^۲)+۳^۴\right]=۱۶۶۵$

پ) رنگها را در فهرست الگوها به‌صورت زیر نشان دهید:

b : سیاه، g : طلایی و u : آبی

دراین‌صورت فهرست الگوها عبارت است از

$$\frac{۱}{۴}\left[(b+g+u)^۸+۲(b^۴+g^۴+u^۴)^۲+(b^۲+g^۲+u^۲)^۴\right]$$

برای چهار ناحیهٔ سیاه، دو ناحیهٔ طلایی و دو ناحیهٔ آبی، ضریب $b^۴g^۲u^۲$ را در فهرست الگوها لازم داریم. این ضریب برابر است با $\frac{۱}{۴}\left[\binom{۸}{۴,۲,۲}+\binom{۴}{۲,۱,۱}\right]=۱۰۸$.

۹. فرض می‌کنیم $c_۱$، $c_۲$، ...، c_m این m رنگ را نشان دهند. چون جملهٔ $(c_۱+c_۲+\cdots+c_m)^n$ در فهرست الگوها حضور دارد، تعداد جمعوندهای متمایز عبارت است از $\binom{m+n-۱}{n}$.

تمرینات تکمیلی

۱. الف) چون $f(e_G)=e_H$، نتیجه می‌گیریم که $e_G\in K$ و $K\neq\emptyset$. اگر $x,y\in K$، آن‌گاه $f(x)=f(y)=e_H$ و $f(xy)=f(x)f(y)=e_He_H=e_H$، پس $xy\in K$. همچنین، به‌ازای $x\in K$ داریم

$f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1} = e_H^{-1} = e_H$ و بنابراین، $x^{-1} \in K$. بنابراین، K زیرگروه G است.

ب) اگر $x \in K$، آن‌گاه $f(x) = e_H$. به‌ازای هر $g \in G$ داریم

$$\begin{aligned} f(gxg^{-1}) &= f(g)f(x)f(g^{-1}) = f(g)e_H f(g^{-1}) = f(g)f(g^{-1}) \\ &= f(gg^{-1}) = f(e_G) = e_H \end{aligned}$$

بنابراین، به‌ازای هر $x \in K$ و $g \in G$ می‌بینیم که $gxg^{-1} \in K$.

۲. فرض کنید $+$ عمل دوتایی G، H و K را نشان دهد.

فرض کنید $S = \{(h, \circ) | h \in H\}$. در اینجا $\circ$ عنصر همانی H (و K) و $(\circ, \circ)$ عنصر همانی G است. S زیرمجموعه‌ای ناتهی از G است.

تابع $f : G \to G$ که با $f(h, k) = (h, \circ)$ تعریف می‌شود همریختی است و داریم $f(G) = S$. بنابر قضیهٔ ۱۶ ۰ ۵(ت)، S زیرگروهی از G است. تابع $g : S \to H$ که با $g(h, \circ) = h$ تعریف می‌شود یکریختی‌ای بین S و H به‌دست می‌دهد.

به‌همین ترتیب، $\{(\circ, k) | k \in K\}$ زیرگروهی از G است که با K یکریخت است.

۳. فرض می‌کنیم $a, b \in G$. دراین‌صورت $a^۲b^۲ = ee = e = (ab)^۲ = abab$. ولی

$$a^۲b^۲ = abab \Longrightarrow aabb = abab \Longrightarrow ab = ba$$

و بنابراین، G آبلی است.

۴. چون مرتبهٔ G زوج است، مرتبهٔ $G - \{e\}$ فرد است. به‌ازای هر $g \in G$، $g \neq e$، اگر $g \neq g^{-۱}$، $\{g, g^{-۱}\}$ را کنار بگذارید. با ادامهٔ این فرایند، باید دست‌کم یک عنصر مانند $a \in G$ به‌دست آوریم که در $a = a^{-۱}$ صدق کند.

۵. اگر T زیرگروهی از H باشد، آن‌گاه $e_H \in T$ و $f(e_G) = e_H$. پس $e_G \in f^{-۱}(T)$. بنابراین $f^{-۱}(T) \neq \emptyset$. اگر $x, y \in f^{-۱}(T)$، دراین‌صورت $f(x), f(y) \in T$.

$$(\text{زیرگروهی از } H \text{ است } T) \Longrightarrow f(x)f(y) = f(xy) \in T \Longrightarrow xy \in f^{-۱}(T)$$

همچنین،

$$x \in f^{-۱}(T) \Longrightarrow f(x) \in T \Longrightarrow [f(x)]^{-۱} \in T \Longrightarrow f(x^{-۱}) \in T \Longrightarrow x^{-۱} \in f^{-۱}(T)$$

درنتیجه، $f^{-۱}(T)$ زیرگروهی از G است.

۶. در $(\mathbf{Z}_۹, +)$، مرتبهٔ هر یک از عنصرهای ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ برابر است با ۹. درحالی‌که مرتبهٔ هر یک از عنصرهای $(\mathbf{Z}_۳ \times \mathbf{Z}_۳, +)$ برابر است با ۱ یا ۳.

۷. فرض می‌کنیم $G = < g >$ و $h = f(g)$. اگر $h_۱ \in H$، آن‌گاه به‌ازای عددی مانند $n \in \mathbf{Z}$ داریم $h_۱ = f(g^n)$، زیرا f پوشاست. بنابراین، $h_۱ = f(g^n) = [f(g)]^n = h^n$ و $H = \langle h \rangle$.

۸. الف) چون $(۱, ۱) = (۱, \circ) \oplus (\circ, ۱)$، پس $(\circ, \circ) = (۱, ۱) \oplus (۱, ۱) = (۱, ۱) \oplus (\circ, ۱) \oplus (۱, \circ)$.

ب) در اینجا داریم

$$\big((۱,۰,۰)\oplus(۰,۱,۱)\big)\oplus\big((۰,۱,۰)\oplus(۱,۰,۱)\big)\oplus\big((۰,۰,۱)\oplus(۱,۱,۰)\big)\oplus(۱,۱,۱)=$$
$$(۱,۱,۱)\oplus(۱,۱,۱)\oplus(۱,۱,۱)\oplus(۱,۱,۱)=(۰,۰,۰)$$

پ) فرض می‌کنیم $n\in\mathbf{Z}^+$ و $n>۱$. گروه $(\mathbf{Z}_۲\times\mathbf{Z}_۲\times\cdots\times\mathbf{Z}_۲,\oplus)$ را، که در آن n نسخه از $\mathbf{Z}_۲$ داریم و عمل $\oplus$ جمع مؤلفه به مؤلفه به پیمانهٔ ۲ است، درنظر بگیرید. مجموع همهٔ عنصرهای غیرصفر (یا غیرهمانی) متعلق به این گروه برابر است با $(۰,۰,\ldots,۰)$ (و می‌دانیم که عنصر اخیر عنصر همانی گروه است).

برهان: در این گروه، $۲^n-۲$ عنصر داریم که در هر یک از آنها دست‌کم یک ۰ و دست‌کم یک ۱ وجود دارد. این $۲^n-۲$ عنصر را می‌توان به $\frac{۱}{۲}(۲^n-۲)=۲^{n-۱}-۱$ جفت از عنصرهایی مانند x و y چنان دسته‌بندی کرد که $x\oplus y=(۱,۱,\ldots,۱)$ (یعنی عنصری که هر یک از مؤلفه‌هایش ۱ است). بنابراین، مجموع این $۲^n-۲$ عنصر به $۲^{n-۱}-۱$ جمعوند برای $(۱,۱,\ldots,۱)$ منجر می‌شود و این تعداد فرد از جمعوندها، $(۱,۱,\ldots,۱)$ را به‌دست می‌دهد. وقتی این نتیجه را به عنصر $(۱,۱,\ldots,۱)$ اضافه کنیم، نتیجه می‌گیریم که مجموع همهٔ عنصرهای غیرصفر متعلق به این گروه برابر است با عنصر همانی گروه.

۹. برهان: به‌ازای هر $a,b\in G$،

$$(a\circ a^{-۱})\circ b^{-۱}\circ b=b\circ b^{-۱}\circ(a^{-۱}\circ a)\Longrightarrow a\circ a^{-۱}\circ b=b\circ a^{-۱}\circ a\Longrightarrow a\circ b=b\circ a$$

و درنتیجه، $(G,\circ)$ گروهی آبلی است.

۱۰. به‌ازای $i=۰$ می‌بینیم که عنصر $n+۱$ به تنهایی در یک دور (به طول ۱) قرار دارد. در اینجا $Q(n,k)$ جایگشت داریم.

اکنون فرض می‌کنیم $i=۱$. در اینجا عنصر $n+۱$ در دوری به طول ۲ قرار دارد. عنصر دیگر را می‌توان به $\binom{n}{۱}=n$ طریق انتخاب کرد و $\binom{n}{۱}Q(n-۱,k)$ جایگشت داریم.

اگر $i=۲$، آن‌گاه عنصر $n+۱$ در دوری به طول ۳ قرار دارد. دو عنصر دیگر را می‌توان به $\binom{n}{۲}$ طریق انتخاب کرد و این سه عنصر را می‌توان به $۲!$ طریق در دوری به طول سه مرتب کرد. این عمل، $\binom{n}{۲}۲!Q(n-۲,k)$ جایگشت از ۱، ۲، ...، $n+۱$ را، که هر یک از آنها حاصل‌ضرب دورهای جدا از همی به طول حداکثر k است و در هر یک از آنها، عنصر $n+۱$ در دوری به طول ۳ قرار دارد، به‌دست می‌دهد.

به‌طورکلی، به‌ازای $i=t-۱$، $۱\leq t\leq k$، عنصر $n+۱$ در دوری به طول t قرار دارد. $t-۱$ عنصر دیگر را می‌توان به $\binom{n}{t-۱}$ طریق انتخاب کرد و سپس می‌توان این t عنصر را به $(t-۱)!$ طریق در دوری به طول t مرتب کرد. دراین‌صورت تعداد جایگشتهایی از ۱، ۲، ۳، ...، $n+۱$ که هر یک از آنها حاصل‌ضرب دورهای جدا از همی به طول حداکثر k است و در هر یک از آنها، عنصر $n+۱$ در دوری به طول t قرار دارد، برابر است با $\binom{n}{t-۱}(t-۱)!Q(n-(t-۱),k)$.

به این ترتیب، یک مجموعه از جایگشتها را به دو طریق شمردیم. بنابراین،

$$Q(n+1,k)=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}(i!)Q(n-i,k)$$

۱۱. الف) جایگشتی مانند σ را که در $P(n+1,k)$ به‌حساب آمده است درنظر بگیرید. اگر $(n+1)$ دوری (به طول ۱) در σ باشد، دراین‌صورت σ در $P(n,k-1)$ به حساب می‌آید. در غیر این‌صورت، جایگشت دلخواهی مانند τ را که در $P(n,k)$ به حساب آمده است درنظر بگیرید. در هر یک از دورهای τ مانند $(a_1a_2\ldots a_r)$، r مکان برای قرار دادن عنصر $n+1$ وجود دارد: (۱) بین a_1 و a_2، (۲) بین a_2 و a_3، ...، $(r-1)$ بین a_{r-1} و a_r و (r) بین a_r و a_1. بنابراین، روی هم n مکان برای قرار دادن عنصر $n+1$ در τ قرار دارد. درنتیجه،

$$P(n+1,k)=P(n,k-1)+nP(n,k)$$

ب) $\sum_{k=1}^{n}P(n,k)$ تعداد همهٔ جایگشتهای متعلق به S_n را، که برابر است با $n!$، به‌دست می‌دهد.

۱۲. الف) (یک) به‌ازای هر $\sigma,\tau\in S_n$ و هر $1\le i\le n$ داریم $|\sigma(i)-\tau(i)|\ge 0$ و بنابراین، $d(\sigma,\tau)\ge 0$.

(دو)

$$\begin{aligned}d(\sigma,\tau)=0 &\iff \big(\max|\sigma(i)-\tau(i)|=0,\ \ 1\le i\le n\big)\\ &\iff \big(|\sigma(i)-\tau(i)|=0,\ 1\le i\le n\big)\\ &\iff \big(\sigma(i)=\tau(i),\ \ 1\le i\le n\big)\iff \sigma=\tau\end{aligned}$$

(سه)

$$\begin{aligned}d(\sigma,\tau)&=\max\left\{|\sigma(i)-\tau(i)|\,\big|\,1\le i\le n\right\}\\ &=\max\left\{|\tau(i)-\sigma(i)|\,\big|\,1\le i\le n\right\}=d(\tau,\sigma)\end{aligned}$$

(چهار) فرض می‌کنیم به‌ازای اندیسی مانند $1\le i\le n$ داشته باشیم $d(\rho,\tau)=|\rho(i)-\tau(i)|$. دراین‌صورت،

$$\begin{aligned}|\rho(i)-\tau(i)|&=\big|\big(\rho(i)-\sigma(i)\big)+\big(\sigma(i)-\tau(i)\big)\big|\le|\rho(i)-\sigma(i)|+|\sigma(i)-\tau(i)|\\ &\le d(\rho,\sigma)+d(\sigma,\tau)\end{aligned}$$

ب) چون $d(\pi,\epsilon)=\max\{|\pi(i)-i|\,|\,1\le i\le n\}$، از $d(\pi,\epsilon)\le 1$ نتیجه می‌شود که $\pi(n)=n$ یا $\pi(n)=n-1$.

پ) اگر $\pi(n)=n$، آن‌گاه تحدید π به $\{1,2,3,\ldots,n-1\}$ نیز یک جایگشت است. بنابراین، می‌توانیم π را به‌عنوان عنصری از S_{n-1} تلقی کنیم که در $d(\pi,\epsilon)\le 1$ (این ϵ متعلق به S_{n-1} است) صدق می‌کند. تعداد این نوع جایگشتها a_{n-1} است. اگر $\pi(n)=n-1$، باید داشته باشیم $\pi(n-1)=n$. پس تحدید π به $\{1,2,3,\ldots,n-2\}$ یک جایگشت است. می‌توانیم π را به‌عنوان عنصری از S_{n-2} تلقی کنیم که در $d(\pi,\epsilon)\le 1$ (این ϵ متعلق به S_{n-2} است) صدق می‌کند. تعداد این نوع جایگشتها a_{n-2} است. بنابراین، $a_0=1$، $a_1=1$، $a_2=2$ و به‌ازای هر $n\ge 2$ داریم $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. درنتیجه، $a_n=F_{n+1}$ که در آن F_{n+1} عدد $(n+1)$اُم فیبوناچی است.

۱۳. الف) (یک) $\binom{۴}{۲}(۰/۷۵)^{۲}(۰/۲۵)^{۲}$

(دو) $\binom{۴}{۴}(۰/۷۵)^{۴} + \binom{۴}{۳}(۰/۷۵)^{۳}(۰/۲۵) + \binom{۴}{۲}(۰/۷۵)^{۲}(۰/۲۵)^{۲}$

ب) دست‌کم سه‌تا.

۱۴. $G = \{\pi_۰, \pi_۱, \pi_۲, \pi_۳\}$

الف) $\frac{۱}{۴}(۵^۸ + ۵^۲ + ۵^۴ + ۵^۲) = ۹۷۸۲۵$

ب) در اینجا عملاً چهار رنگ به‌کار می‌رود. می‌توان این چهار رنگ را به $۵ = \binom{۵}{۴}$ طریق انتخاب کرد. برای یکی از این انتخابها، فرض می‌کنیم c_i، $۱ \leq i \leq ۴$، نشان دهد که رنگ iاُم به‌کار رفته است. دراین‌صورت با استفاده از اصل شمول و طرد داریم

$$N = \frac{۱}{۴}\left[۴^۸ + ۲(۴^۲) + ۴^۴\right] = ۱۶۴۵۶$$

$$N(c_i) = \frac{۱}{۴}\left[۳^۸ + ۲(۳^۲) + ۳^۴\right] = ۱۶۶۵, \quad ۱ \leq i \leq ۴$$

$$N(c_i c_j) = \frac{۱}{۴}\left[۲^۸ + ۲(۲^۲) + ۲^۴\right] = ۷۰, \quad ۱ \leq i < j \leq ۴$$

$$N(c_i c_j c_k) = \frac{۱}{۴}\left[۱^۸ + ۲(۱^۲) + ۱^۴\right] = ۱, \quad ۱ \leq i < j < k \leq ۴$$

$$N(c_۱ c_۲ c_۳ c_۴) = ۰$$

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴) = N - S_۱ + S_۲ - S_۳ + S_۴ = ۱۶۴۵۶ - \binom{۴}{۱}(۱۶۶۵) + \binom{۴}{۲}(۷۰) - \binom{۴}{۳}(۱) + ۰ = ۱۰۲۱۲$$

بنابراین، پاسخ مطلوب عبارت است از $۵۱۰۶۰ = (۱۰۲۱۲)(۵)$.

۱۷

هیأتهای متناهی و طرحهای ترکیبیاتی

بند ۱.۱۷

۱.
$$f(x)+g(x) = ۲x^۴ + (۲+۳)x^۳ + (۳+۵)x^۲ + (۱+۶)x + (۴+۱)$$
$$= ۲x^۴ + ۵x^۳ + ۸x^۲ + ۷x + ۵ = ۲x^۴ + ۵x^۳ + x^۲ + ۵$$

$$f(x)-g(x) = ۲x^۴ + (۲-۳)x^۳ + (۳-۵)x^۲ + (۱-۶)x + (۴-۱)$$
$$= ۲x^۴ + (-۱)x^۳ + (-۲)x^۲ + (-۵)x + ۳ = ۲x^۴ + ۶x^۳ + ۵x^۲ + ۲x + ۳$$

$$f(x)g(x) = (۲)(۳)x^۷ + \big[(۲)(۵)+(۲)(۳)\big]x^۶ + \big[(۲)(۶)+(۲)(۵)+(۳)(۳)\big]x^۵$$
$$+ \big[(۲)(۱)+(۲)(۶)+(۳)(۵)+(۱)(۳)\big]x^۴ + \big[(۲)(۱)+(۳)(۶)+(۱)(۵)$$
$$+ (۴)(۳)\big]x^۳ + \big[(۳)(۱)+(۱)(۶)+(۴)(۵)\big]x^۲ + \big[(۱)(۱)+(۴)(۶)\big]x + ۴$$
$$= ۶x^۷ + ۱۶x^۶ + ۳۱x^۵ + ۳۲x^۴ + ۳۷x^۳ + ۲۹x^۲ + ۲۵x + ۴$$
$$= ۶x^۷ + ۲x^۶ + ۳x^۵ + ۴x^۴ + ۲x^۳ + x^۲ + ۴x + ۴$$

۲. چهار تا از این نوع چندجمله‌ایها وجود دارد:

$x^۲$ (۱) $x^۲+x$ (۲) $x^۲+۱$ (۳) $x^۲+x+۱$ (۴)

۳. $(۱۰)(۱۱)^۲$، $(۱۰)(۱۱)^۳$، $(۱۰)(۱۱)^۴$ و $(۱۰)(۱۱)^n$

۴. الف) $f(x)=۴x+۸$ و $g(x)=۳x^۲$

ب) $h(x)=۴x^۵+x$ و $k(x)=۳x^۲$

۵. (قضیهٔ ۱۰۱۷) یکی از قوانین پخش‌پذیری را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $f(x)=\sum_{i=۰}^{n} a_i x^i$، $g(x)=\sum_{j=۰}^{m} b_j x^j$ و $h(x)=\sum_{k=۰}^{p} c_k x^k$، که در آن $m \ge p$. به‌ازای $۰ \le t \le m+n$، ضریب x^t در $f(x)\big[g(x)+h(x)\big]$

برابر است با $\sum a_i(b_j + c_j)$، که در آن عمل جمع نسبت به همهٔ iها و jهایی انجام گرفته است که در $0 \le i \le n$، $0 \le j \le m$ و $i + j = t$ صدق می‌کنند. ولی این مجموع با مجموع $(\sum a_i b_j) + (\sum a_i c_j)$، که در آن $0 \le i \le n$، $0 \le j \le m$ و $i + j = t$، یکی است زیرا در حلقهٔ R داریم $a_i(b_j + c_j) = a_i b_j + a_i c_j$ و ضمناً مجموع یاد شده برابر است با ضریب x^t در $f(x)g(x) + f(x)h(x)$.

(فرع ۱۰۰۱۷)

الف) فرض کنید $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$، به‌ازای هر $0 \le t \le m + n$، ضریب x^t در $f(x)g(x)$ عبارت است از $\sum_{i+j=t} a_i b_j = \sum_{i+j=t} b_j a_i$ (زیرا R تعویض‌پذیر است) و مجموع طرف راست تساوی اخیر برابر است با ضریب x^t در $g(x)f(x)$. بنابراین، $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ و $R[x]$ تعویض‌پذیر است.

ب) فرض کنید ۱ عنصر یکِ R را نشان دهد. دراین‌صورت ۱ یا $1x^0$ عنصر یکِ $R[x]$ است.

پ) فرض کنید R حوزهٔ صحیح باشد و $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$، که در آن $a_n \ne 0$ و $b_m \ne 0$. اگر $f(x)g(x) = 0$، آن‌گاه $a_n b_m = 0$ و این تناقض است، زیرا R حوزهٔ صحیح است. برعکس، اگر $R[x]$ حوزهٔ صحیح باشد و اگر عنصرهای $a, b \in R$ چنان باشند که $a \ne 0$ و $b \ne 0$، آن‌گاه $ab = (ax^0)(bx^0) \ne 0$. پس R حوزهٔ صحیح است.

۶. $ax^3 + bx^2 + cx + d = (3x + 1)(5x^2 + 3x - 7) = 15x^3 + 14x^2 - 18x - 7$. از مقایسهٔ ضرایب توانهای مشابه x می‌بینیم که $a = 15$، $b = 14$، $c = -18$ و $d = -7$.

۷. الف و ب) $f(x) = (x^2 + 4)(x - 2)(x + 2)$. ریشه‌ها عبارت‌اند از ± 2.

پ) $f(x) = (x + 2i)(x - 2i)(x - 2)(x + 2)$. ریشه‌ها عبارت‌اند از ± 2 و $\pm 2i$.

ت) (الف) $f(x) = (x^2 - 5)(x^2 + 5)$. ریشهٔ گویا وجود ندارد.

(ب) $f(x) = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x^2 + 5)$. ریشه‌ها عبارت‌اند از $\pm\sqrt{5}$.

(پ) $f(x) = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i)$. ریشه‌ها عبارت‌اند از $\pm\sqrt{5}$ و $\pm i\sqrt{5}$.

۸. الف) $q(x) = x + 5$ $\qquad r(x) = 25x^3 - 9x^2 - 30x - 3$

ب) $q(x) = x^2 + x$ $\qquad r(x) = 1$

پ) $q(x) = x^2 + 4x + 2$ $\qquad r(x) = x + 2$

۹. الف) $f(3) = 8060$ $\qquad$ ب) $f(1) = 1$ $\qquad$ پ) $f(-9) = f(2) = 6$

۱۰. الف) ۰، ۲، ۶، ۸

ب) $x(x + 4) = (x - 0)(x - 8) = f(x) = (x - 2)(x - 6)$

پ) خیر. $\mathbf{Z}_{12}$ هیأت نیست.

۱۱. چون $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ حوزهٔ صحیح است و هیأت نیست، الگوریتم تقسیم برای چندجمله‌ایها در $\mathbf{Z}[x]$ برقرار نیست.

۱۲. الف) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x - 5)$.

ب) $f(x) = x^7 - x = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$

۱۳. $f(x) = (3x-1)(7x-1) = 21x^2 - 4x - 1$.

۱۴. الف) اگر $x-1$ عامل $f(x)$ باشد، آن‌گاه ۱ ریشهٔ این چندجمله‌ای است. درنتیجه،

$$0 = f(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

برعکس

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \Longrightarrow 0 = a_n(1)^n + a_{n-1}(1)^{n-1} + \cdots + a_2(1)^2 + a_1(1)^1 + a_0(1)^0 = f(1)$$

$$\Longrightarrow (\text{است } f(x) \text{ ریشهٔ } 1) \Longrightarrow (\text{است } f(x) \text{ عامل } x-1)$$

ب) اگر $x+1$ عامل $f(x)$ باشد، آن‌گاه -1 ریشهٔ این چندجمله‌ای است. بنابراین،

$$0 = a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + a_{n-2}(-1)^{n-2} + a_{n-3}(-1)^{n-3} + \cdots + a_3(-1)^3 + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0$$

چون n زوج است، نتیجه می‌گیریم که

$$0 = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \cdots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

پس $a_n + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_0 = a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_3 + a_1$.

برعکس، با توجه به شرایط داده شده داریم

$$a_n + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_0 = a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_3 + a_1 \Longrightarrow$$
$$0 = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \cdots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \Longrightarrow$$
$$0 = a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + a_{n-2}(-1)^{n-2} + \cdots + a_{n-3}(-1)^{n-3} + \cdots + a_3(-1)^3 + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = f(-1) \Longrightarrow$$

$$(\text{است} f(x) \text{ ریشهٔ } -1) \Longrightarrow (\text{است} f(x) \text{ عامل } x-(-1) = x+1)$$

۱۵. $p-1$ ،۶ ،۴

۱۶. اگر $f(x)$ یکه‌ای از $R[x]$ باشد، عنصری مانند $g(x)$ در $R[x]$ وجود دارد به‌طوری که $f(x)g(x) = 1$ (که در آن ۱ عنصر یکِ $R[x]$ است). چون $f(x)g(x) = 1$ و R حوزهٔ صحیح است، نتیجه می‌گیریم که

$$\deg 1 = 0 = \deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

بنابراین، $\deg f(x) = 0 = \deg g(x)$ و بنابراین، هر یک از دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ ثابت است. پس هر یک از آنها یکه‌ای از R است.

۱۷. در $\mathbf{Z}_4[x]$، $1 = (1+2x)(1+2x)$ و بنابراین، $(1+2x)$ یکه است. این با تمرین ۱۲ تناقض ندارد، زیرا $(\mathbf{Z}_4, +, \cdot)$ حوزهٔ صحیح نیست.

۱۸. اگر $a \equiv b(n$ پیمانهٔ$)$، بااستفاده از استقرای ریاضی نتیجه می‌شودکه به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$ داریم $a^k \equiv b^k(n$ پیمانهٔ$)$. همچنین با توجه به تعریف ضرب در $\mathbf{Z}_n$، به‌ازای هر $c \in \mathbf{Z}$ داریم $c(a^k) \equiv c(b^k)(n$ پیمانهٔ$)$. سرانجام، باز هم با اعمال استقرای ریاضی (بر درجهٔ $f(x)$) و با استفاده از تعریف جمع در $\mathbf{Z}_n$، نتیجه می‌گیریم که $f(a) \equiv f(b)(n$ پیمانهٔ$)$.

۱۹. فرض‌کنید $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $h(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$، که در آن به‌ازای هر $0 \le i \le m$، $a_i \in R$، به‌ازای هر $0 \le i \le k$، $b_i \in R$ و $m \le k$. دراین‌صورت $f(x) + h(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i)x^i$، که در آن $a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_k = z$ (z، عنصر صفر R است). بنابراین،

$$G\big(f(x) + h(x)\big) = G\Big(\sum_{i=0}^{k}(a_i + b_i)x^i\Big) = \sum_{i=0}^{k} g(a_i + b_i)x^i = \sum_{i=0}^{k} \big[g(a_i) + g(b_i)\big]x^i$$
$$= \sum_{i=0}^{k} g(a_i)x^i + \sum_{i=0}^{k} g(b_i)x^i = G\big(f(x)\big) + G\big(h(x)\big)$$

همچنین، $f(x)h(x) = \sum_{i=0}^{m+k} c_i x^i$، که در آن $c_i = a_i b_0 + a_{i-1}b_1 + \cdots + a_1 b_{i-1} + a_0 b_i$. پس

$$G\big(f(x)h(x)\big) = G\Big(\sum_{i=0}^{m+k} c_i x^i\Big) = \sum_{i=0}^{m+k} g(c_i)x^i$$

چون $g(c_i) = g(a_i)g(b_0) + g(a_{i-1})g(b_1) + \cdots + g(a_1)g(b_{i-1}) + g(a_0)g(b_i)$، داریم

$$\sum_{i=0}^{m+k} g(c_i)x^i = \Big(\sum_{i=0}^{m} g(a_i)x^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k} g(b_i)x^i\Big) = G\big(f(x)\big) \cdot G\big(h(x)\big)$$

درنتیجه، $G : R[x] \Longrightarrow S[x]$ همریختی حلقه است.

بند ۲.۱۷

۱. الف) $x^2 + 3x - 1$ در $\mathbf{Q}$ تحویل‌ناپذیر است. در $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ می‌بینیم که

$$x^2 + 3x - 1 = \left(x - \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}\right)$$

ب) $x^4 - 2$ در $\mathbf{Q}$ تحویل‌ناپذیر است. در $\mathbf{R}$ داریم

$$x^4 - 2 = \big(x - \sqrt[4]{2}\big)\big(x + \sqrt[4]{2}\big)\big(x^2 + \sqrt{2}\big)$$

در $\mathbf{C}$ می‌بینیم که

$$x^4 - 2 = \big(x - \sqrt[4]{2}\big)\big(x + \sqrt[4]{2}\big)\big(x - \sqrt[4]{2}i\big)\big(x + \sqrt[4]{2}i\big)$$

چون چهار نقطه روی ℓ_∞ وجود دارد، تعداد رده‌های خطوط متوازی برابر با ۴ است. سرانجام، پارامترهای طرح بلوکی ناکامل متعادل وابسته عبارت‌اند از $v = b = 13$، $r = k = 4$ و $\lambda = 1$.

تمرینات تکمیلی

۱. $n = 9$

۲. الف) $$0 = f\left(\frac{r}{s}\right) = a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_0$$

$$\Longrightarrow 0 = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n$$

چون s عدد ۰ را می‌شمارد و چون s در همهٔ جمعوندها، به استثنای جمعوند اول، عامل ضرب است، نتیجه می‌گیریم که s عدد $a_n r^n$ را می‌شمارد. چون $\gcd(r, s) = 1$، پس $s|a_n$ به همین ترتیب، $r|a_0$.

ب) (یک) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$.

با توجه به قسمت (الف)، ریشه‌های گویای احتمالی عبارت‌اند از ± 1، ± 3، $\pm \frac{1}{2}$ و $\pm \frac{3}{2}$.

$$f(1) = 2(1^3) + 3(1^2) - 2(1) - 3 = 0$$

پس عدد ۱ ریشهٔ $f(x)$ و $x - 1$ عامل آن است. با استفاده از الگوریتم تقسیم چندجمله‌ایها (یا دسته‌بندی و فاکتورگیری) می‌بینیم که

$$f(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 3) = (x-1)(2x+3)(x+1)$$

پس ریشه‌های دیگر $f(x)$ عبارت‌اند از $-\frac{3}{2}$ و -1.

(دو) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.

ریشه‌های گویای احتمالی عبارت‌اند از ± 1 و ± 2. اکنون می‌بینیم که $f(1) = -3$، $f(-1) = -1$، $f(2) = 14$ و $f(-2) = 6$. پس ریشهٔ گویا وجود ندارد. ولی آیا می‌توان اعداد گویایی مانند a، b، c و d چنان یافت که $f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$؟

ملاحظه می‌کنیم که

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 \Longrightarrow$$

$$a + c = 1, b + ac + d = -1, ad + bc = -2, bd = -2 \Longrightarrow$$

$$a = 1, b = 1, c = 0, d = -2$$

پس $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - 2)$.

(سه) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 4x - 4$.

ریشه‌های گویای احتمالی عبارت‌اند از ± 1، ± 2، ± 4، $\pm \frac{1}{3}$، $\pm \frac{2}{3}$ و $\pm \frac{4}{3}$. چون $f(-1) = 0$، $x + 1$

یکی از عاملهای $f(x)$ است و می‌بینیم که

$$f(x) = (x+1)(3x^3 - 5x^2 - 4) = (x+1)g(x)$$

چون $g(2) = 0$، داریم $g(x) = (x-2)(3x^2+x+2)$، که در آن $3x^2+x+2$ در $\mathbf{Q}$ تحویل‌ناپذیر است.

بنابراین، $f(x) = (x+1)(x-2)(3x^2+x+2)$.

پ) تنها ریشه‌های گویای احتمالی برای $f(x) = x^{100} - x^{50} + x^{20} + x^3 + 1$ عبارت‌اند از ± 1. ولی $f(1) = 3 \neq 0$ و $f(-1) = 1 \neq 0$. بنابراین، $f(x)$ ریشهٔ گویا ندارد.

۳. الف) فرض می‌کنیم $a, b \in \mathbf{Z}$ به‌گونه‌ای باشند که $(x-a)(x+b) = x^2 + x - n$. دراین‌صورت،

$$x^2 + (b-a)x - ab = x^2 + x - n \Longrightarrow ab = n \text{ و } b - a = 1$$

به‌ازای $1 \leq a \leq 31$ و $b = a + 1$ داریم $n = ab \leq 992$. بنابراین، ۳۱ مقدار برای n وجود دارد که هر یک از آنها به‌صورت $a(a+1)$، $1 \leq a \leq 31$، است.

ب) در اینجا

$$(x-a)(x+b) = x^2 + 2x - n \Longrightarrow ab = n \text{ و } b - a = 2$$

وقتی $1 \leq a \leq 30$ و $b = a+2$، می‌بینیم که $n = ab \leq 960$. بنابراین، در این حالت ۳۰ مقدار برای n وجود دارد.

پ) در این حالت ۲۹ مقدار برای n وجود دارد. هر یک از این nها به‌صورت $a(a+5)$ است، که در آن $1 \leq a \leq 29$.

ت) اگر $g(x) = (x-a)(x+b)$، آن‌گاه $b - a = k$ و $ab = n$. به‌ازای $k = 1000$ داریم $b = a + 1000$ و $ab = a^2 + 1000a > 1000$. به‌ازای $k = 999$، اگر $a = 1$ و $b = 1000$، آن‌گاه $n = ab = 1000$ و $x^2 + 999x - 1000 = (x+1000)(x-1)$. درحقیقت، به‌ازای هر $1 \leq k \leq 999$، فرض کنید $a = 1$. دراین‌صورت $b = k+1$ و $n = ab = k+1$. درنتیجه،

$$x^2 + kx - n = x^2 + kx - (k+1) = [x + (k+1)](x-1)$$

بنابراین، کوچکترین عدد صحیح مثبتی مانند k که به‌ازای آن $g(x)$ نمی‌تواند تجزیه شود عبارت است از $k = 1000$.

۴. اگر $F = \mathbf{Z}_2$، آن‌گاه $f(1) = 1+1+1+1 = 0$ و بنابراین، ۱ ریشهٔ f و $(x+1) = (x-1)$ یکی از عاملهای آن است. اگر $F \neq \mathbf{Z}_2$، آن‌گاه $-1 \in F$ و $1 \neq -1$. در اینجا $f(-1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ و بنابراین، -1 ریشه و $(x+1)$ عامل f است.

۵. به‌ازای هر $a \in \mathbf{Z}_p$ داریم $a^p = a$ (قسمت (الف) از تمرین ۱۵ را در پایان بند ۱۶.۳ ببینید). بنابراین، a ریشهٔ

$x^p - x$ و $x - a$ یکی از عاملهای $x^p - x$ است. چون $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$ هیأت است، چندجمله‌ای $x^p - x$ می‌تواند حداکثر p ریشه داشته باشد. بنابراین، $x^p - x = \prod_{a\in \mathbf{Z}_p}(x-a)$.

۶. $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$

الف) ضریب x^{n-1} در $(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$ برابر است با $-r_1 - r_2 - \cdots - r_n$ و بنابراین، از مقایسهٔ ضرایب نتیجه می‌گیریم که $a_{n-1} = -r_1 - r_2 - \cdots - r_n$ یا $-a_{n-1} = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$.

ب) جملهٔ ثابت در $(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$ برابر است با $(-1)^n r_1 r_2 \cdots r_n$. باز هم از مقایسهٔ ضرایب نتیجه می‌گیریم که $a_0 = (-1)^n r_1 r_2 \cdots r_n$ یا

$$(-1)^n a_0 = (-1)^{2n} r_1 r_2 \cdots r_n = r_1 r_2 \cdots r_n$$

۷. با توجه به قسمت (الف) از تمرین تکمیلی ۴ در فصل ۱۴، می‌دانیم که به‌ازای هر $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$، $r \in \mathbf{R}$ و $n \in \mathbf{N}$ داریم (۱) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$، (۲) $\overline{rz_1} = \bar{r}\bar{z}_1 = r\,\bar{z}_1$ و (۳) $(\overline{z_1^n}) = (\overline{z_1})^n$.

چون $f(x) \in \mathbf{R}[x]$، می‌توان نوشت $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$، که در آن به‌ازای هر $0 \le j \le m$ داریم $a_j \in \mathbf{R}$. چون به‌ازای $a + bi \in \mathbf{C}$ داریم $f(a+bi) = 0$، می‌بینیم که $\sum_{j=0}^{m} a_j (a+bi)^j = 0$. بنابراین،

$$0 = \bar{0} = \overline{\sum_{j=0}^{m} a_j (a+bi)^j} = \sum_{j=0}^{m} \overline{a_j (a+bi)^j} = \sum_{j=0}^{m} \bar{a}_j\ \overline{(a+bi)^j}$$
$$= \sum_{j=0}^{m} a_j \overline{(a+bi)^j} = \sum_{j=0}^{m} a_j (a-bi)^j$$

درنتیجه $a - bi$ ریشهٔ $f(x)$ است.

۸. الف) $\operatorname{char} R = 2$　　ب) $\operatorname{char} R = 3$

۹. $\{1, 2, 4\}$، $\{2, 3, 5\}$ و $\{4, 5, 7\}$.

۱۰. از $k = 3$، $\lambda = 1$ و $v = 63$ نتیجه می‌شود که $r = 31$ و $b = 651$.

۱۱. الف) اگر $n^2 + n + 1 = 73$، آن‌گاه $n = 8$ و درنتیجه، $n + 1 = 9$. بنابراین، تعداد نقاط هر خط برابر است با ۹.

ب) اگر $n + 1 = 10$، آن‌گاه $n = 9$ و درنتیجه، $n^2 + n + 1 = 91$. بنابراین، تعداد خطهای این صفحهٔ تصویری برابر است با ۹۱.

۱۲. اگر $|F| = n$، دراین‌صورت $n^2 + n + 1 = 91$ و $n = 9$. چون (با تقریب یکریختی) فقط یک هیأت مرتبهٔ ۹ وجود دارد، نتیجه می‌گیریم که $F = GF(3^2)$ و بنابراین، F دارای مشخصهٔ ۳ است.

۱۳. الف) در هر سطر، r تا ۱ و در هر ستون، k تا ۱ وجود دارد.

ب) $A \cdot J_b$ ماتریسی $v \times b$ است که درایهٔ (i,j)اُم آن r است، زیرا در هر سطر A، r تا ۱ وجود دارد و هر

درایهٔ J_b برابر با ۱ است. بنابراین، $A \cdot J_b = rJ_{v\times b}$. به‌همین ترتیب، $J_v \cdot A$ ماتریسی $v \times b$ است که درایهٔ (i, j)اُم آن k است، زیرا در هر ستون A، k تا ۱ وجود دارد و هر درایهٔ J_v برابر با ۱ است. بنابراین، $J_v \cdot A = kJ_{v\times b}$.

پ) درایهٔ (i, j)اُم $A \cdot A^{tr}$ از ضرب (مؤلفه به مؤلفهٔ) سطرهای iاُم و jاُم A به‌دست می‌آید. اگر $i = j$، این درایه تعداد ۱ های سطر i را، که برابر است با r، به‌دست می‌دهد. اگر $i \neq j$، تعداد ۱ ها برابر است با تعداد دفعاتی که x_i و x_j در یک بلوک حضور می‌یابند و این تعداد برابر با λ است. بنابراین، $A \cdot A^{tr} = (r-\lambda)I_v + \lambda J_v$.

ت)

$$\begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} r & \lambda - r & \lambda - r & \lambda - r & \cdots & \lambda - r \\ \lambda & r-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & r-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & r-\lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & r-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} r+(v-1)\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & r-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & r-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & r-\lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & r-\lambda \end{vmatrix}$$

$$[r+(v-1)\lambda](r-\lambda)^{v-1} = (r-\lambda)^{v-1}\left[r + r(k-1)\right] = rk(r-\lambda)^{v-1}$$

(۱) ستون ۱ را در ۱− ضرب و آن را به $v - 1$ ستون دیگر اضافه کنید.

(۲) سطرهای ۲ تا v را به سطر ۱ اضافه کنید.

۱۴. الف) در اینجا $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$ و بلوکهای ۱۲ ۶گانه عبارت‌اند از

۱ ۲ ۴ ۵ ۶ ۹	۱ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۳ ۴ ۵ ۷ ۸ ۹
۱ ۲ ۳ ۶ ۷ ۸	۱ ۳ ۴ ۶ ۷ ۹	۲ ۴ ۶ ۷ ۸ ۹
۱ ۲ ۳ ۵ ۷ ۸	۱ ۳ ۴ ۵ ۶ ۸	۲ ۳ ۵ ۶ ۸ ۹
۱ ۲ ۳ ۴ ۸ ۹	۱ ۲ ۴ ۵ ۷ ۸	۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

علاوه‌براین، $r' = 8$، $k' = 6$ و $\lambda' = 5$.

ب) به‌طورکلی می‌بینیم که $r' = b - r$، $k' = v - k$ و $\lambda' = b - [2r - \lambda] = b - 2r + \lambda$.

پیوستها

پیوست ۱

توابع نمایی و لگاریتمی

۱. الف) $\sqrt{xy^3} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}$

ب) $\sqrt[4]{81x^{-5}y^3} = 3x^{-\frac{5}{4}} y^{\frac{3}{4}} = \frac{3y^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{4}}}$

پ) $5\sqrt[3]{8x^9y^{-5}} = 5\left(8^{\frac{1}{3}} x^{\frac{9}{3}} y^{-\frac{5}{3}}\right) = 5\left(2x^3y^{-\frac{5}{3}}\right) = \frac{10x^3}{y^{\frac{5}{3}}}$

۲. الف) $125^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{(125)^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\left[(125)^{\frac{1}{3}}\right]^4} = \frac{1}{5^4} \frac{1}{625}$

ب) $0{,}027^{\frac{2}{3}} = \left[(0{,}027)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = (0{,}3)^2 = 0{,}09$

پ) $$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}\right] = \left(\frac{4}{3}\right)\left[\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2}\right] = \left(\frac{4}{3}\right)\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)}\right] = \left(\frac{4}{3}\right)(4) = \frac{16}{3}$$

۳. الف) $\left(5^{\frac{3}{4}}\right)\left(5^{\frac{13}{4}}\right) = 5^{\left[\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{13}{4}\right)\right]} = 5^{\frac{16}{4}} = 5^4 = 625$

ب) $\frac{\left(7^{\frac{3}{5}}\right)}{\left(7^{\frac{18}{5}}\right)} = 7^{\left[\left(\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{18}{5}\right)\right]} = 7^{\frac{(3-18)}{5}} = 7^{-\frac{15}{5}} = 7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$

پ) $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)\left(20^{\frac{1}{2}}\right)=\left(5^{\frac{1}{2}}\right)(4\cdot 5)^{\frac{1}{2}}=\left(5^{\frac{1}{2}}\right)\left(4^{\frac{1}{2}}\right)\left(5^{\frac{1}{2}}\right)=2\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$
$$=2(5)=10$$

۴. الف) $5^{3x^2}=5^{5x+2}\Longrightarrow 3x^2=5x+2\Longrightarrow 3x^2-5x-2=0\Longrightarrow (3x+1)(x-2)=0$
$\Longrightarrow x=2$ یا $x=-\frac{1}{3}$

ب) $4^{x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1}\Longrightarrow 2^{2(x-1)}=2^{-(4x-1)}\Longrightarrow 2(x-1)=-(4x-1)$
$$\Longrightarrow 2x-2=-4x+1\Longrightarrow 6x=3\Longrightarrow x=\frac{1}{2}$$

۵. الف) $\log_2 128=7$ ب) $\log_{125}5=\frac{1}{3}$

پ) $\log_{10}\frac{1}{10000}=-4$ ت) $\log_2 b=a$

۶. الف) 2 ب) -3 پ) 11

ت) -6 ث) $\frac{3}{2}$ ج) $\frac{1}{3}$

چ) 0 ح) $\frac{2}{3}$

۷. الف) $x^5=243\Longrightarrow x=3$ ب) $x=3^{-3}=\frac{1}{27}$

پ) $10^x=1000\Longrightarrow x=3$ ت) $x^{\frac{5}{2}}=32\Longrightarrow x=32^{\frac{2}{5}}\Longrightarrow x=4$

ث) $x=6^{0}=1$ ج) $x=8^{\frac{2}{3}}=4$

چ) $x=6^{-2}=\frac{1}{36}$ ح) $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}\Longrightarrow x=5$

۸. برهان: فرض‌کنید $x=\log_b r$ و $y=\log_b s$. با توجه به $b^x=r \Longleftrightarrow x=\log_b r$ و $b^y=s \Longleftrightarrow y=\log_b s$
و با استفاده از قسمت (۲) در قضیهٔ پ ۱۰۱ داریم

$$\frac{r}{s}=\frac{b^x}{b^y}=b^{x-y}$$

چون

$$\frac{r}{s}=b^{x-y}\Longleftrightarrow \log_b\left(\frac{r}{s}\right)=x-y$$

پس

$$\log_b\left(\frac{r}{s}\right)=x-y=\log_b r-\log_b s$$

۹. الف) برهان (با استفاده از استقرای ریاضی):

به‌ازای $n=1$، این گزاره عبارت است از $\log_b r^1=1\times\log_b r$. پس نتیجهٔ موردنظر در این حالت اول درست است. درستی این نتیجه را به‌ازای $n=k$ $(k\geq 1)$ مفروض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم

$\log_b r^k = k\log_b r$. در حالت $n = k + ۱$ می‌بینیم که

$$\log_b r^{k+۱} = \log_b(r\cdot r^k) = \log_b r + \log_b r^k \quad \text{(با توجه به قضیهٔ پ۱۰۲(الف))}$$
$$= \log_b r + k\log_b r \quad \text{(با توجه به فرض استقرا)}$$
$$= (۱ + k)\log_b r = (k+۱)\log_b r$$

به این ترتیب، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجهٔ موردنظر به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

ب) به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$،

$$\log_b r^{-n} = \log_b\left(\frac{۱}{r^n}\right) = \log_b ۱ - \log_b r^n \quad \text{(با توجه به قضیهٔ پ ۱۰۲(ب))}$$
$$= ۰ - n\log_b r \quad \text{(بنابر قسمت (الف))}$$
$$= (-n)\log_b r$$

۱۰. الف) $\log_۲ ۱۰ = \log_۲(۲\times ۵) = \log_۲ ۲ + \log_۲ ۵ = ۱ + ۲{,}۳۲۱۹ = ۳{,}۳۲۱۹$

ب) $\log_۲ ۱۰۰ = \log_۲ ۱۰^۲ = ۲\log_۲ ۱۰ = ۲(۳{,}۳۲۱۹) = ۶{,}۶۴۳۸$

پ) $\log_۲\left(\frac{۷}{۵}\right) = \log_۲ ۷ - \log_۲ ۵ = ۲{,}۸۰۷۴ - ۲{,}۳۲۱۹ = ۰{,}۴۸۵۵$

ت) $\log_۲ ۱۷۵ = \log_۲(۷/۲۵) = \log_۲ ۷ + ۲\log_۲ ۵ = ۲{,}۸۰۷۴ + ۲(۲{,}۳۲۱۹) = ۷{,}۴۵۱۲$

۱۱. الف) فرض کنید $x = \log_۲ ۳$. دراین‌صورت $۳ = ۲^x$ و $\ln ۳ = \ln ۲^x = x(\ln)۲$. پس

$$\log_۲ ۳ = x = \frac{\ln ۳}{\ln ۲} = \frac{۱{,}۰۹۸۶}{۰{,}۶۹۳۱} \doteq ۱{,}۵۸۵۱$$

ب) $\log_۵ ۲ = \frac{\ln ۲}{\ln ۵} = \frac{۰{,}۶۹۳۱}{۱{,}۶۰۹۴} \doteq ۰{,}۴۳۷۰$

پ) $\log_۳ ۵ = \frac{\ln ۵}{\ln ۳} = \frac{۱{,}۶۰۹۴}{۱{,}۰۹۸۶} \doteq ۱{,}۴۶۵۰$

۱۲. الف) $\log_{۱۰} x = \log_{۱۰}(۲\times ۵) \Longrightarrow x = ۱۰$

ب) $\log_۲ x = \log_۲ \frac{۷}{۳۰} \Longrightarrow x = \frac{۷}{۳۰}$

پ) $\log_۲ ۳x = \log_۲ \frac{۷}{۵} \Longrightarrow ۳x = \frac{۷}{۵} \Longrightarrow x = \frac{۷}{۱۵}$

۱۳. الف) $۱ = \log_{۱۰} x + \log_{۱۰} ۶ = \log_{۱۰} ۶x \Longrightarrow ۶x = ۱۰^۱ = ۱۰ \Longrightarrow x = \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۳}$

ب) $\ln\left(\frac{x}{(x-۱)}\right) = \ln ۳ \Longrightarrow \frac{x}{(x-۱)} = ۳ \Longrightarrow x = ۳(x-۱) \Longrightarrow x = ۳x - ۳$

$$\Longrightarrow -۲x = -۳ \Longrightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

پ) $۴ = \log_۶ x^۳ - \log_۶ x = ۳\log_۶ x - \log_۶ x = ۲\log_۶ x \Longrightarrow ۲ = \log_۶ x \Longrightarrow x = ۶^۲ - ۳۶$

ت)
$$۲ = \log_۳(x^۲ + ۴x + ۴) - \log_۳(۲x - ۵) = \log_۳\left[\frac{(x^۲ + ۴x + ۴)}{(۲x - ۵)}\right] \Longrightarrow ۳^۲ = ۹ =$$
$$\frac{(x^۲ + ۴x + ۴)}{(۲x - ۵)} \Longrightarrow ۹(۲x - ۵) = x^۲ + ۴x + ۴ \Longrightarrow ۱۸x - ۴۵ = x^۲ + ۴x + ۴ \Longrightarrow$$
$$x^۲ - ۱۴x + ۴۹ = ۰ \Longrightarrow (x - ۷)^۲ = ۰ \Longrightarrow x = ۷$$

.۱۴
$$\log_۲ x = \left(\frac{۱}{۳}\right)[\log_۲ ۳ - \log_۲ ۵] + \left(\frac{۲}{۳}\right)\log_۲ ۶ + \log_۲ ۱۷$$
$$= \log_۲\left(\frac{۳}{۵}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \log_۲ ۶^{\frac{۲}{۳}} + \log_۲ ۱۷ = \log_۲\left[۱۷\left(\frac{۱۰۸}{۵}\right)^{\frac{۱}{۳}}\right] \Longrightarrow x = ۱۷\left(\frac{۱۰۸}{۵}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

.۱۵ برهان: فرض کنید $x = a^{\log_b c}$ و $y = c^{\log_a b}$. دراین‌صورت

$$x = a^{\log_b c} \Longrightarrow \log_b x = \log_b[a^{\log_b c}] = (\log_b c)(\log_b a)$$

و

$$y = c^{\log_a b} \Longrightarrow \log_b y = \log_b[c^{\log_b a}] = (\log_b a)(\log_b c)$$

به این ترتیب می‌بینیم که $\log_b x = \log_b y$ و درنتیجه، $x = y$.

پیوست ۲

ماتریسها، عملهای ماتریسی و دترمینانها

۱. الف) $\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۱ & -۸ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$

پ) $\sum_{j=۱}^{۴} a_{۲j} = a_{۲۱} + a_{۲۲} + a_{۲۳} + a_{۲۴} = -۱ + ۳ + ۱ - ۸ = -۵$

ت) $\sum_{i=۱}^{۳} a_{i۴} = a_{۱۴} + a_{۲۴} + a_{۳۴} = -۳ - ۸ + ۶ = -۵$

۲. $w = ۴$، $x = ۳$، $y = ۲$ و $z = ۲$

۳.

الف) $A + B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$

ب) $(A + B) + C = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۷ \\ ۵ & ۶ & ۴ \end{bmatrix}$

پ) $B + C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۶ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$

ت) $A + (B + C) = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۷ \\ ۵ & ۶ & ۴ \end{bmatrix}$

ث) $۲A = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۸ \\ -۲ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$

ج) $۲A + ۳B = \begin{bmatrix} ۷ & ۵ & ۱۱ \\ ۱ & ۶ & ۱۸ \end{bmatrix}$

چ) $۲C + ۳C = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ & ۱۰ \\ ۲۵ & ۲۰ & -۱۵ \end{bmatrix}$

ح) $۵C = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ & ۱۰ \\ ۲۵ & ۲۰ & -۱۵ \end{bmatrix}$

خ) $۲B - ۴C = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۶ \\ -۱۸ & -۱۲ & ۲۰ \end{bmatrix}$

د) $A + ۲B - ۳C = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ -۱۴ & -۸ & ۲۰ \end{bmatrix}$

ذ) $۲(۳B) = \begin{bmatrix} ۶ & ۶ & ۶ \\ ۶ & ۱۲ & ۲۴ \end{bmatrix}$ ر) $(۲ \cdot ۳)B = \begin{bmatrix} ۶ & ۶ & ۶ \\ ۶ & ۱۲ & ۲۴ \end{bmatrix}$

.۴ $۳a + ۴ = ۲, \quad a = -۲/۳; \quad ۳b - ۸ = ۰, \quad b = ۸/۳$

$۳c - ۱۲ = ۱۰, \quad c = ۲۲/۳; \quad ۳d - ۸ = ۶, \quad d = ۱۴/۳$

.۵

الف) [۱۲] یا ۱۲ ب) $\begin{bmatrix} ۹ & ۲۱ \\ ۱۲ & ۲۷ \end{bmatrix}$

پ) $\begin{bmatrix} -۱۰ & -۱۰ \\ ۱۸ & ۲۴ \end{bmatrix}$ ت) $\begin{bmatrix} -۵ & -۷ & ۸ \\ ۲۹ & ۲۱ & ۲ \\ -۲۳ & -۳۵ & ۶ \end{bmatrix}$

ث) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ۳g & ۳h & ۳i \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳g & ۳h & ۳i \\ d & e & f \end{bmatrix}$

.۶ الف)

$$AB + AC = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۴ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۲ \\ -۲ & -۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱۰ & ۲۴ \\ ۳ & ۸ & ۶ \\ ۳ & ۹ & ۱۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۸ & -۳۱ & ۲۶ \\ -۴ & -۱۱ & ۱۰ \\ -۶ & -۲۱ & ۱۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & -۲۱ & ۵۰ \\ -۱ & -۳ & ۱۶ \\ -۳ & -۱۲ & ۳۳ \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۴ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۲ \\ -۲ & -۷ & ۶ \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & -۶ \\ -۱ & -۴ & ۱۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & -۲۱ & ۵۰ \\ -۱ & -۳ & ۱۶ \\ -۳ & -۱۲ & ۳۳ \end{bmatrix}$$

ب)

$$BA + CA = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۴ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۲ \\ -۲ & -۷ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۲ & ۲۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۵ & -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۴ \\ -۳ & ۲۱ \end{bmatrix}$$

$$(B+C)A=\left(\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۴\\ ۱ & ۳ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & ۳ & -۲\\ -۲ & -۷ & ۶\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱ & ۵ & -۶\\ -۱ & -۴ & ۱۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & -۴\\ -۳ & ۲۱\end{bmatrix}$$

۷. الف) $(-۱/۵)\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۳ & ۱\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$

پ) وارون وجود ندارد. ت) $\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۲ & ۷\end{bmatrix}$

۸. الف) $A=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & -۵\end{bmatrix}=(۱/۲)\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & -۵\end{bmatrix}=(۱/۲)\begin{bmatrix}۱ & ۱۰\\ ۰ & -۱۰\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}^{-۱}\left(\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۵\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۷ & ۱۹\\ -۱۰ & -۱۱\end{bmatrix}$

۹. الف) $A^{-۱}=(۱/۲)\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ب) $B^{-۱}=(۱/۵)\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}$

پ) $AB=\begin{bmatrix}-۴ & ۳\\ -۶ & ۲\end{bmatrix}$ ت) $(AB)^{-۱}=(۱/۱۰)\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۶ & -۴\end{bmatrix}$

ث) $B^{-۱}A^{-۱}=(۱/۱۰)\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۶ & -۴\end{bmatrix}$

۱۰. $BA=I_۲$

$$\begin{bmatrix}w & x\\ y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aw+cx & bw+dx\\ ay+cz & by+dz\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{matrix}aw+cx=۱\\ bw+dx=۰\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{matrix}abw+bcx=b\\ abw+adx=۰\end{matrix}\right\}\Longrightarrow(bc-ad)x=b$$

$$\Longrightarrow x=b/(bc-ad)=-b/(ad-bc),\ ad-bc\neq ۰$$

به‌ازای $b\neq ۰$ داریم $w=-dx/b=(-d/b)(-b/(ad-bc))=d/(ad-bc)$

$$\left\{\begin{array}{l} ay+cz=۰ \\ by+dz=۱ \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} aby+bcz=۰ \\ aby+adz=a \end{array}\right\} \Longrightarrow (bc-ad)z=-a$$

$$\Longrightarrow z=-a/(bc-ad)=a/(ad-bc),\ ad-bc\neq ۰$$

به‌ازای $a\neq ۰$ داریم $$y=-cz/a=(-c/a)(a/(ad-bc))=-c/(ad-bc)$$

۱۱.الف) $\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix}=(-۱)\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

ب) $\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۳۵ \\ ۲ \end{bmatrix}=(-۱/۱۹)\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳۵ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

۱۲.الف) -۲ ب) -۱۰ پ) -۱۰ ت) -۵۰

۱۳.الف) ۲۱   ب) ۲۱   پ) ۲۱   ت) ۶۳

۱۴. $\det(۲A)=۲^{۲}(۳۱)=۱۲۴,\ \det(۵A)=۵^{۲}(۳۱)=۷۷۵$

۱۵.الف)

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=۳(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}+۱(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$+(-۱)(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix}=-۳(۲)+(۱۰)+۱=۵$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=(-۲)(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix}+(-۱)(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$+۲(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}=-۲(-۱)+۱+۲(۱)=۵$$

ب)

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۴ \\ ۰ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} = ۱(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۳ & -۴ \\ ۵ & ۷ \end{vmatrix} + ۱(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۲ & -۴ \\ ۰ & ۷ \end{vmatrix}$$

$$+ ۲(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{vmatrix} = (۲۱ + ۲۰) - (۱۴) + ۲(۱۰) = ۴۷$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۴ \\ ۰ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} = (۱)(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۲ & -۴ \\ ۰ & ۷ \end{vmatrix} + ۳(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۷ \end{vmatrix}$$

$$+ ۵(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۴ \end{vmatrix} = (-۱)(۱۴) + ۳(۷) - ۵(-۸) = ۴۷$$

۱۶. الف)

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۶ & -۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ & ۲ \end{vmatrix} = (۱)(-۱)^{۱+۱} = \begin{vmatrix} -۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۶ & -۲ \\ ۴ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$= (-۴ - ۳) + ۲(۱۸ + ۸) = -۷ + ۵۲ = ۴۵$$

ب)

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۷ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۶ & ۲ \end{vmatrix} = (۲)(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۴ & ۷ \\ ۴ & ۲ \end{vmatrix} = (۲)(۸ - ۲۸) = -۴۰$$

پ)

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۳ & ۲ \end{vmatrix} = (۱)(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۱ & -۴ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = ۲ + ۱۲ = ۱۴$$

۱۷.

$$۵ = \begin{vmatrix} -x & -۱ & ۱ \\ ۲ & x & ۱ \\ ۳ & ۳ & -۱ \end{vmatrix} = (-x)\begin{vmatrix} x & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & x \\ ۳ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$= (-x)(-x - ۳) + (-۲ - ۳) + (۶ - ۳x)$$

$$۵ = x^۲ + ۳x - ۵ + ۶ - ۳x$$

$$۵ = x^۲ + ۱$$

$$۴ = x^۲$$

$x = ۲$ یا -۲

۱۸. الف) (یک) ۰ (دو) ۰ (سه) ۰ (چهار) ۰

ب) فرض کنید A ماتریسی ۳×۳ باشد. اگر دو سطر A یا دو ستون A یکسان باشند، آن‌گاه $\det(A) = ۰$. درحقیقت، به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ و $n > ۱$، اگر A ماتریس $n \times n$ای باشد که در آن دو سطر یا دو ستون یکسان‌اند، آن‌گاه $\det(A) = ۰$.

۱۹. الف) (یک)

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ & ۰ \end{vmatrix} = ۲(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{vmatrix} + ۳(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۲(-۲-(-۱)) - ۳(-۱) = ۲(-۱) + ۳ = ۱$$

(دو) ۵ (سه) ۲۵

ب) (یک) ۵۱ (دو) ۳۰۶ (سه) ۵۱۰

۲۰. در ماتریس حاصل‌ضرب، یعنی در AB، $n^۲$ درایه وجود دارد. برای یافتن هر یک از این درایه‌ها، n ضرب و $n - ۱$ جمع انجام می‌دهیم. بنابراین، روی‌هم $n^۳$ ضرب و $n^۳ - n^۲ = n^۲(n - ۱)$ جمع انجام می‌دهیم.

پیوست ۳

مجموعه‌های شمارش‌پذیر و مجموعه‌های شمارش‌ناپذیر

۱. الف) درست
ب) نادرست
پ) درست
ت) درست
ث) درست
ج) درست
چ) نادرست: فرض کنید $A = \mathbf{Z}^+ \cup (۰,۱]$ و $B = (۰,۱]$. دراین‌صورت هم A شمارش‌ناپذیر است هم B، ولی $A - B = \{۲,۳,۴,\ldots\}$ شمارش‌پذیر است.

۲. الف) تابع $f : \mathbf{Z}^+ \to A$ که با $f(n) = n^۲$ تعریف می‌شود تناظری یک‌به‌یک است.
ب) فرض کنید $g : \mathbf{Z}^+ \to \{۲,۶,۱۰,۱۴,\ldots\}$ با $g(n) = (n-۱)۴+۲$ تعریف شود. دراین‌صورت g تناظری یک به‌یک است.

۳. اگر B شمارش‌پذیر باشد، بنابر قضیهٔ پ ۳٫۳، مجموعهٔ A نیز شمارش‌پذیر خواهد بود. این ما را به تناقض می‌کشاند، زیرا A بنابر فرض شمارش‌ناپذیر است.

۴. مجموعهٔ I متشکل از همهٔ اعداد گنگ مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر است. درحقیقت، اگر این‌طور نباشد، آن‌گاه بنابر قضیه‌های پ ۳٫۸ و پ ۳٫۹ (یا پ۳٫۷) مجموعهٔ $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup I$ شمارش‌پذیر خواهد بود.

۵. چون S و T دو مجموعهٔ نامتناهی شمارش‌پذیرند، بنابر قضیهٔ پ ۳٫۲ می‌توانیم بنویسیم $S = \{s_۱, s_۲, s_۳, \ldots\}$ و $T = \{t_۱, t_۲, t_۳, \ldots\}$، یعنی می‌توان S و T را به‌صورت دو دنبالهٔ (نامتناهی) متشکل از جمله‌های متمایز نوشت. تابع

$$f : S \times T \to \mathbf{Z}^+$$

را به‌ازای هر $i, j \in \mathbf{Z}^+$، با $f(s_i, t_j) = ۲^i ۳^j$ تعریف می‌کنیم. اگر $i, j, k, l \in \mathbf{Z}^+$ چنان باشند که $f(s_i, t_j) = f(s_k, t_l)$، آن‌گاه (با توجه به قضیهٔ بنیادی حساب) داریم

$$f(s_i, t_j) = f(s_k, t_\ell) \Longrightarrow ۲^i۳^j = ۲^k۳^\ell \Longrightarrow i = k, j = \ell \Longrightarrow t_j = t_\ell \text{ و } s_i = s_k$$
$$\Longrightarrow (s_i, t_j) = (s_k, t_\ell)$$

بنابراین، f تابعی یک به‌یک است و $S \times T \sim f(S \times T) \subset \mathbf{Z}^+$. اکنون با توجه به قضیهٔ پ۳۰۳ می‌دانیم که $S \times T$ شمارش‌پذیر است.

۶. فرض کنید p، q، r سه عدد اول متمایز دلخواه باشند. تابع $f : \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$ را با $f(a, b, c) = p^a q^b r^c$ تعریف می‌کنیم. اگر $a_۱, b_۱, c_۱, a_۲, b_۲, c_۲ \in \mathbf{Z}^+$ به‌گونه‌ای باشند که $f(a_۱, b_۱, c_۱) = f(a_۲, b_۲, c_۲)$، آن‌گاه (با توجه به قضیهٔ بنیادی حساب) داریم

$$f(a_۱, b_۱, c_۱) = f(a_۲, b_۲, c_۲) \Longrightarrow p^{a_۱} q^{b_۱} r^{c_۱} = p^{a_۲} q^{b_۲} r^{c_۲} \Longrightarrow a_۱ = a_۲, b_۱ = b_۲, c_۱ = c_۲$$
$$\Longrightarrow (a_۱, b_۱, c_۱) = (a_۲, b_۲, c_۲)$$

درنتیجه، f تابعی یک به‌یک است و $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \sim f(\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+) \subset \mathbf{Z}^+$. بنابر قضیهٔ پ۳۰۳ مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است.

۷. چون $\mathbf{Z} - \{۰\} \subset \mathbf{Z}$، می‌دانیم که $\mathbf{Z} - \{۰\}$ شمارش‌پذیر است. بنابر قسمت (ب) در تمرین ۶، می‌دانیم که $(\mathbf{Z} - \{۰\}) \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ شمارش‌پذیر است. اکنون به‌ازای هر $(a, b, c) \in (\mathbf{Z} - \{۰\}) \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ حداکثر دو جواب حقیقی (متمایز) برای معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ وجود دارد. از قضیهٔ پ۳۰۹ نتیجه می‌شود که مجموعهٔ همهٔ جوابهای حقیقی معادلات درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، به‌طوری‌که $a, b, c \in \mathbf{Z}$ و $a \neq ۰$، مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است.

۸. الف) به‌ازای هر $۰ < x < ۱$، $f(x) = ۳x$

ب) به‌ازای هر $۰ < x < ۱$، $g(x) = ۵x + ۲$

پ) به‌ازای هر $۰ < x < ۱$، $h(x) = (b - a)x + a$