دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
جبرخطی عددی (کارشناسی)
مدرس: مهدی دهقان

(دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)
ترم دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲
تمارین سری سوم

۱ـ با تغییر مناسب سطرهای ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۶ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ & -۵ \end{bmatrix}$ برای حل دستگاه معادلات خطی

$$Ax = \begin{bmatrix} -۸ \\ ۰ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

از روش گاوس‌ـ‌سیدل و حدس اولیه $x^{(۰)} = [۲, \alpha, \beta]^T$ چنان استفاده می کنیم که روش همگرا باشد. اگر بردار حاصل از تکرار اول $x^{(۱)} = [۰, \frac{۵}{۳}, -\frac{۱۱}{۱۵}]^T$ باشد مقادیر α و β را تعیین کنید.

۲ـ دو تکرار اول روش SOR را برای دستگاه داده شده محاسبه کنید.
الف) حدس اولیه را بردار صفر و پارامتر ω را ۱.۱ در نظر بگیرید.
ب) پارامتر بهینه‌ی ω را محاسبه کرده و دوباره محاسبات را براساس آن انجام دهید و نتایج را مقایسه کنید.

$$\begin{cases} ۱۰x - y = ۹ \\ -x + ۱۰y - ۲z = ۷ \\ -۲y + ۱۰z = ۶ \end{cases}$$

۳ـ اگر $x^{(k)}$ یک تقریب برای دستگاه $Ax = b$ باشد، آنگاه بردار باقی مانده به صورت $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ تعریف می شود و بیانگر میزان نزدیک بودن تقریب فعلی به جواب اصلی دستگاه است.
الف) نشان دهید که الگوریتم تکرار ژاکوبی را می توان به فرم زیر نوشت.

$$x^{(k+۱)} = x^{(k)} + D^{-۱}r^{(k)}$$

ب) نشان دهید که الگوریتم تکرار گاوس‌ـ‌سایدل را می توان به فرم زیر نوشت.

$$x^{(k+۱)} = x^{(k)} + (L + D)^{-۱}r^{(k)}$$

پ) نشان دهید که الگوریتم تکرار SOR را می توان به فرم زیر نوشت.

$$x^{(k+۱)} = x^{(k)} + (\omega L + D)^{-۱}r^{(k)}$$

ت) اگر $\|r^{(k)}\|_{۲}$ مقدار کوچکی باشد، آیا به معنی این است که $x^{(k)}$ به جواب دقیق دستگاه نزدیک می باشد؟ پاسخ خود را با ارائه یک مثال توضیح دهید.

۴ــ ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} c & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & c & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & c & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & c \end{bmatrix}$$

الف) به ازای چه مقادیری از c ماتریس A قالب قطری اکید است؟

ب) برنامه ای در نرم افزار Python یا MATLAB بنویسید که بتواند کوچکترین مقدار $c > ۰$ که به ازای آن الگوریتم تکرار ژاکوبی همگرا می شود را بیابد.

پ) به کمک همین برنامه، کوچکترین مقدار $c > ۰$ که به ازای آن الگوریتم تکرار گاوس ــ سایدل همگرا می شود را بیابید. آیا پاسخ تان با پاسخ قسمت ب یکسان است؟

ت) در مواقعی که هر دو الگوریتم ژاکوبی و گاوس ــ سایدل همگرا می شوند، کدام یک سرعت همگرایی بالاتری دارد؟ به چه میزان سریع تر؟ آیا پاسخ تان به مقدار پارامتر c وابسته است؟

۵ــ دستگاه $Ax = b$ را در نظر بگیرید که A یک ماتریس $n \times n$ و b یک بردار n تایی به صورت زیر می باشند:

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & -۱ & & & ۰ \\ -۱ & ۵ & -۱ & & \\ & -۱ & ۵ & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -۱ \\ ۰ & & & -۱ & ۵ \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ \vdots \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید دنبالهٔ برداری تولید شده به روش تکرار ژاکوبی در تساوی زیر صدق می کند.

$$۵x_i^{(k+۱)} = x_{i-۱}^{(k)} + x_{i+۱}^{(k)} + ۱, \qquad i = ۱, ۲, ۳, \cdots \qquad x_{۰}^{(k)} = x_{n+۱}^{(k)} = ۰$$

۶ـ الف)ثابت کنید $Au = 0$ اگر و فقط اگر u یک بردار ویژه برای ماتریس تکرار در روش ژاکوبی با مقدار ویژه برابر با ۱ باشد. درباره همگرایی روش ژاکوبی در این حالت بحث کنید.

ب) روش تکراری $X^{k+1} = MX^k + c$ را با $\rho(M) < 1$ در نظر بگیرید. نشان دهید برای بیشتر کردن دقت تا یک دهم اعشار، باید حدود $-\frac{1}{\log \rho(M)}$ تکرار را محاسبه کرد.

۷ـ دستگاه زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

الف) نمودار شعاع طیفی را بر حسب w در بازه $[0, 2]$ را رسم کنید و طبق آن پارامتر بهینه را بیابید.(پیاده سازی با متلب یا پایتون انجام شود و هر بار به مقدار w، $0/1$ اضافه شود).

ب)روش SOR را پیاده سازی کرده و دستگاه داده شده را تا ۱۰۰ تکرار محاسبه کنید.

ج) با کمک دستورات آماده دستگاه را حل کرده و سپس سرعت آن را با SOR مقایسه کنید.

۸ـ در بسیاری از کاربردها با حل دستگاهی به صورت $TX = b$ که

$$T = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 5 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & \dots & -1 & 5 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

برخورد می کنیم. این دستگاه ها را نزدیک سه قطری یا سه قطری تناوبی (periodic tridiagonal یا در برخی از منابع nearly tridiagonal) می نامند. فرض کنید بردار سمت راست به صورت $b = [1, 1, ..., 1]^T$ و $n = 1000$ باشد. اکنون به سوالات زیر پاسخ دهید.

الفـ دستگاه داده شده را با روش حذفی گاوس حل کرده (در متلب یا پایتون) و زمان مورد نیاز برای حل را گزارش نمایید.

بـ ثابت کنید روش های ژاکوبی و گاوس سیدل برای حل این دستگاه همگرایند (به ساختار ماتریس

توجه کنید) سپس این دستگاه را با محک توقف

$$\frac{\|b - Ax^{(k)}\|_۲}{\|b\|_۲} \leq ۱۰^{-۱۴}$$

و حدس اولیه بردار صفر حل کنید.

ج- همانطور که می دانید الگوریتم توماس مختص حل دستگاه های سه قطری است که دارای پیچیدگی محاسباتی $O(n)$ است. الگوریتمی طراحی کنید که برای حل دستگاه فوق دارای پیچیدگی محاسباتی $O(n)$ باشد. با استفاده از الگوریتم جدید دستگاه داده شده را حل کنید و زمان مورد نیاز را با قسمت های الف و ب مقایسه کنید.

راهنمایی: بخش ۴.۳.۳ کتاب زیر را ببینید

Scientific Computing-An Introduction Using Maple and MATLAB (by Walter Gander et al., Springer, 2014)

نحوه ارسال تمرین‌ها

فایل الکترونیکی پاسخ تمرینات به همراه پوشه کدهای متلب یا پایتون به آدرس زیر ایمیل شود:

mdehghan.aut.nla.bsc@gmail.com

بعلاوه فایل تمرینات در سامانه کورسز دانشگاه آپلود شود. در هنگام ارسال فایل، اسم خود و شماره دانشجویی خود را روی نام فایل قرار دهید. برای مثال نام فایل ارسالی چنین باشد:

Akbari-12345678

توجه ۱: مهلت ارسال تمرینات (بدون تمدید) تا تاریخ ۶ فروردین ماه ۱۴۰۳ می‌باشد.

توجه ۲: نوشتن شماره دانشجویی در سربرگ تمرینات و عنوان ایمیل ضروری است.

توجه ۳: آمادگی کامل دانشجویان گرامی جهت ارایه تمرینات به صورت شفاهی در تاریخ مقرر مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

توجه ۴: از کدهای موجود در سطح وب یا کتاب‌های مرجع نیز می‌توانید استفاده کنید اما باید منابع استفاده شده را ذکر کنید و قادر به توضیح عملکرد کد ارسال‌شده باشید.