



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Projektionen

COMPUTERGRAPHIK

Inhaltsverzeichnis

6 Projektionen

6.1 Einleitung

6.2 Perspektivische Projektionen

6.3 Parallele Projektionen

6.4 Perspektivische Projektion -- Berechnung

6.5 Unmögliche Strukturen

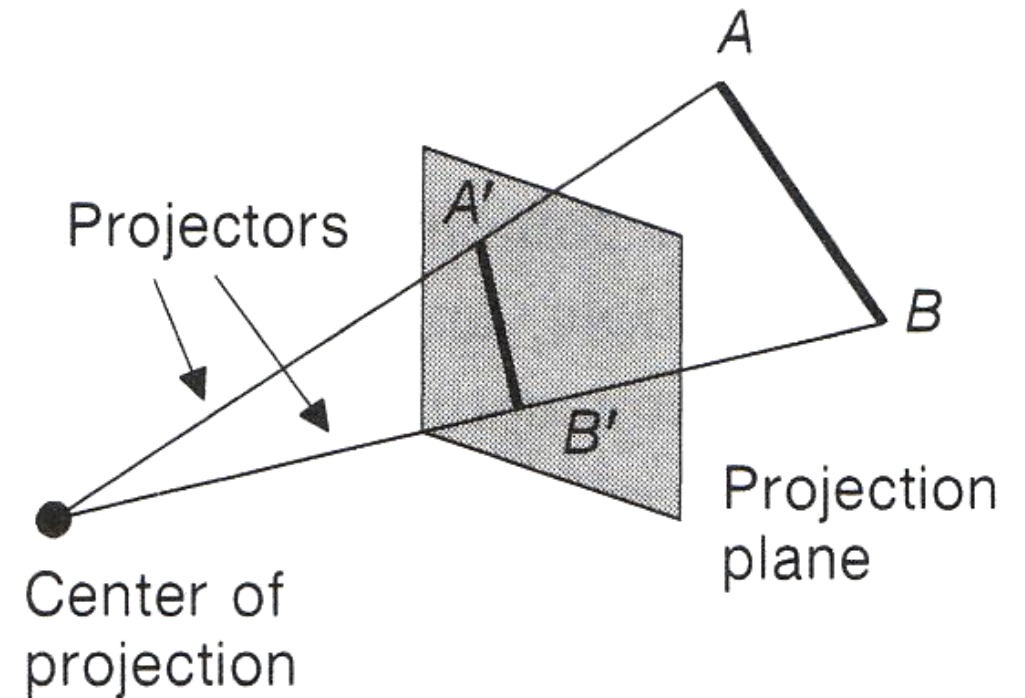
6.6 Möbiusband

6.1 Einleitung

- Eine Projektion ist eine Abbildung
 - aus einem Raum der Dimension n
 - in einen Raum der Dimension $m < n$
- Objekte werden in $n = 3$ dimensionalem Raum dargestellt
- Bildschirm ist $m = 2$ dimensionaler Raum

6.1 Einleitung

- Ein Raumpunkt wird entlang eines Projektionsstrahls auf eine vorgegebene Projektionsebene abgebildet
 - Projektionsstrahl:
 - Projektionszentrum
 - Raumpunkt
 - Projizierter Raumpunkt:
Schnittpunkt des Projektionsstrahls mit der Projektionsebene

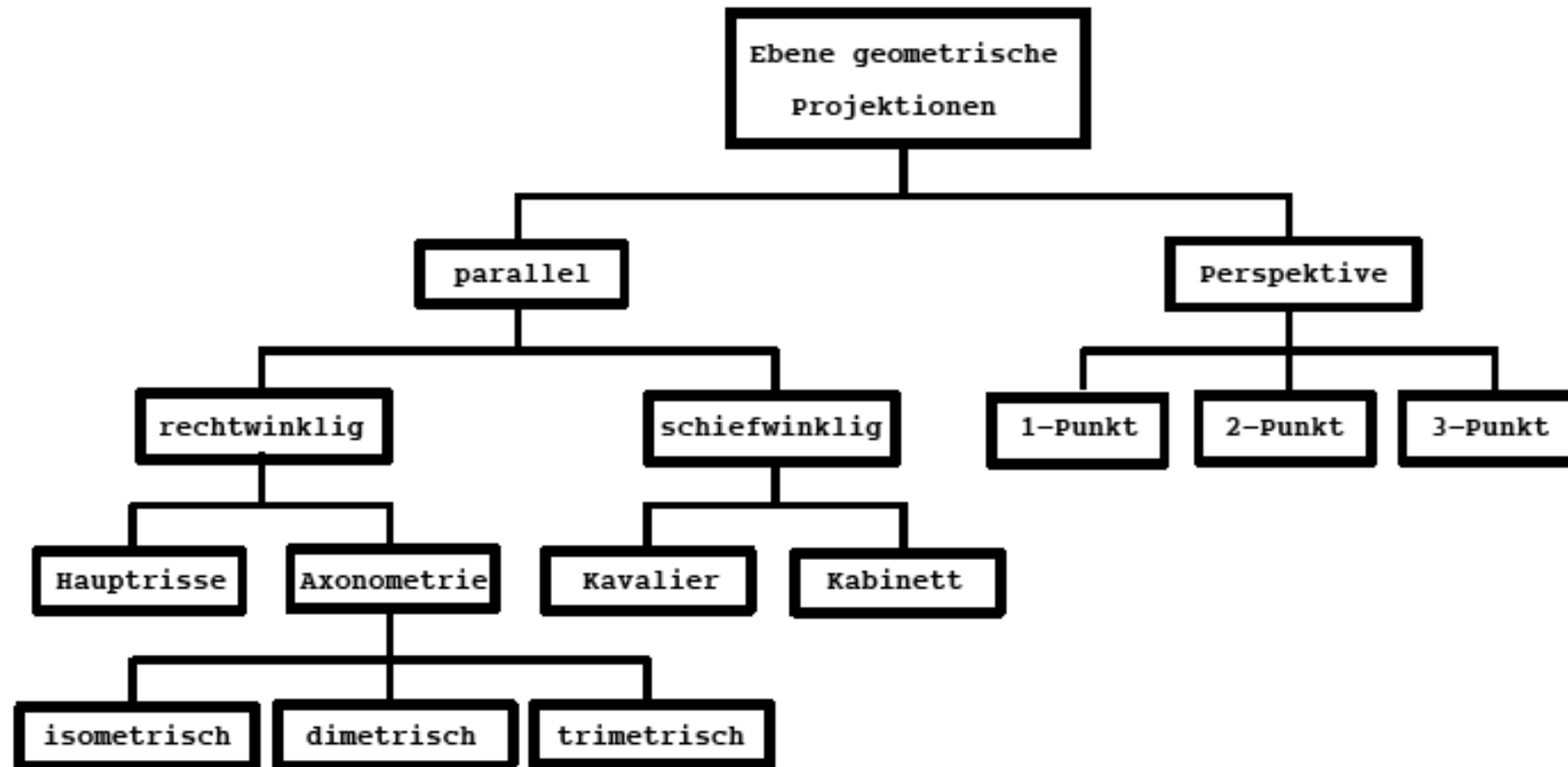


6.1 Einleitung

- Geometrisch planare Projektionen:
 - Perspektivische Projektion (Zentralprojektion)
 - Parallelprojektion
 - Projektionszentrum liegt in einem unendlich fernen Punkt
- Im Rahmen der projektiven Geometrie stellt die Parallelprojektion einen Spezialfall der Zentralprojektion dar
- Dies lässt sich bei der praktischen Umsetzung der Projektionen als Matrizen gewinnbringend anwenden

6.1 Einleitung

Klassifikation der gängigen Projektionsarten

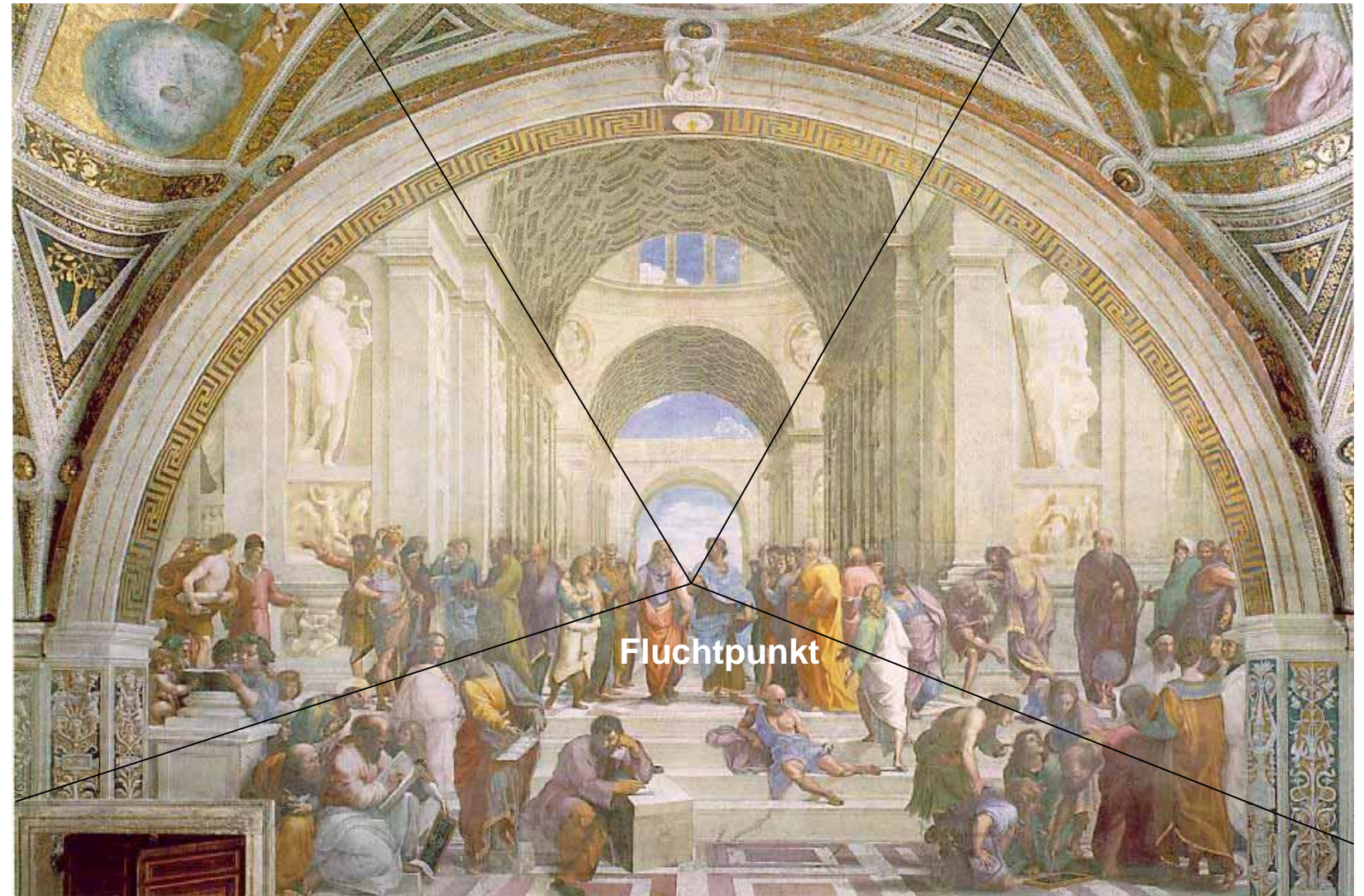


6.2 Perspektivische Projektion

- Alle Projektionsstrahlen laufen durch das Projektionszentrum
- Projektionszentrum fällt mit dem Auge des Beobachters zusammen
- Das Verfahren erzeugt eine optische Tiefenwirkung
- Geht in seinen Anfängen bis in die Malerei der Antike zurück

6.2 Perspektivische Projektion

- Raffael
Schule von Athen



6.2 Perspektivische Projektion

Eigenschaften

- Je zwei parallele Geraden, die nicht parallel zur Projektionsebene sind, treffen sich in einem Punkt, dem Fluchtpunkt
- Es gibt unendlich viele Fluchtpunkte, je einen pro Richtung nicht parallel zur Projektionsebene
- Hervorgehoben werden die Fluchtpunkte der Hauptachsen
 - Geraden, die parallel zur x-Achse verlaufen, treffen sich im x-Fluchtpunkt
 - für die anderen Hauptachsen wird dies ähnlich definiert

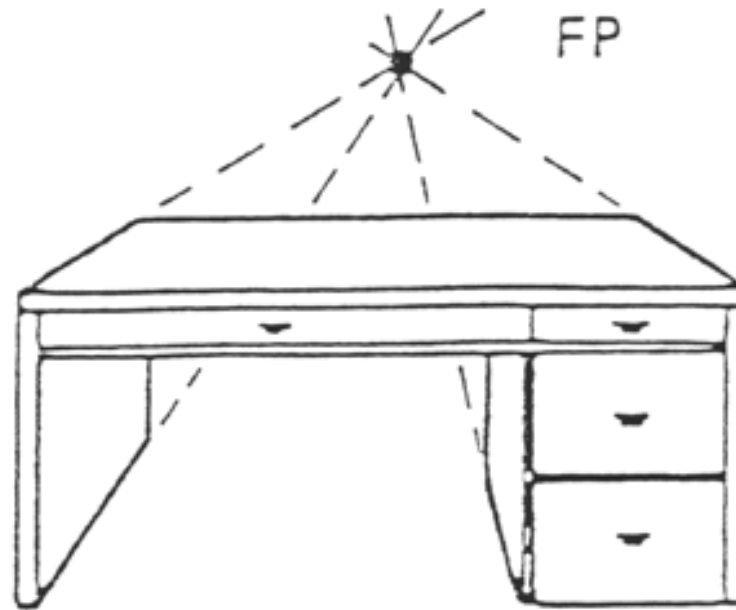
6.2 Perspektivische Projektion

Klassifikation

- Nach der Anzahl der Hauptachsen, die von der Projektionsebene geschnitten werden
 - 1-Punkt-Perspektiven
 - 2-Punkt-Perspektiven
 - 3-Punkt-Perspektiven

6.2 Perspektivische Projektion

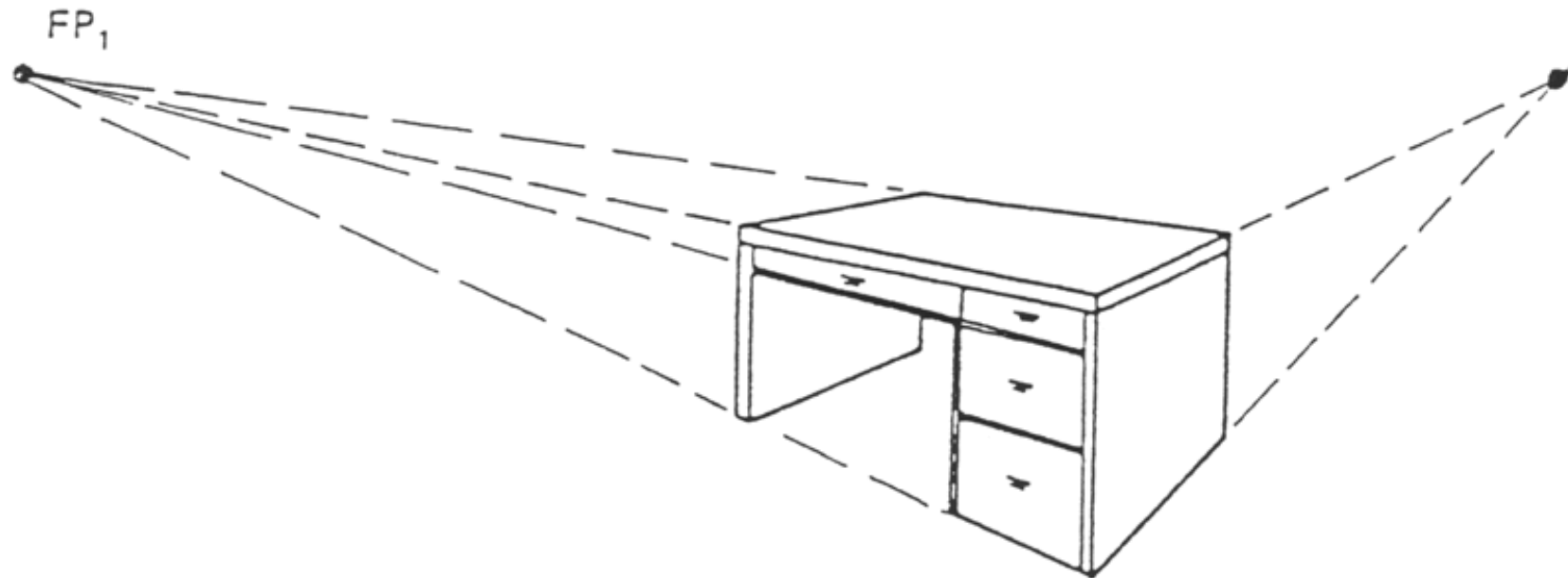
Beispiel



1-Punkt-Perspektive

6.2 Perspektivische Projektion

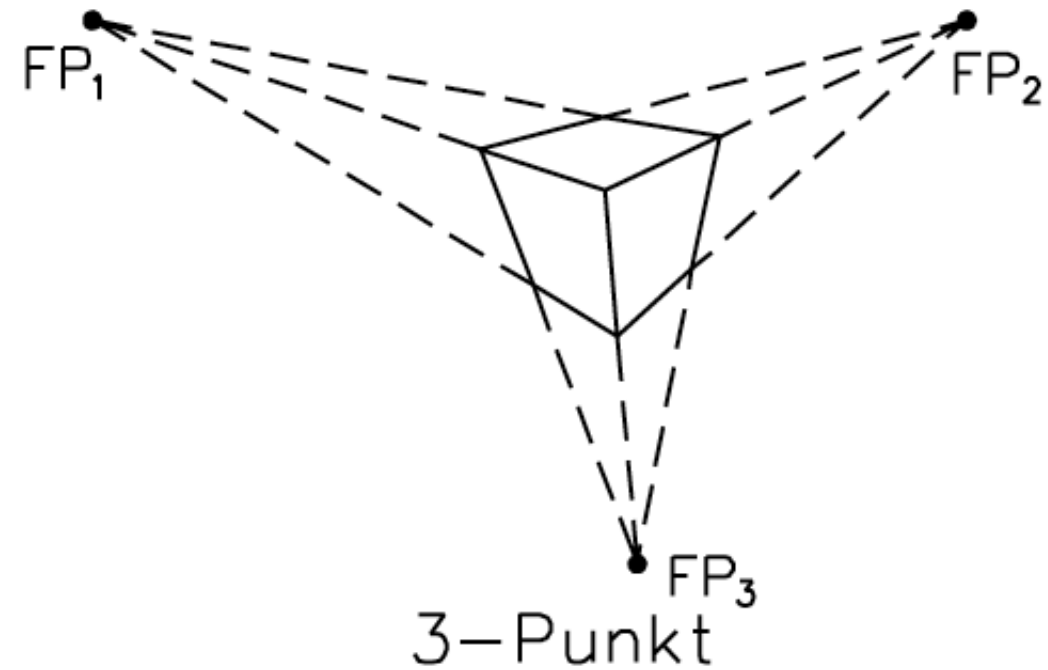
Beispiel



2-Punkt-Perspektive

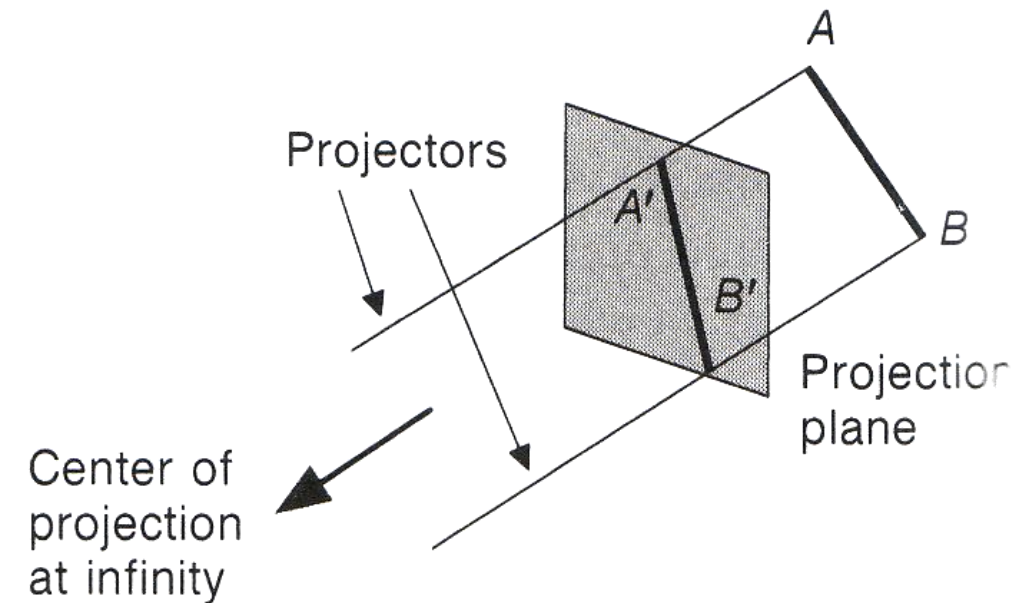
6.2 Perspektivische Projektion

Beispiel



6.3 Parallelprojektion

- Bei der Parallelprojektion ist das Projektionszentrum im Unendlichen
- Alle Projektionsstrahlen verlaufen parallel in einer Richtung
- Die Parallelprojektion ist
 - weniger realistisch als die perspektivische Projektion
 - besser, um exakte Maße aus dem projizierten Bild zu bestimmen



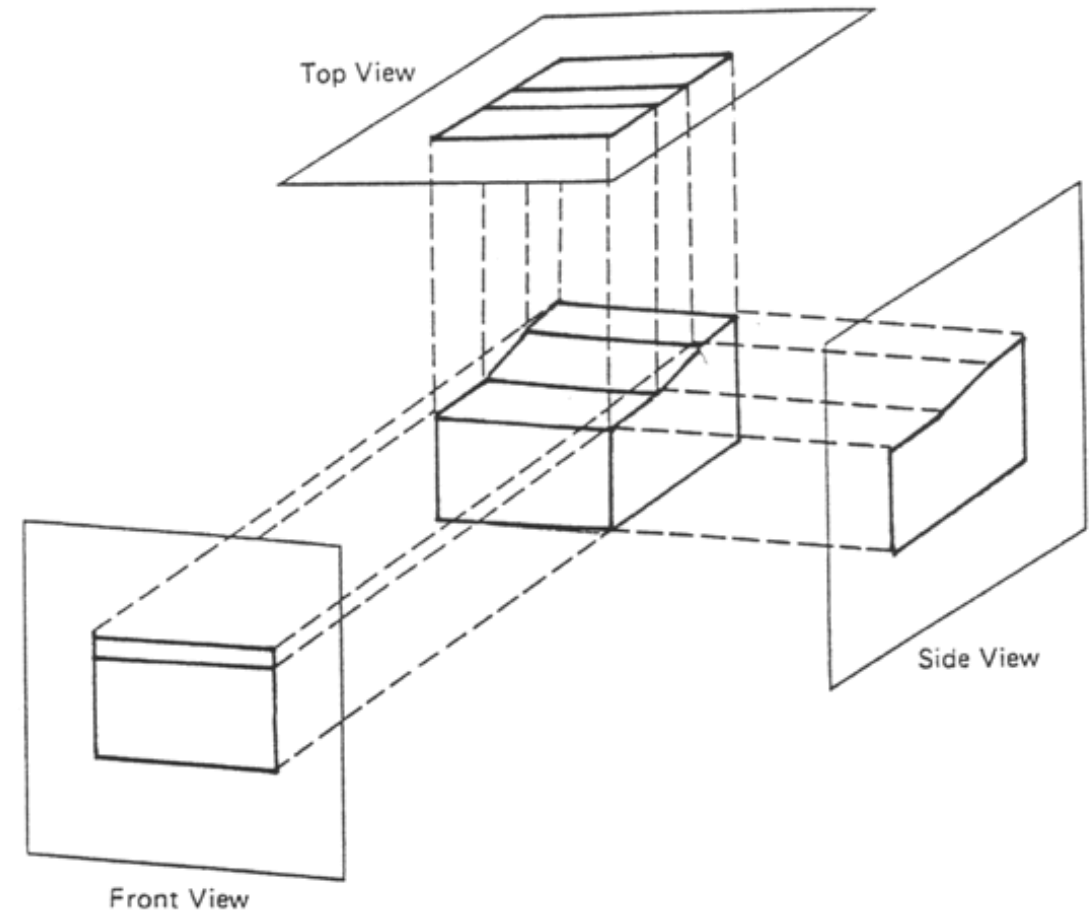
6.3 Parallelprojektion

- Orthographische Projektion:
 - Die Projektionsstrahlen stehen senkrecht gegen die Projektionsebene
 - Projektionsrichtung fällt mit der Ebenennormalen zusammen
- Schiefe Projektion:
 - Die Projektionsstrahlen stehen schief gegen die Projektionsebene

6.3 Parallelprojektion

Orthographische Projektion: Haupttrisse

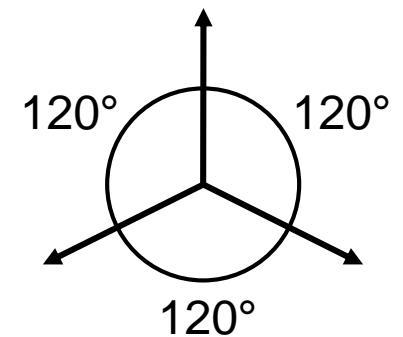
- Grundriss (Top View)
- Aufriss (Front View)
- Kreuzriss (Side View)
- Die Projektionsebene schneidet nur eine Hauptachse
- Die Normale der Projektionsebene ist parallel zu einer der Hauptachsen



6.3 Parallelprojektion

Orthographische Projektion: Axonometrie

- Die Projektionsebene ist nicht orthogonal zu einer der Koordinatenachsen
- Parallele Linien werden auf parallele Linien abgebildet
- Winkel bleiben nicht erhalten
- Abstände können längs der Hauptachsen gemessen werden (i.A. in jeweils einem anderen Maßstab)
- Häufigstes Fall: isometrische Axonometrie
- Die Projektionsebene bildet mit allen Hauptachsen den gleichen Winkel
- Gleichmäßige Verkürzung aller Koordinatenachsen
- Es gibt nur acht mögliche isometrische Projektionen

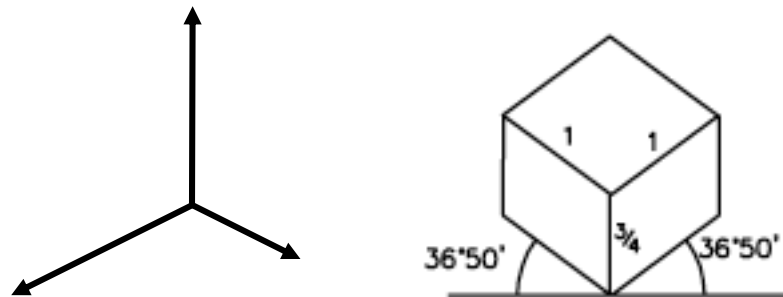


6.3 Parallelprojektion

Orthographische Projektion

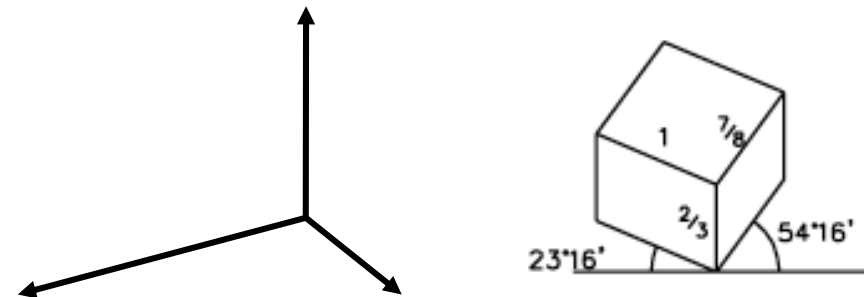
- Dimetrische Projektion

- Projektionsebene hat mit zwei Hauptachsen den gleichen Winkel
- Skalierung ist in zwei Achsenrichtungen gleich



- Trimetrische Projektion

- Projektionsebene hat mit jeder Achse einen anderen Winkel
- Skalierungen sind in allen drei Achsenrichtungen verschieden



6.3 Parallelprojektion

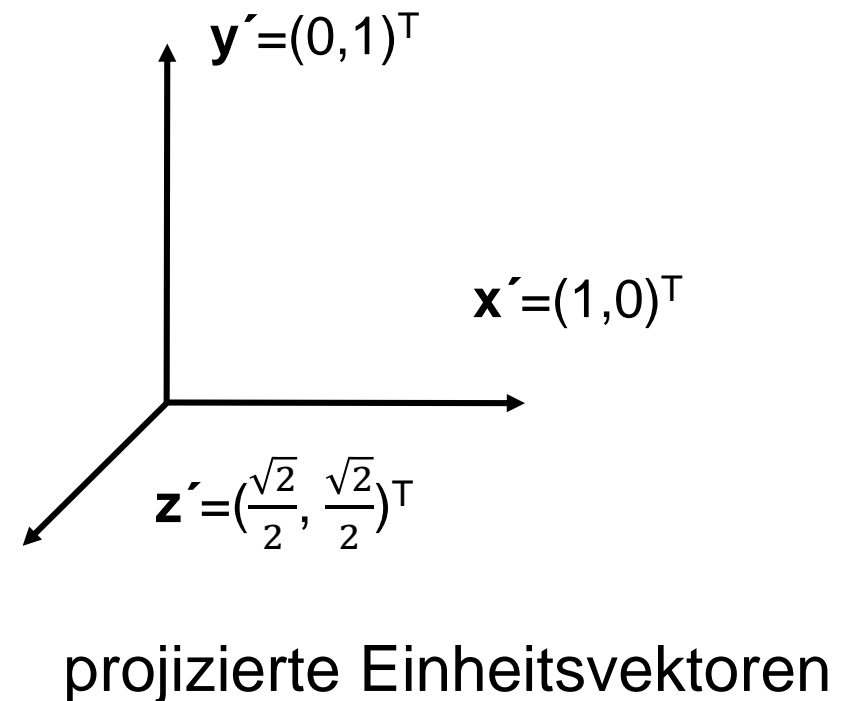
Schiefe Parallelprojektion

- Projektionsrichtung unterscheidet sich von der Normale der Projektionsebene

6.3 Parallelprojektion

Schiefe Parallelprojektion: Kavalierprojektion

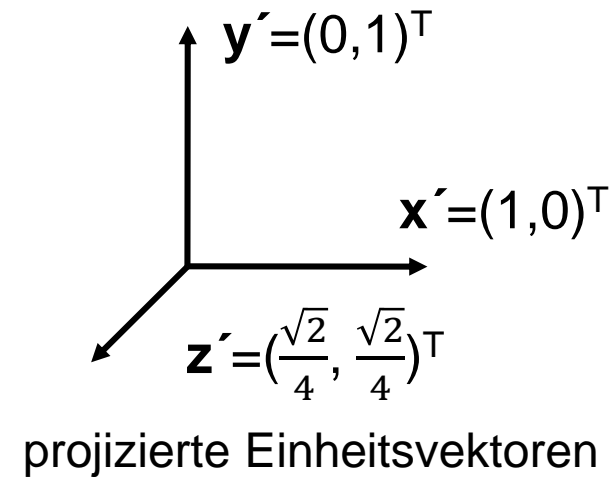
- Der Winkel zwischen Projektionsrichtung und Bildebene beträgt 45°
- Die Länge der Projektion einer Linie, die senkrecht zur Bildebene steht, bleibt unverändert
- Es gibt unendlich viele Kavalierprojektionen, eine für jede Richtung in der Bildebene



6.3 Parallelprojektion

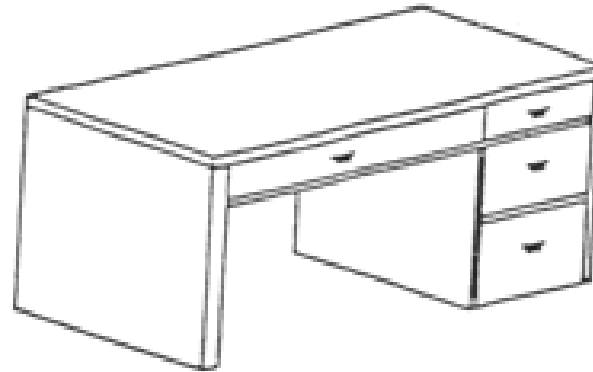
Schiefe Parallelprojektion: Kabinettprojektion

- Länge der Projektion einer zur Projektionsebene senkrechten Linie soll die Hälfte ihrer Originallänge werden

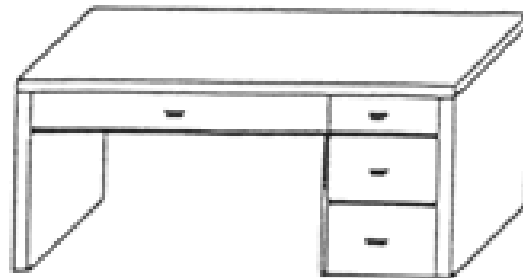


6.3 Parallelprojektion

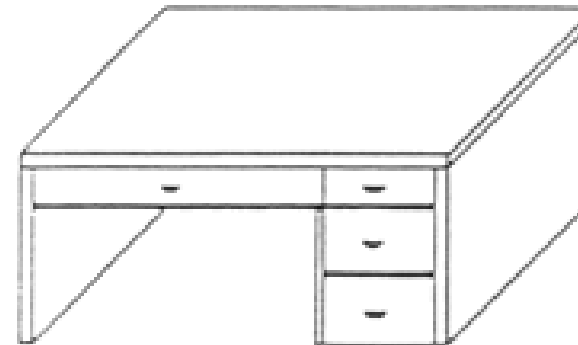
Beispiele



isometrisch: 1:1:1



Kabinettprojektion



Kavalierprojektion

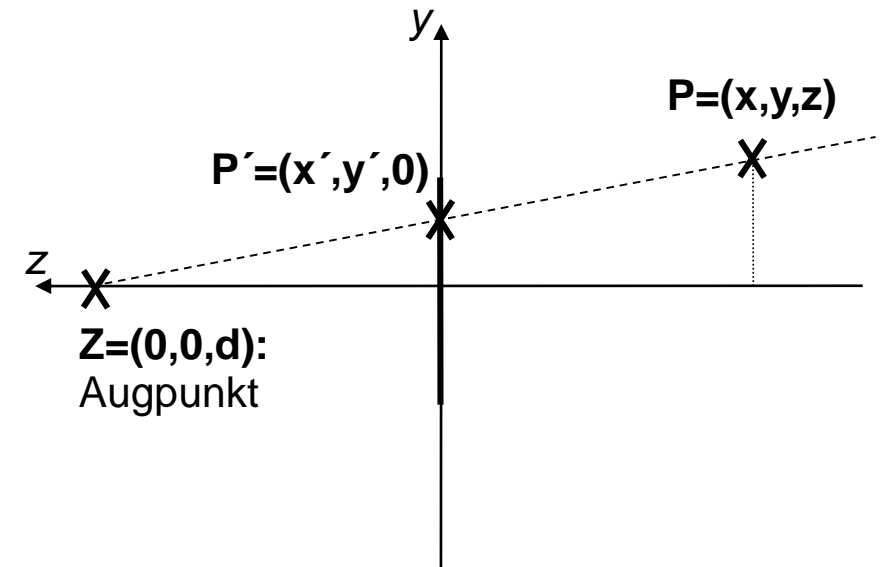
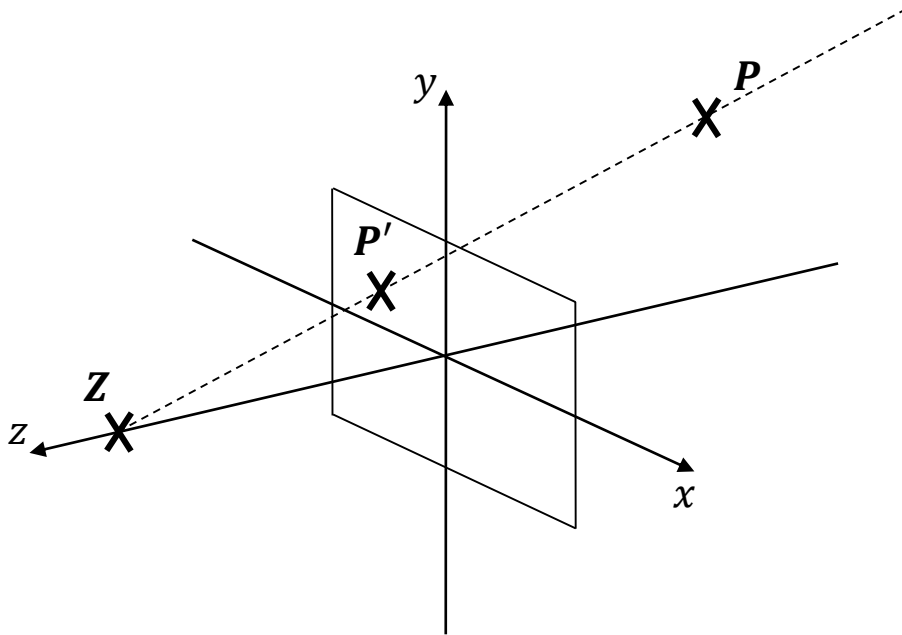
6.4 Perspektivische Projektion – Berechnung

- Die Berechnung der perspektivischen Projektion erfolgt je nach Anwendung in unterschiedlichsten Konfigurationen
- Diese können mittels geeigneter Transformationen des Koordinatensystems erreicht werden
- Beispiel:
 - Projektionszentrum Z und der Augpunkt fallen zusammen
 - Beide liegen
 - auf der positiven z -Achse
 - mit Abstand $d > 0$ zum Ursprung
 - $Z = (0,0,d)$
 - Blickrichtung ist die negative z -Achse
 - Bildebene liegt in der (x,y) -Ebene

6.4 Perspektivische Projektion – Berechnung

– Aus dem Strahlensatz folgt:

$$\frac{x'}{d} = \frac{x}{d-z} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x \cdot d}{d-z}$$
$$\frac{y'}{d} = \frac{y}{d-z} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y \cdot d}{d-z}$$



6.4 Perspektivische Projektion – Berechnung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x \cdot d}{d - z} \\ \frac{y \cdot d}{d - z} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot d \\ y \cdot d \\ 0 \\ d - z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot M$$

6.4 Perspektivische Projektion – Berechnung

Zerlegung der perspektivischen Projektion

- Perspektivische Transformation M_T ($\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$)
- Parallele Projektion M_P auf die Ebene $z = 0$ ($\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^2$)

$$M = M_T \cdot M_P \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.4 Perspektivische Projektion – Berechnung

Erweiterung

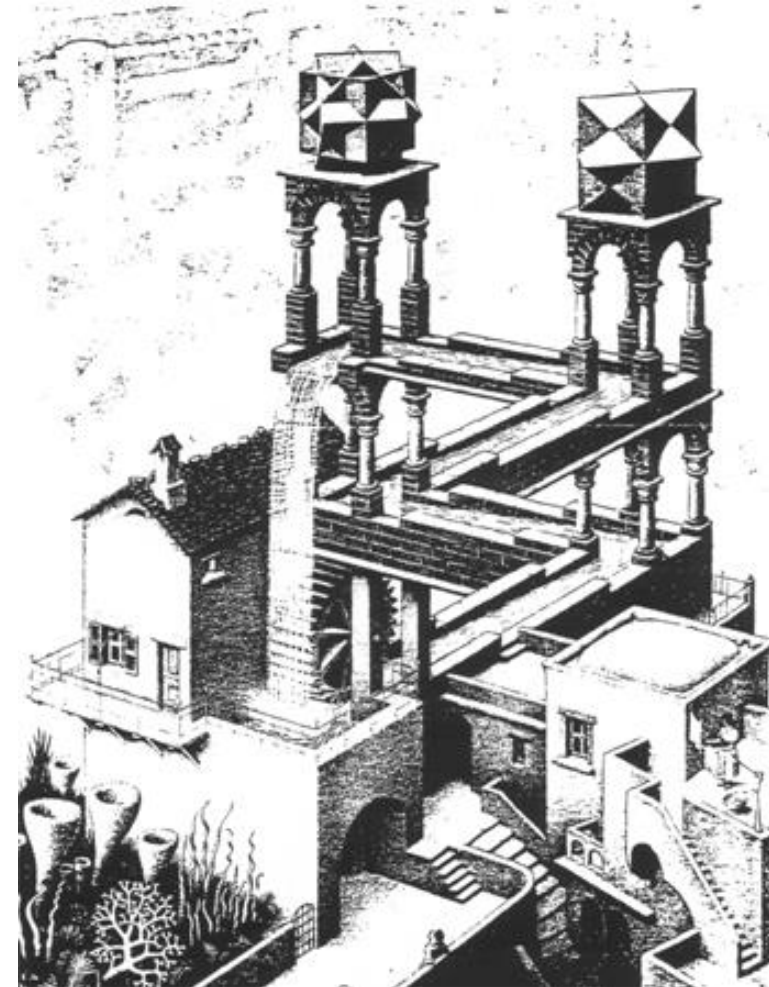
- In der Bildebene wird ein Sichtfenster (View Window) spezifiziert:
 - Breite b
 - Höhe h
 - Verhältnis Breite zu Höhe: aspect ratio
 - Das Sichtfenster ist symmetrisch um den Ursprung angeordnet
- Die Projektoren durch die Ecken der Bildebene definieren das so genannte Sichtvolumen (Viewing-Frustum)
- Zusätzlich begrenzen zwei zur Bildebene parallele Ebenen das Sichtvolumen in z-Richtung
 - Nahclipebene mit z_{nah}
 - Fernclipebene mit z_{fern}

6.4 Perspektivische Projektion – Berechnung

Erweiterung

- Das Sichtvolumen begrenzt den Teil des Raums, der dargestellt werden soll
⇒ Clipping

6.5 Unmögliche Strukturen



6.5 Unmögliche Strukturen



6.6 Möbiusband

