UNIVERSIDAD NACIONAL
DE COLOMBIA

Método de Elementos de Frontera en Electromagnetismo

Autor:
Carlos J. Ramos Salas.
C.E. 682286
Email: cramoss@unal.edu.co

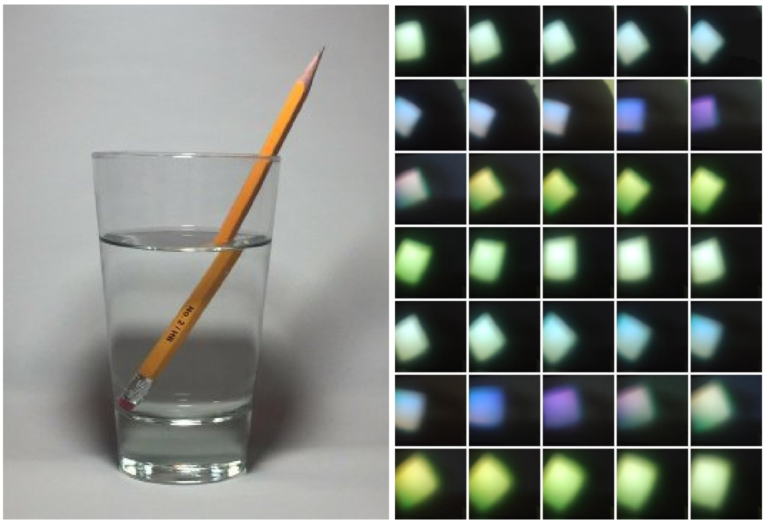
Facultad de Ciencias

17 de junio de 2023

Índice

1. Introducción y Motivación

En física, los fenómenos de transmisión y reflexión de una onda son experimentos bastante estudiados y comunes, el primer acercamiento que uno suele tener dentro de los estudios básicos es la refracción de la luz al pasar de un medio a otro, un ejemplo de esto podría ser cuando sumergimos un lápiz en el agua y vemos como 'cambia' el ángulo de inclinación del mismo dentro del agua, otro ejemplo sería al incidir una luz blanca polarizada linealmente en un material birrefringente para posteriormente pasarlo por otro polarizador lineal al cual podemos rotar, el resultado de este experimento mostrado en la Figura 2c muestra que la luz transmitida a través de este sistema va cambiando de color en función del ángulo de rotación del segundo polarizador. En general, siempre que haya un cambio de medio (como por ejemplo del aire al agua o del aire a un material), existirá en la interfase el fenómeno de transmisión y reflexión de la onda, y la proporción de la onda reflejada y transmitida estará completamente determinada por los medios mismos y sus índices de refracción [1].



(a) Experimento de lápiz en agua. (b) Experimento sobre birrefringente.

Figura 1: Experimentos de transmisión y reflexión en óptica.

Estos fenómenos no solo ocurren con la luz, en realidad ocurre con cualquier onda, en particular ocurren con las ondas electromagnéticas. Cuando uno considera las ecuaciones de Maxwell en el vacío es posible encontrar que tanto el campo eléctrico como el magnético tienen ecuaciones que describen ondas planas. Los fenómenos de transmisión y reflexión de las ondas electromagnéticas van a depender de la permeabilidad y permitividad del propio material, y estas, al ser en ocasiones funciones y tener propiedades interesantes, permiten la construcción de diversas aplicaciones tales como convertidores de polarización, divisor de haz, filtros, interferómetros, etc [2, 3, 4, 5].

En este proyecto se busca solucionar problemas de transmisión y reflexión de ondas electromagnéticas en problemas de dos dimensiones a través de un método numérico denominado '*Método de Elementos de Frontera*' (o *Boundary Element Method* en inglés). En particular, se introducirá el método, se realizará una explicación de como utilizarlo dentro del electromagnetismo y se implementará el mismo utilizando MATLAB.

2. Fundamentos Matemáticos

Comenzaremos en esta sección por enunciar y mostrar teoremas y propiedades que nos serán de utilidad para el entendimiento del método de elementos finitos, el cual será utilizado para resolver el problema de dispersión de ondas más adelante.

2.1. Método de Galerkin y elementos finitos

Consideremos un operador diferencial D de tal manera que se tenga una ecuación diferencial de la forma

$$\begin{cases} D(u) = f, & \text{en } \Omega. \\ u = u_0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde u es la solución exacta de la ecuación diferencial, Ω es la región donde se soluciona el problema, f es el término forzante y u_0 es una condición que nos permite conocer la forma de u en la frontera de la región considerada. En algunas ocasiones, encontrar la solución exacta de esta ecuación diferencial se vuelve muy complejo si se realiza de manera analítica, por ello nació la necesidad de intentar aproximar la solución de dicha ecuación de una manera numérica. pPara ello debemos considerar una función de prueba v en un espacio V y multiplicar esta función en ambos lados de la ecuación para luego integrar por partes y obtener una nueva formulación de la forma

$$\begin{cases} a(u,v) = L(v) & \text{en } \Omega, \text{ y para todo } v \in V, \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde a es una aplicación bilineal y L una aplicación lineal [6]. Esta problema equivalente corresponde a lo que es conocida como *formulación variacional*, dependiendo del problema y de los espacios donde estén definidos las funciones, la solución de u en el problema equivalente es exactamente igual a la solución del problema original (o ecuación fuerte en algunas bibliografías [7]). Una vez se tiene el equivalente débil, el siguiente paso es discretizar el problema para llegar al equivalente de Galerkin y luego convertirlo en un problema matricial, para ello consideramos un subespacio vectorial de dimensión finita $V_h \subseteq V$, digamos que dicho espacio presenta una dimensión de magnitud M, si V_h presenta una base $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M\}$, podemos suponer que $v = \varphi_j$ para algún $1 \leq j \leq M$ y que si $u_h \in V_h$ es la solución del problema discreto, entonces tendrá una representación por sumatorias única de la forma [6]

$$u_h = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i \varphi_i,$$

Usando esta representación y aprovechando que a es una aplicación bilineal, se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{M} a(\varphi_i, \varphi_j)\, \gamma_i = L(\varphi_j). \tag{1}$$

Si se consideran todos los posibles φ_j como opciones para v, se obtiene entonces un problema matricial descrito por $A\vec{\gamma} = \vec{b}$ donde la entrada ij de la matriz A corresponderá precisamente a $a(\varphi_i, \varphi_j)$, la entrada i-ésima del vector $\vec{b}$ será $L(\varphi_i)$ y $\vec{\gamma}$ es precisamente el vector de coeficientes de la solución u_h (ver [6]).

Este procedimiento previamente mencionado será desarrollado con más detalle en la siguiente subsección, y adicionalmente es necesario mencionar que al momento de realizar la discretización, uno es el que escoge el espacio discreto y sus funciones bases, normalmente para ello se realiza una triangulación en el espacio (mallado por secciones en una dimensión, mallado triangular en dos dimensiones y mallado por tetraedros en tres dimensiones) y se toma como función base φ_i a aquellas que toman el valor de 1 en el nodo i-ésimo y decaen linealmente a cero en los nodos vecinos y son 0 en todos los otros nodos [7]. Un ejemplo de esto previamente descrito se presenta a continuación.

Ejemplo 2.1. Sea V_h como el espacio de las funciones lineales continuas por partes denotado por P_h^1, si llamamos a I_i como el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y a h_i como la longitud de ese intervalo, tenemos que $P_h^1 = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}); \forall i \in$

$\{1,\ldots,M\}, v_h|_{I_i} \in \mathbb{P}_1\}$, para este espacio es posible definir las funciones bases de la forma

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}) & \text{si } x \in I_{i-1}, \\ \dfrac{1}{h_i}(x_{i+1} - x) & \text{si } x \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2}$$

De manera similar, se pueden definir espacios y funciones bases como la mostrada anteriormente para espacios de dos dimensiones. Finalmente se presenta el siguiente ejemplo para ilustrar el procedimiento que se ha definido en esta subsección.

Ejemplo 2.2. Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} -\dfrac{du^2}{d^2x} = f(x), & \text{en } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Supongamos que v es una función que cumpla las mismas condiciones que u, es decir $v(0) = v(1) = 0$, de esta manera al multiplicar a la ecuación diferencial por v e integrar por partes se obtiene que

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = \int_0^1 -u''(x)v(x)dx = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(x)v(x)\Big|_0^1 = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

En este caso, nuestra forma bilineal $a(u,v)$ corresponde a la integral del producto de las derivadas de la entradas de la aplicación, mientras que la forma lineal $L(v)$ corresponde a la integral de la entrada multiplicada por $f(x)$ (más adelante se estudiará como garantizamos la existencia de la solución a partir de las aplicaciones lineales y bilineales). Esta ecuación encontrada es la formulación variacional del problema. Procedemos a discretizar el problema suponiendo una base $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M\}$, bajo las mismas suposiciones previas encontramos la formulación de Galerkin

$$\int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = \sum_{i=1}^{M}\left(\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx\right)\gamma_i.$$

Llamando

$$[A]_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx; \text{ y } [\vec{b}]_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx,$$

se obtiene entonces la formulación matricial $A\vec{\gamma} = \vec{b}$, resolviendo y encontrando los valores de $\vec{\gamma}$ podemos determinar entonces la solución de u_h la cual convergerá a u.

2.2. Existencia de la solución

Antes de continuar recordemos un par de definiciones [6].

Definición 2.1. Sea V un espacio de Hilbert con un producto escalar $(\cdot,\cdot)_V$, si $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal definida en $V \times V$ y $L \in V'$ es un funcional lineal se tienen las siguientes propiedades

1. $a(\cdot,\cdot)$ se dice simétrica si $a(u,v) = a(v,u)$ para todo $u, v \in V$.
2. $a(\cdot,\cdot)$ se dice continua si existe constante $\gamma > 0$ tal que $|a(u,v)| \leq \gamma \|u\|_V \, \|v\|_V$ para todo $u, v \in V$.
3. $a(\cdot,\cdot)$ es V-elíptica si existe constante $\alpha > 0$ tal que $a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ para todo $v \in V$.
4. $L(\cdot)$ es un funcional continuo si existe constante $\Lambda > 0$ tal que $|L(v)| \leq \Lambda \|v\|_V$ para todo $v \in V$.

En la subsección anterior se mostró que el problema que se quiere resolver por elementos finitos es $a(u,v) = L(v)$ para todo $v \in V$ con a forma bilineal continua y L funcional lineal, sin embargo, existe un problema equivalente desde un punto de vista de optimización, este es: *Encontrar $u \in V$ de tal manera que $F(u) = \min_{v \in V} F(v)$, donde*

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v), \tag{3}$$

mostraremos que ambos problemas son equivalentes, si $u \in V$ cumple el problema de optimización, dado $v \in V$, $\epsilon \in \mathbb{R}$ arbitrarios, sabiendo que V es espacio vectorial, se tiene entonces que

$$F(u) \leq F(u + \epsilon v),$$

ya que u es mínimo, denotemos $g(\epsilon) = F(u + \epsilon v)$ y por lo tanto $g(0) \leq g(\epsilon)$, es decir, g presenta un mínimo en $\epsilon = 0$, luego si la derivada de g existe en cero, se tendrá que debe ser igual a 0, desarrollando obtenemos que

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \frac{1}{2}a(u + \epsilon v, u + \epsilon v) - L(u + \epsilon v) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \epsilon a(u, v) + \frac{\epsilon^2}{2}a(v, v) - L(u) - \epsilon L(v). \end{aligned}$$

Derivando con respecto a ϵ e igualándolo a 0 se llega a que

$$0 = g'(0) = a(u, v) - L(v).$$

Recíprocamente, veamos que

$$\begin{aligned} F(u + \epsilon v) &= \frac{1}{2}a(u + \epsilon v, u + \epsilon v) - L(u + \epsilon v) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + \epsilon(a(u, v) - L(v) + \frac{\epsilon^2}{2}a(v, v) \\ &= F(u) + \frac{\epsilon^2}{2}a(v, v) \geq F(u). \end{aligned}$$

Una vez teniendo estas equivalencias, se puede enunciar el teorema de existencia y unicidad de *Lax-Milgram* [8].

Teorema 2.1 (Lax-Milgram). *En un espacio de Hilbert $(V, (\cdot, \cdot)_V)$, si $a(\cdot, \cdot)$ es una aplicación bilineal, simétrica, elíptica y continua y L es un funcional continuo, entonces existe una única solución $u \in V$ a los problemas variacional y de minimización, adicionalmente se cumple la desigualdad de estabilidad*

$$\|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}. \tag{4}$$

Demostración. La demostración de la existencia de la solución es derivado del teorema de punto fijo de Bannach [8], veamos entonces que se cumple la desigualdad, a partir del problema variacional, tomando $v = u$ y aplicando la elipcidad de a y la continuidad de L se tiene que

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq \Lambda\|u\|_V$$

lo que nos permite concluir finalmente que

$$\|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}.$$

Para probar la unicidad suponemos que existen dos soluciones u_1 y u_2 de tal manera que $a(u_i, v) = L(v)$ para todo $v \in V$ y $i \in \{1, 2\}$, por lo tanto se tiene que $a(u_1 - u_2, v) = 0$ para todo $v \in V$, luego $L \equiv 0$ y por tanto $\Lambda = 0$, así se tiene que $\|u_1 - u_2\|_V = 0$ lo que nos permite concluir que $u_1 = u_2$. □

Este teorema nos permite garantizar a partir de la forma débil de cualquier ecuación diferencial si existe una única solución a partir de ver las propiedades de la forma bilineal y el funcional lineal [6].

2.3. Discretización y estimación del error

Una vez garantizada la existencia de la solución, como previamente fue mencionado, nos interesa discretizar el problema con el fin de poder resolverlo numéricamente, sin embargo, necesitamos garantizar que la nueva solución discreta u_h se comporta de una manera similar que la solución exacta u, es decir, queremos poder afirmar que u_h converge a u y poder estimar el error de esta solución discreta.

Sea V un espacio vectorial, $V_h \subseteq V$ un subespacio de dimensión finita M con una base $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_M\}$, tenemos entonces que todo $v \in V_h$ y en particular $u_H \in V_h$ admiten una representación única de la forma

$$v = \sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i, \qquad u_h = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i \varphi_i.$$

Podemos escribir entonces los problemas variacional y de minimización en su forma discreta como sigue

$$F(u_h) \leq F(v) \quad \text{para todo } v \in V_h, \tag{5}$$
$$a(u_h, v) = L(v) \quad \text{para todo } v \in V_h, \tag{6}$$

utilizando la representación de v se puede obtener otro equivalente más al problema variacional, esto es

$$\begin{aligned}
&a(u_h, v) = L(v)\\
&a\left(u_h, \sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i\right) = L\left(\sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i\right)\\
&\sum_{i=1}^{M} \eta_i a(u_h, \varphi_i) = \sum_{i=1}^{M} \eta_i L(\varphi_i)\\
&\sum_{i=1}^{M} \eta_i [a(u_h, \varphi_i) - L(\varphi_i)] = 0\\
&a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i) \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, M.
\end{aligned}$$

Usando la representación de u_h, se obtiene entonces el problema matricial $A\vec{\gamma} = \vec{b}$, esto es

$$\sum_{i=1}^{M} a(\varphi_i, \varphi_j)\gamma_i = L(\varphi_j) \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, M, \tag{7}$$

donde $[A]_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ y $b_i = L(\varphi_i)$. Veamos ahora el equivalente al problema de minimización, usando nuevamente las representaciones únicas y si $\cdot$ representa el producto interno euclidiano, se cumple que

$$\begin{aligned}
&i.\ \ a(v, v) = a\left(\sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i, \sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i\right) = \sum_{i,j=1}^{M} \eta_i a(\varphi_i, \varphi_j)\eta_j = \vec{\eta} \cdot A\vec{\eta},\\
&ii.\ \ L(v) = L\left(\sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{M} \eta_i L(\varphi_i) = \vec{\eta} \cdot \vec{b}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema de minimización se reescribe como sigue

$$\frac{1}{2}\vec{\gamma} \cdot A\vec{\gamma} - \vec{\gamma} \cdot \vec{b} = \min_{\vec{\eta} \in \mathbb{R}^M} \left[\frac{1}{2}\vec{\eta} \cdot A\vec{\eta} - \vec{\eta} \cdot \vec{b}\right] \tag{8}$$

Consideremos ahora un $v_0 \in V_h$ arbitrario con vector de coeficientes $\vec{\beta}$, se tiene que

$$\vec{\beta} \cdot A\vec{\beta} = \sum_{i,j=1}^{M} \beta_i a(\varphi_i, \varphi_j)\beta_j = a(v_0, v_0) \geq \alpha \|v_0\|_V^2 > 0,$$

es decir, todos los autovalores de A son positivos y por ende es no singular la matriz y definida positiva, sabiendo que la aplicación bilineal es simétrica, tenemos entonces que $[A]_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j) = a(\varphi_j, \varphi_i) = [A]_{j,i}$, es decir, la matriz A es simétrica, por lo tanto enunciamos el siguiente corolario ya probado.

Corolario 2.1. *La matriz de rigidez A es simétrica y definida positiva.*

Una vez estudiado los equivalentes discretos de los problemas originales, veremos que la solución discreta cumple una propiedad específica al igual que la solución exacta (ver [6]).

Teorema 2.2 (**Lax-Milgram discreto**). *Existe una solución única $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^M$ para los problemas variacional y de minimización discretos, equivalentemente, la solución discreta u_h existe y es única. Adicionalmente*

$$\|u_h\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}. \tag{9}$$

Demostración. Como A es definida positiva y no singular, podemos garantizar la existencia de un único $\vec{\gamma}$ que sea solución a los problemas, de manera similar a la anterior subsección tenemos que

$$\alpha\|u_h\|_V^2 \leq a(u_h, u_h) = L(u_h) \leq \Lambda\|u_h\|_V$$

lo que nos permite concluir finalmente que

$$\|u_h\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}.$$

□

Este teorema es análogo al teorema de Lax-Milgram en el caso exacto, por lo que nos puede llegar a dar una idea del buen funcionamiento del método de elementos finitos. Para finalizar, es necesario saber que tan próximo está la solución discreta a la solución exacta, para ello enunciamos el siguiente lema (ver [7]).

Lema 2.3 (**Lema de Céa**). *Sea $u \in V$ la solución exacta a la ecuación diferencial y $u_h \in V_h$ la solución al problema discreto. Se cumple que*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha}\|u - v\|_V \quad \textit{para todo } v \in V_h. \tag{10}$$

Demostración. Sea $w \in V_h$ arbitrario, como $V_h \subseteq V$ entonces $w \in V$. Por el problema variacional tenemos que $a(u, w) = L(w)$ y por el problema variacional discreto se tiene que $a(u_h, w) = L(w)$; restando ambos resultados tenemos que $a(u - u_h, w) = 0$ para todo $w \in V_h$. Tomemos $v = u_h - w \in V_h$, así

$$\begin{aligned}
\alpha\|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) && \text{(elipcidad de } a\text{)}\\
&= a(u - u_h, u - u_h) + a(u - u_h, w) && (a(u - u_h, w) = 0)\\
&= a(u - u_h, u - u_h) + a(u - u_h, u_h - v) && \text{(definición de } v\text{)}\\
&= a(u - u_h, u - v) && \text{(linealidad de } a \text{ en segunda componente)}\\
&\leq \gamma\|u - u_h\|_V\|u - v\|_V. && \text{(continuidad de } a\text{)}
\end{aligned}$$

De donde finalmente al dividir por $\|u - u_h\|_V$ se llega a la desigualdad deseada. □

La gran importancia que tiene el Lema de Céa radica en que el error existente entre la solución exacta y la discreta (dada por la norma de la diferencia de ambas) será precisamente la mínima diferencia entre u y cualquier vector $v \in V_h$ multiplicado por una constante (completamente determinada por la elipcidad y linealidad de la forma bilineal), en particular, si $u \in V_h$ se tendrá que $u_h = u$. Para garantizar entonces la convergencia de u_h a u es necesario que se aumente la dimensión de V_h para obtener elementos v más cercanos a la solución, en otras palabras, es necesario hacer un mallado aún más denso para lograr dicho aumento de dimensión.

2.4. Método de elementos de frontera

En algunos casos queremos resolver una ecuación diferencial sobre una región Ω' no acotada (como la dispersión de ondas sonoras) con condiciones de frontera que nos permiten conocer el valor de la solución en dicha frontera suave Γ. Dado que Ω' es no acotada, realizar un mallado para aplicar el método de elementos finitos se vuelve imposible ya que no podemos utilizar un número finito de triángulos, uno podría pensar en reemplazar el dominio Ω' por $\Omega'_b = \{x \in \Omega' : |x| \leq b\}$ para intentar aproximar la solución, sin embargo, para obtener una buena aproximación sería necesario tomar b suficientemente grande, lo cual implicaría un gran tiempo de computo dado a su costo. Para resolver este tipo de problemas es necesario introducir entonces el *método de elementos de frontera*, el cual cambia la ecuación diferencia en la región Ω' a una equivalente en Γ de tal manera que se pueda resolver luego por medio de elementos finitos [6].

Introduzcamos las *ecuaciones de Fredholm de primer tipo* ya que nos serán útiles en el problema que se resolverá más adelante.

Definición 2.2. Dado $f : \Gamma \longrightarrow R$ y el kernel $k : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow R$, se puede encontrar $q : \Gamma \longrightarrow R$ tal que

$$\int_{\Gamma} k(x,y)q(y)d\gamma(y) = f(x), \quad x \in \Gamma, \tag{11}$$

donde $d\gamma$ representa el elemento de área superficial en Γ y $d\gamma(y)$ representa integración respecto a la variable y.

De manera similar, si se da una ecuación diferencial de la forma $L[f(x)] = q(x)$, es posible encontrar dicho kernel de tal manera que se cumpla la ecuación 11. Este kernel es precisamente conocido como una función de Green y más adelante se estudiará dentro de los fundamentos físicos de este proyecto. El kernel dado es débilmente singular, en particular se tiene que

$$k(x,y) = \frac{c(x,y)}{|x-y|}, \quad x \neq y, \tag{12}$$

donde $c(x,y)$ es una función acotada en términos de x e y.

Consideremos ahora un problema de la forma $L[u(x)] = f(x)$ en un dominio no acotado Ω' y válido también en una región acotada Ω, que adicionalmente tenga la condición de que $u = u_0$ en la frontera Γ que acota a Ω, y si en particular la solución $u(x)$ es de orden de $|x|^{-1}$ y su derivada de orden $|x|^{-2}$ cuando $|x| \to \infty$ se tiene entonces que ([6]),

$$u_0(x) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} - \frac{\partial u_e}{\partial n} \right) k(x,y) d\gamma(y),$$

donde $k(x,y)$ es el kernel asociado a la ecuación diferencial. Una vez obtenida esta ecuación, llamando a la diferencia de las derivadas parciales en dirección normal a la frontera como la función $q(y)$, se puede aplicar elementos finitos sobre esta, es decir, multiplicamos por una función de prueba $p(x)$, integramos por partes, discretizamos la función q y como $u_0(x)$ es conocida, se puede formular un problema matricial para encontrar la solución discreta q_h y conociendo el valor de $u_0(x)$ se puede determinar finalmente el valor de la solución de $u(x)$, por ejemplo, el problema de elementos finitos a resolver estaría dado por

$$b(q,p) = l(p) \quad \text{para todo } p_h \text{ en el espacio},$$

donde se tiene que

$$\begin{aligned} b(q,p) &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} q(y)p(x)k(x,y)d\gamma(y)d\gamma(x); \\ l(p) &= \int_{\Gamma} u_0(x)p(x)d\gamma(x). \end{aligned}$$

Adicionalmente, se puede deducir que la solución discreta q_h cumple también el lema de Céa y por ende nos es posible garantizar la convergencia de la solución de discreta y se podrá también estimar el error.

3. Fundamentos Físicos

Una vez introducido el método que se utilizará para aproximar la solución, procedemos a construir todo el formalismo físico que fundamenta el problema a resolver a partir de las ecuaciones de Maxwell.

3.1. Ecuaciones de Maxwell en el vacío y ondas electromagnéticas planas

Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de 4 ecuaciones que permiten describir los fenómenos electromagnéticos en su totalidad, estas ecuaciones están planteadas en todas las variables espaciales y tienen tanto forma diferencial como formas integrales. Al considerar una región espacial como el vacío (es decir, en ausencia de cargas y corrientes), las ecuaciones de Maxwell terminan tomando la siguiente forma ([9]),

i. $\nabla \cdot \vec{E} = 0,$ Ley de Gauss.

ii. $\nabla \cdot \vec{B} = 0,$ Ley de Gauss para campos magnéticos.

iii. $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t},$ Ley de Faraday.

iv. $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t},$ Ley de Ampère.

Recordando que para una función vectorial $\vec{A}$ se cumple que $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, a partir de la Ley de Faraday y Gauss para campo eléctrico se tiene que

$$-\nabla^2 \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{13}$$

Se puede realizar un proceso similar a partir de la Ley de Ampère y la Ley de Gauss para campos magnéticos, sabiendo que $(\mu_o \epsilon_0)^{-1} = c^2$ (c es la constante equivalente a la velocidad de la luz), se encontró finalmente que

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \tag{14}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \tag{15}$$

Estas ecuaciones precisamente representan a la ecuación de una onda en tres dimensiones. Podemos adicionalmente ver que a partir de Ley de Faraday o Ampère que los campos magnéticos y eléctricos son transversales entre ellos. Adicionalmente si asumimos solución del tipo onda plana, se puede observar adicionalmente que la amplitud de los campos difiere por una constante c la cual corresponde a la velocidad de la luz (ecuación 17). Si conocemos el vector de propagación de la onda $\vec{k}$ (el cual indica la dirección en la que la onda se desplaza), finalmente se tiene que los campos son descritos de la siguiente forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \tag{16}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}, \tag{17}$$

donde $\vec{E}_0$ contiene la información de la amplitud de la onda, de manera similar, se tiene que $\vec{B}_0 = (\hat{k} \times \vec{E}_0)/c$.

En problemas de electromagnetismo, estas ecuaciones tipo onda plana de los campos eléctricos y magnéticos son importantes ya que suelen ser considerados como los campos incidentes dentro de un problema de transmisión y reflexión [10].

3.2. Ecuaciones de Helmholtz

Consideremos nuevamente un espacio libre de cargas y fuentes. Pero, en este caso, supongamos que hay una inhomogeneidad en el espacio caracterizada por sus permitividad y permeabilidad relatividad, ϵ_r y μ_r. Una inhomogeneidad es comúnmente una irregularidad dentro del espacio. En este caso, puede ser considera como la existencia de un material dentro de la zona a trabajar. Usando nuevamente las ecuaciones de Maxwell, como fue visto en la subsección anterior, se llega a una dependencia temporal de la forma $e^{j\omega t}$, donde $j = -i$ es la unidad imaginaria. Sabiendo esto, las ecuaciones de Maxwell ahora tomarán la forma de ([11]),

i. $\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = 0,$ Ley de Gauss.

ii. $\nabla \cdot (\mu_0 \mu_r \vec{H}) = 0,$ Ley de Gauss para campos magnéticos.

iii. $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\mu_r\vec{H},$ Ley de Faraday.

iv. $\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r\vec{E},$ Ley de Ampère.

donde $\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{B}$ es denominado campo magnético también en algunas bibliografías (o excitación magnética en otras [9]). Nuevamente al usar la ecuación que se obtiene al aplicar el rotacional del rotacional del campo, pero esta vez sin usar la identidad vectorial previamente empleada De esta manera , siguiendo la Ley de Faraday encontramos para el campo eléctrico que

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) = -j\omega\mu_0(\nabla \times \vec{H}) = -j\omega\mu_0(j\omega\epsilon_0\epsilon_r\vec{E}) = \omega^2\mu_0\epsilon_0\epsilon_r\vec{E}. \tag{18}$$

De forma similar se puede encontrar una relación parecida para el campo eléctrico. Usando la ecuación de dispersión ($k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0$) finalmente se encuentra las denominadas *ecuaciones de Helmholtz vectoriales*,

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k^2\epsilon_r\vec{E} = 0, \tag{19}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} \right) - k^2\mu_r\vec{H} = 0. \tag{20}$$

Cuando se pretenden resolver problemas en dos dimensiones o problemas que aproximan a este, es conveniente utilizar la descomposición en modos Transversales Magnéticos (TM) y Transversales Eléctricos (TE) [11]. En esta descomposición, por ejemplo en el modo TM, consideramos que el campo magnético es transversal a la dirección de incidencia (que sin pérdida de generalidad, podemos asumir que es $\hat{z}$); por lo tanto $\vec{H}_{TM} = (H_x, H_y, 0)$, mientras que el campo eléctrico va en la dirección de la incidencia, $\vec{E}_{TM} = (0, 0, E_z)$. Similarmente, en el modo TE se tiene $\vec{E}_{TE} = (E_x, E_y, 0)$ y $\vec{H}_{TE} = (0, 0, H_z)$. De esta manera las ecuaciones de Helmholtz se pueden escribir de manera escalar para cada modo como sigue

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla E_z \right) + k^2\epsilon_r E_z = 0 \quad \text{Para TM}, \tag{21}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla H_z \right) + k^2\mu_r H_z = 0 \quad \text{Para TE}. \tag{22}$$

Recordemos que, dada la relación de transversalidad que tienen los campos, si se determina E_z se podrán determinar H_x y H_z, en particular se tiene respectivamente lo siguiente

Modo Transversal Eléctrico.

$$E_x = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\frac{\partial H_z}{\partial y},$$

$$E_y = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\frac{\partial H_z}{\partial x},$$

Modo Transversal Magnético.

$$H_x = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r}\frac{\partial E_z}{\partial y},$$

$$H_y = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r}\frac{\partial E_z}{\partial x},$$

Finalmente, esto implica que si se resuelve las ecuaciones de Helmholtz para los campos incidentes en esa dirección, se podrán determinar el resto de campos considerados en cada descomposición y adicionalmente, también se conocerán los campos totales pues $\vec{E} = \vec{E}_{TE} + \vec{E}_{TM}$ y $\vec{H} = \vec{H}_{TE} + \vec{H}_{TM}$.

3.3. Principio de equivalencia volumétrico

Para facilitar la resolución y formulación de las ecuaciones integrales, es conveniente convertir el problema original en uno con más facilidad de ser resuelto, para ello, se quiere convertir la inhomogeneidad del medio por una fuentes de carga y corriente equivalentes, en particular, se tiene que

i. $\vec{K} = j\omega\mu_0(\mu_r - 1)\vec{H}$, Corriente magnética.

ii. $\vec{J} = j\omega\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$, Corriente eléctrica.

iii. $\rho_m = \mu_0\mu_r\vec{H} \cdot \nabla\left(\frac{1}{\mu_r}\right)$, Densidad de carga magnética.

iv. $\rho_e = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} \cdot \nabla\left(\frac{1}{\epsilon_r}\right)$, Densidad de carga eléctrica.

Con estas fuentes equivalentes, las ecuaciones de Maxwell presentados en la subsección anterior cambian a las ecuaciones de Maxwell de un medio homogéneo en presencia de fuentes dadas por

i. $\nabla \cdot (\epsilon_0\vec{E}) = \rho_e$, Ley de Gauss.

ii. $\nabla \cdot (\mu_0\vec{H}) = \rho_m$, Ley de Gauss para campos magnéticos.

iii. $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} - \vec{K}$, Ley de Faraday.

iv. $\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0\vec{E} + \vec{J}$, Ley de Ampère.

Llamaremos a este conjunto de ecuaciones como las obtenidas por el *principio de equivalencia volumétrico* y serán las que utilizaremos para la formulación de las ecuaciones integrales de volumen. Adicionalmente, se puede deducir las siguientes ecuaciones de continuidad o conservación de la carga (las cuales son obtenidas al calcular la divergencia en las leyes de Faraday y Ampère),

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = j\omega\nabla \cdot (\epsilon_0\vec{E}) + \nabla \cdot \vec{J} = j\omega\rho_e + \nabla \cdot \vec{J},$$
$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -j\omega\nabla \cdot (\mu_0\vec{H}) - \nabla \cdot \vec{K} = -j\omega\rho_m - \nabla \cdot \vec{K}.$$

3.4. Descomposición de campos

El campo eléctrico o magnético total está representado por la sumatoria de todos los campos del mismo tipo en la misma región, de esta manera, si consideramos la existencia de una inhomogeneidad, se generará un campo dispersado (o de scattering) al interactuar el campo incidente con dicha inhomogeneidad. Se tiene entonces que los campos total en una zona $\vec{E}$ y $\vec{H}$ se descomponen como siguen

$$\vec{E} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^s \tag{23}$$
$$\vec{H} = \vec{H}^{inc} + \vec{H}^s, \tag{24}$$

Recordemos que los campos incidentes (que normalmente asumimos que tienen forma de ondas planas) son aquellos definidos donde no hay fuentes, por lo tanto cumplen la ecuación vectorial de Helmholtz libre de fuentes

$$\nabla^2\vec{E}^{inc} + k^2\vec{E}^{inc} = 0, \tag{25}$$
$$\nabla^2\vec{H}^{inc} + k^2\vec{H}^{inc} = 0. \tag{26}$$

Para los campos dispersados la ecuación correspondiente es un poco más complicada. Realizaremos la demostración para el campo eléctrico y usaremos que las ecuaciones de ambos campos cumplen una relación de dualidad [11]. Se tiene entonces que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}^s) = -j\omega\mu_0(\nabla \times \vec{H}^s) - \nabla \times \vec{K}$$
$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}^s) - \nabla^2\vec{E}^s = -j\omega\mu_0(j\omega\epsilon_0\vec{E}^s + \vec{J}) - \nabla \times K$$
$$\nabla^2\vec{E}^s + k^2\vec{E}^s = j\omega\mu_0\vec{J} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E}^s) + \nabla \times \vec{K}.$$

Sabiendo que de la conservación de carga eléctrica se puede deducir que $\nabla \cdot \vec{E}^s = -\nabla \cdot \vec{J}/j\omega\epsilon_0$, se obtiene finalmente las ecuaciones respectivas para los campos dispersados

$$\nabla^2\vec{E}^s + k^2\vec{E}^s = j\omega\mu_0\vec{J} - \frac{\nabla\nabla \cdot \vec{J}}{j\omega\epsilon_0} + \nabla \times \vec{K}, \tag{27}$$
$$\nabla^2\vec{H}^s + k^2\vec{H}^s = j\omega\epsilon_0\vec{K} - \frac{\nabla\nabla \cdot \vec{K}}{j\omega\mu_0} - \nabla \times \vec{J}. \tag{28}$$

3.5. Ecuaciones de Helmholtz para potenciales vectoriales

Hay muchas maneras de aproximar la solución a las ecuaciones presentadas anteriormente para los campos dispersados, la solución clásica y más común suele ser expresar los campos en términos de los potenciales vectoriales eléctrico ($\vec{F}$) y magnético ($\vec{A}$) de la forma

$$\vec{E}^s = \frac{\nabla\nabla\cdot\vec{A} + k^2\vec{A}}{j\omega\epsilon_0} - \nabla\times\vec{F}, \tag{29}$$

$$\vec{H}^s = \frac{\nabla\nabla\cdot\vec{F} + k^2\vec{F}}{j\omega\mu_0} + \nabla\times\vec{A}. \tag{30}$$

Al reemplazar estas soluciones en las ecuaciones de Maxwell en un medio inhomogéneo se obtiene que

$$\begin{aligned}
\nabla\times\left(\frac{\nabla\nabla\cdot\vec{A} + k^2\vec{A}}{j\omega\epsilon_0} - \nabla\times\vec{F}\right) &= -\nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - k^2\vec{F} - j\omega\mu_0\nabla\times\vec{A} - \vec{K}\\
\nabla\times\left(\frac{\nabla\nabla\cdot\vec{A} + w^2\epsilon_0\mu_0\vec{A}}{j\omega\epsilon_0}\right) &= \nabla\times(\nabla\times\vec{F}) - \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - k^2\vec{F} - j\omega\mu_0\nabla\times\vec{A} - \vec{K}\\
\nabla^2\vec{F} + k^2\vec{F} = -\vec{K} - \nabla\times\left(\frac{\nabla\nabla\cdot\vec{A} + w^2\epsilon_0\mu_0\vec{A}}{j\omega\epsilon_0} + j\omega\mu_0\vec{A}\right) &= -\vec{K} - \nabla\times\left(\nabla\left(\frac{\nabla\cdot\vec{A}}{j\omega\epsilon_0}\right)\right).
\end{aligned}$$

Como el último término corresponde al rotacional de un gradiente, directamente se anula, así, realizando la conversión para dualidad para los correspondientes eléctricos, se obtienen las ecuaciones de Helmholtz para los potenciales vectoriales dados por

$$\nabla^2\vec{F} + k^2\vec{F} = -\vec{K} \tag{31}$$

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = -\vec{J} \tag{32}$$

3.6. Teorema de unicidad

Para garantizar el funcionamiento del método numérico que se aplicará más adelante y con el fin de validar la solución previamente dada de los campos dispersados en términos de los potenciales vectoriales, es necesario introducir un teorema que garantice la unicidad de la solución encontrada, dicho teorema se enunciará a continuación.

Teorema 3.1 (Teorema de unicidad de campos electromagnéticos). *En una región finita, que puede contener fuentes tanto eléctricas como magnéticas, y que contiene algunos materiales disipativos, el campo está unívocamente determinado si sobre la superficie que lo encierra se conoce el campo eléctrico tangencial $\vec{E}_t$ o el campo magnético tangencial $\vec{H}_t$ o ambos [10, 12].*

Demostración. Supongamos una superficie S con volumen finito V, en este volumen tenemos medios lineales con permitividad ϵ y permeabilidad μ junto a la existencia de fuentes vectoriales $\vec{J}$ y $\vec{K}$. Supongamos la existencia de dos soluciones diferentes $(\vec{E}_a, \vec{H}_a)$ y $(\vec{E}_b, \vec{H}_b)$ que cumplan las ecuaciones de Maxwell, definamos $\delta\vec{E} = \vec{E}_a - \vec{E}_b$ y $\delta\vec{H} = \vec{H}_a - \vec{H}_b$ las variaciones de los campos, estas variaciones cumplen las ecuaciones de Maxwell puesto que se obtendrían de restar ambas ecuaciones de Maxwell con las soluciones planteadas, se tiene entonces que

$$\begin{matrix} \nabla\times\delta\vec{E} = -j\omega\mu\delta\vec{H} \\ \nabla\times\delta\vec{H} = j\omega\epsilon\delta\vec{E} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \delta\vec{H}^*\cdot(\nabla\times\delta\vec{E}) = -j\omega\mu\delta|\vec{H}|^2, \\ \delta\vec{E}\cdot(\nabla\times\delta\vec{H}^*) = -j\omega\epsilon^*\delta|\vec{E}|^2. \end{matrix}$$

De donde se sigue que $\nabla\cdot(\delta\vec{E}\times\delta\vec{H}^*) = \delta\vec{H}^*\cdot(\nabla\times\delta\vec{E}) - \delta\vec{E}\cdot(\nabla\times\delta\vec{H}^*) = j\omega(\epsilon^*\delta|\vec{E}|^2 - \mu\delta|\vec{H}|^2)$. Por el teorema de Stokes se tiene que

$$\oiint_S \hat{n}\cdot(\delta\vec{E}\times\delta\vec{H}^*)da = j\omega\iiint_V(\epsilon^*\delta|\vec{E}|^2 - \mu\delta|\vec{H}|^2)dV.$$

Se puede observar a partir de la integral sobre la superficie cerrada que

$$\oiint_S \hat{n} \cdot (\delta\vec{E} \times \delta\vec{H}^*) da = \oiint_S \delta\vec{H}^* \cdot (\hat{n} \times \delta\vec{E}) da = -\oiint_S \vec{E} \cdot (\hat{n} \times \delta\vec{H}^*) da = 0$$

puesto que $\hat{n} \times \delta\vec{E} = 0$ si el campo eléctrico tangencial es conocido y $\hat{n} \times \delta\vec{H}^* = 0$ si el campo magnético tangencial es conocido. Así, concluimos que la integral sobre el volumen debe ser igual a 0. Tomando la parte imaginaria se obtiene que

$$\iiint_V (-Im(\epsilon)\delta|\vec{E}|^2 - Im(\mu)\delta|\vec{H}|^2) dV.$$

□

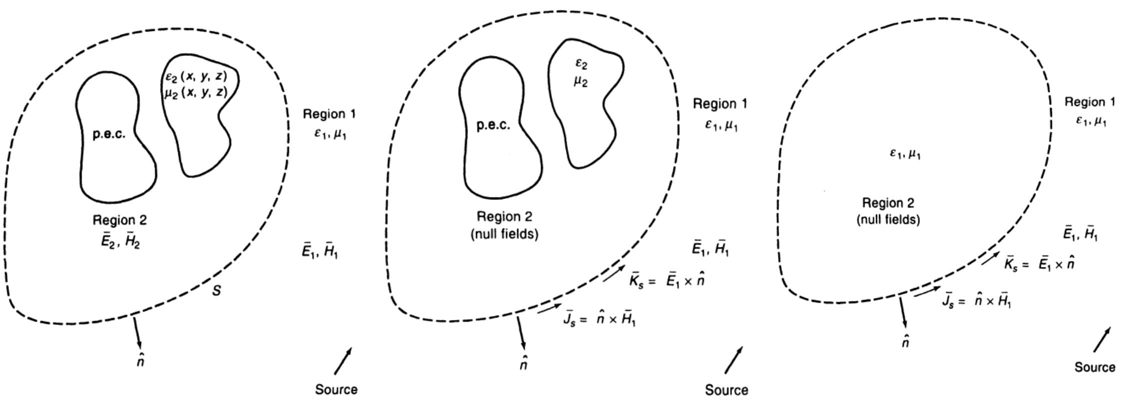
Adicionalmente, como por hipótesis el material es dispersivo, se cumple que $Im(\epsilon), Im(\mu) < 0$, por lo tanto, para que dicha integral sea igual a 0 se debe tener que $\delta\vec{E} = \delta\vec{H} = 0$, lo cual prueba que en efecto ambas soluciones planteadas en un principio son iguales y por lo tanto, la solución es única.

3.7. Principio de equivalencia superficial

Una vez dada la garantía de que la solución es única, se debe ahora encontrar que tan válida es la aproximación a la solución que estamos usando, para ello es necesario introducir el principio de equivalencia superficial.

Teorema 3.2 (Principio de equivalencia superficial). *Consideremos un espacio inhomogéneo que se pueda caracterizar como un espacio homogéneo que contenga una irregularidad. Si encerramos esas irregularidades con una superficie matemática S, entonces dicha superficie no tendrá corrientes superficiales. Este principio dice que es equivalente resolver el problema originalmente planteado que aquel problema que se obtiene al volver nulos los campos dentro de S y con corrientes inducidas $\vec{J}_S$ y $\vec{K}_S$ que se obtienen a partir de los campos fuera de la superficie $\vec{J}_S = \hat{n} \times \vec{H}_1$ y $\vec{K}_S = \vec{E} \times \hat{n}$.*

La demostración de este principio es consecuencia de considerar las ecuaciones de Maxwell en la región encerrada por S y la que está por fuera de este, conociendo el teorema de reciprocidad de *Lorentz* [13] y realizando muchas identidades del cálculo vectorial se puede concluir con la demostración del principio, la demostración a detalle puede ser encontrado en [11] y [14].



(a) Problema original a resolver

(b) Paso intermedio con corrientes superficiales sobre S

(c) Problema equivalente por el principio

Figura 2: Conversión de un problema de un medio homogéneo que contiene una irregularidad a un problema sin irregularidades con corrientes superficiales. Imágenes tomadas de [11].

3.8. Ecuaciones integrodiferenciales y funciones de Green

Ya para finalizar la teoría relacionada a la física es necesario hacer un repaso a las funciones de Green. Consideremos un operador diferencial y lineal L que actúa sobre cierto espacio de funciones definidas sobre una variedad diferencial M, supongamos que pretendemos resolver la ecuación diferencial

$$L[u(x)] = f(x), \qquad x \in \Omega \subset M.$$

La función de Green asociada a L es una función de dos variables $G(x, s)$ continua y diferenciable en el sentido de distribuciones de tal manera que ([15]),

$$L[G(x, s)] = \delta(x - s),$$

donde δ es la función delta de Dirac. Si esta función de Green existe, entonces la solución a la ecuación diferencial será de la forma

$$u(x) = \int G(x, s) f(s) ds.$$

Consideremos nuevamente las ecuaciones de Helmholtz halladas para los potenciales vectoriales. Como la función de Green está asociada al operador diferencial, que en este caso es $L' = \nabla^2 + k^2$, dicha función será igual para ambos potenciales, por lo tanto, si $G(\vec{r}, \vec{r'})$ es esta función de Green, tenemos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \iiint \vec{J}(\vec{r'}) G(\vec{r}, \vec{r'}) d^3\vec{r'}, \tag{33}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \iiint \vec{K}(\vec{r'}) G(\vec{r}, \vec{r'}) d^3\vec{r'}. \tag{34}$$

En particular, se puede demostrar que

$$G(\vec{r}, \vec{r'}) = \frac{e^{-j\vec{k}\cdot|\vec{r}-\vec{r'}|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r'}|}, \tag{35}$$

puesto que al reemplazar esta función de Green en L' justamente se obtiene $\delta(\vec{r} - \vec{r'})$, la delta de Dirac asociada a 3 dimensiones. En el caso particular donde la función $f(x)$ en la ecuación diferencial a resolver fuese igual a 0, el equivalente a la función de Green es conocido como núcleo de Poisson [16], en particular, este núcleo coincide con la función $k(x, y)$ introducida en la subsección de elementos de frontera.

Recapitulemos un poco nuestras ecuaciones de interés, para empezar tenemos que el campo eléctrico o magnético total en una región es la suma del campo incidente más el dispersado, dichos campos totales cumplen el principio de equivalencia volumétrico, es decir,

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{j\omega\epsilon_0(\epsilon_r - 1)},$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{K}}{j\omega\mu_0(\mu_r - 1)}.$$

Los campos incidentes son considerados como aquellos que inciden desde el infinito y sin fuentes, estos suelen tener la forma de ondas planas. Y por último los campos dispersados tienen solución de la forma

$$\vec{E^s} = \frac{\nabla\nabla\cdot\vec{A} + k^2\vec{A}}{j\omega\epsilon_0} - \nabla\times\vec{F},$$

$$\vec{H^s} = \frac{\nabla\nabla\cdot\vec{F} + k^2\vec{F}}{j\omega\mu_0} + \nabla\times\vec{A}.$$

De esta manera, las ecuaciones integrodiferenciales relacionadas al campo eléctrico (EFIE) y al campo magnético (MFIE) son las presentadas a continuación (las cuales tienen dependencia única de los vectores potenciales)

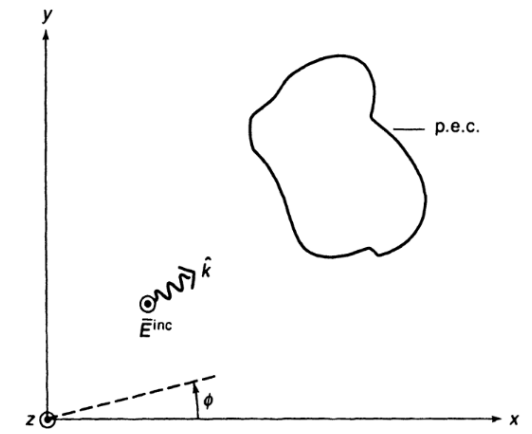
$$\vec{E}^{inc} = \frac{\vec{J}}{j\omega\epsilon_0(\epsilon_r - 1)} - \frac{\nabla\nabla\cdot\vec{A}(\vec{J}) + k^2\vec{A}(\vec{J})}{j\omega\epsilon_0} + \nabla\times\vec{F}(\vec{K}), \tag{36}$$

$$\vec{H}^{inc} = \frac{\vec{K}}{j\omega\mu_0(\mu_r - 1)} - \frac{\nabla\nabla\cdot\vec{F}(\vec{K}) + k^2\vec{F}(\vec{K})}{j\omega\mu_0} - \nabla\times\vec{A}(\vec{J}). \tag{37}$$

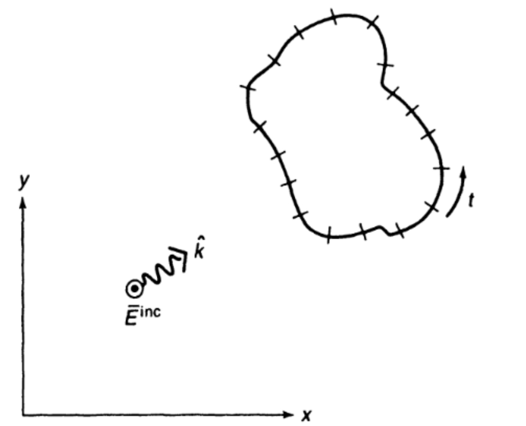
4. Método de Elementos de Frontera en Electromagnetismo

Una vez estudiada la teoría matemática necesaria para resolver el problema a interés y después de haber encontrado también las ecuaciones que se quieren resolver, es necesario juntar todo con el fin de resolver el fenómeno con el método dado. Con el fin de poder analizar en específico las técnicas e implementación, se trabajará un único problema, este es, la resolución y determinación de los campos totales y dispersados a través de una superficie tipo *cilíndrica* infinita en el eje z y compuesto de un conductor eléctrico perfecto (*P.E.C.*). Como fue planteado en los fundamentos físicos, es suficiente determinar los campos magnéticos y eléctricos en la dirección z a través de los modos TE y TM, luego de esto, determinar los campos en las otras direcciones se reduce a derivar los resultados obtenidos. En las subsecciones que se mostrarán a continuación se presentarán los formalismos usados y sus respectivas discretizaciones para poder encontrar los valores buscados (ver [11]).

4.1. Cilindro infinito de P.E.C: formulación TM-EFIE



(a) Una figura tipo cilíndrica infinita compuesta por un conductor eléctrico perfecto con una onda transversal magnética incidente.



(b) Discretización sobre la frontera del problema considerado, cada sección de la discretización es denominado celda.

Figura 3: Onda transversal magnética incidente sobre un conductor eléctrico perfecto y su respectiva discretización. Imágenes tomadas de [11].

Consideramos el modo transversal magnético en las ecuaciones integrodiferenciales del campo eléctrico, en este caso solo existen los campos E_z, H_x, H_y; si al momento de formular el principio de equivalencia superficial, nos restringimos a que la superficie matemática cubre perfectamente el borde de la irregularidad se tendrá entonces $\vec{K} = 0$ y por tanto $\vec{F} = 0$ [11]. Recordando que para un conductor eléctrico toda la corriente eléctrica va en dirección tangencial a la superficie, se tiene que

$$\hat{n} \times \vec{E}^{inc} = -\hat{n} \times \left[\frac{\nabla\nabla \cdot \vec{A}(\vec{J}) + k^2 \vec{A}(\vec{J})}{j\omega\epsilon_0} \right]_{S^+} . \tag{38}$$

Como en el modo transversal magnético el campo magnético solo tiene componente en z, por el principio de equivalencia volumétrico, la corriente eléctrica y el potencial magnético tendrán solamente componente en z. Podemos ver que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ puesto que el cilindro a trabajar es infinito en z, por simetría es necesario que J_z no dependa de dicha variable, lo cual implica que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, podemos concluir que la ecuación EFIE del campo eléctrico en dirección z queda descrita como sigue

$$E_z^{inc}(t) = -\frac{k^2 A_z(t)}{j\omega\epsilon_0} = jk\eta A_z(t), \tag{39}$$

donde $\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. Escribimos entonces la relación de A_z en términos de J_z dada por la función de Green, en particular como $\vec{J}$ no depende de la variable z, se puede integrar en dicha variable la función de Green y se obtendrá una nueva expresión que dependerá de la función de Hankel [11] como se muestra a continuación

$$A_z(t) = \int J_z(t')\frac{1}{4j}H_0^{(2)}(kR)dt', \tag{40}$$

con $R = \sqrt{[x(t)-x(t')]^2 + [y(t)-y(t')]^2}$. En este punto podemos realizar una discretización tal como se plantea en el método de elementos de frontera. En este caso, como no es necesario garantizar que las derivadas de $\vec{J}$ sean continuas, podemos tomar como espacio de funciones bases a P_h^0 las cuales corresponden a las funciones constantes a trozos. En específico, $\rho_n(t)$ es igual a 1 si t está en la celda o intervalo n y 0 en todas las otras celdas. En caso de considerar N celdas, la discretización será entonces igual a

$$J_z(t) = \sum_{n=1}^{N} j_n\rho_n(t), \qquad \rho_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \text{ celda } n, \\ 0 & \text{si } t \notin \text{ celda } n. \end{cases}$$

Usando la formulación matricial planteada en la subsección de elementos de frontera obtenemos entonces las siguientes igualdades

$$l(\rho_n) = \int_{\text{celda } n} E_z^{inc}(t)\rho_n(t)dt = E_{z_n}^{inc}(t), \tag{41}$$

$$b(\rho_n, J_z) = jk\eta\sum_{n=1}^{N} j_n \int_{\text{celda } n} \frac{1}{4j}H_0^{(2)}(kR_m)dt', \tag{42}$$

donde $E_{z_n}^{inc}(t)$ hace referencia al campo eléctrico de la n-ésima celda y $R_m = \sqrt{[x_m - x(t')]^2 + [y_m - y(t')]^2}$, siendo (x_m, y_m) la coordenada del punto medio del m-ésimo intervalo. Teniendo en cuenta que la igualdad presentada es válida para todas las funciones bases del espacio trabajado, conseguimos finalmente nuestro sistema matricial dado por

$$\begin{pmatrix} E_{z_1}^{inc}(t) \\ E_{z_2}^{inc}(t) \\ \vdots \\ E_{z_N}^{inc}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_N \end{pmatrix}. \tag{43}$$

La matriz Z de tamaño $N\times N$ es conocida como la matriz de impedancia y la entrada ij representa la impedancia mutua entre las celdas i y j, las entradas de estas matriz están dadas por

$$Z_{mn} = \frac{k\eta}{4}\int_{\text{celda } n} H_0^{(2)}(kR_m)dt'. \tag{44}$$

Por otro lado, esto solo es válido para elementos fuera de la diagonal, las funciones de Hankel presentan una singularidad de tipo infinito si el término donde son evaluadas es igual a 0, veamos que si expandimos la función de Hankel en series de potencia [17] se obtiene que

$$H_0^{(2)}(x) \approx \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - j\left\{\frac{2}{\pi}ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) + \left[\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right)\right]x^2\right\} + O(x^4),$$

donde $\gamma \approx 1{,}78107\ldots$, al momento de tomar x cercano a 0 y al tomar los elementos dominantes de la expansión mostrada es posible entonces aproximar la integral de la función de Hankel y por ende la entrada diagonal de la matriz de impedancia como sigue

$$Z_{mm} = \frac{k\eta}{4}\int_{\text{celda } m} H_0^{(2)}(kR_m)dt' \approx \frac{k\eta}{2}\int_0^{w_m/2}\left[1 - j\frac{2}{\pi}ln\left(\frac{\gamma ku}{2}\right)\right]du, \tag{45}$$

en donde w_m hace referencia a la longitud de la sección o intervalo m-ésimo en el mallado [18].

4.2. Cilindro infinito de P.E.C: Formulación TE-MFIE

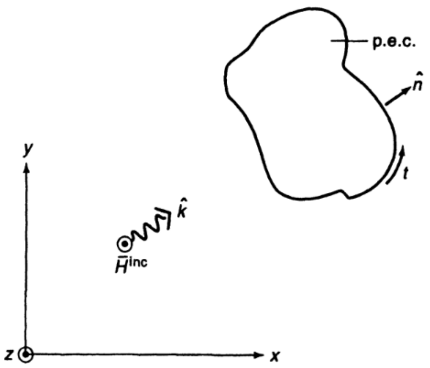


Figura 4: Una figura tipo cilíndrica infinita compuesta por un conductor eléctrico perfecto con una onda transversal eléctrica incidente.

Similar a la subsección anterior, ahora consideramos el modo transversal eléctrico (con campos H_z, E_x, E_y) con las ecuaciones integrodiferenciales del campo magnético, en un conductor eléctrico perfecto se tiene adicionalmente que $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$, añadiendo esta condición a la ecuación MFIE presentada en la sección anterior se obtiene entonces que

$$\hat{n} \times \vec{H}^{inc} = \vec{J}_s - [\hat{n} \times \nabla \times A]_{S^+}. \tag{46}$$

Podemos denotar a la corriente eléctrica por J_t ya que no presenta componente en dirección z, de esta manera se obtiene la ecuación a resolver dada por

$$H_z^{inc}(t) = -J_t(t) - \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]_{S^+}, \tag{47}$$

donde al realizar la parametrización de las coordenadas en términos de t se obtiene entonces que el potencial vector magnético será igual a

$$\vec{A}(t) = \int \hat{t}(t')\vec{J}_t(t')\frac{1}{4j}H_0^2(kR)dt'. \tag{48}$$

Aquí $R = \sqrt{[x(t) - x(t')]^2 + [y(t) - y(t')]^2}$ y $\hat{t}(t) = \cos(\Omega(t))\hat{x} + \sin(\Omega(t))\hat{y}$. Nuevamente podemos realizar la discretización planteada como en la subsección anterior, es decir, $J_t = \sum_{n=1}^{N} j'_n \rho_n$, de esta manera podemos encontrar nuestro nuevo sistema matricial equivalente a

$$\begin{pmatrix} H_{z_1}^{inc}(t) \\ H_{z_2}^{inc}(t) \\ \vdots \\ H_{z_N}^{inc}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} & \cdots & Z'_{1N} \\ Z'_{21} & Z'_{22} & \cdots & Z'_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z'_{N1} & Z'_{N2} & \cdots & Z'_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_1 \\ j'_2 \\ \vdots \\ j'_N \end{pmatrix}. \tag{49}$$

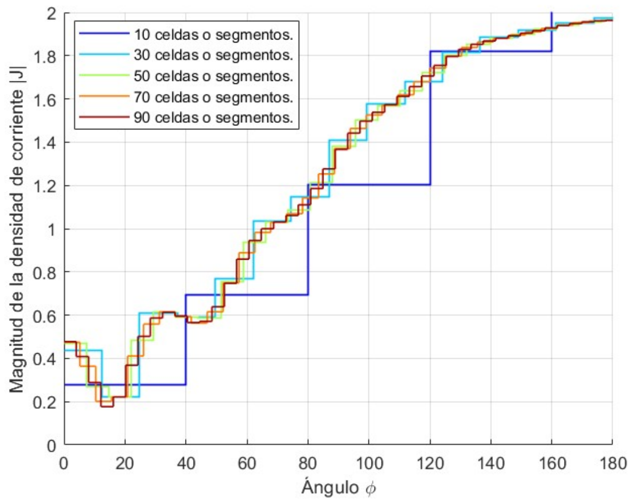
Esta nueva matriz de impedancia tendrá entradas fuera de la diagonal iguales a

$$Z'_{mn} = \frac{k}{4j}\int_{\text{celda } n}\left(\sin\Omega(t')\frac{x_m - x(t')}{R_m} - \cos\Omega(t')\frac{y_m - y(t')}{R_m}\right)H_1^{(2)}(kR_m)dt', \tag{50}$$

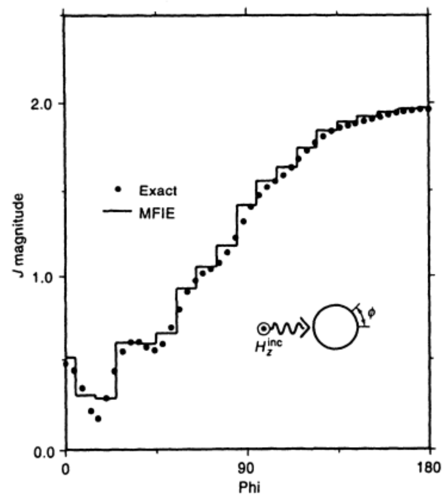
en la cual $R_m = \sqrt{[x_m - x(t')]^2 + [y_m - y(t')]^2}$. Adicionalmente, tomando límite es posible demostrar que los elementos de la diagonal de esta matriz son iguales a $-1/2$ [11].

5. Resultados, Análisis y Conclusiones

Los códigos utilizados toman como base los códigos presentados en [19, 20] y se presentan en la sección de anexos. Como primer resultado, se busca comparar la eficacia del método empleado con un resultado presentado en el libro de Peterson [11], en particular, se quiere verificar que el resultado numérico aproxima a la solución exacta, el resultado numérico se muestra en la figura 5a, mientras que la solución aportada por Peterson es ilustrado en la figura 5b.



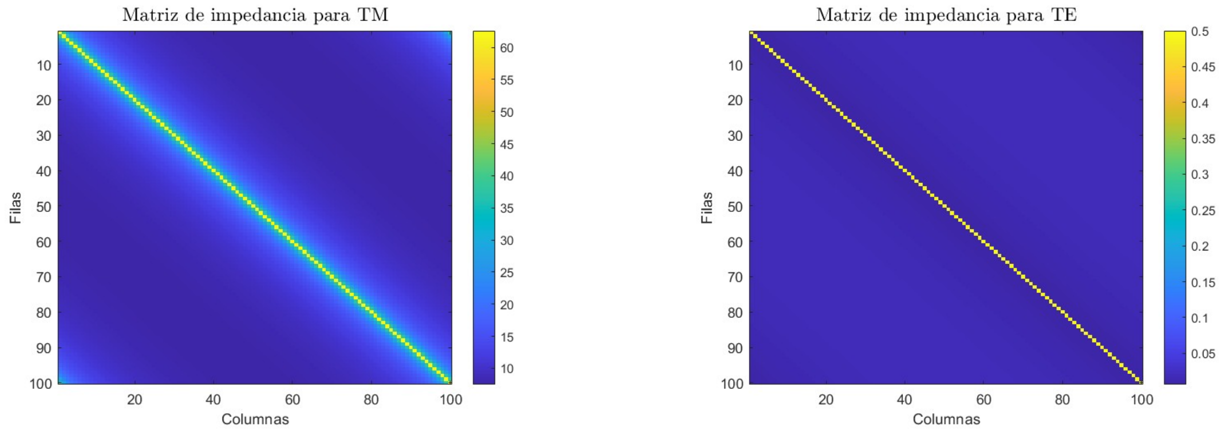
(a) Solución numérica al módulo de la densidad de corriente en función del ángulo de posición para diferentes números de celdas.



(b) Solución exacta comparada con la solución numérica al considerar 36 celdas. Imagen tomada de [11].

Figura 5: Comparación de la magnitud de la densidad de corriente eléctrica de una onda en modo transversal eléctrico en las ecuaciones integrodiferenciales del campo magnético para un cilindro de radio $5\lambda/2\pi$, con λ la longitud de onda y una incidencia de 180 grados.

Un primer análisis que es consecuente a este resultado es observar que a medida que se aumenta el mallado o el número de celdas, la solución numérica aproxima mejor a la solución exacta, y esto precisamente es algo que se espera del propio método de elementos finitos [6]. Por otro lado, durante el proceso de determinación de las corrientes eléctricas, fue necesario determinar las matrices de impedancia para ambos modos y determina la interacción entre cada una de las celdas de mallado por medio de la impedancia mutua, el módulo de los elementos de estas matrices son graficados según su posición y se presentan en la figura 6. Al estar trabajando con un cilindro exacto y mallado uniformemente, sabemos que el final de la celda número 100 coincide con el inicio de la primera celda, el mayor valor que se encuentra en la matriz (o mayor iluminación) se presenta en los términos de la diagonal y seguidos a estos se encuentran en los términos de la forma $i, i+1$ ó $i+1, i$ con $1 \leq i \leq 100$ (sabiendo que si $i = 100$ entonces $i+1 = 1$) tal como se esperaba que pasara teóricamente [11]. Por otro lado, la matriz de impedancia para el modo transversal eléctrico presenta sus mayores valores en los términos de la diagonal mientras que todos los demás son próximos a 0 (aunque no son nulos).

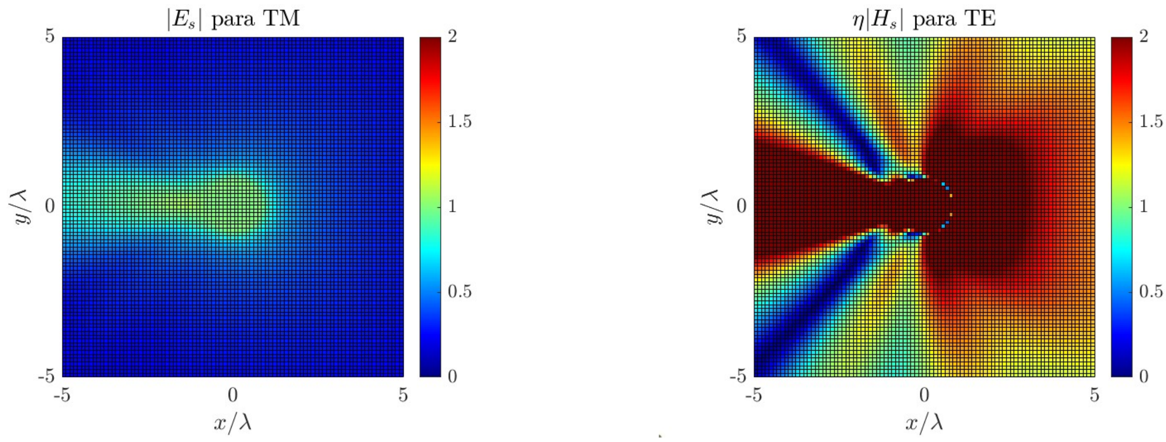


(a) Matriz de impedancia para el modo transversal magnético.

(b) Matriz de impedancia para el modo transversal eléctrico.

Figura 6: Matrices de impedancia encontradas en la implementación numérica al considerar un total de 100 celdas.

Una vez obtenido la corriente en ambos modos, es posible determinar los campos dispersados, en el código realizado se aproxima el valor de la integral en un mallado escalado por la longitud de onda λ. Al trabajarse con un conductor eléctrico perfecto, se espera que toda la onda eléctrica que incide se transmita y de igual manera, por lo tanto, la parte de la onda dispersada solo debe estar en dirección opuesta a la incidencia, en efecto este resultado se obtuvo y se presenta en la figura 7.

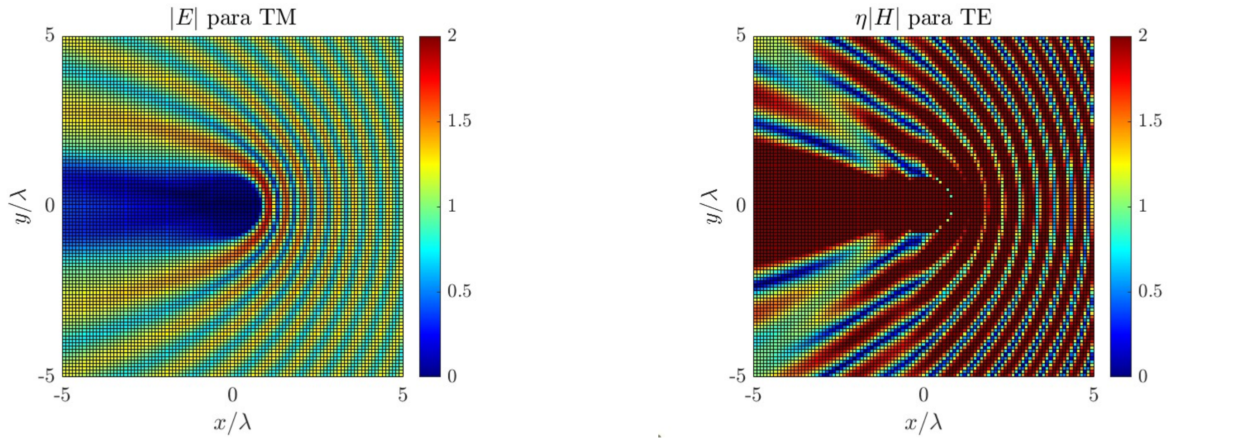


(a) Dispersión del componente z de la onda eléctrica en una incidencia de 0 grados.

(b) Dispersión del componente z de la onda magnética en una incidencia de 0 grados.

Figura 7: Dispersión de las ondas electromagnéticas en los modos transversales magnético y eléctrico respectivamente usando un mallado de 90 celdas.

Finalmente se suma el campo dispersado calculado con el campo incidente que se tiene por hipótesis para obtener el campo total o transmitido en la región considerada, dicho se resultado se encuentra en la figura 8. Algo que es posible observar en todos estos resultados numéricos es el raro comportamiento del campo magnético dispersado y transmitido, en particular, en la figura 8b, se puede observar que el campo magnético presenta el mismo comportamiento ondulatorio del campo eléctrico sin embargo se tiene el espectro de color inverso a lo esperado según el código mostrado en [20]; más aún, se obtuvo que dentro de un cilindro conformado de conductor eléctrico perfecto se presentan valores altos de la magnitud del campo magnético cuando según la literatura, dentro de un material conformado de P.E.C, el campo magnético debe ser nulo [9].



(a) Transmisión del componente z de la onda eléctrica en una incidencia de 0 grados.

(b) Transmisión del componente z de la onda magnética en una incidencia de 0 grados.

Figura 8: Transmisión de las ondas electromagnéticas en los modos transversales magnético y eléctrico respectivamente con un mallado de 100 celdas.

Para concluir, un siguiente paso a estas simulaciones es determinar las otras componentes de los campos electromagnéticos (E_x, E_y, H_x, H_y) realizando derivaciones numéricas y poder luego de esto trazar los diagramas de campos respectivos. Otra forma de determinar estas componentes restantes podría ser la implementación de los modos y ecuaciones *TE-EFIE* y *TM-MFIE*, sin embargo, a pesar de que estos modos son más precisos, requieren de cambiar las funciones bases en la discretización para su correcto funcionamiento [11], por otro lado, la implementación de estas ecuaciones diferenciales permitiría encontrar de manera más precisa las corrientes J_x y J_y en vez de utilizar la corriente transversal J_t, posiblemente al utilizar este formalismo se disminuiría el error numérico y sería posible encontrar una solución más acertada para el campo magnético. Adicionalmente, otra posible forma de determinar una solución más válida para el campo magnético es no aproximando el valor de la integral tal como se realizó.

6. Anexos.

6.1. Función para el cálculo de corrientes y campos

```
function[Z_TM,I_TM,RCS_TM,Z_TE,I_TE,RCS_TE,phi,E,Es,Ei,H,Hs,Hi]=RCSedit(a,N,phi_i,r_)
Ns           =   N;
j            =   sqrt(-1);
eta0         =   120*pi;
k            =   2*pi;
%% TM-EFIE
phi_i        =   deg2rad(phi_i);
Data         =   CircleData(a,N);
Z            =   zeros(N,N);
V            =   zeros(N,1);
for i=1:N
    for ii=1:N
        ln          =   Data(ii,5);
        if i==ii
            func        =   @(l) besselh(0,2,k*abs(l-ln/2))+j*(2/pi)*log(l/2);
            Z(i,ii) = (k*eta0/4)*(Quad(@(l)func(l),0,ln)-j*(2/pi)*ln*(log(ln/2)-1));
        else
            Z(i,ii) = (k*eta0/4)*Quad(@(l)Integrand_TM(Data,l,i,ii,k),0,ln);
        end
    end
end
for i=1:N
    xm           =   Data(i,1);
    ym           =   Data(i,2);
    lm           =   Data(i,5);
    phi_m        =   Data(i,6);
    xm_          =   xm+0.5*lm*cos(phi_m);
    ym_          =   ym+0.5*lm*sin(phi_m);
    V(i,1)       =   exp(j*k*(xm_*cos(phi_i)+ym_*sin(phi_i)));
end
I            =   Z\V;
%% Determinacion Campos electricos
Es = 0;
[x,y]    =   meshgrid(linspace(-r_,r_,Ns),linspace(-r_,r_,Ns));
for i=1:N
    xm           =   Data(i,1);
    ym           =   Data(i,2);
    R        =   sqrt((x-xm).^2+(y-ym).^2);
    val      =   0.1;
    R = sqrt((x-xm).^2+(y-ym).^2).*(R>val)+sqrt((x-xm).^2+(y-ym).^2+1E-4./R).*(R<=val);
    lm           =   Data(i,5);
    Es       =   Es-(k*eta0/4)*(lm)*I(i,1)*besselh(0,2,k*R);
end
Ei       =   exp(j*k*(x*cos(phi_i)+y*sin(phi_i)));
E        =   Ei+Es;


%%
phi          =   linspace(0,pi,Ns);
sigma        =   0;
for i=1:N
```

```
    xn          =   Data(i,1);
    yn          =   Data(i,2);
    ln          =   Data(i,5);
    phi_n       =   Data(i,6);
    xn_         =   xn+0.5*ln*cos(phi_n);
    yn_         =   yn+0.5*ln*sin(phi_n);
    sigma       =   sigma+ ln*I(i,1)*exp(j*k*(xn_*cos(phi)+yn_*sin(phi)));
end
sigma       =   (k*eta0^2/4)*abs(sigma).^2;
%%
Z_TM        =   Z;
I_TM        =   I;
RCS_TM      =   10*log10(sigma);
%% TE-MFIE
for i=1:N
    for ii=1:N
        ln          =   Data(ii,5);
        if i==ii
            Z(i,ii)     =   -0.5;
        else
            Z(i,ii)     =   -(j*k/4)*Quad(@(l)Integrand_TE(Data,l,i,ii,k),0,ln);
        end
    end
end
for i=1:N
    xm          =   Data(i,1);
    ym          =   Data(i,2);
    lm          =   Data(i,5);
    phi_m       =   Data(i,6);
    xm_         =   xm+0.5*lm*cos(phi_m);
    ym_         =   ym+0.5*lm*sin(phi_m);
    V(i,1)      =   exp(j*k*(xm_*cos(phi_i)+ym_*sin(phi_i)));
end
I           =   Z\V;


%%
phi         =   linspace(0,pi,Ns);
sigma       =   0;
for i=1:N
    xn          =   Data(i,1);
    yn          =   Data(i,2);
    ln          =   Data(i,5);
    phi_n       =   Data(i,6);
    nx          =   Data(i,7);
    ny          =   Data(i,8);
    xn_         =   xn+0.5*ln*cos(phi_n);
    yn_         =   yn+0.5*ln*sin(phi_n);
    Dotn        =   (nx*cos(phi)+ny*sin(phi));
    sigma       =   sigma+ ln*I(i,1)*Dotn.*exp(j*k*(xn_*cos(phi)+yn_*sin(phi)));
end
sigma       =   (k/4)*abs(sigma).^2;
%%
Z_TE        =   Z;
I_TE        =   I;
```

```
RCS_TE       =    10*log10(sigma);


%% Determinacion Campos magneticos
Hs = 0;
[x,y]    =    meshgrid(linspace(-r_,r_,Ns),linspace(-r_,r_,Ns));
for i=1:N
    xm           =    Data(i,1);
    ym           =    Data(i,2);
    R        =    sqrt((x-xm).^2+(y-ym).^2);
    val      =    0.1;
    R = sqrt((x-xm).^2+(y-ym).^2).*(R>val)+sqrt((x-xm).^2+(y-ym).^2+1E-4./R).*(R<=val);
    Rx       =    (x-xm)./R;
    Ry       =    (y-ym)./R;
    lm           =    Data(i,5);
    phi_m        =    Data(i,6);
    xm_          =    xm+0.5*lm*cos(phi_m);
    ym_          =    ym+0.5*lm*sin(phi_m);
    Cross    =    Rx*(Data(i,4)-ym_)-Ry*(Data(i,3)-xm_);
    %Hs       =    Hs-(j*k/4)*I(i,1)*(Cross/2).*besselh(1,2,k*R);
    Hs       =    Hs-(j*k*lm/4)*I_TE(i,1)*(Cross/2).*besselh(1,2,k*R);
end
Hi       =    exp(j*k*(x*cos(phi_i)+y*sin(phi_i)))/eta0;
H        =    Hi+Hs;


end
%%

function[Data]=CircleData(a,N)
%% Columnas de Data: xn yn xn+1 yn+1 ln phi_n nx ny
Data         =    zeros(N,2);
for i=1:N
    xn           =    a*cos((2*pi/N)*(i-1));
    yn           =    a*sin((2*pi/N)*(i-1));
    Data(i,1)    =    xn;
    Data(i,2)    =    yn;
end
Data         =    [ Data [Data(2:N,:);Data(1,:)] ];
ln           =    sqrt((Data(:,3)-Data(:,1)).^2+(Data(:,4)-Data(:,2)).^2);
phi_n        =    atan2((Data(:,4)-Data(:,2)),(Data(:,3)-Data(:,1)));
nx           =    (Data(:,4)-Data(:,2))./ln;
ny           =    -(Data(:,3)-Data(:,1))./ln;
Data         =    [ Data ln phi_n nx ny];
end
%%
function[I]=Integrand_TM(Data,l,m,n,k)
I            =    besselh(0,2,k*Rmn(l,Data,m,n));
end
%%
function[I]=Integrand_TE(Data,l,m,n,k)
%%
xn           =    Data(n,1);
yn           =    Data(n,2);
phi_n        =    Data(n,6);
```

```
nx          =   Data(n,7);
ny          =   Data(n,8);
xm          =   Data(m,1);
ym          =   Data(m,2);
lm          =   Data(m,5);
phi_m       =   Data(m,6);
x           =   xn+l*cos(phi_n);
y           =   yn+l*sin(phi_n);
xm_         =   xm+0.5*lm*cos(phi_m);
ym_         =   ym+0.5*lm*sin(phi_m);
Rmnx        =   (xm_-x);
Rmny        =   (ym_-y);
%%
Dotmn       =   (nx*Rmnx+ny*Rmny)./(Rmn(l,Data,m,n));
I           =   Dotmn.*besselh(1,2,k*Rmn(l,Data,m,n));
end
%%
function[R]=Rmn(l,Data,m,n)
%%
xn          =   Data(n,1);
yn          =   Data(n,2);
phi_n       =   Data(n,6);
xm          =   Data(m,1);
ym          =   Data(m,2);
lm          =   Data(m,5);
phi_m       =   Data(m,6);
%%
x           =   xn+l*cos(phi_n);
y           =   yn+l*sin(phi_n);
xm_         =   xm+0.5*lm*cos(phi_m);
ym_         =   ym+0.5*lm*sin(phi_m);
%%
R           =   sqrt((xm_-x).^2+(ym_-y).^2);
end
%%
function[sigma]=PEC_RCS_TM(a,phi)
N           =   100;
k           =   2*pi;
%%
Sum         =   (besselj(0,k*a)/besselh(0,2,k*a));
for n=1:N
Sum         =   Sum+Term(n,phi,a);
end
sigma       =   (2/pi)*abs(Sum).^2;
    function[Sn]=Term(n,phi,a)
    k           =   2*pi;
    Sn          =   2*(besselj(n,k*a)/besselh(n,2,k*a))*cos(n*phi);
    end
end
%%
function[sigma]=PEC_RCS_TE(a,phi)
N           =   100;
k           =   2*pi;
%%
Sum         =   (besselj(1,k*a)/besselh(1,2,k*a));
```

```
for n=1:N
Sum         =   Sum+Term(n,phi,a);
end
sigma       =   (2/pi)*abs(Sum).^2;
function[Sn]=Term(n,phi,a)
    k           =   2*pi;
    Sn          =   2*((besselj(n-1,k*a)-(n/(k*a))*besselj(n,k*a))...
        /(besselh(n-1,2,k*a)-(n/(k*a))*besselh(n,2,k*a)))*cos(n*phi);
end
end
%%
function[I]=Quad(func,a,b)
%% 32 Levels (Gauss-Legendre rule)
x       =   [-9.97263861849481e-01 -9.85611511545268e-01 -9.64762255587506e-01 ...
             -9.34906075937740e-01 -8.96321155766052e-01 -8.49367613732570e-01 ...
             -7.94483795967942e-01 -7.32182118740290e-01 -6.63044266930215e-01 ...
             -5.87715757240762e-01 -5.06899908932229e-01 -4.21351276130635e-01 ...
             -3.31868602282128e-01 -2.39287362252137e-01 -1.44471961582796e-01 ...
             -4.83076656877383e-02 +4.83076656877382e-02 +1.44471961582797e-01 ...
             +2.39287362252137e-01 +3.31868602282128e-01 +4.21351276130636e-01 ...
             +5.06899908932230e-01 +5.87715757240762e-01 +6.63044266930215e-01 ...
             +7.32182118740289e-01 +7.94483795967942e-01 +8.49367613732570e-01 ...
             +8.96321155766052e-01 +9.34906075937740e-01 +9.64762255587506e-01 ...
             +9.85611511545268e-01 +9.97263861849481e-01];
w       =   [+7.01861000947021e-03 +1.62743947309057e-02 +2.53920653092621e-02 ...
             +3.42738629130214e-02 +4.28358980222263e-02 +5.09980592623761e-02 ...
             +5.86840934785358e-02 +6.58222227763622e-02 +7.23457941088488e-02 ...
             +7.81938957870697e-02 +8.33119242269464e-02 +8.76520930044040e-02 ...
             +9.11738786957641e-02 +9.38443990808043e-02 +9.56387200792743e-02 ...
             +9.65400885147275e-02 +9.65400885147285e-02 +9.56387200792748e-02 ...
             +9.38443990808043e-02 +9.11738786957645e-02 +8.76520930044033e-02 ...
             +8.33119242269462e-02 +7.81938957870706e-02 +7.23457941088489e-02 ...
             +6.58222227763618e-02 +5.86840934785352e-02 +5.09980592623760e-02 ...
             +4.28358980222264e-02 +3.42738629130212e-02 +2.53920653092626e-02 ...
             +1.62743947309056e-02 +7.01861000946989e-03];
%%
hm      =   (b-a)/2;
hp      =   (b+a)/2;
f       =   func(hm*x+hp);
I       =   hm*(f*w');
end
%%
```

6.2. Test de convergencia

```
clear all; close all; clc;
a           =   5/(2*pi); % Radio del circulo en longitud de onda
phi_i       =   180; % Angulo de incidencia en grados
colors=jet(90); r_=5; % Rango del grafico en longitudes de onda, numero de intervalos

for N=10:20:90
    figure(1);
    hold on
    [Z_TM,I_TM,RCS_TM,Z_TE,I_TE,RCS_TE,phi,E,Es,Ei,H,Hs,Hi]=RCSedit(a,N,phi_i,r_);
    stairs(phi*360/pi,abs(I_TE),'LineWidth',1, 'color',colors(N,:),'DisplayName', ...
      ...strcat(num2str(N), ' celdas o segmentos.'))
```

```
    axis([0 180 0 2]); grid on;
    hold off;
end
legend('show'); xlabel(' ngulo  \phi');
ylabel('Magnitud de la densidad de corriente |J|')
```

6.3. Matrices de impedancia

```
clear all; close all; clc;

a           =   5/(2*pi); % Radio del c rculo en longitud de onda
phi_i       =   0; % Angulo de incidencia en grados
r_=5; N=100; eta0=120*pi; % Rango del grafico en longitudes de onda, numero de intervalos

[Z_TM,I_TM,RCS_TM,Z_TE,I_TE,RCS_TE,phi,E,Es,Ei,H,Hs,Hi]=RCSedit(a,N,phi_i,r_);


figure()
imagesc(abs(Z_TE));
colorbar;
title('Matriz de impedancia para TE','Interpret','Latex','FontSize',14);
xlabel('Columnas'); ylabel('Filas');

figure()
imagesc(abs(Z_TM));
colorbar;
title('Matriz de impedancia para TM','Interpret','Latex','FontSize',14);
xlabel('Columnas'); ylabel('Filas');
```

6.4. Campos dispersados

```
clear all; close all; clc;

a           =   5/(2*pi); % Radio del c rculo en longitud de onda
phi_i       =   0; % Angulo de incidencia en grados
r_=5; N=90; eta0=120*pi; % Rango del grafico en longitudes de onda, numero de intervalos

[Z_TM,I_TM,RCS_TM,Z_TE,I_TE,RCS_TE,phi,E,Es,Ei,H,Hs,Hi]=RCSedit(a,N,phi_i,r_);
[x,y]   =   meshgrid(linspace(-r_,r_,N),linspace(-r_,r_,N));

figure()
pcolor(x,y,abs(Es))
grid on;
xlabel('$x/\lambda$','Interpret','Latex','FontSize',14)
ylabel('$y/\lambda$','Interpret','Latex','FontSize',14)
title('$|E_s|$ para TM','Interpret','Latex','FontSize',14)
colorbar ; axis equal; colormap jet;
set(gca,'TickLabel','Latex','FontSize',15)
set(colorbar,'TickLabelInterpret','Latex','FontSize',14)
axis([-1 +1 -1 +1]*r_); caxis([0 2]);


figure()
pcolor(x,y,abs(Hs)*eta0)
xlabel('$x/\lambda$','Interpret','Latex','FontSize',14)
ylabel('$y/\lambda$','Interpret','Latex','FontSize',14)
```

```
title('$\eta|H_s|$ para TE','Interpret','Latex','FontSize',14)
colorbar; axis equal; colormap jet;
set(gca,'TickLabel','Latex','FontSize',15)
set(colorbar,'TickLabelInterpret','Latex','FontSize',14)
axis([-1 +1 -1 +1]*r_); caxis([0 2])
```

6.5. Campos totales o transmitidos

```
clear all; close all; clc;

a            =   5/(2*pi); % Radio del c rculo en longitud de onda
phi_i        =   0; % Angulo de incidencia en grados
r_=5; N=100; eta0=120*pi; % Rango del grafico en longitudes de onda, numero de intervalos

[Z_TM,I_TM,RCS_TM,Z_TE,I_TE,RCS_TE,phi,E,Es,Ei,H,Hs,Hi]=RCSedit(a,N,phi_i,r_);
[x,y]   =   meshgrid(linspace(-r_,r_,N),linspace(-r_,r_,N));

figure()
pcolor(x,y,abs(E))
grid on;
xlabel('$x/\lambda$','Interpret','Latex','FontSize',14)
ylabel('$y/\lambda$','Interpret','Latex','FontSize',14)
title('$|E|$ para TM','Interpret','Latex','FontSize',14)
colorbar ; axis equal; colormap jet;
set(gca,'TickLabel','Latex','FontSize',15)
set(colorbar,'TickLabelInterpret','Latex','FontSize',14)
axis([-1 +1 -1 +1]*r_); caxis([0 2]);


figure()
pcolor(x,y,abs(H)*eta0)
xlabel('$x/\lambda$','Interpret','Latex','FontSize',14)
ylabel('$y/\lambda$','Interpret','Latex','FontSize',14)
title('$\eta|H|$ para TE','Interpret','Latex','FontSize',14)
colorbar; axis equal; colormap jet;
set(gca,'TickLabel','Latex','FontSize',15)
set(colorbar,'TickLabelInterpret','Latex','FontSize',14)
axis([-1 +1 -1 +1]*r_); caxis([0 2])
```

7. Referencias.

[1]Y. M. Barbosa, *Fundamentos de Óptica: Curso Introductorio* (Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, 2020).

[2]J. D. Baena, A. P. Slobozhanyuk, J. D. Ortiz y P. A. Belov, "Linear to Circular Polarization Converters Based on Self-Complementary Metasurfaces", (2014).

[3]J. D. Baena, J. P. del Risco, A. P. Slobozhanyuk, S. B. Glybovski y P. A. Belov, "Self-complementary zig-zag metasurfaces for designing circular polarizing beam splitters", (2015).

[4]J. D. Baena, J. P. del Risco, A. P. Slobozhanyuk, S. B. Glybovski y P. A. Belov, "Self-complementary metasurfaces for linear-to-circular polarization conversion", (2015).

[5]J. D. Baena, J. P. del Risco, A. P. Slobozhanyuk, S. B. Glybovski y P. A. Belov, "Broadband and Thin Linear-to-Circular Polarizers Based on Self-Complementary Zigzag Metasurfaces", (2017).

[6]C. Johnson, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, 1.ª ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).

[7]A. Ern, *A Theory and Practice of Finite Elements*, 1.ª ed. (Springer-Verlag, Berlin, 2004).

[8]S. C. Brenner y L. R. Scott, *A Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 3.ª ed. (Springer, New York, 2008).

[9]D. J. Griffiths, *Introducción al electromagnetismo* (Prentice Hall, 1999).

[10]J. D. Jackson, *Classical electrodynamics* (John Wiley & Sons, 1999).

[11]A. Peterson, S. L. Ray y R. Mittra, *Computational methods for electromagnetics* (Wiley-IEEE Press, 1997).

[12]D. Staelin, *Electromagnetics and Applications* (Massachusetts Institute of Technology, 2011).

[13]R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields* (McGraw-Hill, New York, 1961).

[14]K.-M. Chen, "A mathematical formulation of the equivalence principle", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques **37**, 1576-1581 (1989).

[15]L. Eyges, *The Classical Electromagnetic Field* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1972).

[16]G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, 7.ª ed. (Elsevier, Amsterdam, 2005).

[17]M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, 10.ª ed. (Dover Publications, New York, 1972).

[18]D. R. Wilton y C. M. Butler, "EFFECTIVE METHODS FOR SOLVING INTEGRAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS", Electromagnetics **1**, 289-308 (1981).

[19]Joel, *Moment of Method*, MATLAB Central File Exchange, 2023.

[20]M. Mustafa, *Method of Moments for 2D Scattering from PEC Cylinder (CFIE)*, MATLAB Central File Exchange, 2023.

[21]J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, 3.ª ed. (Wiley, New York, 2007).

[22]E. C. Jordan y K. G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2.ª ed. (Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2015).

[23]A. Ishimaru, *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*, 1.ª ed. (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991).

[24]D. N. Arnold, R. S. Falk y R. Winther, "Finite Element Exterior Calculus: From Hodge Theory to Numerical Stability", Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 281-354 (2006).

[25]T. J. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, 1.ª ed. (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987).

[26]A. Aliabadi, *The Boundary Element Method in Engineering: A Complete Course*, 1.ª ed. (WIT Press, Southampton, UK, 2002).

[27]C. Brebbia y J. Dominguez, *Boundary Elements: An Introductory Course*, 1.ª ed. (Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1989).