UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Transformationen

COMPUTERGRAPHIK

Inhaltsverzeichnis

5.1 Koordinatentransformationen

Koordinatensysteme

- Das Koordinatensystem des Objektes
  - oft über geometrische Eigenschaften des Objektes festgelegt
    - ausgezeichnete Richtungen
    - Symmetrien
- Das Koordinatensystem des Gerätes
  - Bildschirm
  - Bildfenster
  - Nullpunkt in der linken, oberen Ecke
  - x- und y-Achsen parallel zu den Bildrändern

5.1 Koordinatentransformationen

Koordinatensysteme

Weltkoordinaten (3D, $\mathbb{R}^3$)

$\Downarrow$ **1)**

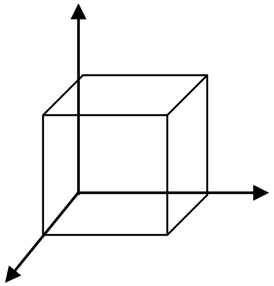
Beobachterkoordinaten (3D, $\mathbb{R}^3$)

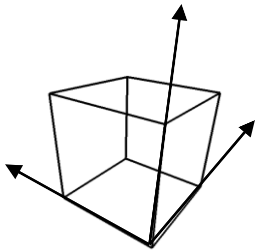
$\Downarrow$ **2)**

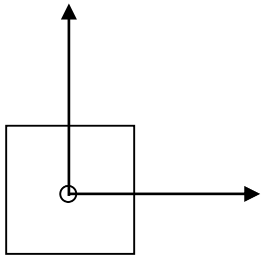
Normalisierte Koordinaten (3D, $[-1;1]^3$)

$\Downarrow$ **3)**

Bildschirmkoordinaten (2D)







5.1 Koordinatentransformationen

- Grundlage der Bildgestaltung auf dem Bildschirm oder dem Ausgabegerät sind Koordinatentransformationen im
  - $\mathbb{R}^2$
  - $\mathbb{R}^3$
- Transformieren das Objektsystem in das Gerätesystem
- Koordinatentransformationen:
  - Verschiebungen (translation)
  - Drehungen (rotation)
  - Skalierungen (scaling)

- Voraussetzung: Orthonormierte (kartesische) Koordinatensysteme

5.1 Koordinatentransformationen

Allgemeine Vorgehensweise bei der Koordinatentransformation

1) Bildschirm oder Ausgabegerät mit einem Koordinatensystem versehen
2) Objekt mit einem Koordinatensystem versehen
3) Objekt- und Objektkoordinatensystem mittels Parallel- oder Zentralprojektion in Bildebene abbilden ($\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Transformation)
4) Anpassung des Koordinatensystems der Bildebene an das Koordinatensystem des Bildschirmes: Koordinatentransformation ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$Transformation)

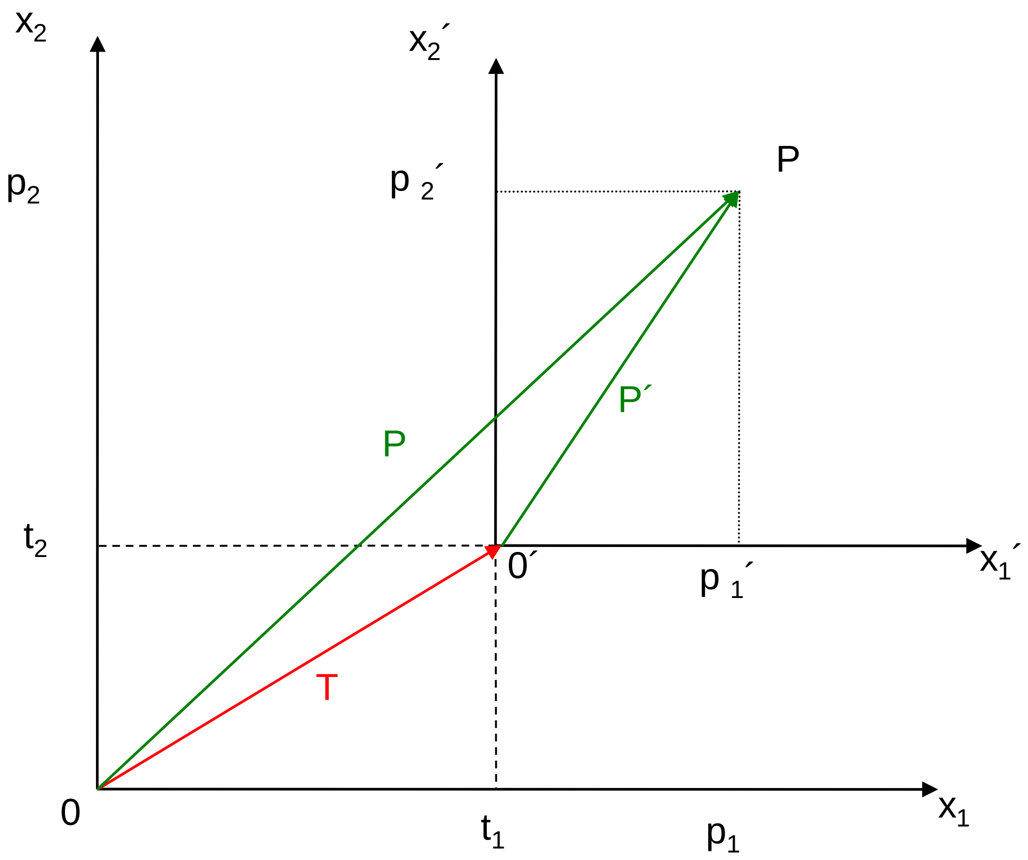
5.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

- Gegeben seien im Folgenden die beiden Koordinatensysteme
  - S durch $(0; x_1, x_2)$ (z. B. Gerätesystem)
  - S' durch $(0'; x'_1, x'_2)$ (z. B. Objektsystem)

5.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Verschiebung (translation)

- Die einfachste Transformation zwischen dem System S' und S ist eine Verschiebung
- Voraussetzung:
  die beiden (gerichteten) Koordinatenachsen sind jeweils parallel zueinander

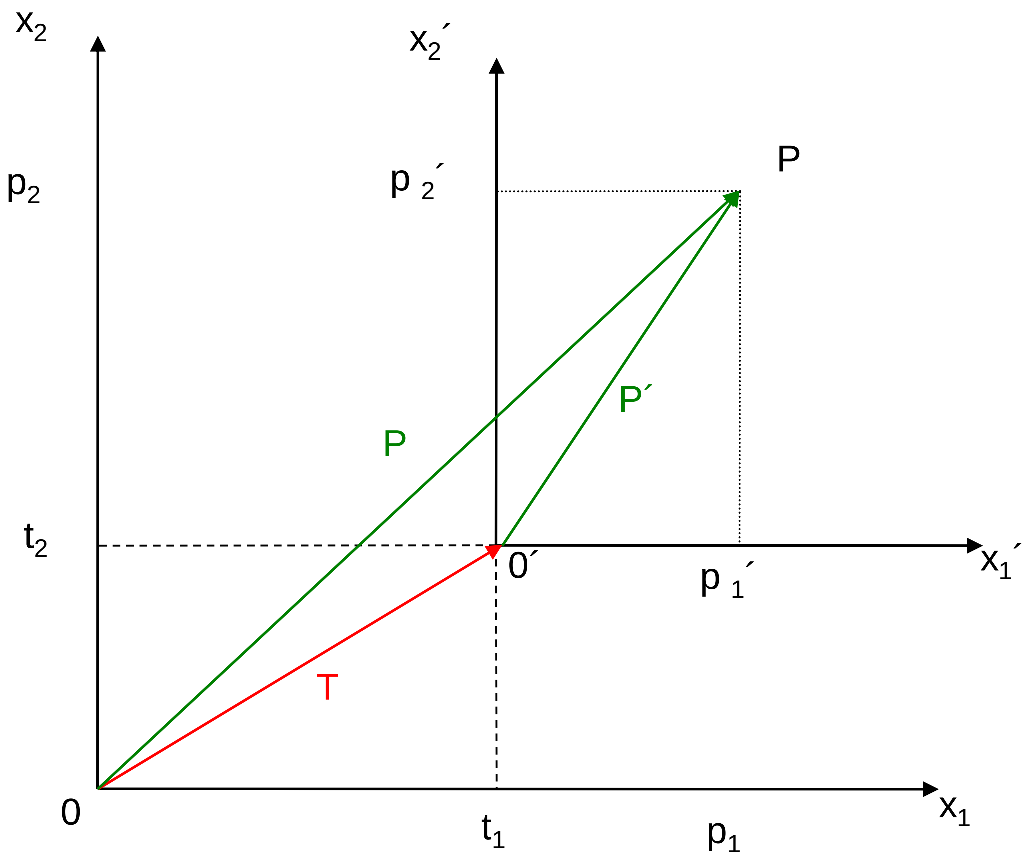


5.2 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Verschiebung (translation)

- Seien (t_1, t_2) die Koordinaten des Ursprungs von S' im System S
- Der Punkt P hat die Koordinaten
  - (p_1', p_2') in S'
  - $(t_1 + p_1', t_2 + p_2')$ in S
- Also:

$$\begin{aligned} p_1 &= t_1 + p_1' \\ p_2 &= t_2 + p_2' \end{aligned}$$

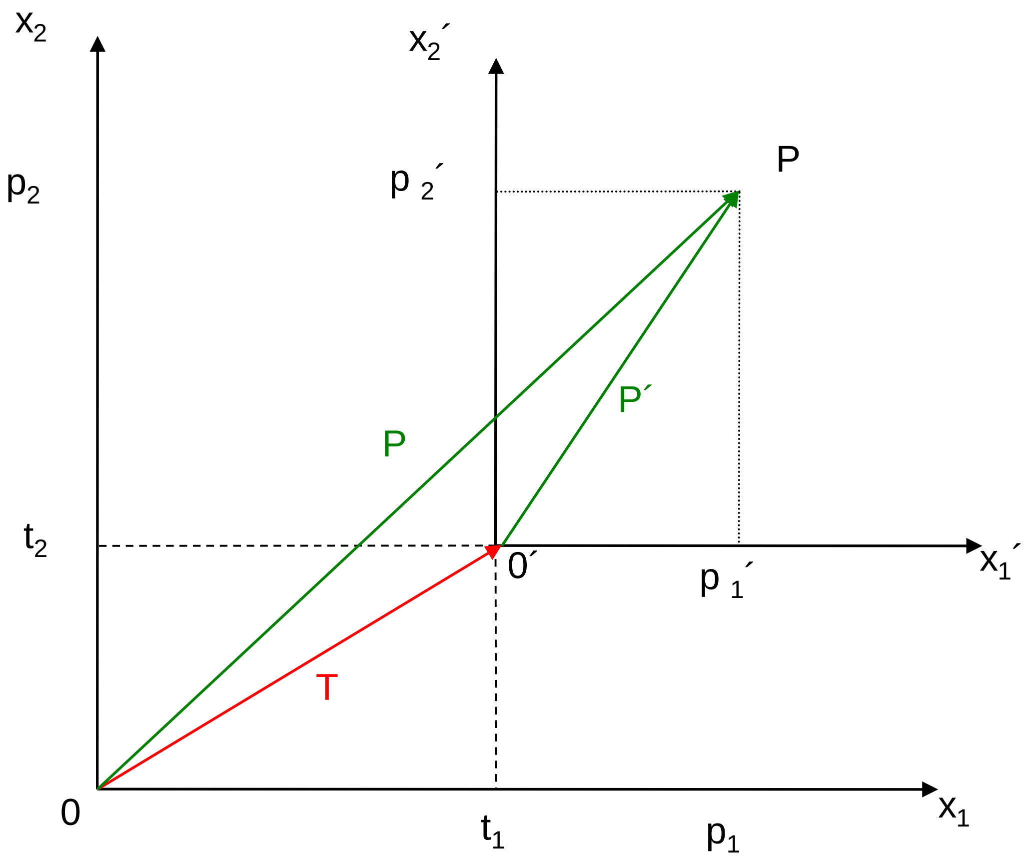


5.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Verschiebung (translation)

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix}$$

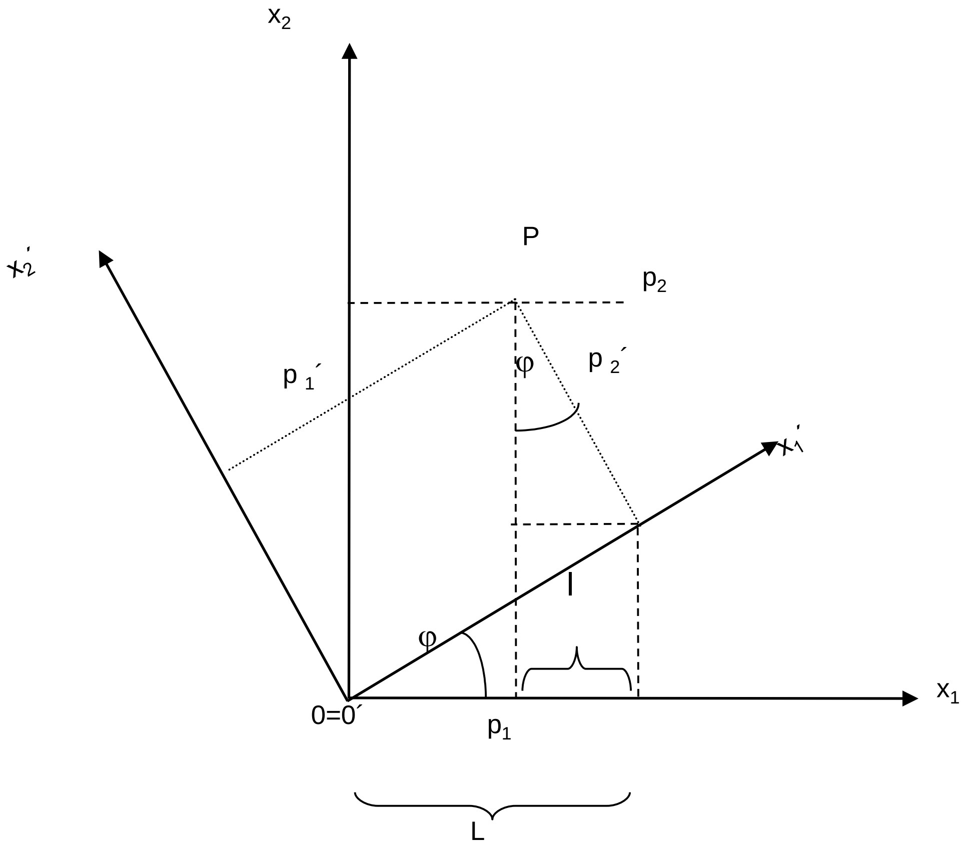
$$P = T + P'$$



5.2 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Drehung (rotation)

- Wir betrachten die Drehung eines Systems S' gegen das System S um
  - den gemeinsamen Ursprung
  $$0 = 0'$$
  - den Winkel φ



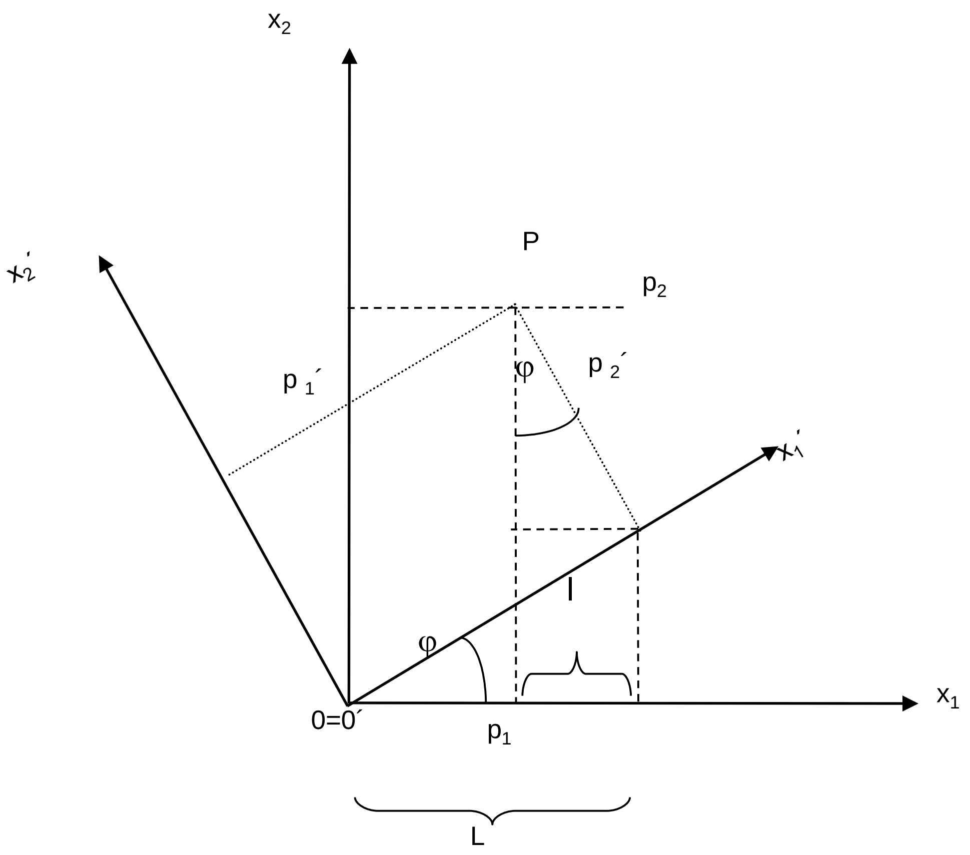
5.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Drehung (rotation)

$$\frac{l}{p_2'} = \sin\varphi$$
$$\frac{L}{p_1'} = \cos\varphi$$

$$p_1 = L - l = p_1' \cdot \cos\varphi - p_2' \cdot \sin\varphi$$
$$p_2 = p_1' \cdot \sin\varphi + p_2' \cdot \cos\varphi$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix}$$

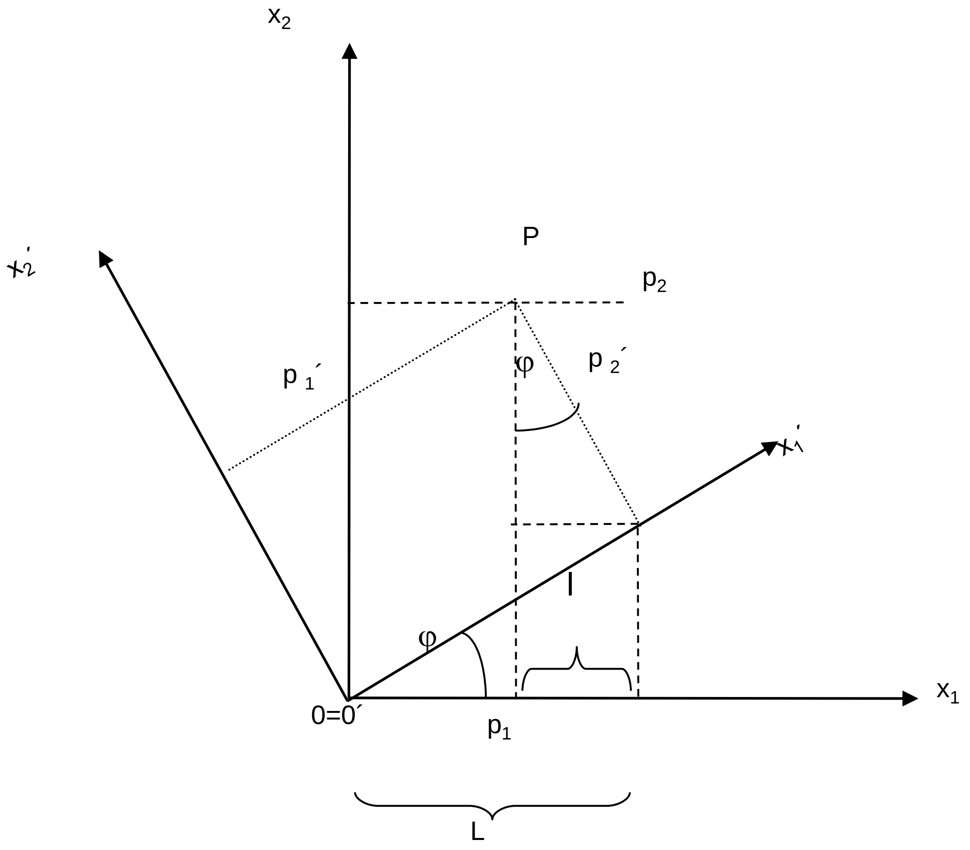


5.2 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Drehung (rotation)

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix}$$

$$P = R \cdot P'$$



– Bemerkung
  R ist orthonormal: $R^{-1} = R^T$

5.2 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Drehung (rotation): Interpretation

1) Punkt wird gedreht

R transformiert

- die Koordinatendarstellung (p_1', p_2') bezüglich des Systems S'
- in die Koordinatendarstellung (p_1, p_2) bezüglich des Systems S

dies entspricht:

- (globales) Koordinatensystem S
- auf die Koordinaten (p_1', p_2') von P wirkt die Matrix R

2) Koordinatensystem wird gedreht

R transformiert

- das lokale Koordinatensystem S
- in das lokale Koordinatensystem S'

dies entspricht:

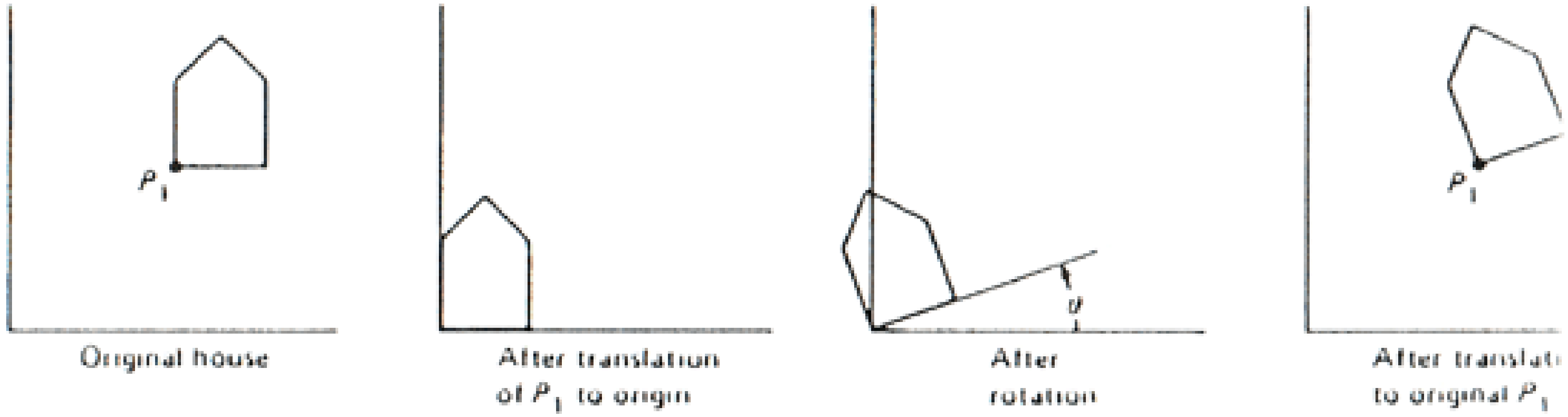
- P wird bezüglich dem Koordinatensystem S' mit den Koordinaten (p_1', p_2') definiert

5.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Drehung (rotation)

– Bei der Rotation um einen beliebigen Punkt P_1 müssen noch zwei Translationen hinzugenommen werden

1) Verschiebung von P_1 in den Ursprung
2) Drehung um den Ursprung
3) Verschiebung von P_1 in die ursprüngliche Position



5.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Drehung (rotation)

- Bemerkung:
  - Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ
  - Bei hintereinander geschalteten Drehungen muss darauf geachtet werden, dass die Reihenfolge der Matrizen der Reihenfolge der Rotationen entspricht

5.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Skalierung (scaling)

- Soll das System S' „vergrößert“ oder „verkleinert“ werden, so muss eine Skalierung durchgeführt werden:
  - $p_1 = s_1 \cdot p_1'$
  - $p_2 = s_2 \cdot p_2'$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix}$$

$$P = S \cdot \mathrm{P}'$$

Scherung

- $p_1 = p_1' + \lambda_1 \cdot p_2'$
- $p_2 = p_2'$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix}$$

$$P = \Lambda \cdot \mathrm{P}'$$

5.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

- Beliebige lineare Transformationen können beschrieben werden als Kombination aus
  - einer Skalierung
  - einer Scherung und
  - einer Rotation

5.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Affine Transformationen

- Lassen sich als Kombination einer linearen Abbildung und einer Translation schreiben:

$$P = A \cdot P' + T$$

- Die bisher genannten Transformationen sind Beispiele affiner Transformationen:
  - Translation
  - Rotation
  - Skalierung
  - Scherung

Affine Invarianz von Teilungsverhältnissen:

- Für eine affine Transformation F und die Punkte P und Q gilt immer:

$$F(\lambda \cdot P + (1 - \lambda) \cdot Q)$$
$$= \lambda \cdot F(P) + (1 - \lambda) \cdot F(Q)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

5.2 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Affine Transformationen

- Diese Beziehung zeigt
  - dass das Bild einer Strecke (Strecke von Q nach P) unter einer affinen Abbildung F wieder eine Strecke ist
  - dass Teilungsverhältnisse $\lambda : (1 - \lambda)$ unter F invariant bleiben
- Es genügt, die Endpunkte Q und P auf der Strecke abzubilden
- Zwischenpunkte erhält man durch Interpolation von $F(Q)$ und $F(P)$
- Man beachte, dass unter affinen Abbildungen parallele Linien parallel bleiben

5.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Affine Transformationen

- Reflektion an der Gerade $y = x$:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Reflektion an der Gerade $y = -x$:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Reflektion an der x-Achse:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Reflektion an der y-Achse:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Reflektion am Ursprung:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.2 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Homogene Koordinaten

- Homogene Koordinaten entstammen der projektiven Geometrie
- An dieser Stelle soll jedoch eine andere Motivation verwendet werden
- Die Hintereinanderschaltung von Rotation, Translation und Skalierung führt auf die Abbildungsgleichung

$$P = S \cdot (T + R \cdot P')$$

- Müssen mehrere solcher Transformationen hintereinander ausgeführt werden, so stört die Addition in der Gleichung
- Da heutige Computergraphikhardware insbesondere auch Matrixmultiplikationen unterstützt, ist es günstig, Transformationen ausschließlich mittels Matrixmultiplikationen auszuführen, also:

$$P = M_n \cdot \dots \cdot M_1 \cdot P'$$

5.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Homogene Koordinaten

- Dies erreicht man durch folgenden Übergang auf die nächst höhere Dimension:
  - Das Tripel (x, y, w), $w \neq 0$ stellt die homogenen Koordinaten des Punktes $\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}\right) \in \mathbb{R}^2$ dar.
  - Da es unendlich viele solcher Darstellungen desselben Punktes gibt, verwendet man die so genannte Standarddarstellung mit $w = 1$.
  - Also besitzt ein Punkt $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ als homogene Koordinaten $(x, y, 1)$

Bemerkung:

- Für Punkte im $\mathbb{R}^3$ gilt eine analoge Konstruktion

5.2 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Homogene Koordinaten

– Verschiebung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

– Skalierung

$$\begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

– Drehung um den Ursprung

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.2 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformationen

Homogene Koordinaten

– Drehung um Z

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & Z_x \\ 0 & 1 & Z_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -Z_x \\ 0 & 1 & -Z_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

– Verschiebung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

– Skalierung

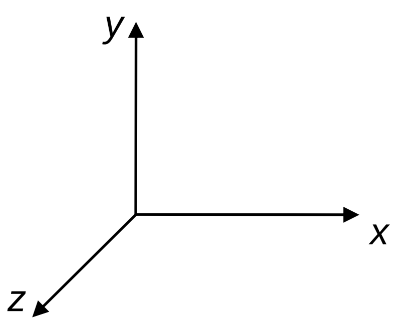
$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehungen

- Im 3-dimensionalen Raum gibt es mehrere Achsen, um die gedreht werden kann
  - x-Achse
  - y-Achse
  - z-Achse
  - Beliebige Achse im Raum
- Für die ersten drei Fälle wird die Richtung der Achse als von einem positiven Wert zum Ursprung angenommen

- Rechtshändiges Koordinatensystem

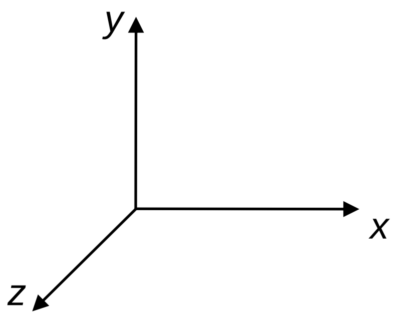


5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehungen

- Es wird gegen den Uhrzeigersinn gedreht (mathematisch positiv)

- Rechtshändiges Koordinatensystem

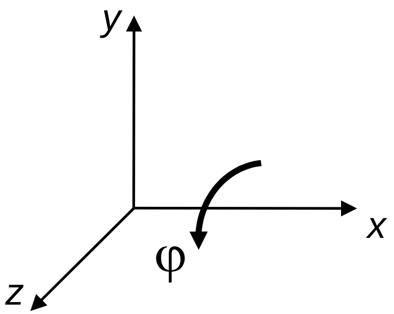


5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehungen

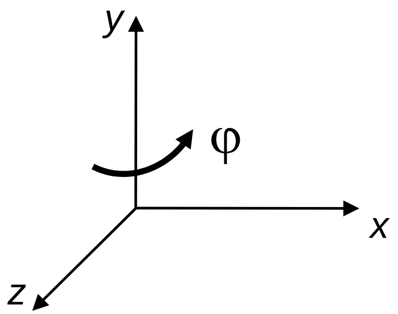
– x-Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



– y-Achse

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

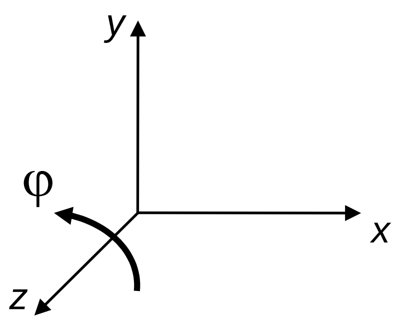


5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehungen

– z-Achse

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



5.3 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehung um eine beliebige Achse

- Jede Rotation um eine beliebige Achse kann aus Rotationen um die einzelnen Koordinatenachsen zusammengesetzt werden ($\Rightarrow$ Euler)

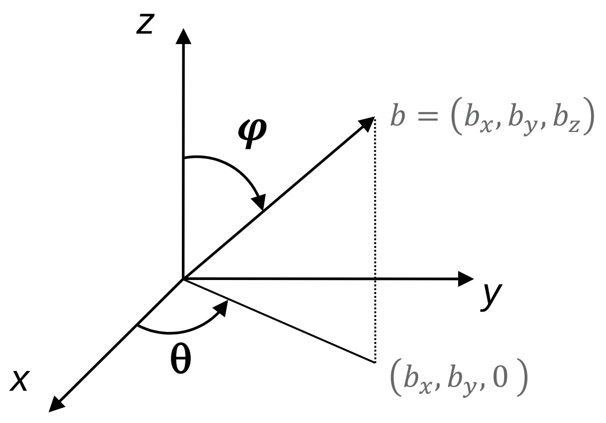
- Wir entwickeln
  - die Rotation $R_G(\alpha)$
  - für die Drehung eines Punktes P
  - um eine beliebig orientierte Achse G im Raum
  - um einen Winkel α

5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehung um eine beliebige Achse

– Sonderfall:
  die Drehachse G
  – geht durch den Ursprung
  – wird von dem Vektor
    $$b = (b_x, b_y, b_z),\ \|b\| = 1$$
    generiert
  – G: $\lambda \cdot b$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} b_x &= \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ b_y &= \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ b_z &= \cos\varphi \end{aligned}$$



5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehung um eine beliebige Achse durch den Ursprung

– Gesucht sind nun die Koordinaten eines Punktes P nach einer Drehung um die Achse G um den Winkel α

– Vorgehensweise:
  1) Der Punkt P wird so transformiert, dass die Drehachse mit der z-Achse zusammenfällt
  2) Die Drehung um α verwendet die Rotationsmatrix $R_z(\alpha)$
  3) Die Transformation wird rückgängig gemacht

– Bemerkung:
Ist G mit der z-Achse identisch, so entfallen die Schritte 1) und 3) (Transformationen)

– Man geht in mehreren Teilschritten vor

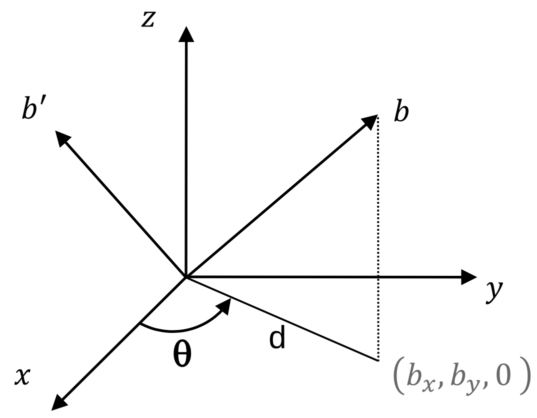
5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehung um eine beliebige Achse durch den Ursprung

Schritt 1:

- Der Vektor b wird in die (z, x)-Ebene gedreht (b')
- Aus P entsteht dabei $P' = R_z(-\theta) \cdot P$

$$d^2 = b_x^2 + b_y^2$$



$$R_z(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

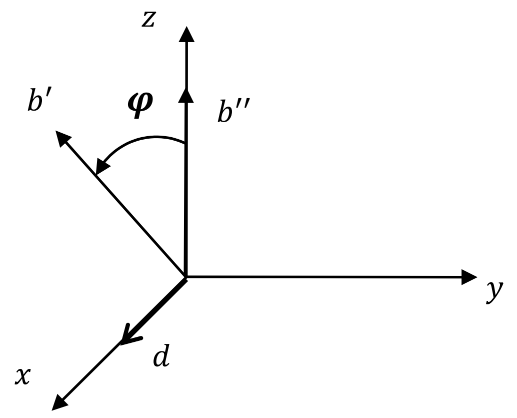
$$= \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} b_x & b_y & 0 & 0 \\ -b_y & b_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehung um eine beliebige Achse durch den Ursprung

Schritt 2:

- Der Vektor b' wird so gedreht, dass er mit der z-Achse zusammenfällt
- Aus P' entsteht dabei $P'' = R_y(-\varphi) \cdot P'$



$$R_y(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_z & 0 & -d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & b_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

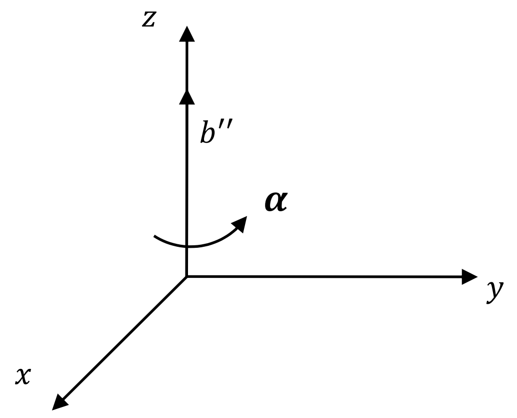
5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehung um eine beliebige Achse durch den Ursprung

Schritt 3:

- P'' wird mit Winkel α um die z-Achse gedreht
- Aus P'' entsteht dabei $P''' = R_z(\alpha) \cdot P''$

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehung um eine beliebige Achse durch den Ursprung

Schritt 4:

- Inverse Rotation zu Schritt 2

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_z & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & b_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 5:

- Inverse Rotation zu Schritt 1

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} b_x & -b_y & 0 & 0 \\ b_y & b_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

5.3 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen

Drehung um eine beliebige Achse durch den Ursprung

Ergebnis:

– Gesamttransformation:

$$R_b(\alpha) = R_z(\theta) \circ R_y(\varphi) \circ R_z(\alpha) \circ R_y(-\varphi) \circ R_z(-\theta)$$

Allgemeiner Fall:

– Die Drehachse ist eine allgemeine Gerade
  – $G: a + \lambda \cdot b,\ \lambda \in \mathbb{R}$
  – $a = (a_x, a_y, a_z)$
  – $b = (b_x, b_y, b_z),\ \|b\| = 1$

$$R_G(\alpha) = T(a) \circ R_z(\theta) \circ R_y(\varphi) \circ R_z(\alpha) \circ R_y(-\varphi) \circ R_z(-\theta) \circ T(-a)$$