

به نام خدا

تمرین سری دوازدهم (موعد تحویل: جمعه ۳۰ ادیبهشت ساعت ۱۷)

در این تمرین می خواهیم دو روش MOD و K-SVD را برای جداسازی کور منابع اسپارس یا به عبارت دیگر یادگیری دیکشنری برای نمایش اسپارس سیگنال ها پیاده سازی کنیم. لطفا تصویر قسمت های مختلف کدتان را در گزارش قرار دهید.

- ۱- ابتدا ماتریس مخلوط کننده (دیکشنری) با ابعاد 3×6 ، ماتریس منابع با ابعاد 6×1000 ، ماتریس نویز با ابعاد 3×1000 و ماتریس مشاهدات با ابعاد 3×1000 را به صورت زیر تولید کنید ($M=3, N=6, T=1000$):
- درایه های دیکشنری (D) را به صورت مستقل از توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس یک انتخاب کنید و در نهایت هر ستون دیکشنری را نرمالیزه کنید. معیار mutual coherence را محاسبه کنید. اگر این مقدار بیشتر از 0.9 بود ماتریس D را مجددا تولید کنید تا این معیار زیر 0.9 بیاید.
- برای تولید ماتریس منابع (S)، در هر لحظه به صورت تصادفی یکی از منابع را به عنوان منبع روشن در نظر گرفته ($N_0=1$) و مقدار آن منبع را به صورت یکنواخت از بین 5- تا 5 انتخاب کنید.
- ماتریس نویز (Noise) که درایه های آن به صورت مستقل از توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2 = 0.01$ انتخاب شده اند را تولید کنید.
- ماتریس مشاهدات را به صورت $X = D S + \text{Noise}$ تولید کنید.

حال فرض کنید فقط ماتریس مشاهدات را داریم و مقدار $N_0=1$ را هم می دانیم و می خواهیم ماتریس های دیکشنری و منابع را تخمین بزنیم. برای همه ی قسمت های زیر اگر احتیاج به پیاده سازی یک روش sparse recovery بود از الگوریتم MP استفاده کنید.

الف) scatter plot مشاهدات را رسم کنید. چگونه می توان از روی این نمودار ماتریس D را به دست آورد. با فرض این که میدانیم ستون های D نرمالیزه است، آیا ماتریس D به صورت یکتا به دست می آید؟ توضیح دهید چه ابهامی داریم و چرا این ابهام اهمیتی ندارد.

ب) روش MOD را روی مشاهدات اعمال کرده و ماتریس دیکشنری \hat{D} و منابع \hat{S} را به دست آورید. برای این که نشان بدهید دقت روش چه قدر بوده است، و یا به عبارت دیگر کیفیت یادگیری دیکشنری چه قدر بوده است، به ترتیب از ستون (اتم) اول تا ستون (اتم) آخر \hat{D} ، قدر مطلق correlation هر اتم \hat{D} را با همه ی اتم های D محاسبه کنید. در صورتی که ماکزیمم این مقادیر از 0.99 بیشتر بود، فرض کنید اتمی از D که ماکزیمم correlation را داده است به درستی recover شده است. توجه داشته باشید که برای تکرار این روش و محاسبات بعدی، اتمی از D که recover شده است را حذف کنید. چند درصد از ستون های ماتریس D را به درستی Recover کردید؟ به این درصد $\text{successful recovery rate}$ می گوییم.

ج) قسمت ب را با استفاده از روش K-SVD تکرار کنید.

د) ابهام ترتیب منابع را برطرف کرده و سپس عبارت زیر را برای هر دو روش MOD و K-SVD گزارش کنید.

$$E = \frac{\|\hat{S} - S\|_F^2}{\|S\|_F^2}$$

۲- ماتریس دیکشنری با ابعاد 20×50 ، ماتریس منابع با ابعاد 50×1500 و ماتریس مشاهدات X با ابعاد 20×1500 در فایل hw12.mat قرار داده شده است. با فرض این که فقط ماتریس مشاهدات را داریم، روش های MOD و K-SVD را روی ماتریس X اعمال کنید و successful recovery rate به دست آمده از هر روش را گزارش کنید. کدام روش عملکرد بهتری دارد؟ شایان ذکر است sparsity level برابر $N_0=3$ است و هرجایی که احتیاج داشتید از یک الگوریتم sparse recovery استفاده کنید از OMP استفاده کنید. نمودار همگرایی (مقدار تابع هدف یا همان Representation Error بر حسب شماره iteration) را نیز برای هر دو روش رسم کنید.