Ashutosh Kumar Singh 19CS30008

1. $A, B \in R^{n \times n}$

We define $\|A\|_2$ as

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}, \text{ where } x \in R^n.$$

We want to prove that $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

First we prove $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$.

For $x = 0$, the statement is trivially true.

For any $x \neq 0$,

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2$$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2 \quad \text{——} (1)$$

Now replace x by Bx in equation (1),

$$\|ABx\|_2 \leq \|A\|_2 \|Bx\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2 \|x\|_2$$

$$\|AB\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2 \|B\|_2$$

Proved.

- $A, B \in R^{n \times n}$

According to the sub-multiplicative property,

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Yes, the sub-multiplicative property holds true for Frobenius Norm.

The Frobenius Norm is defined as:-

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Let's define the matrise $C = AB$.

$$c_{ij} = \sum_{K=1}^{n} a_{iK} b_{Kj} ,$$

where, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$

So, $$\|AB\|_F^2 = \|C\|_F^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{K=1}^{n} a_{iK} b_{Kj} \right|^2 \quad \text{—— (1)}$$

Applying Cauchy-Schwartz inequality,

$$\left| \sum_{K=1}^{n} a_{iK} b_{Kj} \right|^2 \leq \left(\sum_{K=1}^{n} |a_{iK}|^2 \cdot \sum_{K=1}^{n} |b_{Kj}|^2 \right)$$

Thus, from (1),

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{K=1}^{n} a_{iK} b_{Kj} \right|^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{K=1}^{n} |a_{iK}|^2 \cdot \sum_{K=1}^{n} |b_{Kj}|^2 \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2 \right)$$

$$= \|A\|_F^2 \; \|B\|_F^2$$

Thus, we can write,

$$\|AB\|_F^2 \leq \|A\|_F^2 \; \|B\|_F^2$$

Hence, the Frobenius norm obeys the sub-multiplicative property.