

۱- مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, v_3\}$ را در نظر بگیرید که v_1 و v_2 مستقل خطی بوده ولی $v_3 \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$ باشد. اگر الگوریتم گرام-اشمیت را بر روی این مجموعه بردارها اعمال کنیم، چه اتفاقی خواهد افتاد؟ توضیح دهید.

۲- درستی و یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.
الف) ترانهاده یک ماتریس متعامد، همچنان یک ماتریس متعامد خواهد بود.
ب) سطرهای یک ماتریس $n \times n$ تشکیل یک پایه متعامد یکه برای \mathbb{R}^n می دهد.
ج) وارون یک ماتریس متعامد، همچنان متعامد خواهد بود.

۳- با کمک الگوریتم گرام-اشمیت، مجموعه بردار مستقل خطی زیر را به یک مجموعه بردار متعامد یکه تبدیل کنید.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

۴- با استفاده از تجزیه QR ،

الف- ثابت کنید برای ماتریس مربعی $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ که $\forall i, a_i \neq 0$ داریم:

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|$$

(راهنمایی: ابتدا ثابت کنید برای هر ماتریس متعامد Q ، همواره $|\det(Q)| = 1$)

ب- نشان دهید $\det(A) = \prod_{i=1}^n \|a_i\|$ اگر و فقط اگر ستون های A متعامد باشند.

۵- تجزیه QR را برای ماتریس داده شده بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) پیچیدگی محاسباتی و میزان محاسبات در هر مرحله از محاسبه تجزیه QR چه قدر می باشد؟

۶- الف) الگوریتم تجزیه QR را در Python یا MATLAB پیاده سازی کنید.
ب) ماتریس هیلبرت، یک ماتریس مربعی است که درایه های آن از رابطه زیر محاسبه می شوند:

$$H(i, j) = \frac{1}{i+j-1} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

ماتریس های هیلبرت به دلیل بد وضعی در جبرخطی عددی بسیار معروف هستند (البته بدنام)، در فصل چهارم دلیل این بدوضعی و مشکلاتی که بوجود می آورد را خواهید آموخت. یک برنامه در Python یا MATLAB بنویسید که با دریافت ورودی n ، ماتریس هیلبرت $n \times n$ را تشکیل دهد.

ج) به کمک برنامه ای که در قسمت های (الف) و (ب) نوشته اید، تجزیه QR ماتریس هیلبرت 12×12 را محاسبه کنید.

د) با افزایش ابعاد ماتریس هیلبرت ورودی، آیا الگوریتم گرام اشمیت همچنان قادر خواهد بود که تجزیه QR را محاسبه کند؟ (از لحاظ زمان اجرا این مورد را بررسی کنید).

نحوه ارسال تمرین ها

فایل الکترونیکی پاسخ تمرینات به همراه پوشه کدهای متلب یا پایتون به آدرس زیر ایمیل شود:

mdehghan.aut.nla.bsc@gmail.com

بعلاوه فایل تمرینات در سامانه کورسز دانشگاه آپلود شود. در هنگام ارسال فایل، اسم خود و شماره دانشجویی خود را روی نام فایل قرار دهید. برای مثال نام فایل ارسالی چنین باشد:

Akbari-12345678

توجه ۱: مهلت ارسال تمرینات (بدون تمدید) تا تاریخ ۷ اسفند ماه ۱۴۰۲ می باشد.

توجه ۲: نوشتن شماره دانشجویی در سربرگ تمرینات و عنوان ایمیل ضروری است.

توجه ۳: آمادگی کامل دانشجویان گرامی جهت ارائه تمرینات به صورت شفاهی در تاریخ مقرر مورد ارزیابی قرار می گیرد.

توجه ۴: از کدهای موجود در سطح وب یا کتاب های مرجع نیز می توانید استفاده کنید اما باید منابع استفاده شده را ذکر کنید و قادر به توضیح عملکرد کد ارسال شده باشید.