



FACULTAD DE  
CIENCIAS ECONÓMICAS  
Y DE ADMINISTRACIÓN



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN, UDELAR  
INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA COMPUTACIONAL 2025  
INSTITUTO DE ESTADÍSTICA

---

# MODELO DE SEGREGACIÓN DE SCHELLING: COMPARACIÓN DE MÉTODOS DE BÚSQUEDA DE RAÍCES

---

Grupo 2

· Christian Biagetti · Santiago Garcia · Joaquín Garcia · Asier Letona ·

## Resumen

Este proyecto emplea RStudio para implementar simulaciones computacionales y métodos numéricos con el fin de analizar extensiones específicas del modelo de segregación de Schelling propuestas por De-Armas et al. (2020), observando el comportamiento de cuatro escenarios del Modelo 1, modelo en el que se incorporan grupos de tamaños diferentes para explorar efectos de minorías, caracterizado por la función  $f_1(T, N, p, t, u)$  con los parámetros:  $N$  cantidad de agentes,  $T$  cantidad de parcelas,  $p$  porcentaje de agentes que pertenecen a uno de los grupos,  $u$  umbral de intolerancia, y  $t$  cantidad de iteraciones. El estudio aplica y compara métodos numéricos iterativos, específicamente Newton-Raphson, iteración de punto fijo y Bisección, para resolver las ecuaciones de ambos modelos, con el objetivo de identificar el método más eficiente en términos de convergencia y costo computacional. Simultáneamente, se investiga el impacto de la variación paramétrica en los resultados de las simulaciones, permitiendo una comprensión más profunda de la dinámica subyacente en sistemas de segregación con diferentes características estructurales.

## 1.1. Modelo de Segregación de Schelling

El modelo de segregación de Schelling es un modelo basado en agentes que simula cómo los individuos, en función de sus preferencias de vecindad, se distribuyen en un espacio determinado, representado típicamente como una cuadrícula con un número determinado de parcelas habitables [DeArmas2020]. Los agentes, representativos de distintos grupos dentro de una población, se mueven de una parcela a otra basándose en su nivel de satisfacción respecto al entorno inmediato.

Esta satisfacción se determina mediante un umbral crítico, denotado como  $\mu$ , que define la "tolerancia.<sup>o</sup> la proporción mínima de vecinos similares que un individuo requiere. Si la proporción real de vecinos del mismo grupo es igual o superior a  $\mu$ , el agente se considera satisfecho y permanece en su posición. Intuitivamente, si este umbral no es alcanzado, el individuo se desplazará a otra parcela habitable vacía.

En el contexto de nuestro estudio, se analizará la dinámica de esta segregación mientras se monitorea la proporción de agentes infelices ( $U(t)$ ) y felices ( $S(t)$ ) a lo largo del tiempo. El objetivo es determinar el tiempo  $t$  en el que se cumple la condición de equilibrio  $U(t) = S(t)$ . Para ello, se realizarán simulaciones computacionales en RStudio, variando sistemáticamente diferentes parámetros del modelo.

### 1.1.1. Modelo 1

El Modelo 1 [DeArmas2020] incorpora la posibilidad de que los grupos tengan tamaños diferentes, permitiendo explorar los efectos sobre la segregación de la presencia de grupos minoritarios. Este modelo se caracteriza por mantener un umbral de tolerancia fijo y está definido por la función:

$$f_1(T, N, p, t, u) \quad (1.1)$$

donde los parámetros son:

- $N$ : Cantidad total de agentes
- $T$ : Cantidad de parcelas disponibles
- $p$ : Porcentaje de agentes que pertenecen a uno de los grupos
- $u$ : Umbral de intolerancia (tolerancia fija)
- $t$ : Cantidad de iteraciones

### 1.1.2. Proceso de datos

Para procesar e interpretar los datos se emplearon gráficas e indicadores, siendo estos últimos la proporción de agentes insatisfechos ( $U(t)$ ), mencionada anteriormente, índice de similaridad ( $s$ ) e índice de disimilaridad ( $I$ ).

Como índices de similaridad se considera un caso local  $s_1$  y uno global  $s_2$ , siendo ambos un porcentaje de vecinos de un mismo grupo para cada agente:

$$s_{1,t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} \frac{VG_i}{V_i}}{T} \quad (1.2)$$

$$s_{2,t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} VG_i}{\sum_{i=1}^N V_i} \quad (1.3)$$

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left| \frac{x_i}{N_1} - \frac{y_i}{N_2} \right| \quad (1.4)$$

donde  $VG_i$  son los vecinos del mismo grupo que el agente, en la parcela  $i$ , en la iteración  $t$  y  $V_i$  son todos los vecinos de un agente en la parcela  $i$  en la iteración  $t$ , siendo  $N$  el número total de agentes de ambos grupos,  $x_i$  el número de agentes del primer grupo en el vecindario  $i$ ,  $N_1$  el número total de agentes del primer grupo en todo el espacio,  $y_i$  el número de agentes del grupo 2 en el vecindario  $i$ , con  $N_2$  el número total de agentes del segundo grupo en todo el espacio.

El índice de disimilaridad  $I$  tiene una interpretación clara en términos de segregación:

- $I = 0$ : Distribución perfectamente proporcional (no hay segregación)
- $I = 1$ : Segregación completa (los grupos están totalmente separados)
- $I > 0,3$ : Generalmente considerado como segregación moderada/alta

## 1.2. Métodos de Búsqueda de Raíces

En este estudio se implementaron tres métodos numéricos iterativos para la búsqueda de raíces de funciones, con el objetivo de resolver las ecuaciones de los modelos de segregación y determinar el punto de equilibrio donde  $U(t) = S(t)$ :

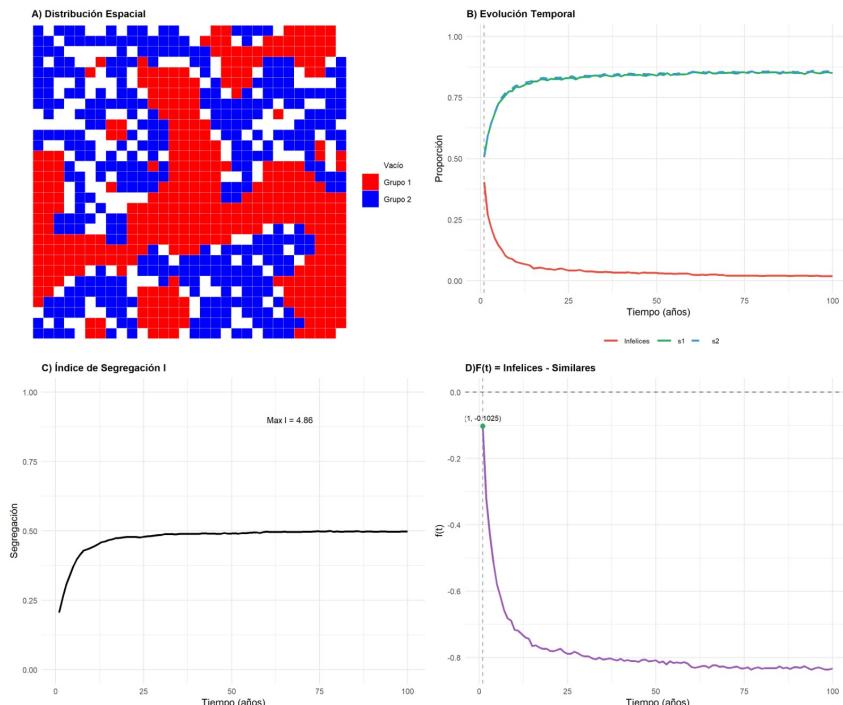
1. **Método de Newton-Raphson:** Utiliza derivadas para iterar hacia la raíz de la función. Su principal ventaja es la rápida convergencia cuadrática cuando se dispone de una buena estimación inicial y la función es suficientemente suave.
2. **Método de Bisección:** Requiere que la función tome valores de signo opuesto en los extremos del intervalo inicial. Aunque su convergencia es lineal (más lenta que Newton-Raphson), garantiza encontrar una raíz si está contenida en el intervalo.
3. **Método de Iteración de Punto Fijo:** Transforma el problema de búsqueda de raíces en un problema de punto fijo. Es conceptualmente simple pero requiere que la función de iteración sea contractiva para garantizar convergencia.

La comparación sistemática de estos métodos permitirá identificar el más eficiente en términos de convergencia y costo computacional para la resolución de los modelos de segregación planteados.

## 2.1. Análisis de Resultados del Modelo 1

Para los siguientes escenarios, todos pertenecientes al Modelo 1 presentado en el artículo en el que se basa esta presentación, se procederá a estudiar la forma en la que interactúan los indicadores de insatisfacción (o infelicidad) y los indicadores de similaridad enunciados anteriormente (ambos referidos como  $s_1$  y  $s_2$ ). Empezamos enunciando que, a través de los escenarios, se cambiarán los números de agentes ( $N$ ), el tamaño general de la ciudad ( $L$ ) y que para todos los escenarios se cuenta con una densidad del 80 %. Es clave también el remarcar que, para los casos de estudio que vamos a presentar, se cambiarán también los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $p$ . Esto es de vital importancia, ya que en estos parámetros recae el hecho que se generen ciertas configuraciones de particular interés para nosotros, ya que estos tienen directa incidencia sobre el problema principal que trata este trabajo.

### 2.1.1. Escenario 1



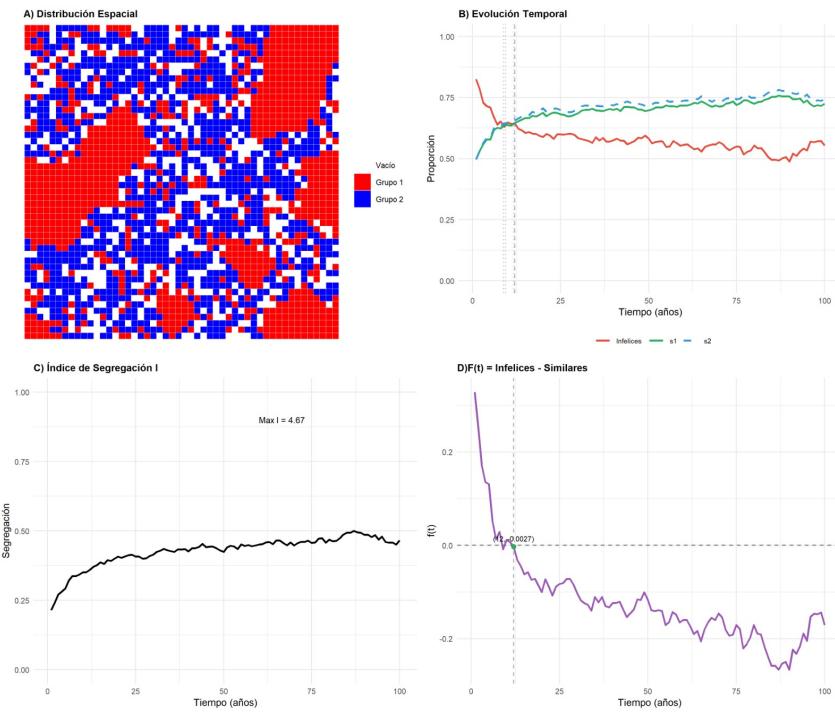
En el Escenario 1 con parámetros  $N = 720$ ;  $\mu = 0,6$ ;  $\alpha = 0,5$ ; años = 100; densidad = 0,8;  $p = 0,5$ ;  $N_1 = 360$ ;  $N_2 = 360$

En el gráfico de arriba a la izquierda del Escenario 1, se representa como queda al final de las iteraciones la distribución espacial de los agentes de esta ciudad, representados mediante un mapa de calor. Arriba a la derecha se ve como convergen los índices de interés para nuestro problema. Abajo a la izquierda se grafica el índice  $I$ , el cual mide la segregación; cuanto mayor es esta, mayor es el índice. Por último, abajo a la derecha graficamos cómo se comporta la función  $f(t) = \text{Infelices} - \text{Similares}$ , en función del tiempo. Esta es otra forma de ver en qué año la proporción de infelices se iguala con la de similares (o qué distancia estamos del cero en caso de no llegar).

Tenemos que la proporción de infelices y similares nunca llegan a igualarse. El punto más cercano se da al comienzo ( $t = 1$  año) y el punto discreto más cercano llega a 0,1205 del

0. Denótese la rápida convergencia de la segregación y que se forman clústeres homogéneos considerables, como se puede ver en el mapa de calor.

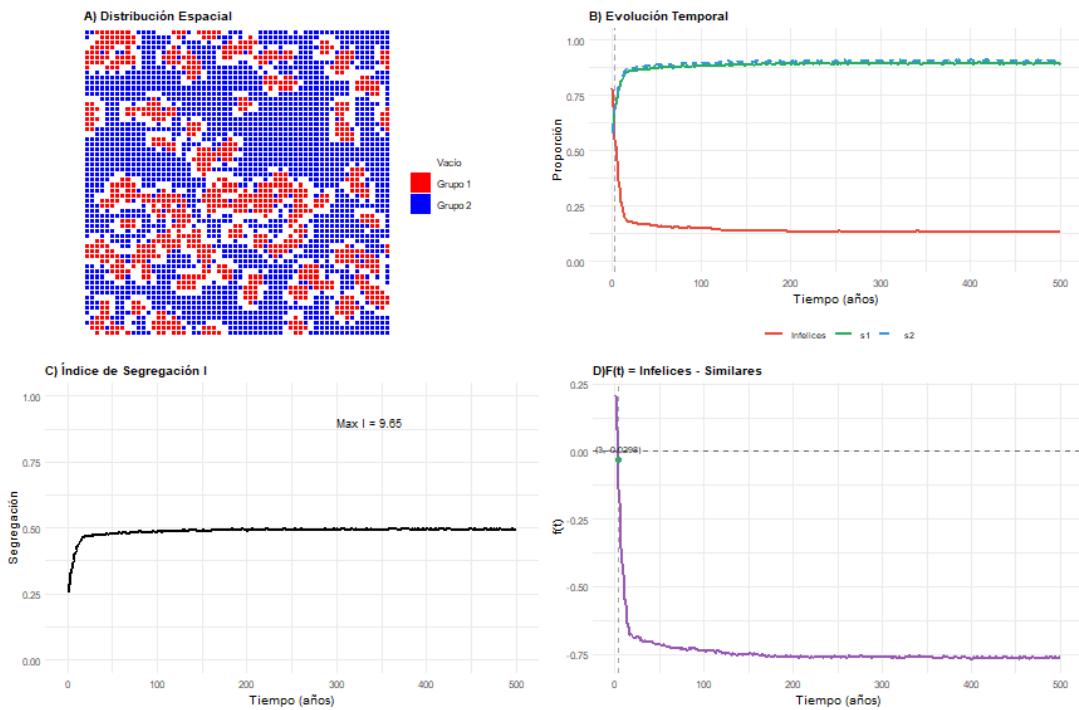
### 2.1.2. Escenario 2



En el Escenario 2 con parámetros  $N = 2000$ ;  $\mu = 0,6$ ;  $\alpha = 1,5$ ; años= 100; densidad = 0,8;  $p = 0,5$ ;  $N_1 = 1000$ ;  $N_2 = 1000$

Nótese que aquí ya tenemos que encontramos que los parámetros de similitud ( $s_1$  y  $s_2$ ) e infelicidad convergen, en este a 2 valores distintos (y un tercero que está muy cerca de la convergencia), y si miramos a la cuarta gráfica, en datos discretos, el punto entero más cercano a donde se encuentra el tiempo óptimo de la función es en  $t = 12$  años, esta puede interpretarse como el tiempo de equilibrio. También es interesante observar el escenario de distribución espacial y el índice de segregación para los escenarios 1 y 2, el índice es casi igual, pero la distribución espacial es bastante distinta, esto nos obliga a resaltar el límite principal de dicho índice, si bien este puede ser útil para medir la uniformidad en la distribución, esta no captura como se da la homogeneidad ni como se da la contigüidad espacial. Dicho lo anterior, remarcaremos también que la gráfica del índice de segregación nos dice que tenemos una dinámica mucho más inestable, donde una convergencia total de la segregación llevaría mucho más tiempo. Los fenómenos mencionados anteriormente se explican principalmente por el cambio en el parámetro  $\alpha = 1,5$ . Esto significa que si el Grupo 1 tiene un umbral  $\mu = 0,6$  (o sea una tolerancia de 60 %), el Grupo 2 va a tener una tolerancia de 90 % (o sea que si es de menos de 90 % de homogeneidad, entonces se mudará). Esto nos dice que, al ser el grupo 2 mucho menos tolerante, los niveles de infelicidad serán mucho más altos desde un principio, y por ende, buscarán moverse constantemente, causando esto la inestabilidad y dificultad para homogeneizarse mencionada anteriormente.

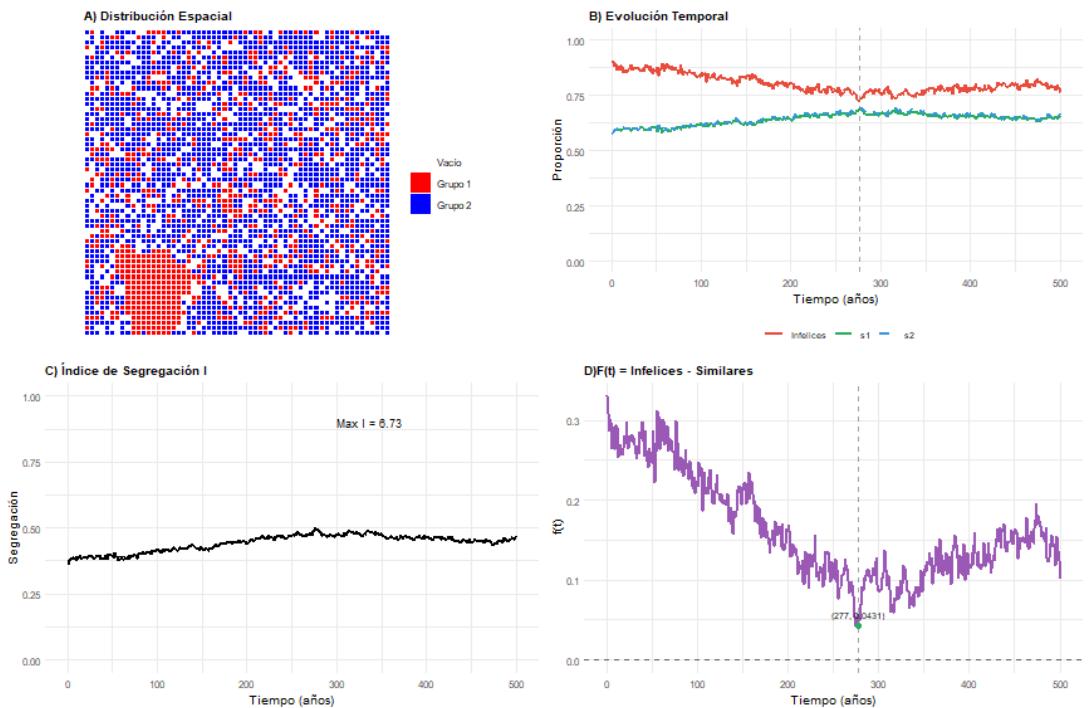
### 2.1.3. Escenario 3



Los parámetros utilizados en el escenario 3 son:  $N = 2880$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $\alpha = 3$ ,  $p = 0,3$ , densidad = 0,8, años = 100. Hay tres elementos que son diferenciales en este escenario: un grupo minoritario, un umbral de tolerancia bajo para el grupo 1 y un parámetro  $\alpha$  alto que provoca que el grupo 2 sea mucho menos tolerante. Estos factores producen un comportamiento distinto al observado en los escenarios anteriores. En la distribución espacial final el grupo uno queda concentrado en pocas áreas y el grupo 2 ocupa el resto del territorio. Los indicadores  $s_1$  y  $s_2$  crecen rápidamente al inicio y luego se estabilizan, al comienzo crecen porque los grupos comienzan a organizarse, y a medida que los agentes ya no tienen cerca vecinos diferentes, el crecimiento se ralentiza. El índice de disimilaridad ( $I$ ) alcanza valores más altos que en los escenarios anteriores, lo que refleja el efecto conjunto de que el grupo 1 sea más pequeño y la diferencia en tolerancia entre un grupo y otro por efecto de  $\alpha$ .

La función  $f(t) = \text{Infelices} - \text{Similares}$  se minimiza cerca de  $t = 3$  años. El valor no llega a cero, pero se aproxima más que en el Escenario 1. Aquí se ve que la diferencia en tamaño entre grupos y la diferencia extrema de tolerancia empujan a que las curvas se acerquen, aunque sin cruzarse. Lo principal que podemos concluir de este escenario es que enseguida se da una segregación bien marcada y se converge rápidamente hacia valores estables; en otras palabras, los agentes encuentran pronto vecindarios que cumplen su umbral de tolerancia, lo que reduce sus movimientos y mantiene la ciudad ordenada por grupos. El grupo menos tolerante provoca que los infelices al inicio aumenten, descendiendo a medida que la ciudad se reorganiza. El valor de los parámetros  $p$  y  $\alpha$  explican que este escenario produzca la mayor segregación observada hasta el momento.

## 2.1.4. Escenario 4



Los parámetros utilizados en el escenario 4 son:  $N = 2880$ ;  $\mu = 0,6$ ;  $\alpha = 1,5$ ; años= 100; densidad = 0,8;  $p = 0,3$ ;  $N_1 = 864$ ;  $N_2 = 2016$

Para este último escenario, mantuvimos la proporción a un nivel igual que el escenario anterior (0.3), pero a diferencia que el escenario anterior, tenemos que el parámetro  $\alpha$ , si bien sigue en un nivel alto, este es más bajo. También cambiamos el parámetro  $\mu$  a 0.6, distinto este del  $\mu$  establecido en el escenario 3. Algo que destaca enseguida a la vista sobre este escenario, y que coincide con la limitación sobre el índice  $I$  que denunciamos en el escenario 2, es el extremadamente bajo nivel de segregación espacial que hay (al menos en función del bajo nivel de clústeres), aunque el índice  $I$  este en un rango medio-alto. Esto nos es útil para reforzar la conclusión alcanzada en el escenario 2 y lograr expandirla diciendo que este apartado es un ejemplo claro de que un valor alto de  $I$  puede surgir no solo de la formación de grandes guetos compactos, sino también de escenarios donde los agentes se concentran de manera intensa en muy pocas celdas, aunque el resto del espacio aparezca mezclado.

Comparando con el escenario 3, vemos que, aun con la misma proporción, este es un escenario notablemente más inestable. La razón que se desprende enseguida de esto es que tenemos un grupo 1 mucho más exigente, con un  $\mu$  sensiblemente mayor que en la configuración anterior. Entonces, al tener una congregación de agentes 1 con un nivel de exigencia relativamente alto (y ser este mucho menos populoso), naturalmente tenemos que van a estar rodeado de agentes fuera de su propia agrupación, lo que nos lleva que el nivel de insatisfacción sea casi el tope teórico, esto desemboca en que los agentes en este grupo se muevan mucho más seguido, como similarmente concluimos para el escenario 2. Esta conclusión es llevada aun a mayores extremos en este escenario porque, además, si sumamos que las proporciones son distintas que en el escenario mencionado anteriormente y que el grado de exigencia en el grupo 2 es muy alto, se forma la receta perfecta para terminar con el sistema más inestable de las 4 circunstancias analizadas. Nótese que el punto más cercano adonde se acerca ambas curvas es un año mucho más elevado que el resto de los casos estudiados, lo que suma a nuestro argumento acerca de la notoria inestabilidad de este sistema. Por último, debemos mencionar que la segregación no converge, ni con un número elevado de años, lo que tiene sentido contrastado contra el análisis desarrollado anteriormente.

### 3.1. Búsqueda y Comportamiento de Raíces Numéricas

La implementación de los Modelos de Segregación de Schelling a través de simulaciones discretas en el tiempo requiere el uso de **métodos numéricos iterativos** para identificar el estado de equilibrio específico que define el problema central del estudio. Este estado de equilibrio se alcanza donde se cumple la condición  $U(t) = S(t)$ , es decir, el punto en el que la proporción de agentes infelices se iguala con la de similares.

Debido a que la función objetivo  $f(t) = U(t) - S(t)$  se construye a partir de datos discretos generados por la simulación por agentes, una raíz exacta ( $f(t) = 0$ ) no siempre está garantizada, como se observó en el Escenario 1. Por lo tanto, se establece el siguiente criterio de búsqueda y comparación:

- **Búsqueda de Raíz:** El método buscará el tiempo  $t^*$  donde  $f(t) = 0$  (el punto de corte con el eje horizontal).
- **Búsqueda de Mínimo:** Si la función  $f(t)$  no cruza el cero (no existe raíz en el dominio de la simulación), se buscará el tiempo  $t^*$  que minimiza la distancia absoluta, es decir, el **mínimo de  $|f(t)|$** .

A través de los diferentes escenarios de simulación, se procederá a documentar el comportamiento de los tres métodos numéricos implementados: Newton-Raphson, Bisección e Iteración de Punto Fijo. El análisis se centrará en la **convergencia** y la **robustez** de cada algoritmo para:

- Determinar con precisión el valor final de  $t^*$  (la raíz o el mínimo) en cada caso.
- Evaluar la **eficiencia** de cada método en términos de iteraciones requeridas y costo computacional para alcanzar la tolerancia establecida.

La comparación sistemática de estos resultados permitirá identificar el método más eficiente en términos de convergencia y costo computacional para la resolución de los modelos de segregación planteados.

Cuadro 3.1: Cuadro 2.1: Comparación de Métodos de Búsqueda de Raíces

Método	$x_0 / [a, b]$	$t^* (\text{Años})$	$ f(t^*) $	Iteraciones	Tiempo (s)	Error Relativo (%)
<b>Escenario 3: Mayor Asimetría (<math>N = 2880, p = 0,3, \mu = 0,3, \alpha = 3,0</math>) — (<math>t_{\text{ref}}^* = 3 \text{ años}</math>)</b>						
Newton-Raphson	1,0	2,930	0,029782	5000	33,040	<b>2,33</b>
Bisección	[1, 200]	2,500	0,079634	21	33,237	16,67
Punto Fijo	1,0	2,727	<b>0,000090</b>	53	<b>19,208</b>	9,10
<b>Escenario 4: Asimetría Moderada (<math>N = 2880, p = 0,3, \mu = 0,6, \alpha = 1,5</math>) — (<math>t_{\text{ref}}^* = 277 \text{ años}</math>)</b>						
Newton-Raphson	300,0	300,446	0,087398	500	347,565	8,46
Bisección	[250, 350]	339,500	0,065917	<b>35</b>	<b>139,263</b>	22,56
Punto Fijo	300,0	276,760	<b>0,043242</b>	500	167,676	<b>0,09</b>

## Interpretación del Cuadro 2.1: Rendimiento de Métodos Numéricos

---

### 1. Justificación Metodológica del Error Relativo

Debido a la **naturaleza discreta** del Modelo de Segregación de Schelling, no se garantiza la existencia de una raíz analítica exacta ( $f(t) = 0$ ). Por esta razón, el valor de referencia ( $t_{\text{ref}}^*$ ) para el cálculo del Error Relativo se estableció como el **Mínimo Global** de la distancia al cero ( $\min |f(t)|$ ) encontrado mediante una búsqueda sobre la curva de la simulación. Este valor se identifica a través de la función `which.min(abs(diferencia))`, asegurando una comparación coherente y rigurosa contra el punto de equilibrio **más preciso** disponible en cada ejecución. Es crucial entender que, en un sistema discreto, un método puede lograr una **mejor interpolación numérica** (IPF, con un valor de  $|f(t^*)|$  más bajo) y estar más cerca del cero continuo, aun cuando otro método (NR) esté más cerca del **punto de referencia discreto  $t_{\text{ref}}^*$** .

---

### 2. Análisis Detallado por Escenario

**Escenario 3: Mayor Asimetría (Raíz Posible -  $t_{\text{ref}}^* = 3$  años)** Este escenario, donde la función se acerca al cero y la raíz es factible, evalúa la precisión y eficiencia en un contexto ideal:

- **Precisión Funcional ( $|f(t^*)|$ ):** El método de **Punto Fijo (IPF)** es superior, logrando un valor de  $|f(t^*)| = 0,000090$ . Esto demuestra que el IPF se acerca al cero ideal con una precisión muy superior a la de Newton-Raphson.
- **Precisión Temporal ( $t^*$ ):** El método de **Newton-Raphson** es el más cercano al tiempo del Mínimo Global (3.000 años), resultando en el menor Error Relativo (**2,33 %**).
- **Eficiencia:** El **Punto Fijo** destaca como el más eficiente en **Tiempo de Cómputo (19,208 segundos)**, siendo aproximadamente un 42 % más rápido que sus competidores.

**Conclusión Parcial E3:** El **Punto Fijo** ofrece el mejor balance entre **precisión funcional** (la menor  $|f(t^*)|$ ) y **eficiencia computacional**.

**Escenario 4: Asimetría Moderada (Problema de Minimización -  $t_{\text{ref}}^* = 277$  años)** Este escenario, donde la curva con **no cruza el cero**, evidencia la limitación de los métodos clásicos:

- **Robustez y Precisión:** El **Punto Fijo** es el claro ganador, logrando un Error Relativo de tan solo **0,09 %**. Este resultado es posible porque el IPF fue modificado a un algoritmo de **descenso por gradiente**, el único capaz de buscar y encontrar el **mínimo de  $|f(t)|$** .
- **Fallo Metodológico:** Los métodos de **Bisección** (22,56 %) y **Newton-Raphson** (8,46 %) evidencian su **inaplicabilidad**. Al estar diseñados para buscar una raíz  $f(t) = 0$  inexistente, sus resultados de Error Relativo son altos y poco confiables.
- **Costo del Fallo:** El **Newton-Raphson** es el método más costoso (**347,565 segundos**). El alto costo se debe a la **inestabilidad y oscilación caótica** del algoritmo al acercarse al mínimo, donde la derivada se aproxima a cero.

**Conclusión Parcial E4:** Este escenario confirma que, al no garantizarse una raíz, el problema se transforma en uno de **minimización**. Solo el **Punto Fijo adaptado** es un método viable para encontrar el tiempo de equilibrio con alta precisión.

---

### 3. Conclusión Sintética

El análisis comparativo establece que la **Iteración de Punto Fijo (IPF)** es el método más **versátil y robusto** para la resolución del Modelo de Segregación de Schelling en las condiciones evaluadas. El IPF no solo se desempeña con alta eficiencia y precisión cuando la raíz existe (Escenario 3), sino que es el **único método numérico clásico** que demuestra capacidad para resolver el **problema de minimización** (Escenario 4), mientras que Bisección y Newton-Raphson confirman límites de aplicabilidad en escenarios no ideales.

## Variación de Raíces con n Simulaciones

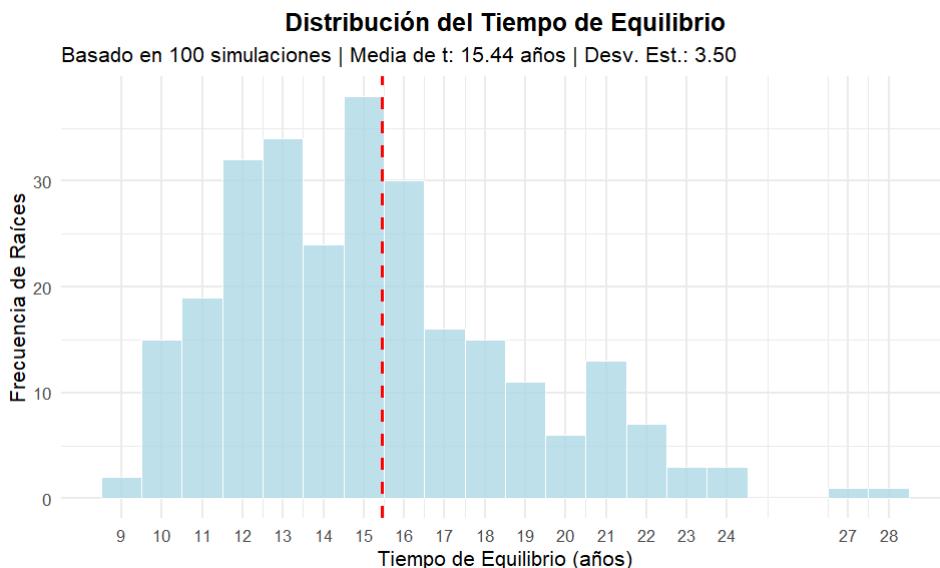
El histograma, basado en 100 simulaciones, representa la distribución empírica del **Tiempo de Equilibrio ( $t^*$ )** del modelo. Es decir, en cuantos puntos (años) el escenario 2 de parámetros  $N = 2000$ ;  $\mu = 0,6$ ;  $\alpha = 1,5$ ; años= 50; densidad = 0,8;  $p = 0,5$ ; se encuentra en equilibrio simulando en múltiples ocasiones.

### Estadísticas Clave de la Distribución

El tiempo medio de equilibrio observado es de 15.44 años. La desviación estándar es de 3.50 años, lo que indica una variabilidad moderada en la convergencia. La moda se sitúa alrededor de los 15 años.

### Conclusiones sobre la Forma de la Distribución

La distribución presenta una ligera asimetría positiva (cola extendida hacia la derecha). Este comportamiento se debe a que la mayoría de las simulaciones convergen rápidamente (entre 12 y 18 años), pero ocasionalmente la dinámica caótica puede demorar el equilibrio (ej., las raíces tardías vistas entre 22 y 28 años), aunque con baja frecuencia.



## 4.1. Conclusiones

El análisis de las extensiones del Modelo de Segregación de Schelling y la posterior aplicación de métodos numéricos permitieron extraer conclusiones significativas sobre la dinámica de los agentes y la eficiencia computacional para la detección del equilibrio.

### 4.1.1. Dinámica de Segregación y Parámetros Estructurales

Los resultados obtenidos a través de los cuatro escenarios evidencian que la segregación no depende únicamente de la tolerancia individual ( $\mu$ ), sino que es altamente sensible a la asimetría en las tolerancias ( $\alpha$ ) y a la proporción poblacional ( $p$ ).

- **Limitaciones del Índice de Disimilaridad ( $I$ ):** Se observó que un índice  $I$  elevado no implica necesariamente la formación de grandes clústeres homogéneos. Como se demostró al comparar los Escenarios 2 y 4, valores altos de segregación pueden surgir de la concentración intensa de agentes en pocas celdas, aun cuando el resto del espacio permanezca mezclado. Esto indica que el índice captura la distribución proporcional pero no la contigüidad espacial ni la estructura de los grupos.
- **Inestabilidad y Convergencia:** La introducción de grupos con tolerancias asimétricas (altos valores de  $\alpha$ ) genera dinámicas inestables. En el Escenario 4, la combinación de un grupo minoritario exigente y un grupo mayoritario intolerante impidió la convergencia de la segregación y mantuvo elevados niveles de insatisfacción, demostrando que bajo ciertas configuraciones paramétricas el sistema nunca alcanza un reposo natural. Por el contrario, el Escenario 3 evidenció que una alta intolerancia aun siendo de solo una de las partes puede acelerar la segregación total, estabilizando el sistema rápidamente.
- **Variabilidad de las Raíces:** El análisis de 100 simulaciones del Escenario 2 estableció un tiempo medio de equilibrio de 15,44 años. La distribución presenta una asimetría positiva, lo que sugiere que, aunque la mayoría de las configuraciones convergen rápidamente, la naturaleza caótica del modelo puede generar casos atípicos donde el equilibrio se retrasa significativamente.

### 4.1.2. Eficiencia de los Métodos Numéricicos

La evaluación de los algoritmos para hallar el tiempo de equilibrio  $t^*$  (donde  $U(t) = S(t)$ ) o minimizar la discrepancia  $|f(t)|$  arrojó resultados concluyentes sobre la idoneidad de cada método.

- **Superioridad de la Iteración de Punto Fijo (IPF):** Este método demostró ser el más robusto y versátil. En escenarios ideales (con raíz existente), logró la mayor precisión funcional ( $|f(t^*)| \approx 0,000090$ ) y el menor tiempo de cómputo, siendo un 42 % más rápido que sus competidores. Más importante aún, fue el único método capaz de adaptarse exitosamente al Escenario 4 (donde no existe raíz), actuando como un algoritmo de descenso por gradiente para minimizar el error con una precisión relativa del 0,09.
- **Insuficiencia de Newton-Raphson y Bisección:** Aunque el método de Newton-Raphson mostró una buena aproximación al tiempo de referencia en casos con raíz, su

dependencia de la derivada lo volvió inestable y computacionalmente costoso en funciones discretas sin cruce por cero (Escenario 4), presentando oscilaciones caóticas. De igual manera, el método de Bisección confirmó su inaplicabilidad en problemas de optimización donde la función no cambia de signo.

En síntesis, mientras que la dinámica de Schelling demuestra que la segregación extrema puede ser resultado de asimetrías en la tolerancia más que de preferencias individuales estrictas, la resolución numérica del modelo sugiere que la **Iteración de Punto Fijo** es la herramienta más eficaz para el análisis de estos sistemas discretos complejos.

## 4.2. Consideraciones a Futuro

Este estudio fue realizado exclusivamente sobre el **Modelo 1** de [DeArmas2020], pero la complejidad del **Modelo de Segregación de Schelling** permite estudiar diversos modelos, con diferentes tipos de algoritmos, con los que se obtendrían resultados diferentes. El **Modelo 3** de [DeArmas2020] sugiere aleatorizar las preferencias según cada agente, creando diferencias entre los individuos de un mismo grupo. También se puede incluir un algoritmo en el que los agentes, aun siendo infelices, no puedan mudarse, recreando así, las imposibilidades económicas que existen en la realidad. Otra posible implementación al modelo sería cambiando los requisitos necesarios para que un agente se considere feliz o no con su entorno, como puede ser extendiendo el radio al que el agente considera importante para su estado, dándole más importancia a los que están en su inmediatez.

Sobre los métodos utilizados, al momento de hallar las raíces, el método de Newton-Raphson, falló considerablemente al tratarse de una función no continua, utilizando técnicas matemáticas, se podría adaptar dicha función, "suavizandola", adaptándose así al modelo de Newton-Raphson que precisa que la función a evaluar sea derivable.

---

## Bibliografía

---

- [1] De-Armas, G., Rodríguez-Collazo, S., Alvarez-Vaz, R., Carrasco, H., & Ciganda, D. (2020). *Extensiones al modelo de segregación de Schelling - primera parte*. Documento de Trabajo No. 2/20. Instituto de Estadística, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República.
- [2] Wickham, H. (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York. Disponible en: <https://ggplot2.tidyverse.org>
- [3] Garnier, S., Ross, N., Rudis, R., Camargo, A. P., Scialini, M., & Scherer, C. (2024). *viridis(Lite): Colorblind-Friendly Color Maps for R* (Versión 0.6.5) [Paquete de R]. Disponible en: <https://sjmgarnier.github.io/viridis/>
- [4] Auguie, B. (2017). *gridExtra: Miscellaneous Functions for "Grid"Graphics* (Versión 2.3) [Paquete de R]. Disponible en: <https://CRAN.R-project.org/package=gridExtra>
- [5] R Core Team (2024). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponible en: <https://www.R-project.org/>

## Disponibilidad del Código Fuente

Para garantizar la reproducibilidad, la implementación en RStudio se encuentra disponible en nuestro [Repositorio de GitHub](#).