



*Masterra Zientzia eta Teknologia Kuantikoetan*

Masterreko tesia

---

# Interakzioak Chern-Simons zurrunbiloetan: ikerketa sistematikoa

---

Asier Izquierdo

*Zuzendariak:*

**Betti Hartmann**

**Joanes Lizarraga**

**Jon Urrestilla**

Fisika Teorikoko Saila  
Zientzia eta Teknologia Fakultatea  
Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU

Leioa, 2020ko Iraila

# Gaien Aurkibidea

<b>Gaien Aurkibidea</b>	<b>2</b>
<b>1 Sarrera eta helburuak</b>	<b>3</b>
1.1 Sarrera . . . . .	3
1.2 Helburuak . . . . .	5
<b>2 Soka globalak</b>	<b>6</b>
<b>3 Abeldar-Higgs eredua</b>	<b>9</b>
3.1 Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO) zurrumbiloak . . . . .	11
3.2 Egonkortasuna . . . . .	14
3.3 Elektrikoki kargatutako zurrumbiloen bilaketa . . . . .	20
<b>4 Abeldar-Higgs-Chern-Simons model</b>	<b>21</b>
<b>5 Emaizta numerikoak</b>	<b>27</b>
<b>6 Ondorioak eta etorkizunerako ikuspegia</b>	<b>36</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>39</b>
<b>Eranskina A Konbentzioak eta definizioak</b>	<b>40</b>
A.1 Konbentzioak . . . . .	40
A.2 Definizioak . . . . .	40
A.3 Eremuen teoriako kalkuluak . . . . .	42
A.3.1 AH ereduaren dentsitate Hamiltondarra . . . . .	42
A.3.2 AH ereduaren eremu-ekuazioak . . . . .	43
A.3.3 AHCS ereduaren eremu-ekuazioak . . . . .	44
<b>Eranskina B Simetriaren haustura espontanea</b>	<b>47</b>

# Kapitulua 1

## Sarrera eta helburuak

### 1.1 Sarrera

Defektu topologikoak eremu kuantikoen teorien soluzio egonkor, erregular eta klasikoak dira. Defektu hauek simetria apurketa espontaneo (ingelesez, spontaneous symmetry breaking, SSB) duten fase-trantsizioetan agertzen dira<sup>1</sup>.

Defektuak fase zahar batean harrapatuta dagoen espazio-denboraren eskualde batean energia konfinatuta duten egitura fisikoak izan ohi dira. Defektu horien azterketak informazio baliotsua erakuts dezake simetria haustura espontaneoaren eskemari buruz. Defektuen ohiko beste ezaugarri bat da, laster ikusiko dugun bezala, euren izaera topologikoagatik, fluxu magnetiko kuantizatua daramatela.

Monopoloak, sokak eta domeinu hormak defektu topologikoen adibide dira. Hurrenez hurren, egitura puntual eta bi- edo hiru-dimentsioko defektu topologikoei egiten diete erreferentzia,  $(3 + 1)$  espazio-denborako dimentsiotan [1, p. 351, l. 11-12]. Hurrengo ataletan defektu topologiko ikertue-netako batean zentratuko gara: sokak (edo zurrumbiloak<sup>2</sup>). Izenak adierazten duen gisara, hauek dimentsio bakarreko objektuak dira, zeinen materia dentsitatea lerro batean kontzentratuta dagoen.

Defektu topologikoak –zehazki, soka kosmikoak– fisikako alor ezberdinetan ageri dira; hala nola, kosmologian eta materia kondentsatuaren fisikan. Labur azalduta, kosmologiari dagokionez, baliteke soka kosmikoak unibertsoaren eboluzioaren hasierako unetan gertatu ziren fase trantsizioetan sortu izana, masa eskala izugarrietan. Hasiera batean, soka kosmikoek interesa sorrarazi zuten azalpen alternatibo bat eskaintzen zutelako inflazio kosmologikoaren bitartez unibertsoko eskala-handiko estruktura-jatorri diren dentsitate inhomogenitate primitiboen jatorrirako [2, p. 68, l. 26-31]. Dena den, neurketek defektu topologiko puruak ezeztatu zituzten unibertsoko estruktura formakuntza eragin zuten hasierako dentsitate perturbazioen kandidato moduan. Aitzitik, defektu hauen hondoko mikrohuin erradiazioaren (ingelesez, cosmic microwave background, CMB) eta uhin grabitazionalen iragarpenak etengabe ikertuak dira.

Soka kosmikoak edo lerro-zurrumbiloak nonahi ageri dira, halaber, materia kondentsatuko sistemetan. Testuinguru honetan, I. mota eta II. motako supereroaleen arteko bereizketa azpima-

---

<sup>1</sup>Ikusi B. apendizea Abeldar-Higgs (AH) ereduari dagokion simetria apurketa espontaneoaren inguruko azalpen labur baterako.

<sup>2</sup>Zenbaitetan, zurrumbiloak eta sokak sinonimotzat hartzen dira. Beste batzuetan, zurrumbilo terminoak  $(3 + 1)$  dimentsioko soken  $(2 + 1)$  dimentsioko kasu baliokideari egiten dio erreferentzia; hots, soken zeharkako ebakidurari, simetria-ardatzarekiko perpendikularra denari, egiten dio erreferentzia. Halaber, “soka kosmiko” izena erabiltzen da, fenomeno kosmologikoekin edo soka-fundamental (ingelesez, F-strings) deritzenetatik bereizteko. Lan honetan, “zurrumbilo”, “soka” eta “soka kosmiko” izenak erabiliko ditugu desberdintasunik nabarmendu gabe.

rragarria da. I. motako supereroaleek Meissner efektua deritzona erakusten dute. Hau da, eremu magnetiko baten menpean, supereroankortasuna bat-batean hausteko modukoa ez bada hau, eremu magnetikoaren lerroak laginetik zeharo kanporatuak dira [3, p. 12, Fig. 1.5].

Bestalde, II. motako supereroaletarako egora normalerako trantsizioa ez da bat-batekoa. Bakarra beharrian, bi balore kritiko identifika daitezke kanpo eremu magnetikoetarako. Tarteko balioetan, II. motako supereroaleek eremu magnetikoa laginetan, fluxu kuantizatueta, partzialki sartzea (Meissner efektu ez-oso) uzten dute, baina supereroankortasuna mantentzen da. Supereroalea supereroankortasun eta eroankortasun arruntaren arteko egoera nahastuan ageri da, zurrumbilo egoera edo Shubnikov fase deritzona [3, p. 12] eta, egoera honetan, eremu magnetikoaren zurrumbiloak eratzen dira, zeintzuk Abrikosov-ek kontsideratu zituen teorikoki lehendabiziko aldiz.

Soka itxurako defektu topologiko hauen eraketa deskribatzeko eredu sinple eta erabiliena Abeldar-Higgs (AH) eredua da, hurrengo kapituluaz azalduko duguna. Teoria honetan, soka formako soluzioak aurki daitezke, eta lan nabarmena gauzatua izan da euren propietateak lortzeko: esaterako, parametro ezberdinen menpeko egonkortasuna, euren arteko interakzioak eta gainbehera moduak.

Beste defektu topologikoak ez bezala, zurrumbiloek ez dute onartzen energia finituko elektrikoki kargatutako orokorpenik. Dena den, AH ereduari Chern-Simons (CS) terminoa gehituta, zurrumbiloak karga elektrikoa irabaz dezakete energia finitu mantenduta, hau soilik dimentsio bakoitiko espazio-denboretan aurrera eraman daitekeen arren.

AH eredu ohikoari gehitzen zaion CS terminoa matematika puruetan agertu zen lehenbizi, CS forma izenarekin, zein Maxwelllek elektromagnetismoa azaltzeko erabilitako tresna matematikoen aplikazio bat zen. CS terminoaren ezaugarri ez ohiko bat da gauge transformazioan menpean inbariantea ez den arren ekuazio fisiko konsistenteak ematen dituela.

Ikerketa eremu honen garrantziari erreparatuta, arestian aipatu den moduan soka kosmikoen kasu orokorrerako, AH eredua baliagarria da alor oso ezberdinetan, kosmologiatik supereroankortasunera. Azkeneko testuinguruan zentratuko gara, CS terminoak, AH ereduari gehituta, tenperatura altuko material supereroaleen simetria propietateak (zehazki, paritatearen kontserbazio eza) baititu paritate transformazioen menpean [4, p. 3464, l. 4-6]. Gainera, AHCS zurrumbiloak espazio-denbora dimentsio kopuru bakoitietan aztertuak izan behar dira. Zehazki, bi dimentsio espazialetan egingo dugu lan. Hortaz, espero dugu emandako emaitzek kontribuzioa egitea AHCS zurrumbiloen interakzioen ulermenean, zeinek lagun dezakeen tenperatura altuko sistemen propietateen inguruan teorizatzen [4, p. 3444, l. 18-19].

Proiektu honen lan ildotik urrun dagoen arren, Chern-Simons teoria interesgarritzat hartzeko beste arrazoi bat da haren aplikazioa Hall Efektu Kuantiko deritzon bi dimentsioko materia kondentsatuaren fisikako fenomenoan [5, p. 86, Table 1][6, p. 12, l. 2-4].

## 1.2 Helburuak

Gure xede nagusia Abeldar-Higgs-Chern-Simons (AHCS) zurrumbiloen propietateak ulertzea da, zeintzuk ez diren aztertu Abeldar-Higgs (AH) kasua bezain modu sakonean, dagozkien higidura-ekuazioen soluzioak numerikoki eraikiz.

Zehazki, sistematikoki ikertuko dugu AHCS ereduaren soka-energia, teoria gobernatzen duten parametroen funtzioan. Hauen artean, aipatutako CS terminoa ageri da. Honakoa egingo dugu, nagusiki, AHCS soken egonkortasuna aztertzeke; hau da, jakin nahi dugu sokek elkarrekin interakzionatzen duten egoera lotuak sortzeko edo, aitzitik, beste soka batzuetan hausten diren, aipatutako I. eta II. motako kasuen analogian.

Azaldutakoa egungo literaturan aztertua izan ez den gaia da. Zenbait ikerketa gauzatuak izan dira AHCS soken artean eragiten duten indarrei buruz [4], baina azterketa sistematikorik ez da existitzen. Gure helburua ikerketa sistematiko hau burutzea da.

Horretarako, sokaren higidura-ekuazioak askatuko ditugu parametro ezberdinen funtzioan. Parametroen espazioaren mapa egingo dugu, txandaka finkatuz aipatutako parametroetako batzuk, gainontzekoak aske utziz. Behin soluzioak lortuta, kasu bakoitzerako soken energia lortuko dugu eta alderatuko ditugu. Honekin, ondorioztatuko dugu zer eskualdetan sokek elkar erakartzen duten (I. mota), elkar aldaratzen duten (II. mota), eta euren arteko muga-lerroa.

Lan honetan, [A.1.](#) apendizean ageri diren hitzarmen edo konbentzioak erabiliko ditugu. Hurrengo sekzioan, soka globalak azalduko ditugu, [3.](#) sekzioa ulertzen laguntzeko, non AH teoria aurkezten den soka kosmiko (lokalak) modelizatzeko teoriarik sinpleena bezala. Eredu honen eta Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO) soken zenbait propietate orokor ikertuko ditugu, AHCS ereduak aurkeztu aurretik. [4.](#) sekzioan, AHCS ereduak azalduko dugu, CS terminoa aurkeztuz, lehenbizi, eta, ostean, hura AH ereduarekin elkartuz. AHCS soken zenbait propietate azalduko ditugu, xehetasun apur batez. [5.](#) sekzioan, laburki deskribatuko ditugu AHCS higidura-ekuazioak ebazteko erabilitako zenbakizko-metodoak, eta lan honetan lortutako emaitzak aurkeztuko ditugu. Azkenik, [6.](#) sekzioan idatziko ditugu ondorioak.

# Kapitulua 2

## Soka globalak

Ohar orokor batzuk emango ditugu hemen, hurrengo kapituluko propietateak aurkeztu aurretik. Defektu topologikoak globalak edo lokalak izan daitezke. Zehazki, AH ereduari, teoriaren simetria globaletik,  $U(1)_G$ , lokalera,  $U(1)_L$ , pasatzen da. Hortaz, soka globalak azalduko ditugu, lehenik eta behin. Honako ereduak aldaezinak edo inbariante dira fase transformazio globalen menpean,

$$\phi(x) \xrightarrow{U(1)_G} e^{i\alpha} \phi(x), \quad (1)$$

non  $\phi(x) \in \mathbb{C}$  balio-konplexuko eremu eskalarra den, eta,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , espazio-denborako puntu orotan berdina den  $-id$  est, konstantea da, eta, hortaz, “global” etiketa- fase bat. Teoria hau honako Lagrangearen dentsitatearen bitartez deskribatzen da:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x))^* (\partial^\mu \phi(x)) + \mathcal{V}(|\phi(x)|), \quad (2)$$

non bere buruarekin interakzionatzen duen energia-potentzial dentsitatea honela definitzen den:

$$\mathcal{V}(|\phi(x)|) = \frac{\lambda}{4} (|\phi(x)|^2 - \eta^2)^2, \quad (3)$$

non  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Potentzial honi “Higgs potentziala” edo “kapela mexikarraren potentziala” deritzo, eta simetriaren haustura espontaneoaren eragiten du.  $\eta \in \mathbb{R}_+$   $\phi(x)$  eremu eskalarraren benetako oinarritzko egoeraren modulua da. Agerikoa den lez, dentsitate Lagrangearen hau inbariantea da  $U(1)_G$  fase transformazio globalen menpean, (1) ekuazioa.

Energia minimoko konfigurazioa topatzeko, teoriaren potentziala (laugarren mailakoa eta eskalarra) minimizatu behar da,  $d\mathcal{V}(|\phi(x)|)/d(|\phi(x)|) = 0$  eta  $d^2\mathcal{V}(|\phi(x)|)/d^2(|\phi(x)|) > 0$ <sup>3</sup>. Potentzialaren minimoak soluzio konstanteak ditu:  $|\phi(x)| = \eta$ . Hortaz, (3) ekuazioko energia-potentzial dentsitatea duen teoriari dagokion oinarritzko egoeren barietatea,  $\mathcal{M}$ ,  $S^1$  zirkuluaren isomorfoa:

$$\mathcal{M} = \{\phi(x) \in \mathbb{C} \mid \phi(x)\phi^*(x) - \eta^2 = 0\} \cong S^1. \quad (4)$$

Hau agerikoa da honakoa definituz:  $\phi(x) = \text{Re}(\phi(x)) + i\text{Im}(\phi(x)) \equiv \phi_1(x) + i\phi_2(x)$ , where  $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ . Erraz ikus daiteke Higgs potentzial dentsitatearen minimoak  $|\phi(x)| = \eta$  erradioko zirkulu baten barruan daudela,  $(\phi_1(x), \phi_2(x))$  planoan:

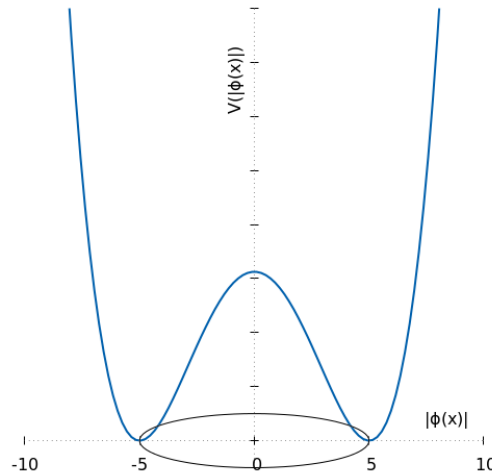
$$|\phi(x)|^2 = \phi_1^2(x) + \phi_2^2(x) = \eta^2, \quad (5)$$

---

<sup>3</sup>Konproba daiteke baldintza honetatik  $\lambda > 0$  izan behar dela. Bestela,  $|\phi(x)| = \eta$  maximo bat izango litzateke, eta,  $\phi(x) = 0$ , minimo bat. Ez litzateke simetria haustura espontaneorik gertatuko!

zeintzuk endekatutako oinarritzko egoeren multzoa osatzen duten, elkarrekin erlazionatuta errota bitartez.

Beraz, minimoen zirkuluaren erradioaren magnitudea ondo definituta dago, soilik balio zehatz batek ( $|\phi(x)| = \eta$ ) egiten du minimo energia-potentzialaren dentsitatea. Hala ere,  $\phi(x) = \eta e^{i\alpha}$  oinarritzko egoeren fasea,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ez dago definituta, arbitrarioa da. Hots,  $\alpha$  fasearen balioa irrelebantea da dentsitate Lagrangearra inbariantea delako  $U(1)_G$  transformazioekiko, (1) ekuazioa. Oinarritzko egoerak  $\alpha$  faseaz zehaztuta dauden arren, potentzialaren energia soilik aldatzen da  $|\phi(x)|$ -ren balio ezberdinetarako.



Irudia 1: "Kapela mexikarra"deritzon energia-potentzial dentsitatea, (3).  $|\phi(x)|^2 = \eta^2$  ekuazioa betetzen duten puntuak potentzialaren minimoak dira. Irudi honetan  $\eta = 5$  hautatu dugu.

Oinarritzko egoeren espazioaren topologia defektu topologikoen aspektu fundamentalak da. Izatez, defektu topologikoen eraketa oinarritzko egoeren barietatearen propietate homotopikoekin erlazionatuta dago. Har dezagun  $G$  Lie talde baten  $H$  azpitalde,  $H \subset G$ , baterako simetria-haustura [2, p. 69, l. 26-27], i.e.,  $G \mapsto H$  trantsizioa. Honek esan nahi du teoria inbariantea dela  $G$  talde jarraituarekiko, baina oinarritzko egoerak inbariante direla soilik  $H \subset G$  taldearekiko. Kasu honetan, soka kosmikoak sor daitezten, oinarritzko egoeren barietatea,  $\mathcal{M}$ , ez da sinpleki lotua –hau da,  $\mathcal{M}$  barietateak kontrakziozko paira ezin dezaketen loop edo bukleak ditu,  $\mathcal{M}$  barneko puntu bat lortu arte txikitu ezin daitezkeen loop-ak–[2, p. 69, l. 34-37][7, p. 312, l. 7-12].

Higgs eremuaren konfigurazio asintotikoak,  $\phi(r \rightarrow \infty)$ , oinarritzko egoeren zirkuluaren, (4), inguruan bira ematen duenean, sokak eratzen dira [1, p. 360, l. 9-10]. Oinarritzko egoeren barietatea,  $\mathcal{M}$ ,  $S^1$  zirkuluarekiko isomorfoa denez, birak ematen dituen konfigurazioa ezin da modu jarraituan hedatu  $r \rightarrow \infty$  puntutik  $(x, y)$  plano osora  $\mathcal{M}$  barietatearen barnean mantenduz. Beraz, aintzat hartuta, halaber,  $\phi(x)$  Higgs eremuaren jarraitasuna, balio nulua izan behar du  $OXY$  planoaren

punturen batean [1, p. 360, l. 11-15]. Hiru dimentsio espazialetan, balio nulu horien lerro jarraituek sokaren posizioa adierazten dute (maindire bat espazio-denboran). Defektuen natura topologikoak eragiten du eremu eskalarraren zeroak modu jarraituan agertzea. Beraz, sokak infinituak dira, ez dute amaierarik, sokek ez dute muturrik.

$U(1)$ -ren talde espaziala  $S^1$  zirkulua da. Hau da,  $U(1)$ -ren elementuak, balio bakarrekoak izanda, honela idaz daitezke:  $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi)}$ , non  $\theta$ -ren balio guztien espazioa lerro bat kontsidera daitekeen, non  $\theta = 0$   $\theta = 2\pi$ -ren baliokidea den, id est,  $S^1$  zirkulua osatzen den. Eremuaren mugako balioa,  $\phi(r \rightarrow \infty) = f(r \rightarrow \infty) e^{in\theta} = e^{in\theta}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $S^1$  zirkulu bat da ere bai, non  $r \rightarrow \infty$  eta  $\theta = [0, 2\pi)$ . Ondorioz, esan daiteke  $\phi(r \rightarrow \infty)$ -k loop bat definitzen duela  $\mathcal{M}$  barietatean. Hau da, mapa bat eratzen du espazio fisikoko infinituko balioen  $S^1$  zirkulutik  $\mathcal{M}$  oinarritzko egoeren barietateko  $S^1$  zirkulura,  $U(1)$  taldeari dagokiona,  $\phi(r \rightarrow \infty) : S^1 \rightarrow \mathcal{M} \cong S^1$ , bira-zenbakiaren (ingelesez, winding number)<sup>4</sup> bitartez deskribatua,  $n \in \mathbb{Z}$ . Hots, koordenatu zilindriko edo polarretan, eremu eskalarren portaera infinituan aztertzea honetara murrizten da: koordenatuen espazioko (hau da, espazio fisikoa) zirkulu baten eta eremuen espazioko beste baten arteko mapa edo erlazioa egitera.

---

<sup>4</sup>Bira-zenbakia edo eremu eskalarraren zurrumbiloen karga topologikoa, zeinek esaten duen zenbat bider faseak birak ematen dituen.  $n = 0$  bada, ez dago zurrumbiloric. Bira-zenbakia positiboa da erlojuaren norazkoko biretarako eta negatiboa erlojuaren aurkako biretarako. Gure ekuazio eta emaitza oro  $n$ -ren zeinuarekiko independenteak dira. Sinplifikatzeko,  $n > 0$  hautatuko dugu.



# Kapitulua 3

## Abeldar-Higgs eredua

Aurkez dezagun Abeldar-Higgs (AH) eredua, sokak deskribatzeko teoria ohikoena. Eskatuko dugu AH Lagrangear osoa inbariantea izatea fase-transformazioa lokalen menpean. Beste modu batera esanda, AH eredua aipatutako soka globalen Lagrangearraren bertsio lokalaz deskribatzen da.

Fase-transformazio lokalaren eta fase-transformazioa globalaren arteko aldea honakoa da:  $\alpha$  fasea  $x \equiv x^\mu = (t, \vec{x})$  espazio-denborako puntuen menpekota da kasu lokalerako,  $\alpha \equiv \alpha(x)$ . Beraz,  $\partial_\mu \alpha(x) \neq 0$  eta, praktikan, gauge transformazio lokalekiko inbariantza eskatzea AH sokak deskribatzen dituen dentsitate Lagrangearra  $U(1)_L$  gauge transformazioekiko aldaezina izatea da.

$$\phi(x) \xrightarrow{U(1)_L} \phi(x) e^{i e \alpha(x)} \text{ (local phase trans.)}, \quad A_\mu(x) \xrightarrow{U(1)_L} A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x), \quad \alpha(x), e \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Dentsitate Lagrangear askea (2) transformazio lokalekiko inbariantea ez denez hurrengoa dela kausa,

$$\partial_\mu \phi(x) \xrightarrow{U(1)_L} \partial_\mu \underbrace{(\phi(x) e^{i e \alpha(x)})}_{(6a)} = (\partial_\mu \phi(x)) e^{i e \alpha(x)} + i e (\partial_\mu \alpha(x)) \phi(x) e^{i e \alpha(x)}, \quad (7)$$

(6b) ekuazioko  $\partial_\mu \alpha(x)$  deribatuak, gauge deribatu kobariantearen bitartez,

$$\begin{aligned} D_\mu(x) \phi(x) &= \partial_\mu \phi(x) - i e A_\mu(x) \phi(x) \xrightarrow{U(1)_L} \\ &\underbrace{e^{i e \alpha(x)} \partial_\mu \phi(x) + e^{i e \alpha(x)} i e (\partial_\mu \alpha(x)) \phi(x)}_{(7)} - i e \underbrace{(A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x))}_{(6b)} \underbrace{\phi(x) e^{i e \alpha(x)}}_{(6a)} \\ &= e^{i e \alpha(x)} D_\mu(x) \phi(x) \end{aligned} \quad (8)$$

(7) extra terminoa konpentsatzen du. Hau da, (2) ekuazioko  $\partial_\mu$  deribatu partzialak  $D_\mu(x)$   $U(1)_L$ -deribatu kobarianteengatik ordezkatu behar dira.

Hots,  $A_\mu(x)$  sinboloaz adierazitako eremu berri bat gehitzera behartuta gaude,  $D_\mu(x)$ -rekin modu partikularrean aldatuko dena,  $\phi(x)$ -ren fase-transformazio lokalarekin koordinazioan,  $\partial_\mu \alpha(x)$  extra terminoa ezabatzeko. Eremu berri hau,  $A^\mu(x) \in \mathbb{R}$ ,  $U(1)_L$  gauge eremu bektoriala da.

AH dentsitate Lagrangearrean  $A_\mu(x)$  eremu berriari dagokion termino zinetikoa agertu behar da. Beraz, Maxwell-en terminoa gehituko dugu dentsitate Lagrangearrean:  $\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$ , non  $F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$  eremu-elektromagnetikoaren indar tentsorea den.  $F^{\mu\nu}(x)$  inbariantea da (6b) transformazioaren menpean,

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}(x) &= \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \xrightarrow{U(1)_L} \\ &\underbrace{\partial^\mu (A^\nu(x) + \partial^\nu \alpha(x))}_{(6b)} - \underbrace{\partial^\nu (A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x))}_{(6b)} = F^{\mu\nu}(x), \end{aligned} \quad (9)$$

jarraituki diferentziagarriak diren eremuen deribatu partzialak kommutagarriak direlako,  $[\partial^\mu, \partial^\nu]\alpha(x) = 0$ . Aitzitik,  $A^\mu(x) A_\mu(x)$  ez da inbariantea (6b) transformazioarekiko. Hortaz, gauge inbariantza lokala ez galtzeko, Lagrangearrak ez dakar, esplizituki, masa termino bat –hau da, bere buruarekiko interakzionatzen duen termino koadratikoa, deribaturik ez duena–  $A^\mu(x)$  eremuarentzako. Beste era batera adierazita,  $U(1)_L$  gauge simetria lokalak exijitzen du  $A^\mu(x)$  eremuari dagokion fotoia masa gabekoa izatea,  $m_A = 0$  [8, p. 359, l. 25-27]. Dena den,  $U(1)$  simetritatik 1 simetriarako simetria haustura espontaneoaren ondoren –ikus B. apendizea–, bektore eremuaren masak balio ez nulua hartuko du Higgs mekanismoa dela medio.

Laburtuz, lehenbizi, eskatzen dugu (2) Lagrangearra inbariantea izatea  $\phi(x)$ -ren fase-transformazio lokalen menpean. Gero, (7) ekuazioko bigarren terminoa konpentsatzeko,  $A^\mu(x)$  gauge eremu bektoriala aurkeztu dugu, zein (6b) arauaren arabera aldatzen den, eta  $(\partial_\mu)$  deribatu partzial bakoitza  $D_\mu(x)$   $U(1)_L$ -ren deribatu kobarianteaz ordezkatu dugu.

Honek, AH teoria eman digu, honako dentsitate Lagrangearrak deskribatua:

$$\mathcal{L}_{\text{AH}}(A_\mu(x), \phi(x); \lambda) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} (D_\mu(x) \phi(x))^* D^\mu(x) \phi(x) + \mathcal{V}(|\phi(x)|), \quad (10)$$

non  $x \in \mathbb{R}^{3+1}$ .  $\phi(x) \in \mathbb{C}$  balio konplexuko eremu eskalarra da, elektrikoki kargatua ( $e > 0$ ). Higgs eremu izenaz ezagutzen da eta minimoki lotuta dago bai  $A^\mu(x)$  eremu elektromagnetikoari,  $D_\mu(x) \equiv \partial_\mu - ieA_\mu(x)$   $U(1)$ -ren gauge deribatu kobariantearen bitartez, baita bere buruari ere, (3) ekuazioan definitutako  $\mathcal{V}(|\phi(x)|)$  energia-potentzial dentsitatea dela medioa.  $\eta \equiv 1$  egingo dugu, teoriaren ezaugarri garrantzitsurik galdu gabe, kalkuluak sinplifikatzeko. Honakoa egin daiteke  $\eta$  dentsitate Lagrangearraren faktore komun moduan atera daitekeelako, berreskalatze egokiaz,

$$\phi(x) \rightarrow \eta\phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow \eta A_\mu(x), \quad x \rightarrow \frac{x}{\eta}. \quad (11)$$

(10) Lagrangea dentsitatearekin erlazionatutako higidura-ekuazioak –ikusi A.3.2 Apendizea– honako hauek dira:

$$(98)^* \quad \leftrightarrow \quad (D_\mu(x) D^\mu(x) \phi(x)) - \lambda(|\phi(x)|^2 - 1)\phi(x) = 0, \quad (12)$$

$$(99) \quad \leftrightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \frac{ie}{2} \left( \phi^*(x) D^\nu(x) \phi(x) - \phi(x) (D^\nu(x) \phi(x))^* \right); \quad (13)$$

eta energia totala: [5, p. 92, Eq. (2.1.13)]

$$E = \int d^3x \mathcal{H} \stackrel{(95)}{=} \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} |D_0(x) \phi(x)|^2 + \frac{1}{2} |D_i(x) \phi(x)|^2 + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + \mathcal{V}(|\phi(x)|) \right\}, \quad (14)$$

non eremu elektrikoa eta magnetikoa, hurrenez hurren, honako hauek diren:  $E_i = F_{0i}$  eta  $B^k = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{ij}$ .

### 3.1 Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO) zurrumbilok

Abeldar-Higgs ereduarentzako soluzio bat Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO) soka da,  $d = (3 + 1)$  dimentsiotan z ardatzean zehar hedatzen den soka infinituki luze eta axialki simetrikoa. Kotsidera dezagun, sokaren erdigunean jatorria ( $r = 0$ ) duten  $x^\mu = (t, r, \theta, z)$  koordenatu zilindrikoetan, Ansatz estatiko eta erradiala,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \arctan(y/x)$  eta  $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, r^2, 1)$  metrika tentsorea dituen,

$$A_t = A_r = A_z = 0, \quad A_\theta = \frac{1}{e} (n - P(r)), \quad \phi(r, \theta) = f(r) e^{in\theta}. \quad (15)$$

$P(r), f(r) \in \mathbb{R}$ , eta  $r \in [0, \infty)$   $\{\theta \in [0, 2\pi)\}$  koordenatu erradiala  $\{\text{angeluarra}\}$  da, espazio fisikoko  $(x, y)$  planoan.  $n \in \mathbb{Z}$  Higgs eremuaren bira-zenbakia da.

(15) Ansatzaren aukeraketa dentsitate Lagrangearraren  $U(1)_L$ -rekiko aldaezintasunaren ondorio da. Esaterako,  $A_0 = C_1 \neq 0$ -tik has gitezke eta, gero,  $\mathcal{L}_{\text{AH}}$ -ren (6b) ekuazioarekiko inbariantza erabili (15) ekuazioko  $A_0 = 0$ -ra iristeko,

$$A_0 = C_1 \xrightarrow{U(1)_L} A_0 + \partial_0 \alpha(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \partial_0 \alpha(x) = -A_0 = -C_1. \quad (16)$$

Hala ere, soluzioak estatikoak direnez, teoriaren dentsitate Lagrangearra aldaezin mantentzen duen simetria ere denborarekiko independentea izan behar du. Hortaz, (6) gauge transformazio lokaletan ageri den  $\alpha(x)$  fase lokala denborarekiko independentea izan behar du,  $\partial_t \alpha(x) = 0$ . Orduan,  $A_\mu(x)$  eremu bektorialari aplikatzen zaion gauge simetria, (6b) ekuazioa, honakoa bihurtzen da:

$$A_0(x) \xrightarrow{U(1)_L} A_0(x), \quad \text{and} \quad A_i(x) \xrightarrow{U(1)_L} A_i(x) + \partial_i \alpha(x). \quad (17)$$

Kontura bedi,  $A_t(x) = 0$  denez, ANO zurrumbilok, (15) ekuazioa, soluzio elektrikoki neutroak direla,

$$E_i(x) = \boxed{F_{i0}(x) = 0} = \left( \partial_i A_0(x) - \partial_0 A_i(x) \right) \stackrel{(15)}{=} 0 - \frac{\partial_0}{e} (n - P(r)) = 0. \quad (18)$$

Hala eta guztiz ere, teorian  $A_\mu(x)$  eremu elektromagnetikoa sartu izanaren ondorioz, ANO zurrumbilok badute  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  eremu magnetikoa euren nukleoan. Honen osagai ez nulu bakarra  $z$  norabideari dagokiona da,  $A_t(x) = A_z(x) = 0$  delako eta beste eremu guztiak  $t$  eta  $z$ -rekiko independenteak direlako:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{z} \\ &\stackrel{(15)}{=} \frac{1}{r} \left( \frac{d(r A_\theta(r))}{dr} \right) \hat{z} = \frac{n - (r P(r))'}{er} \hat{z}. \end{aligned} \quad (19)$$

Horrelako konfigurazioaren luzera unitateko soka-energia edo energia-dentsitatea (estatikoa eta z norabidearekiko independentea) honako hau da:

$$\frac{E}{l} = \int d^2x \mathcal{H} \stackrel{(14)}{=} \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} |D_i(x) \phi(x)|^2 + \frac{1}{2} B^2 + \mathcal{V}(|\phi(x)|) \right\}. \quad (20)$$

$OXY$  planoan zeharreko fluxu magnetikoa kuantizatuta dago ( $2\pi/e$ -ren unitatetan):

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \int_{\mathbb{R}^2} d^2x B = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \stackrel{(1)}{=} \oint_{\mathcal{C}=S_\infty^1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \stackrel{(15)}{=} \int_0^{2\pi} A_\theta(r) d\theta \stackrel{(2)}{=} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e} \partial_\theta \chi(\theta) d\theta \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{2\pi n}{e}. \end{aligned} \quad (21)$$

(21(1)) ekuazioan, Stokes-en teorema,  $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , erabili dugu, non integrala,  $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ ,  $S^1$  zirkuluaren edo  $\mathcal{C}$  ingeradaren inguruan burutu den, infinitu espazialean ( $r \rightarrow \infty$ ),  $S_\infty^1$ . (27) ekuaziotik, honakoa lortu dugu:  $\phi(r \rightarrow \infty) \stackrel{(15c)}{=} e^{i\chi(\theta)}$  eta  $D_\theta(x)\phi(x) = (i(\partial_\theta \chi(\theta)) - ieA_\theta(r))e^{i\chi(\theta)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ . Beraz, (21(2)) urratsean egin dugun moduan,  $eA_\theta(r) = \partial_\theta \chi(\theta)$ . Halaber,  $\phi(x)$  eremu eskalarra balio bakarrekia izan behar denez, (15c) ekuazioaren esponentzialetik,  $\chi(k+2\pi) - \chi(k) = 2\pi n$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  bira-zenbakirako, (21(3)) ekuazioan  $k=0$ -rako egin dugun gisara.

Aurkez dezagun hurrengo aldagai aldaketa eta akoplamenduak, hurrenez hurren,

$$x = \sqrt{2\lambda}r, \quad \beta \equiv 2\alpha^2 \equiv \frac{m_s^2}{m_v^2} = \frac{2\lambda}{e^2}, \quad (22)$$

non  $\beta \geq 0$  Higgs eremuaren edo eremu eskalarraren  $\lambda$  autoakoplamendu konstantea den  $e^2/2$ -ren unitatetan, eta,  $U(1)_L$ -etik 1-erako simetria haustura espontaneoaren ostean,  $\phi(x)$  Higgs eremuaren masaren,  $m_s$ , eta  $A^\mu(x)$  gauge eremu edo eremu bektorialaren masaren,  $m_v$ , zatiketaren karratua neurtzen duen parametroa da hau.  $\beta$  parametroak –ikus 3 irudia– I. motako ( $\beta < 1$ ) eta II. motako ( $\beta > 1$ ) supereroaleak bereizten ditu.

Gogoratu, AH ereduan,  $e$  elektroiaren kargak eskalar-gauge akoplamendu-konstantearen moduan jarduten du. Bestalde,  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  eremu eskalarraren autoakoplamendu konstantea da. Biak elkartuak izan dira, (22b) ekuazioan, akoplamendu konstante bakarrean,  $\beta$ . Zehazki,  $\beta$  parametroaren jatorria AH eredua da, ez ANO Ansatz-a, (15).

(15) Ansatz-a ordezkatzuz (12-13) eremu-ekuazioetan honako ekuazio diferentzial arrunt akoplatuen sistema (koordinatu berreskalatuetan, ikus (22) ekuazioa) lortzen da:

$$P''(x) = \frac{P'(x)}{x} + \frac{P(x)f^2(x)}{\alpha^2}, \quad (23)$$

$$\frac{f'(x)}{x} + f''(x) - \frac{P^2(x)f(x)}{x^2} - \frac{1}{2}(f^2(x) - 1^2)f(x) = 0, \quad (24)$$

non prima (')  $x$  koordenatuarekiko deribatua adierazteko erabiltzen den. Ereku-ekuazio hauek mugalde baldintzak behar dituzte.

$f$  eta  $P$  funtzioen erregulartasuna ziurtatzeko  $x = 0$ -n,

$$A^\theta(x)|_{r=0} = g^{\theta\theta} A_\theta(x)|_{r=0} \stackrel{(15b)}{=} \frac{1}{r^2 e} (n - P(r)) \Big|_{r=0} \neq \infty \quad \leftrightarrow \quad \boxed{P(0) = n}, \quad (25)$$

zeinek, (24) ekuazioko hirugarren terminoarekin konbinatuta,  $f(r = 0) = 0$  lortzera garamatzen,

$$(24)|_{x=0} \neq \infty \quad \leftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{x}, \frac{P^2(x)f(x)}{x^2} = 0 \quad \stackrel{(25)}{\longleftrightarrow} \quad \boxed{f(0) = 0}. \quad (26)$$

Azkenekoa ondoriozta daiteke, halaber, (15c) definiziotik,  $\phi(r = 0, \theta) = f(r = 0)e^{in\theta}$  ziurgabe ez egiteko,  $\theta$  koordenatua, angelu bat izanda,  $r = 0$ -n ez dagoelako definituta.

Nielsen-Olesen soken ekuazio diferentzialak, (23-24), , akoplatuta daudel eta ez dira linealak. Bi parametroen menpekoak dira:  $(\beta, n)$ .  $n$  bira-zenbakiak ANO Ansatz-ean, (15), dauka jatorria, eta ekuazioen sisteman mugalde baldintzen bitartez sartzen da -ikusi (25) ekuazioa-.

Mugade baldintza gehiago lor daitezke sokaren energia-dentsitatea, (20, finitua izan dadadila exijituz,

$$D_i(x)\phi(x), |\phi(x)|^2 - 1, F_{ij}(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (27)$$

zeinek esan nahi duen, zentrotik distantzia handietara, planoan,  $r \rightarrow \infty$ , sokaren konfigurazioak potentzial eskalarra minimizatzen duela,  $\mathcal{V}(|\phi(x)|)|_{r \rightarrow \infty} = 0$ , eta  $A_\mu(x)$  eremuak  $D_i(x)\phi(x)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  eta  $F_{ij}(x)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  egiten ditu:

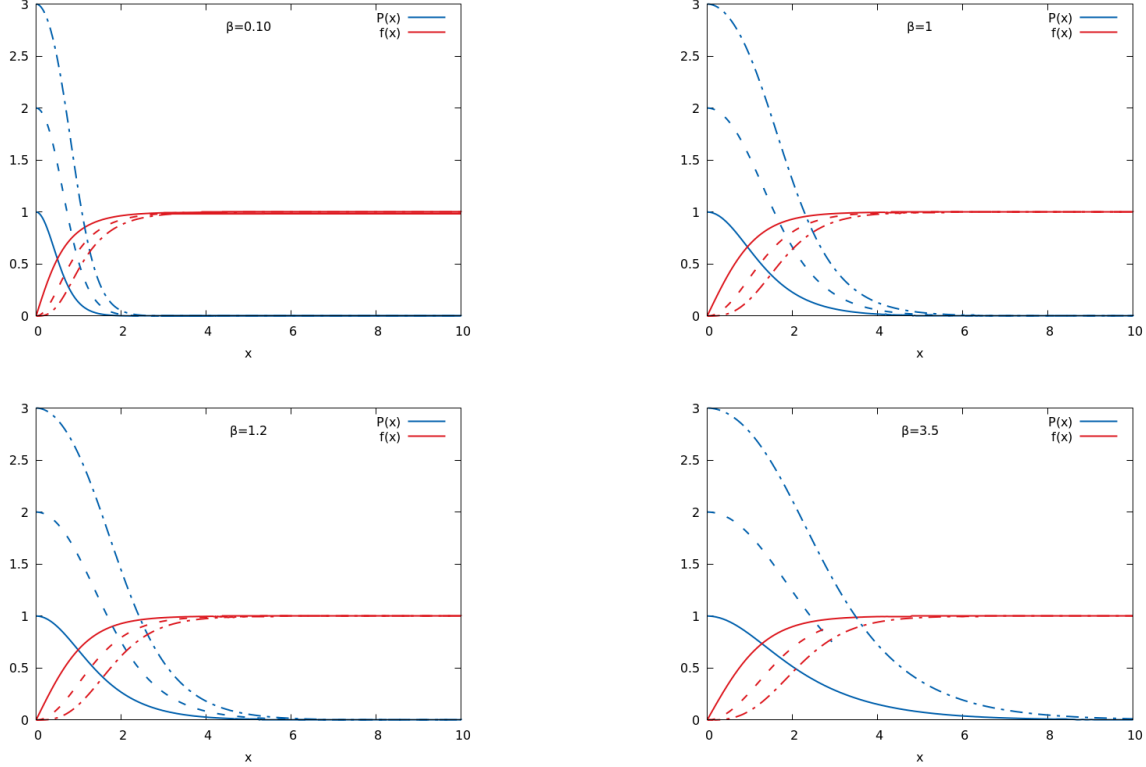
$$\diamond \quad \mathcal{V}(|\phi(x)|)|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad \leftrightarrow \quad |\phi(r \rightarrow \infty)| = 1 \stackrel{(15c)}{=} \left| f(r \rightarrow \infty) e^{in\theta} \right| = \boxed{f(r \rightarrow \infty) = 1}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \diamond \quad D_\mu(x)\phi(x)|_{r \rightarrow \infty} = 0 & \stackrel{(15)}{\longleftrightarrow} \left( \partial_\theta - i e \frac{n - P(r \rightarrow \infty)}{e} \right) f(r \rightarrow \infty) e^{in\theta} \\ & \stackrel{(28)}{=} \left( in - i(n - P(r \rightarrow \infty)) \right) 1 e^{in\theta} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \boxed{P(r \rightarrow \infty) = 0}. \end{aligned} \quad (29)$$

(28) mugalde baldintzak adierazten du Higgs eremua,  $\phi(x)$ , bere oinarritzko egoerako batz besteko baliora jotzen duela,  $|\phi(x)| = 1 \in \mathcal{M}$ .

Laburtzeko, (23-24) ekuazioetarako mugalde baldintzak hauek dira:  $P(r = 0) = n$ ,  $f(r = 0) = 0$ ,  $P(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  eta  $f(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1$ . Mugalde baldintza hauen arteko balioak zenbakizko metodoen bitartez kalkulatu behar dira, xehetasun handiagoz azalduko dugun gisara, aurrerago.

$f(x)$  eta  $P(x)$  funtzioen nukleoaren zabalera handitu egiten da  $\beta$ -rekiko proportzionalki. Haatik,  $P(x)$  gauge eremuaren nukleoa  $f(x)$  eremu eskalarrarena baino azkarrago handitzen da. Hau koherentea da honakoarekin:  $\beta$  areagotzeak eragiten du soken arteko aldarapena handitzea, eremu magnetikoaren lerroen irismena handiagoa delako.



Irudia 2:  $f(x)$  eremu eskalarraren eta  $P(x)$  gauge eremuaren profilak, soken zentrotik neurtutako distantziaren funtzioan ( $1/\sqrt{2\lambda}$ -ren unitatetan),  $x = \sqrt{2\lambda}r$ ,  $n = 1, 2, 3$ -rako –hurrenez hurren, lerro jarraitua, gidoi-lerroa eta gidoiz eta puntuz osatutako lerroa– eta  $\beta$ -ren zenbait balioetarako:  $\beta = 0.1, 1.00, 1.2, 3.5$ .

## 3.2 Egonkortasuna

Bogomol'nyi-ren artikuluan lehendabiziko aldiz azaldu zen gisara, higidura-ekuazioaren soluzioak egonkorrak dira baldin eta energiak behe-muga bat badu eta soka-energia minimoko konfigurazioaren energia behe-muga honen baliokoa bada. Hemen, egonkortasun terminoak  $n > 1$  bira-zenbakiko soka zuzenek bat balioko bira-zenbakiko  $n$  soketan<sup>5</sup> banatzeko joera ez izateari egiten dio erreferentzia.

Ikusiko dugun legez, behe-muga hau  $n$  bira-zenbakiaren multiplo bat da,  $E = kn$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Gainera, Bogomol'nyi energia mugaren balioa (22) ekuazioko  $\beta$  akoplamendu-konstantearen balio kritikoari,  $\beta = 1$ , dagokio, zeinek banatzen dituen I. motako eta II. motako supereroaleen erregimenak.  $\beta = 1$ -erako, frogatuko dugun moduan, eremu-ekuazioak bigarren mailako ekuazio diferentzial

<sup>5</sup>Bira-zenbaki negatiboko sokak  $n = -1$  bira-zenbakiko  $|n|$  soketan bana daitezke.

arruntetatik lehen mailakoetara sinplifika daitezke. Azkeneko ekuazio hauek Bogomol'nyi ekuazio izenaz dira ezagunak. [6, p. 7, l. 10-15]

Lehenik eta behin, ohartu (15) Ansatzaren izaera estatikoa eta axialki simetrikoagatik, hurrenez hurren,

$$\begin{aligned} D_0(x) \phi(x) &\stackrel{(15)}{=} (\partial_t - 0) f(r) e^{in\theta} = 0, \quad \text{and} \\ D_3(x) \phi(x) &\stackrel{(15)}{=} (\partial_z - 0) f(r) e^{in\theta} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Hortaz, hurrengo identitate erabilgarria lor daiteke, non koloreek adierazten duten ezaba daitezkeen terminoak, baina ekuazioan sartu behar direnak amaierako emaitza lortzeko,

$$\begin{aligned} |D_\mu(x) \phi(x)|^2 &\stackrel{(30)}{=} |D_1(x) \phi(x)|^2 + |D_2(x) \phi(x)|^2 \\ &= \left( D_1(x) \phi(x) (D_1(x) \phi(x))^* - i D_1(x) \phi(x) (D_2(x) \phi(x))^* + i D_2(x) \phi(x) (D_1(x) \phi(x))^* \right. \\ &\quad \left. + D_2(x) \phi(x) (D_2(x) \phi(x))^* \right) - i (D_1(x) \phi(x))^* D_2(x) \phi(x) + i (D_2(x) \phi(x))^* D_1(x) \phi(x) \\ &= |(D_1(x) + i D_2(x)) \phi(x)|^2 - i \left( (D_1(x) \phi(x))^* D_2(x) \phi(x) - (D_2(x) \phi(x))^* D_1(x) \phi(x) \right) \\ &= |(D_1(x) + i D_2(x)) \phi(x)|^2 - i \left( \underbrace{-\phi^*(x) \partial_1 (D_2(x) \phi(x)) + i e \phi^*(x) A_1(x) D_2(x) \phi(x)}_{-\phi^*(x) D_1(x) D_2(x) \phi(x)} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\phi^*(x) \partial_2 (D_1(x) \phi(x)) - i e \phi^*(x) A_2(x) D_1(x) \phi(x)}_{\phi^*(x) D_2(x) D_1(x) \phi(x)} + (\partial_1 \phi^*(x)) D_2(x) \phi(x) \right. \\ &\quad \left. + \phi^*(x) \partial_1 (D_2(x) \phi(x)) - (\partial_2 \phi^*(x)) D_1(x) \phi(x) - \phi^*(x) \partial_2 (D_1(x) \phi(x)) \right) \\ &= |(D_1(x) + i D_2(x)) \phi(x)|^2 + i \phi^*(x) [D_1(x), D_2(x)] \phi(x) \\ &\quad - i \left( \partial_1 (\phi^*(x) D_2(x) \phi(x)) - \partial_2 (\phi^*(x) D_1(x) \phi(x)) \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} |(D_1(x) + i D_2(x)) \phi(x)|^2 + \underbrace{\phi^*(x) i (-i B) \phi(x)}_{B |\phi(x)|^2} + \epsilon^{ijk} \partial_i J_j, \end{aligned} \quad (31)$$

non (31(1)) urratsean honakoa erabili dugun:

$$\begin{aligned} [D_1(x), D_2(x)] \phi(x) &= \underbrace{(\partial_1 - i e A_1(x))}_{D_1(x)} \underbrace{(\partial_2 - i e A_2(x))}_{D_2(x)} \phi(x) - \underbrace{(\partial_2 - i e A_2(x))}_{D_2(x)} \underbrace{(\partial_1 - i e A_1(x))}_{D_1(x)} \phi(x) \\ &= i \left( - \underbrace{\partial_1 A_2(x)}_{\partial_1 A_2(x) - \cancel{A_2(x) \partial_1}} - \underbrace{\cancel{A_1(x) \partial_2}}_{\partial_2 A_1(x) + \cancel{A_1(x) \partial_2}} + \underbrace{\partial_2 A_1(x)}_{\partial_2 A_1(x) + \cancel{A_1(x) \partial_2}} + \underbrace{\cancel{A_2(x) \partial_1}}_{\partial_2 A_1(x) + \cancel{A_1(x) \partial_2}} \right) \phi(x) \\ &= -i \left( \underbrace{1}_{\epsilon^{120}} \partial_1 A_2(x) - \underbrace{\partial_2 A_1(x)}_{\epsilon^{210}} \right) \phi(x) = -i (\epsilon^{ij0} \partial_i A_j) \phi(x) \stackrel{(90)}{=} -i B \phi(x), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{eta } J_i = -i\phi^*(x) D_i(x) \phi(x). \quad (33)$$

Ondorioz, (20) energia dentsitatea honela berridatz dezakegu:

$$\begin{aligned} \frac{E}{l} &= \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \mathcal{H} \stackrel{(31)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left\{ \frac{1}{2} (|(D_1(x) + iD_2(x)) \phi(x)|^2 + B|\phi(x)|^2 + \epsilon^{ijk} \partial_i J_j) \right. \\ &+ \frac{1}{2} B^2 + \mathcal{V}(|\phi(x)|) \left. \right\} \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left\{ \frac{1}{2} |(D_1(x) + iD_2(x)) \phi(x)|^2 \right. \\ &+ \frac{B}{2} |\phi(x)|^2 + \frac{B^2}{2} + \frac{e^2 \beta}{8} (|\phi(x)|^2 - 1)^2 \left. \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

non, (34(1)) pausuan honako ordezkapena egin dugun:  $\mathcal{V}(|\phi(x)|) \stackrel{(10)}{=} \frac{\lambda}{4} (|\phi(x)|^2 - 1)^2$ ,  $\lambda \stackrel{(22b)}{=} e^2 \beta / 2$ , eta

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2x \epsilon^{ijk} \partial_i J_j \stackrel{(1)}{=} \oint_{r \rightarrow \infty} d\vec{x} \cdot \vec{J} \stackrel{(15,33)}{=} \oint dx^\theta (-i\phi^*(r) D_\theta \phi(r))_{r \rightarrow \infty} \stackrel{(29)}{=} 0. \quad (35)$$

(35(1)) urratsean Stokes-en teorema erabili dugu.  $\vec{J}$  korrante bektorearen lerro integrala nulua da  $U(1)_L$ -ren deribatu kobarianteen osagai espazialak zero izan behar direlako infinitu espazialean, (29) ekuaziotik, energia finituko konfigurazioak soilik kontsideratzen ari baikara. Erabiliz gero

$$\begin{aligned} \frac{B}{2} |\phi(x)|^2 + \frac{B^2}{2} &= \frac{1}{2} \{ B(|\phi(x)|^2 - 1) + B^2 \} + \frac{B}{2} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ B(|\phi(x)|^2 - 1) + B^2 + \frac{e^2}{4} (|\phi(x)|^2 - 1)^2 \right\}}_{\left\{ B + \frac{e}{2} (|\phi(x)|^2 - 1) \right\}^2} - \frac{e^2}{8} (|\phi(x)|^2 - 1)^2 + \frac{B}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

eta  $\int_{\mathbb{R}^2} d^2x B = 2\pi n$ , (36) ekuazioaren azken terminoarentzako, integratu ostean, honela adieraz dezakegu (34) ekuazioa:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E}{l} &= \pi n + \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left\{ \frac{1}{2} |(D_1(x) + iD_2(x)) \phi(x)|^2 \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left( B + \frac{e}{2} (|\phi(x)|^2 - 1) \right)^2 + \frac{e^2}{8} (\beta - 1) (|\phi(x)|^2 - 1)^2 \left. \right\}. \end{aligned}} \quad (37)$$

Hortaz, batugai denak, azkenekoa izan ezik, positiboak direnez,

$$\frac{E}{l} \geq \pi n \quad \leftrightarrow \quad (\beta - 1) \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad \beta \geq 1. \quad (38)$$

Hau da, luzera unitateko soka-energia behetik mugatuta dago.



Ondorioz,  $\beta = 1$  denean, kontsideratzen ari garen konfigurazioa (38) ekuazioko Bogomol'ny mugaren berdina denez,  $E/l = n\pi$ , sokak egonkorak dira edozein  $n$  bira-zenbakirako. Kasu horretan, 3 irudian ikus daitekeenez,  $n = 1$  bira-zenbakiko  $n$  sokek edo  $n$  bira-zenbakiko soka bakarrek energia balio berdina dute, eta, beraz, egonkorak dira. Hertsiki, bira-zenbaki txikiagoko soketan banatzeak ez dio energiari eskatzen  $n > 1$ -eko sokari, baina sokak egonkortzat jotzen dira kasu honetan.

Baldin eta  $\beta > 1$ , (38) ekuaziotik, energia mugatuta dago behetik,  $E/l > n\pi$ . Hala ere,  $\beta > 1$  bada, ez da existitzen soluzio estatiko bat zeinetarako  $E/l > n\pi$ , zeren eta, (37) ekuaziotik,  $B + \frac{e}{2}(|\phi(x)|^2 - 1) = 0$  eta  $|\phi(x)|^2 - 1 = 0$  eskatzeak  $B = 0$  dakarren, posible ez dena, fluxu magnetikoaren kontserbaziotik. Honek ondorioak ditu soken egonkortasunean:  $\beta > 1$  denean, zurrumbiloak banatzen dira. Zehazki,  $n > 1$  bira-zenbakiko zurrumbiloak elkar aldaratzen duten  $n$  zurrumbilotan banatzen dira, eta bakoitzak fluxu magnetikoaren unitatea dakar ( $\Phi_B = 2\pi n/e$ ,  $n = 1$ ).  $n = 1$  bira-zenbakidun sokak egonkorak dira ezin direlako ezer txikiagoan banatu, euren energia Bogomol'ny muga baino handiagoa izanda ere.

Arestian aipatu dugun gisara,  $\beta = 1 = \frac{m_s^2}{m_v^2}$  balio kritikorako, non, (22b) ekuaziotik,  $m_s = m_v$ , luzera unitateko energia behe-mugaren berdina da,  $E/l|_{\beta=1} = \pi n$ . (34) ekuaziotik, hau betetzen da baldin eta soilik baldin

- $$\begin{aligned}
 & |(D_1(x) + iD_2(x))\phi(x)|^2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad (D^1(x) + iD^\theta(x))\phi(x) = 0 \\
 & = \left(g^{11}(\partial_1 - ieA_1(x)) + ig^{22}(\partial_2 - ieA_2(x))\right)\phi(x) = 0 \\
 & \stackrel{(15)}{=} \left((f'(r) - 0) + \frac{i}{r}(in - i(n - P(r)))f(r)\right)e^{in\theta} = 0 = f'(r) - \frac{P(r)f(r)}{r}, \\
 & \stackrel{(22a)}{=} \boxed{f'(x) - \frac{P(x)f(x)}{x}}, \quad \text{and}
 \end{aligned} \tag{39}$$

- $$\begin{aligned}
 & B + \frac{e}{2}(|\phi(x)|^2 - 1) = 0 \quad \stackrel{(1)}{\longleftrightarrow} \quad P'(r) + \frac{e^2}{2}r(f^2(r) - 1) = 0 \quad \stackrel{(22a)}{\longleftrightarrow} \\
 & \boxed{P'(x) + \frac{x}{2}(f^2(x) - 1) = 0},
 \end{aligned} \tag{40}$$

non (40(1)) pausuan honakoa erabili dugun:

$$B \stackrel{(90)}{=} \epsilon^{ij0}\partial_i A_j \stackrel{(15)}{=} \epsilon^{120}\partial_1 A_2 + \cancel{\epsilon^{220}\partial_2 A_2} + \epsilon^{320}\partial_3 A_2 \stackrel{0}{=} \frac{\text{sign}(g)}{e\sqrt{g}}\partial_1(n - P(r)) = -\frac{(-P'(r))}{er}. \tag{41}$$

Beraz,  $\beta = 1$  limitean, Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) limite bezala ezagutua, higidura ekuazioak, (23-24), lehen mailako ekuazioetara, (39-40), sinplifika daitezke, zeini Bogomol'nyi ekuazio deritzen.

Konproba dezagun bigarren ordenako higidura-ekuazioak lor daitezkeela, (23-24),  $\beta = 1$  kasurako, soilik BPS ekuazioa, (39-40), erabilia:

- $(39)' = \left( f'(x) - \frac{P(x)f(x)}{x} = 0 \right)' = f''(x) + \left( \frac{P(x)f(x)}{x^2} - \frac{P'(x)f(x)}{x} - \frac{P(x)f'(x)}{x} \right) = 0$   
 $= f''(x) + \underbrace{\left( \frac{f'(x)x}{f(x)} \right)}_{(39)} \frac{f(x)}{x^2} - \underbrace{\left( -\frac{1}{2}x(f^2(x) - 1) \right)}_{(40)} \frac{f(x)}{x} - \frac{P(x)}{x} \underbrace{\left( \frac{P(x)f(x)}{x} \right)}_{(39)}$  (42)

$$= f''(x) + \frac{f'(x)}{x} + \frac{f(x)}{2}(f^2(x) - 1) - \frac{P^2(x)f(x)}{x^2} = 0 = (24) \quad \text{QED}, \quad (43)$$

- $(40)' = P''(x) + \frac{1}{2}(f^2(x) - 1) + xf(x)f'(x) = 0$  (44)

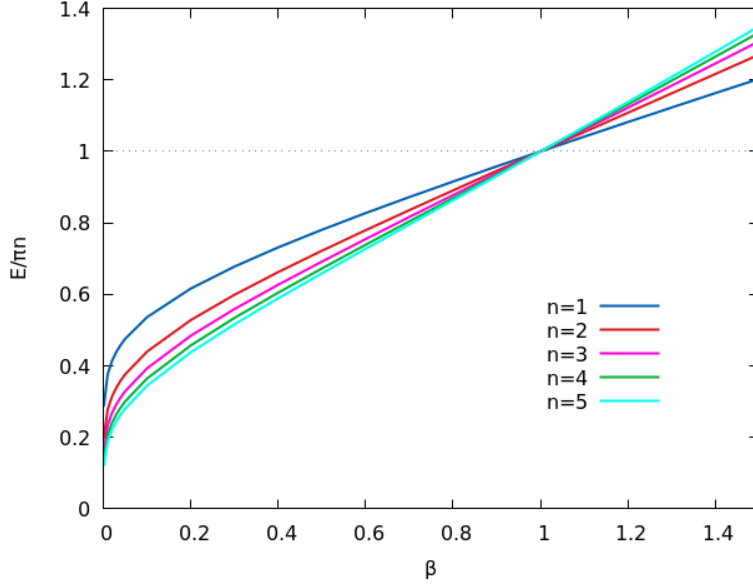
$$= P''(x) + \underbrace{\left( -\frac{P'(x)}{x} \right)}_{(40)} + xf(x) \underbrace{\left( \frac{P(x)f(x)}{x} \right)}_{(39)} \quad (45)$$

$$= P''(x) - \frac{P'(x)}{x} + f^2(x)P(x) = 0 = (23) \quad \text{QED}. \quad (46)$$

5. sekzioan, numerikoki aztertuko dugu AHCS zurrumbiloez egoera-lotuak eratu ahal dituzten edo ez. Egoera-lotuak elkar erakartzen duten bi soke osatuta daude eta  $n > 1$ -eko soluzioen (“egoera-kitzikatuak” ere deituak) bitartez aztertu ohi dira. Bira-zenbakiko soka-energia,  $E/n$ ,  $n = 1$  bira-zenbakidun soken energiarekin alderatuta,  $n$  zurrumbiloez egoera-lotuak osatuko dituzten ( $E/n < E(n = 1)$  kasurako) ala ez ( $E/n > E(n = 1)$  kasurako) indikatzen du.

Aipatu dugun modura, soka zuzen infinituetarako, konfigurazio egonkorrena, energia minimoko konfigurazioa, egon daiteke osatuta  $n$  bira-zenbakiko soka bakarraz  $-n > 1$  izanda, betiere-, ala  $n = 1$  bira-zenbakiko soka bakarraz. Emaizta, 3 irudian ikus daitekeenez, teoriaren parametro askeen,  $(\beta, n)$ , menpekota da. Bi motatako indarrak bereiz daitezke:  $\phi(x)$  eremu eskalarrak sokak bata bestearen gainera jartzera jotzen du minimoen kopurua eta, hortaz, energia-potentziala minimizatzeke; bestalde,  $A_\mu(x)$  gauge eremu bektorialarekin erlazionatutako eremu magnetikoaren lerroek hedatzeko joera dute, indar aldaratzailea eraginez. Masa txikiaren eremua –i.e., irismen luzearen indarra– nagusituko da.

Ondorioz, gauge masa masa eskalarra baino handiagoa denean,  $m_v > m_s$  ( $\beta = m_s^2/m_v^2 < 1$ ),  $\phi(x)$  eremu eskalara nagusitzen da; beraz, energia txikitzen denez soke bat egiten badute, elkartzeko joera izango dute. Kontrara,  $m_v < m_s$  ( $\beta = m_s^2/m_v^2 > 1$ ) bada,  $A_\mu(x)$  eremu bektoriala nagusitzen da eta, hortaz,  $n > 1$ -eko sokak  $n = 1$ -eko  $n$  soketan banatuko dira. Bi kasu hauek,



Irudia 3:  $n$  bira-zenbakiarekiko soka-energia ( $\pi$ -ren unitatetan),  $E/\pi n$ ,  $\beta$  parametro askearen funtzioan,  $\beta \in [0, 1.5]$  tartearantzako,  $n$ -ren zenbait baliotarako:  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , Abeldar-Higgs ereduan.  $n > 1$  eta  $\beta < 1$  ( $\beta > 1$ ) kasuan, sokeak elkar erakartzen (aldaratzen) dute, energia gehiago (gutxiago) eskatzen duelako  $n = 1$ -eko  $n$  soka eratzeak,  $E/(n = 1) > (<)E/n$ . Aitzitik,  $\beta = 1$  akoplamendu kritikoan (BPS limitea) energiak balio berdina du edozein  $n$ -rako: zehazki,  $E/\pi n = 1$ . Beraz, zurrumbiloen arteko interakzioak desagertzen dira.

hurrenez hurren, I. motako ( $\beta < 1$ ) eta II. motako ( $\beta > 1$ ) supereroaleei dagozkie. [7, p. 313, l. 11-16]

Hain zuzen ere,  $\beta < 1$ -entzako (I. mota),  $n$  bira-zenbakiarekiko soka-energia txikitu egiten da  $n$ -ren funtzioan (3 irudiaren ezkerreko partea), zeinek esan nahi duen  $n$  sokeak elkar erakarriko dutela energia gutxiagoko egitura batean bateratzeko; i.e., sokak egonkorak dira (beste hitz batzutan, egoera-lotuak osatu ahal dituzte,  $E/n < E(n = 1)$ ) edozein  $n$ -rako  $\beta < 1$  bada. Haatik,  $\beta > 1$  (II. mota) baliorako,  $n$  bira-zenbakiarekiko energia areagotu egiten da  $n$ -rekin (3 irudiaren eskuineko atala). Beraz, sokak elkarrekin egoteak energia gehiago eskatzen die  $n$  sokei, banatuta egotea baino, eta elkar aldaratuko dute; i.e.,  $\beta > 1$ -entzat,  $n > 1$  soka bat ezegonkorra da eta  $n = 1$  karga topologikoko  $n$  soketan banatzeko joera izango du.

Ikus daitekeenez, hortaz, 2. sekzioan aipatu genuen moduan, soken sorrera posiblea da  $\mathcal{M}$  oinarritzko-egoeren barietatea sinpleki lotua ez bada, baina soka egonkorren existentziarako baldintza beharrezkoa, baina ez nahikoa, da. Hau da, ez du ziurtatzen zurrumbilo-soluzio egonkorren existentzia. AH teorian, bira-zenbaki ez nuluko soka orotan  $\mathcal{M}$ -ren barneko puntu bat lortu arteko loop-en kontrakziorik egin ezin daitekeen arren, ikusi dugu ez dagoela soka egonkorrik bat baino handiagoko bira-zenbakirako II. motako ( $\beta > 1$ ) supereroale eskualdean.

### 3.3 Elektrikoki kargatutako zurrumbiloen bilaketa

AH ereduak eremu magnetikodun zurrumbiloak onartzen ditu. Hortaz, honako galdera egin genezake: baimenduta al daude elektrikoki kargatutako AH sokak? Ez, luzera unitateko energia infinitua dakartelako [9, p. 2232, Eq. (C6)]:

$$Q \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{S(\infty)} d\vec{S} \cdot \vec{E} - \int_{S(0)} d\vec{S} \cdot \vec{E}, \quad (47)$$

non  $S(\infty)$  eta  $S(0)$  gainazal zilindrikoak diren,  $r = \infty$  eta  $r = \epsilon$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) puntuetan, hurrenez hurren. Divergentziaren teorema erabili dugu bigarren berdintzan.  $|\vec{E}|(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  dugunez, karga ez nulua da  $|\vec{E}| \sim 1/r$  bada soilik<sup>6</sup>, zeinek esan nahi duen  $|\vec{E}|(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$  dela.

Hala ere, badira elektrikoki kargatutako zurrumbiloak, soka-energia finitukoak,  $(2+1)$  dimentsioko AH ereduan, Chern-Simons (CS) gehituz gero [10] –ikusi 4. sekzioa–.

---

<sup>6</sup>Id est,  $E_i \stackrel{(89)}{=} F_{i0} = \partial_i A_0(r) \sim 1/r \leftrightarrow A_0 \sim \log r$ .

# Kapitulua 4

## Abeldar-Higgs-Chern-Simons model

Aipatu dugun moduan, CS terminoa gehitzeak baimentzen du AH zurrumbiloeak, bestela luzera unitateko energia dibergentea izango luketenak,  $Q$  karga elektrikoa edukitzea. Gure  $U(1)$  gauge teoriarentzat, Chern-Simons dentsitate Lagrangearrak honako forma hartzen du [5, p. 84, Eq. (1.1.3)] [11, p. 9, Eq. (21)]:

$$\mathcal{L}_{\text{CS}}(A_\mu(x); \kappa) = -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\lambda\mu\nu} A_\lambda(x)F_{\mu\nu}(x), \quad (48)$$

non  $\kappa \in \mathbb{R}_+$

Chern-Simons akoplamendu-konstantea den  $-$ gauge eremuaren masa topologiko ere deritzo [10, p. 420, Eq. (1)], eta Chern-Simons dinamikaren indar erlatiboa determinatzen du.  $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$  Levi-Civita tentsorea da,  $(2+1)$  dimentsioko espazio-denboran.

CS dentsitate Lagrangearra, (48), *topologikoa* da, i.e., ez da hondoko espazio-denboraren barietatearen menpekkoa, soilik bere topologiaren menpekkoa da.  $\mathcal{L}_{\text{CS}}$  dauden indizeak  $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$  permutazio tentsorearekin ezabatzen dira, ez  $g_{\mu\nu}$  metrikarekin.

(Abeldar) Chern-Simons eredu sinpleena Abeldar-Higgs-Chern-Simons (AHCS) eredu edo Paul-Khare (PK) eredu da. Abeldar-Higgs eredu ohikoa da, (10), (48) formako Chern-Simons terminoa gehituta,  $(2+1)$  espazio-denborako dimentsiotan definituta,  $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1)$  Minkowski metrikarekin. Eredu honen dentsitate Lagrangearra honela idatz daiteke: [10, p. 420, Eq. (1)] [5, p. 90, Eq. (2.1.1)]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{AHCS}}(A_\mu(x), \phi(x); \lambda, \kappa) &= \mathcal{L}_{\text{AH}}(A_\mu(x), \phi(x); \lambda) + \mathcal{L}_{\text{CS}}(A_\mu(x); \kappa) = (10) + (48) \\ &= \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}(x))^2 + \frac{1}{2} |D_\mu(x) \phi(x)|^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^*(x) \phi(x) - \eta^2)^2 - \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\lambda\mu\nu} A_\lambda(x) F_{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (49)$$

Ohartu Chern-Simons interakzioa onartuta dagoela espazio-denborako dimentsio kopuru bakoitia duten gauge teorietan, baina ez du teoria analogorik dimentsio kopuru bikoitietan. Horregatik, AH ereduari CS terminoa gehitzean, (49) ekuazioan, espazio-denboraren barietatea hiru dimentsio espazialeetatik bira murrizten da,  $(3+1) \rightarrow (2+1)$ .

$\mathcal{L}_{\text{AH}}$ -ko (10) terminoek ez bezala,  $\mathcal{L}_{\text{CS}}$  (48) ez da inbariantea (6) gauge transformazio lokalekiko,

[5, p. 84, Eq. (1.1.4)]

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} \xrightarrow{U(1)_L, (6b), (9)} -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\sigma\mu\nu}(A_\sigma(x) + \partial_\sigma\alpha(x))F_{\mu\nu}(x) \stackrel{(48)}{=} \underbrace{\mathcal{L}_{\text{CS}} - \frac{\kappa}{4}\partial_\sigma\left(\epsilon^{\sigma\mu\nu}\alpha(x)F_{\mu\nu}(x)\right)}_{\delta\mathcal{L}_{\text{CS}}}. \quad (50)$$

Hala ere, CS dentsitate Lagrangearra,  $U(1)$  gauge transformazioen menpean, espazio-denborako deribatu total batean aldatzen da soilik. Beraz, bere higidura-ekuazioak

$$\begin{aligned} & -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\left\{\partial_\mu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} - \frac{\partial}{\partial A_\nu(x)}\right\}\left\{A_\alpha(x)\overbrace{(\partial_\beta A_\gamma(x) - \partial_\gamma A_\beta(x))}^{F_{\beta\gamma}(x)}\right\} = 0 \quad \leftrightarrow \\ & -\frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\left\{\partial_\mu(A_\alpha(x)(\delta_\beta^\mu\delta_\gamma^\nu - \delta_\gamma^\mu\delta_\beta^\nu)) - \delta_\alpha^\nu F_{\beta\gamma}(x)\right\} = 0 \quad \leftrightarrow \\ & -\frac{\kappa}{4}\left\{(\epsilon^{\alpha\mu\nu}\partial_\mu A_\alpha(x) - \epsilon^{\alpha\nu\mu}\partial_\mu A_\alpha(x)) - \epsilon^{\nu\beta\gamma}F_{\beta\gamma}(x)\right\} = 0 \quad \leftrightarrow \\ & -\frac{\kappa}{2}\underbrace{\epsilon^{\alpha\mu\nu}F_{\mu\alpha}(x)}_{\epsilon^{\nu\alpha\mu}(-F_{\alpha\mu}(x))} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\nu\alpha\mu}F_{\alpha\mu}(x) = 0}, \end{aligned} \quad (51)$$

gauge inbariantek dira, (9) ekuazioa begiratuta.

Bestalde, (49) AHCS teoria osoari dagozkion higidura ekuazioak –ikusi A.3.3. apendizeari– honako hauek dira:

$$(12) = (D_\mu(x)D^\mu(x)\phi(x)) - \lambda(|\phi(x)|^2 - 1)\phi(x) = 0, \quad (52)$$

$$(101) \quad \leftrightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\nu\alpha\mu}F_{\alpha\mu}(x) = j^\nu(x) = \frac{ie}{2}\left(\phi^*(x)D^\nu(x)\phi(x) - \phi(x)(D^\nu(x)\phi(x))^*\right); \quad (53)$$

eta energia totala (eredu honetan, gogoratu,  $(2+1)$ d-tan gaude) honakoa da:

$$E = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}|D_i(x)\phi(x)|^2 + \frac{1}{2}(E^2 + B^2) + \mathcal{V}(|\phi(x)|) - \frac{1}{2}e^2 A_0^2(x)|\phi(x)|^2 + \kappa A_0(x)B \right\}, \quad (54)$$

non eremu elektrikoa eta magnetikoa, hurrenez hurren, hauek diren:  $E_i = F_{0i}$  eta  $B^k = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ij}$ . Konturatu honetaz: CS terminoa ez dagoenez eremu eskalarrarekin akoplatuta,  $\phi(x)$  Higgs eremuari dagokion higidura-ekuazioa, (53), AH ereduan dugunaren berdina da.

CS teoriarentzako soluzioak ANO Ansatzaren, (15), ildo beretik bila daitezke. Hemen ere, erradialak eta estatikoak dira, baina  $A_0 = V(r)$  ez nulua dugu eta  $(3+1)$ d-ko koordinatu zilindrikoetatik  $(2+1)$ d koordinatu polarretarako,  $x^\mu = (t, r, \theta)$ , murrizketa gauzatu dugu, non  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  eta  $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, r^2)$  metrika tentsorea ditugun. Aipatu dugun lez,

$A_0 = V(r)$  egin dugu  $Q$  karga elektrikodun zurrumbiloak nahi genituelako, baina AH ereduari CS terminoa gehitu ezean –gogoratu [3.3](#). sekzioa–, energia dentsitate infinitua edukiko genuke, baimenduta ez dagoena. Bestalde,  $(3+1)$ -etik  $(2+1)$ -erako murrizketa CS indize kopuruarekin koherente izateko da. Gure Ansatz berria honakoa da:

$$A_t = V(r), \quad A_r = 0, \quad A_\theta = \frac{1}{e}(n - P(r)), \quad \phi(r, \theta) = f(r)e^{in\theta}, \quad (55)$$

$n \in \mathbb{Z}$  bira-zenbakiarekin, eta  $V(r), P(r), f(r) \in \mathbb{R}$  funtzioekin.

Beraz, konfigurazio estatiko eta erradial baten energia lor dezakegu [\(55\)](#) Ansatz-a [\(54\)](#) ekuazioan ordezkatuz:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \mathcal{H} = 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} dr r \mathcal{H} \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} r dr \left\{ \frac{1}{2}(-ieV(r)f(r))^2 + \frac{1}{2}(f'(r))^2 + \frac{1}{2}\frac{f^2(r)}{r^2}(P(r))^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left((V'(r))^2 + \frac{(-P'(r))^2}{e^2}\right) + \frac{\lambda}{4}(f^2(r) - 1)^2 - \frac{1}{2}e^2V^2(r)f^2(r) + \kappa V(r)\frac{(-P'(r))}{e} \right\} \\ &\stackrel{(55,22)}{=} \pi \int_{\mathbb{R}_+} dx x \left( V'^2(x) + \alpha^2 \frac{P'^2(x)}{x^2} + f'^2(x) + \frac{P^2(x)f^2(x)}{x^2} - \frac{V^2(x)f^2(x)}{\alpha^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(f^2(x) - 1)^2 - 2\gamma \frac{V(x)P'(x)}{x} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

Beranduago erakutsiko dugun gisara, CS terminoa gehituz gero AH dentsitate Lagrangrearrari, higidura-ekuazioek  $A_0 = V(x) \neq 0$  exijitzen dute CS interakzioaren akoplamendu ez nulurako,  $\kappa \neq 0$ . [\(56\)](#) ekuazioan honakoa erabili dugu:

$$B = \frac{1}{2}\epsilon^{ij0}F_{ij} = \frac{1}{2}(\epsilon^{120}F_{12} + \epsilon^{210}F_{21}) = \frac{1}{2}(\epsilon^{120}F_{12} + (-\epsilon^{120})(-F_{12})) = \epsilon^{120}F_{12} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(83)}{=} F_{12} = F_{r\theta} = \partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r \stackrel{(55)}{=} \partial_r \left( \frac{n - P(r)}{e} \right) - 0 = -\frac{P'(r)}{e} = -\frac{1}{e} \frac{dP(x)}{dx} \frac{dx}{dr} \\ &\stackrel{(22a)}{=} -\frac{\sqrt{2\lambda}}{e} \frac{dP(x)}{dx} \stackrel{(22b)}{=} -\sqrt{\beta} P'(x). \end{aligned} \quad (58)$$

Oinarrizko-egoeren egonkortasuna ziurtatzeko, energia totalaren integrakizuna positiboki-definitua izan behar da. Hau beti betetzen da AHCS zurrumbiloetarako. [\(56\)](#) ekuazioan ageri diren funtzio eta parametroak errealak eta positiboak direnez, soilik minus zeinuko terminoak aintzat

hartu behar dira aurreko baieztapena frogatzeko,

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \int_{\mathbb{R}_+} x dx \left[ -2\gamma \frac{V(x)P'(x)}{x} - \frac{V^2(x)f^2(x)}{\alpha^2} \right] \stackrel{(62)}{=} \int_{\mathbb{R}_+} x dx \left[ -\gamma \frac{V(x)P'(x)}{x} - \frac{(xV'(x))'}{x} V(x) \right] \\
&\quad \int_{\mathbb{R}_+} x dx \left[ -\gamma \frac{V(x)P'(x)}{x} \right] - V(x)xV'(x) \Big|_0^\infty + \int_{\mathbb{R}_+} dx x V'^2(x) \\
&\stackrel{(69, 63)}{=} \int_{\mathbb{R}_+} x dx \left[ -\gamma \frac{V(x)P'(x)}{x} + V'^2(x) \right], \tag{59}
\end{aligned}$$

eta, 5 iruditik ondoriozta daitekeenez,  $P(x)$  funtzioa beherakorra da  $\text{dom}(P(x)) = [0, \infty)$  tarterako. Beraz,  $P'(x) < 0$  dugu eta AHCS energia *positiboki-definitua* da,  $E > 0$ .

(22) berreskalatzea eta  $\gamma \equiv \frac{\kappa}{\epsilon}$  ordezkapena egin eta (55) Ansatz aurreratu ostean,  $f$ ,  $P$  and  $V$  funtzioek bete beharreko higidura-ekuazioak honako hauek dira:

$$(106) \quad \leftrightarrow \quad \left( \frac{P'(x)}{x} \right)' = \frac{\gamma}{\alpha^2} V'(x) + \frac{f^2(x)P(x)}{\alpha^2 x}, \tag{60}$$

$$(107) \quad \leftrightarrow \quad \frac{(xf'(x))'}{x} = \frac{1}{2} f(x) (f^2(x) - 1) + \frac{f(x)V^2(x)}{\alpha^2} + \frac{f(x)P^2(x)}{x^2}, \tag{61}$$

$$(104) \quad \leftrightarrow \quad \frac{(xV'(x))'}{x} = \frac{f^2(x)V(x)}{\alpha^2} + \gamma \frac{P'(x)}{x}. \tag{62}$$

non primak adierazten duen  $x$ -rekiko deribatua. Espero zenez,  $V(x) = 0$  eta  $\kappa = 0$ -rentzat, ekuazio hauek Abeldar-Higgs ereduaren higidura-ekuazioak bihurtzen dira. Halaber, aurretik aipatu dugun moduan, (62) ekuaziotik ondoriozta dezakegun  $A_0(r)$  ez nulua izan behar dela  $\gamma \neq 0$  denean.

AH teorian ere gertatzen zen moduan, ez da oraindik soluzio analitiko zehatzik aurkitu AHCS ereduaren higidura-ekuazioetarako, (60-62). Beraz, numerikoki zehaztuak izan behar dira, mugalde baldintza egokiak.

$m$  ordenako ekuazio diferentzial baten soluzio orokorra  $m$  parametroen,  $m$  integrazio-konstanteen, menpekoa da. Beraz,  $3 \times (m = 2) = 6$  mugalde baldintza behar ditugu. Honela lor daitezke:

- Jatorrian ( $r = 0$ ), eremuak ezin dira singularra izan. Hortaz,  $\phi(x)$  eta  $A^\mu(x)$ -ren jarraitasuna bermatzeko jatorrian, hurrenez hurren, hurrengoak dugu,

$$\begin{aligned}
\bullet \quad (62) \Big|_{x=0} &\quad \leftrightarrow \quad \left\{ \frac{(xV'(x))'}{x} = \frac{f^2(x)V(x)}{\alpha^2} + \gamma \frac{P'(x)}{x} \right\} \Big|_{x=0} \neq \infty \\
&\stackrel{(65)}{\longleftrightarrow} \quad \frac{V'(x)}{x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \boxed{V'(0) = 0}. \tag{63}
\end{aligned}$$



- $A^\theta(x)|_{r=0} = g^{22}A_2(x)|_{r=0} \stackrel{(55c)}{=} \frac{n - P(r)}{er^2} \Big|_{r=0} \neq \infty$   
 $\leftrightarrow \quad n - P(0) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \boxed{P(0) = n}.$  (64)

- $(61) \Big|_{x=0} \leftrightarrow \left( \frac{(xf'(x))'}{x} = \frac{1}{2}f(x)(f^2(x) - 1) - \frac{f(x)V^2(x)}{\alpha^2} + \frac{f(x)P^2(x)}{x^2} \right) \Big|_{x=0} \neq \infty$   
 $\leftrightarrow \frac{f'(x)}{x}, \frac{f(x)P^2(x)}{x^2} \Big|_{x=0} \neq \infty \stackrel{(64)}{\longleftrightarrow} \boxed{f(0) = 0}, \boxed{f'(0) = 0}.$  (65)

Izatez, AH ereduan bezala,  $f(r=0) = 0$  lor daiteke (65) ekuazioa ondorioztatu baino lehen, zeren eta, (55d) Ansatz-etik,  $\phi(r, \theta) = f(r)e^{in\theta}$ , eta bere angelu polarra,  $\theta$ , ez dago definituta koordenatu sistemaren jatorrian ( $r=0$ ). Hortaz,  $f(r=0) = 0$  aukeratzea beharrezkoa da,  $\phi(r=0, \theta)$  ziurgabea izan ez dadin. Gainera, (63) eta (64) mugalde baldintzak partzialki egiazta daitezke honakoa erabilita:

$$(60) \Big|_{x=0} \leftrightarrow \left\{ \left( \frac{P'(x)}{x} \right)' = \frac{\gamma}{\alpha^2}V'(x) + \frac{f^2(x)P(x)}{\alpha x} \right\} \Big|_{x=0} \neq \infty$$

$$\stackrel{(65)}{\longleftrightarrow} P'(0), V'(0) = 0 \rightarrow P(0), V(0) = \text{const.} \quad (66)$$

- $r$ -ren balio asintotikoetarako ( $r = \infty$ ) -hots, simetria-ardatzetik distantzia handietarako-, AH ereduan egin genuen moduan, exijituko dugu energia totalean, (56), ageri diren termino guztiak nuluak izatea. Berez, (56) ekuazioan termino negatiboak ageri badira ere, energia potentzialki murriztu zezaketenak espazioaren balio infinituetan, frogatu dugu energia positiboki-definitua dela. Ondorioz, eremuen forma asintotikoa honakoa da:

$$\diamond \quad \frac{1}{2} (f^2(x \rightarrow \infty) - 1)^2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \boxed{f(x \rightarrow \infty) = 1}; \quad f'(x \rightarrow \infty) = 0, \quad (67)$$

$$\diamond \quad \frac{P^2(x)f^2(x)}{x^2} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0 \stackrel{(67)}{\longleftrightarrow} \boxed{P(x \rightarrow \infty) = 0}; \quad \frac{P'^2(x)}{x^2} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0 = P'(x \rightarrow \infty) = 0, \quad (68)$$

$$\diamond \quad V^2(x)f^2(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} \stackrel{(67)}{\longleftrightarrow} \boxed{V(x \rightarrow \infty) = 0}; \quad V'(x \rightarrow \infty) = 0. \quad (69)$$

(67) ekuaziotik,  $f(r \rightarrow \infty) = 1 \in \mathcal{M}$  kasurako, ondoriozta dezakegu, AH teorian gertatzen den moduan, konfigurazio batek soka-energia finitua izateko beharrezko balintza dela Higgs eremu asintotikoa zeharo egotea oinarritzeko-egoera degeneratuen barietatean,  $\mathcal{M}$ , edo, (55d) Ansatz-a inplementatu ostean baliokidea dena,  $\phi(x)$  fase puru bat bihurtu behar da infinituan,  $\phi(r \rightarrow \infty, \theta) \rightarrow e^{in\theta}$ .

Eremu magnetiko honako hau da:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{z} \stackrel{(55)}{=} \frac{n - (rP(r))'}{er} \hat{z}, \quad (70)$$

zein AH teorian lortutakoarne berdina den, (19), eta, AH ereduaren bezala ere bai, bere fluxua kuantizatuta dago  $2\pi/e$ -ren unitatetan [4, p. 3456, Eq. (2.2.1)][10, p. 421, Eq. (6)].

AH ereduarekiko desberdina dena zera da:  $A_t(x) \stackrel{(55a)}{=} V(r) \neq 0$  onartuta dagoenez, zurrumbiloak eremu elektriko bat ere badu:

$$E_i = F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = \partial_i V(r) = \partial_r V(r) = \boxed{V'(r) = E_r}, \quad (71)$$

zein kuantizatuta dagoen, ere bai, baina  $\kappa 2\pi/e$ -ren unitatetan, eta, hortaz, azpimarragarria da fluxu magnetikoaren proportzionala dela, Gauss-en legearen integrazioetik, i.e.,  $\nu = 0$  baliodun  $A_\mu(x)$  gauge eremuaren higidura-ekuazioaren, (101), integrazioetik, ondoriozta daitekeen moduan,

$$\begin{aligned} Q &= \int d^2x (\partial_i E^i - \kappa B) \stackrel{(53)}{=} \int d^2x j^0 \stackrel{(1)}{=} -e^2 \int_{\mathbb{R}} 2\pi r dr V(r) f^2(r) \stackrel{(22)}{=} -\frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} 2\pi x dx V(x) f^2(r) \\ &\stackrel{(62)}{=} - \int_{\mathbb{R}} 2\pi x dx \left( \frac{(xV(x))'}{x} - \gamma \frac{P'(x)}{x} \right) = -2\pi \left( xV(x) - \frac{\kappa}{e} P(x) \right) \Big|_0^\infty \\ &\stackrel{(2)}{=} -2\pi \left( 0 - \frac{\kappa}{e} (0 - n) \right) = -\kappa \frac{2\pi n}{e} = -\kappa \Phi_B, \end{aligned} \quad (72)$$

non, hasierako eta amaierako berdintzak alderatuz,  $\Phi_B = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x B$  definizioa, (21) ekuazioan erabilia, egiazta daitekeen. (72(1)) pausuan honakoa erabili dugu:

$$\begin{aligned} j^0 &\stackrel{(103)}{=} \frac{ie}{2} (\phi^*(x) \partial^0 \phi(x) - \phi(x) \partial^0 \phi^*(x) - 2ie A^0(x) |\phi(x)|^2) = \frac{ie}{2} (-2ie(-V(r)) f^2(r)) \\ &= -e^2 V(r) f^2(r), \end{aligned} \quad (73)$$

eta, (72(2)) urratsean, (64), (68) eta (69) mugalde baldintzak.

Gainera, karga elektrikoaren definizio honetatik, (72) ekuazioa, CS terminoaren  $\kappa$  koefizientearrekiko bere menpekotasun esplizituagatik, berehalakoa da konprobatzea CS formako terminorik gabe, i.e., AH ereduarentzat ( $\kappa = 0$ ), karga elektrikorik ez dagoela,  $Q = 0$ .

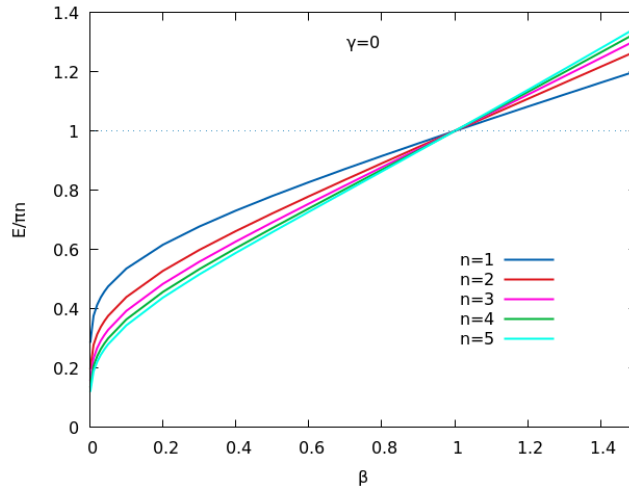
Numerikoki ebatzi behar ditugu (60-62) higidura-ekuazioak, (65-69) mugalde baldintzekin batera. Ascher et al.-ek garatutako COLSYS ebazlea erabiliko dugu [12].

# Kapitulua 5

## Emaitza numerikoak

Numerikoki ebatzi ditugu (60-62) higidura-ekuazioak, (65-69) mugalde-baldintzen menpean, COLSYS kodea erabilia [12].

COLSYS kodean, problema sare adaptagarrien sekuentzia baten bitartez ebazten da. Sekuentzia gelditu egiten da eskatutako zehaztasun lortzen denean; hau da, egiazko soluziotiko desbideraketa erabiltzaileak hautatutako akats-tolerantzia baino txikiagoa denen. Sare adaptagarri horiek xehetasun handiagoa eskatzen duten eskualdetan zehaztasuna doitzen dute, bestelako leku batzuk erresoluzio baxuagoarekin utziz. COLSYS-ek oso ondo funtzionatzen du hasierako hurbilketa egiazko soluziotik oso gertu dagoenean.



Irudia 4: Soka-energia  $n$  bira-zenbakiarekiko,  $\pi$ -ren unitatetan,  $E/\pi n$ ,  $\alpha$  parametroaren funtzioan,  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ -rako, Abeldar-Higgs ereduan ( $\gamma = \kappa/e = 0$ ,  $A_0 = 0$ ), 4 irudian agertu zen gisara, baina CS akoplamendua esplizituki adierazita duela.  $n > 1$  eta  $\beta < 1$  ( $\beta > 1$ ) kasurako, sokek elkar erakartzen (aldaratzen) dute,  $E/(n = 1) > (<) E/n$  delako.  $\beta = 1$  kasuan,  $E/(n = 1) = E/n$ , eta, beraz, ez dute interakzionatzen, ez dira bateratzen ezta banatzen ere.

COLSYS erabilia gure higidura-ekuazioak ebazteko, aztertuko dugu AHCS zurrunbiloek egoera-lotuak eratu ahal dituzten. Egoera-lotuak, aurretik azaldu genuen moduan 3.2. sekzioan, osa daitezke  $E/n < E(n = 1)$  badugu.  $E/n$  hau soka-energia da (bi dimentsio espazialean) –sokaren bira-zenbakiarekiko kalkulatuta, bestela  $E(n_1) > E(n_2)$  izango genuelako beti,  $n_1 > n_2 > 0$ -erako-. Hortaz,  $E/(n = 2) > E/(n = 1)$  badugu, esaterako,  $n = 2$ -ko sokaren energia handiagoa da hura bana daitekeen  $n = 1$ -eko bi soken energiaren batura baino.

Gure teoria AH eredua baino parametro bat gehiagoren menpekoea da,  $\gamma$ ; hau da, honen menpekoea izango da:  $(\beta, n, \gamma)$ . Gainera, indar mota berri bat dugu. AH ereduan, ikusi genuen lez, badira bi indar mota:  $\phi(x)$  eremu eskalarrak eragiten duen indarra, sokak bata bestearen gainean jartzen dituen, eta eremu magnetikoek eragiten duten indarra, aldaratzailea dena. Alabaina, AHCS ereduan eremu bat gehiago dugu,  $E_r = V'(r)$  eremu elektrikoa. Honek zer indar mota eragiten duen aztertuko dugu. Gerta daiteke CS terminoak sorrarazten duen  $\vec{E}$  eremua  $\vec{B}$  eremu elektrikoaren aurka joatea, dagokien indarrak aldaratzailearen eragina murriztuz; edo, kontrara, beharbada  $\vec{B}$ -ren alde egiten du eta indar aldaratzailean parte hartzen du.

Lehenik eta behin,  $P(x)$  gauge eta  $f(x)$  eskalar funtzioak eta  $V(x)$  adierazi ditugu grafikoki, sokaren simetria-ardatzetik distantziaren  $(1/\sqrt{2\lambda}$ -ren unitatetan) menpean,  $x = \sqrt{2\lambda}r$  –gogoratu (22a) ekuazioa–. Hau egin dugu parametro askeen zenbait balioetarako, grafikoen serie bat osatuz. Grafiko hauetan guztietan, profilak irudikatu ditugu hiru bira-zenbakien balioetarako:  $n = 1$  (lerro jarraitua edo solidoa),  $n = 2$  (gidoiaren lerroa) eta  $n = 3$  (gidoiak eta puntuak). 5 irudian profilak irudikatu ditugu  $\beta = 0.1$ ,  $n = 1, 2, 3$  era  $\gamma = 0, 0.1, 0.5, 1, 1.5, 5$  balioetarako. 6 irudia 5 irudiaren analogoa da, baina  $\beta = 1$  balioarekin, eta gauza bera gertatzen da 7 irudiarekin, baina  $\beta = 3.5$  balioa du honek.

$f(x)$  eremu eskalarraren eta  $P(x)$  gauge eremuaren nukleoaren zabalera handitu egiten da  $\beta$  areagotzean.  $\gamma$ -ren funtzioan ere  $f(x)$  eta  $P(x)$  handitu egiten dira, baina  $P(x)$  gauge eremuaren nukleoaren zabalera azkarrago handitzen da  $f(x)$  eremu eskalarrarena baino –ohartu, grafikoetatik, zer puntutan ebakitzen duen  $P(x)$ -ek  $f(x)$  lerro-mota (hau da, bira-zenbakiaren balio) berdinerako–.  $\gamma$ -ren funtzioan  $P(x)$  gauge eremua  $f(x)$  eremu eskalarra baino azkarrago handitzeak iradokitzen du eremu elektrikoak soken arteko indarra aldaratzaileagoa egiten duela.

Soken arteko erakarpen edo aldarapena hobeto azter daiteke, arestian erabilitako funtzioen profilak beharrean, energia erabilita. Aldera daitekeen ezaugarriarik esanguratsuen  $n$  bira-energiaren menpeko soka-energia da,  $E/n$ . Era honetan, esaterako, konpara dezakegu  $n = 1$  bira zenbakiko  $n$  soken energiaren batura  $n$  bira zenbakiko soka baten energiaren balioarekin.

Irudikatu dugu soka-energia (bira-zenbakiarekin normalizatuta),  $\beta$  eta  $\kappa$  akoplamendu-konstanteen funtzioan, hauek energia-akoplamendu plano batean proiektatuz, i.e., aipatutako akoplamendu-konstanteen balioa txandaka finko eginez. Gainera, aztertu dugu I. motako (zurrumbiloen arteko erakarpena) eta II. motako (zurrumbiloen arteko aldarapena) eskualde supereroaleen arteko mugaren posizioaren eboluzioa parametroen espazioan. Ikuspegi honek emaitza eztaba daezina eman lezake Abeldar-Higgs (AH) teoria estandarrari gehitzean Chern-Simons formako termino batek duen efektuari dagokionez.

8 irudian erakutsi dugu  $n$  bira-zenbakiarekiko energia ( $\pi$ -ren unitatetan),  $E/n\pi$ ,  $\gamma$ -ren (edo, baliokidea dena, CS akoplamendu-konstantea,  $\kappa$ ,  $e$ -ren unitatetan:  $\gamma = \kappa/e$ ) zenbait balio finkatuetarako eta  $n$ -rako,  $\beta$ -ren funtzioan. Grafika hauetatik ondoriozta daitekeen lez, CS terminoaren presentziak zurrumbiloei elkar aldaratzea eragiten dut beti. Hau ikusteko, ohartu zer lekutan ebakitzen duten elkar hiru lerro-motek ( $n$ -ren balio ezberdinei dagozkionak)  $\gamma$  bakoitzerako.

$\gamma = 0$  kasurako (hau da, AH ereduen kasuan, 4 irudia edo, bere baliokidea, 8 irudiko lehenbizi-

ko grafikoa) lerroek-mota guztiek elkar ebakitzen dute  $\beta = 1$  puntuan.  $\beta$ -ren balio txikiagoetarako, soke elkar erakartzen dute; beste modu batean esanda,  $E/n\pi$  txikiagoa da  $n$  handiagoetarako. Hortaz, adibidez,  $n = 1$ -eko bi soka eratzeko  $n = 2$ -eko soka bat eratzeko baino energia gehiago behar da.  $\gamma$  handitu ahala, lerroek  $\beta$ -ren balio txikiagoetan ebakitzen dute elkar (zenbat eta  $\gamma$  handiagoa, orduan eta  $\beta$  txikiagoa), soke elkar erakartzen duteneko eskualdearen tamaina murriztuz. Hau gertatuko da, azkenean,  $\beta$ -ren balioa edozein izanda ere soke elkar aldaratzen dutenera arte. Ohar zaitez, gainera,  $E/n\pi$  monotonikoki areagotzen dela  $\beta$ -rekiko.

9 irudiak kasu analogoa adierazten du:  $E/n\pi$ -ren grafikoa  $n$  eta  $\beta$ -ren zenbait balio finkoetarako,  $\gamma$ -ren funtzioan. Hemen, are agerikoagoa da soke elkar erakartzen duteneko eskualde murriztuz doala zeharo desagertu arte. Noski,  $\beta > 1$ -rako ez dago soke elkar erakartzen duteneko eskualderik; i.e., CS terminoak ez du aldaketarik eragiten, praktikan, eskualde horretan.

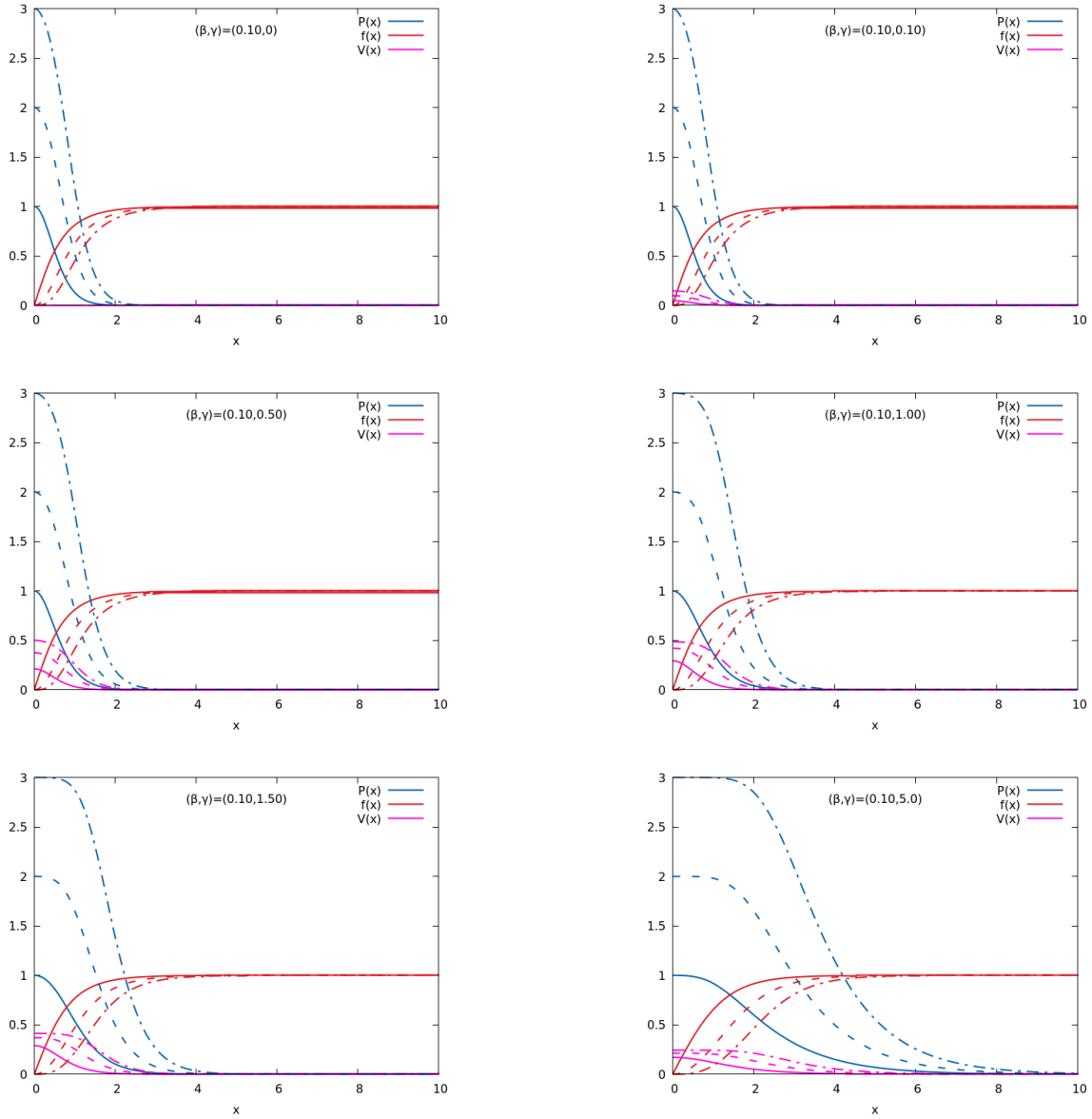
Hala nola, 9 irudian,  $\beta = 1$  balio finkoari dagokion grafikotik, ondoriozta dezakegu  $\gamma = 0$ -rako –i.e., AHCS eredu AH eredu arruntera murrizten denean– bira-zenbakiarekiko soka-energia berdina dela bira-zenbakiaren balio ororako –izan behar den moduan–. Hala ere,  $\gamma$ -ren balio handiagoe-tarako, bat balioko bira-zenbakiari dagokion energiak,  $E/(n = 1)$ , gainontzeko energia balioen azpitik,  $n > 1$  bira-zenbakiekiko energien azpitik,  $E/(n = 1) < E/n$ , dirau, hortaz,  $n = 1$ -eko soke-tarako banaketa aukera balizkoena bilakatuz, energia kopuru txikiena eskatzen duen konfigurazioa izaki. Hau da,  $\gamma$  areagotzeak sokak ez-lotu egitea dakar. Halaber, konturatu,  $\beta$ -ri erreparatuta, bira-zenbakiarekiko soka-energia ( $\pi$ -ren unitatetan),  $E/\pi n$ , era monotonoan handiagotzen da  $\gamma$ -ren funtzioan, edozein  $n$  bira-zenbaki baliorako.

Azkenik, 10 irudian, lortu ditugu  $(\beta, \gamma)$  parametro-espazioko planoko lerroak non sistema doan erakarpenetik aldarapenera. Beste hitz batzutan, AH ereduko Bogomol’ny mugaren baliokide diren lerroak topatu ditugu.

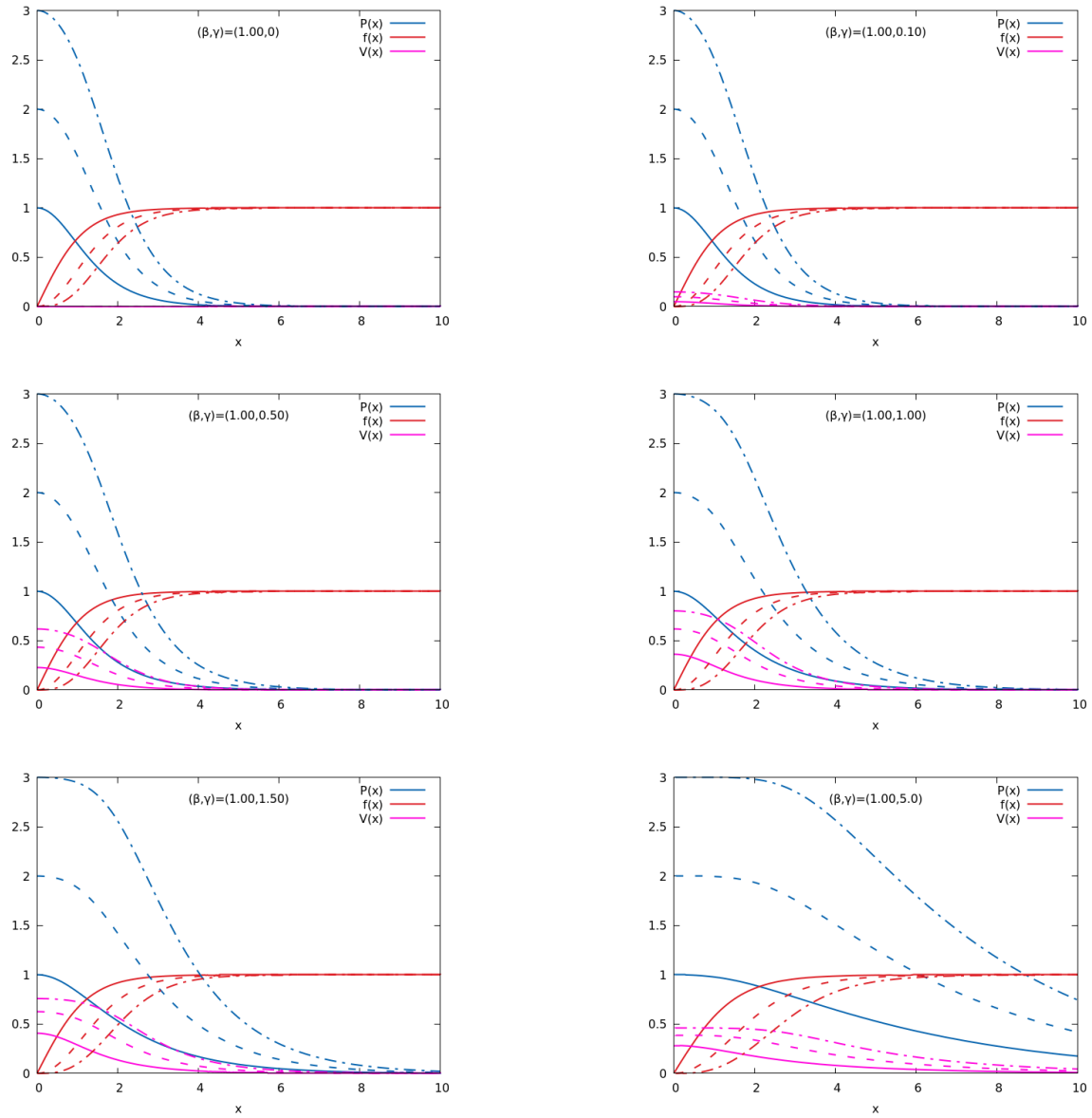
Hori egiteko, kalkulatu dugu,  $n$  bira-zenbaki desberdinetarako, zer  $\beta$  eta  $\gamma$  baliotarako diren balio berekoak bira-zenbakiko energiak ( $\pi$ -ren unitatetan),  $E/n\pi$ .

8 eta 9 irudietan dago adierazita azkeneko hau,  $E/n\pi$  kurben elkarrekiko ebaki-puntuen bitartez.

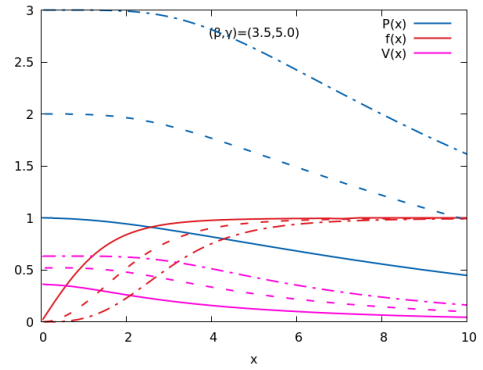
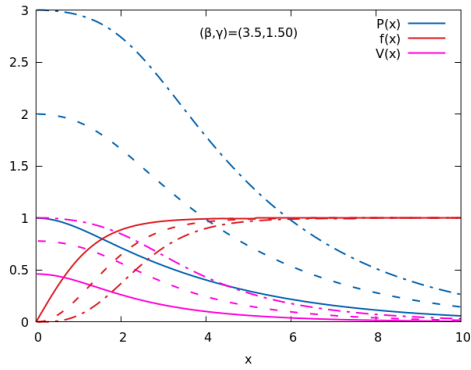
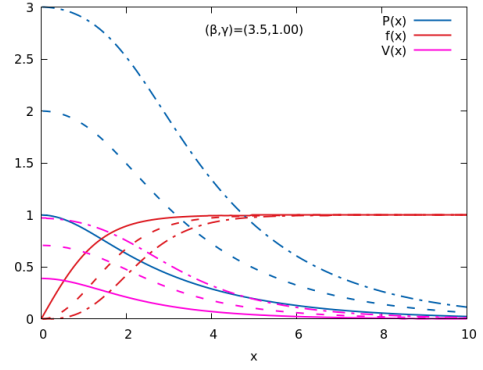
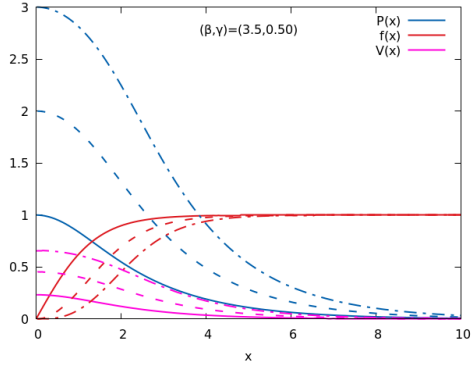
Ostera ere, berehalakoa da ikustea  $\gamma$  handitu ahala,  $E/n\pi$  kurbek elkar ebakitzen duten puntua  $\beta$ -ren balio gero eta txikiagoetarako gertatzen dela,  $\beta = 0$  (zeinetatik haratago gure ereduak zentzu-rik ez duen) lortu arte. CS interakzioak eragiten du bira-zenbaki ezberdinei dagozkien soka-energien balioak berdina direneko parametro-espazioaren puntua –edo, baliokidea dena, puntua zeinetarako zurrumbiloen arteko interakziorik ez dagoen; id est, I. motako (elkar erakartzen duten sokak) eta II. motako (elkar aldaratzen duten sokak) eskualdeen arteko muga–  $\beta = 0$ -ra hurbiltzea. Ohar bedi adierazpen grafiko honetatik  $\gamma$  areagotzeak  $\beta$  murriztea dakarrela,  $\beta = 1$ etik  $\beta = 0$ -ra,  $\beta$ -ren balio posible minimora, eta, azkenean, eskualde osoa elkar aldaratzen duten sokei dagokio. Behin  $\beta = 0$  lortuta (zeinek, definiziotik, esan nahi duen  $\lambda = 0$  dela, edo  $e = \infty$ ),  $\gamma$ -ren balio handiagoetarako emaitzak baztertu ditugu.



Irudia 5: Gauge eremuaren eta eremu-eskalarraren funtzioen  $-P(x)$  eta  $f(x)$ , hurrenez hurren-profilak eta  $V(x)$ , zurrunbiloaren erdigunetiko distantziaren ( $1/\sqrt{2\lambda}$  unitatetan,  $x = \sqrt{2\lambda}r$ ) menpean,  $n = 1, 2, 3$ -rako -lerro jarraitua edo solidoa, gidoiez osatutako lerroa eta puntuz eta gidoiz osatutakoa, hurrenez hurren-,  $\beta = 0.1$ -erako eta  $\gamma$ -ren zenbait baliotarako:  $\gamma = 0, 0.1, 0.5, 1, 1.5, 5$ .

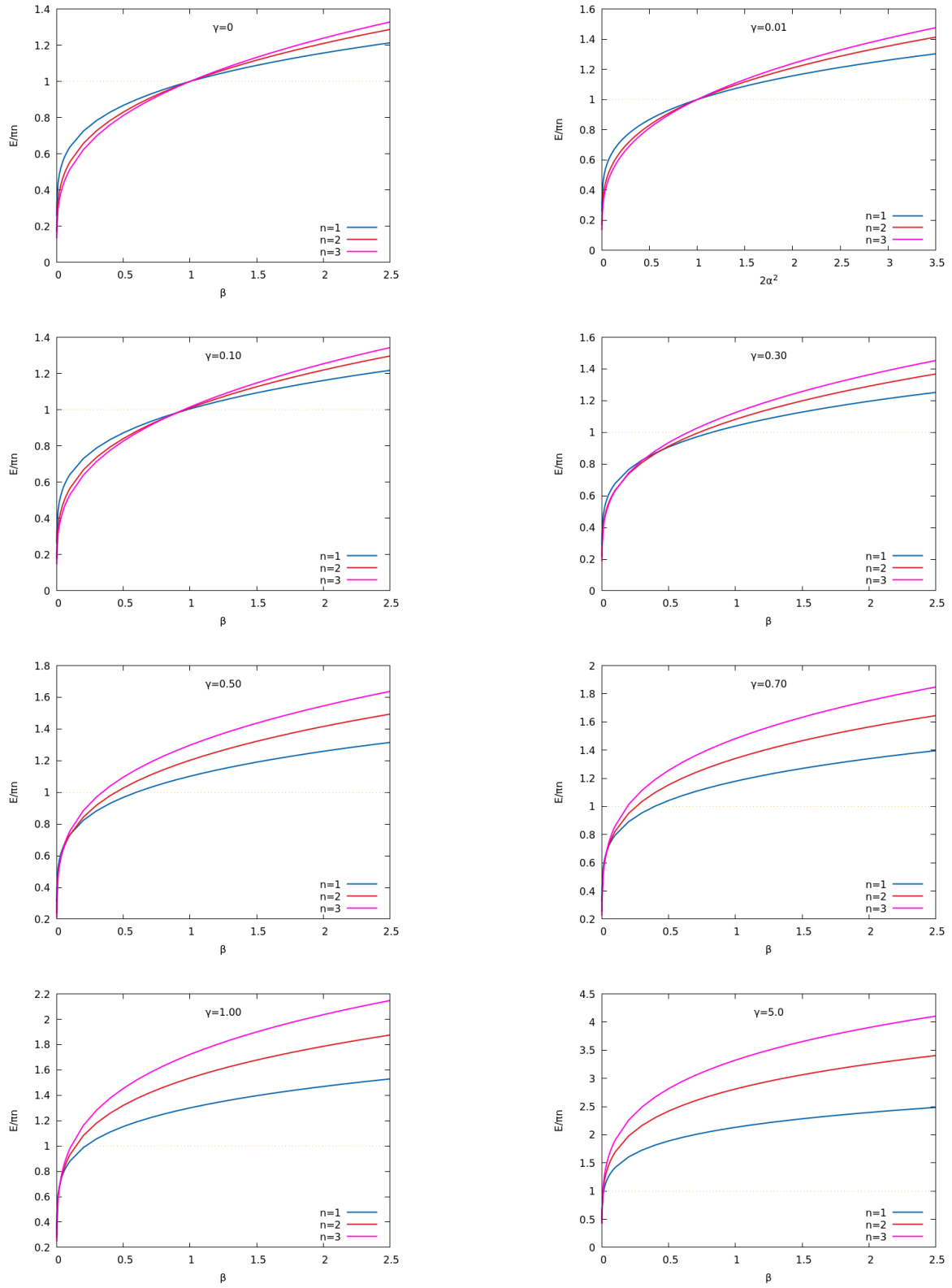


Irudia 6:  $P(x)$  gauge eremuaren,  $f(x)$  eremu eskalarraren, eta  $V(x)$  funtzioen profilak. 5 irudiaren baliokidea, baina  $\beta = 1.00$ -erako.

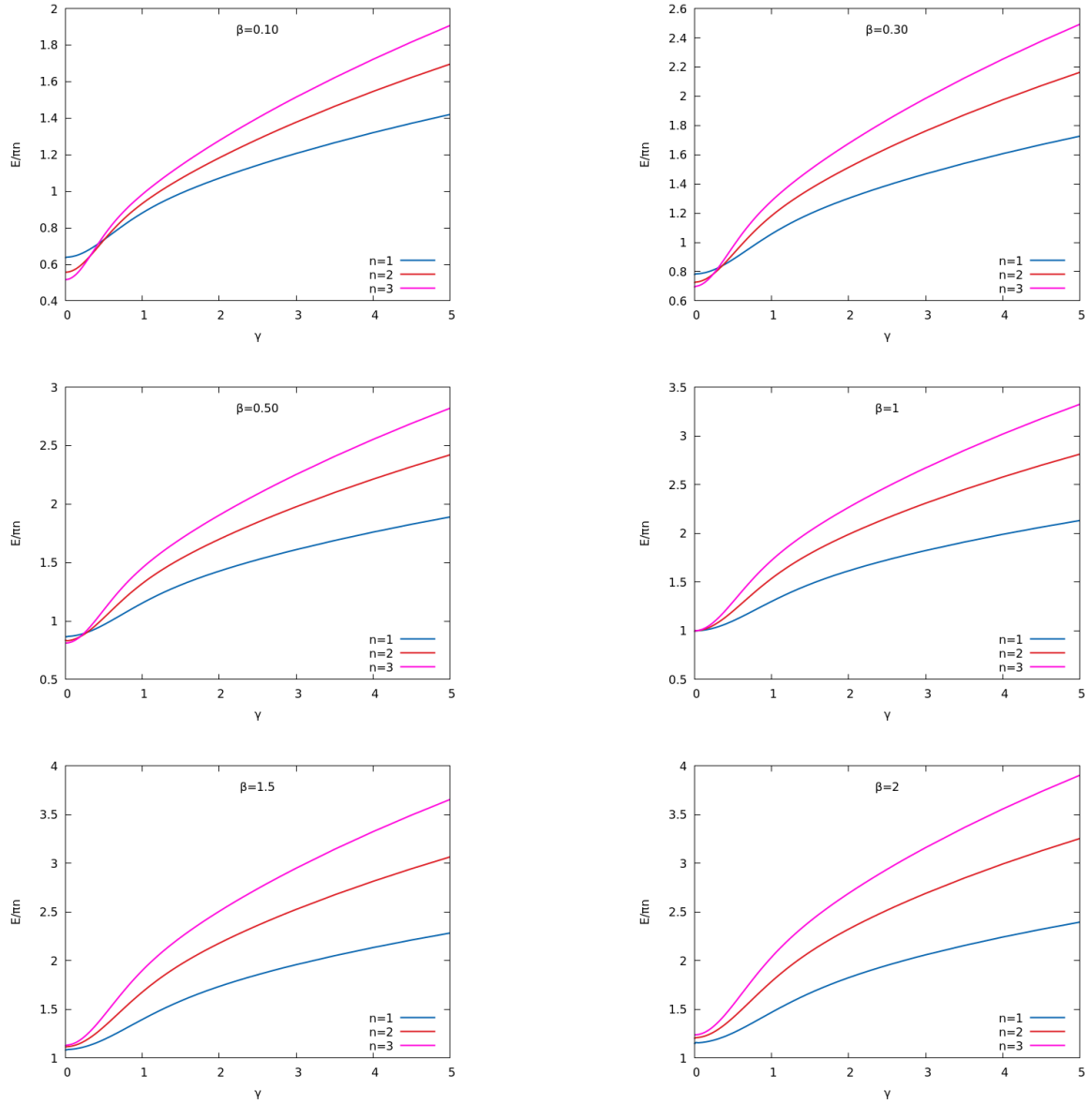


Irudia 7: Gauge eremuaren eta eremu-eskalarren funtzioen  $-P(x)$  eta  $f(x)$ , hurrenez hurren- eta  $V(x)$ -ren profilak. 5 eta 6 irudien baliokidea, baina  $\beta = 3.5$ -erako.  $\beta = 3.5$  eta  $\gamma = 0$ -ri dagozkion lerroak ez dira adierazi errore konputazionalak direla kausa.

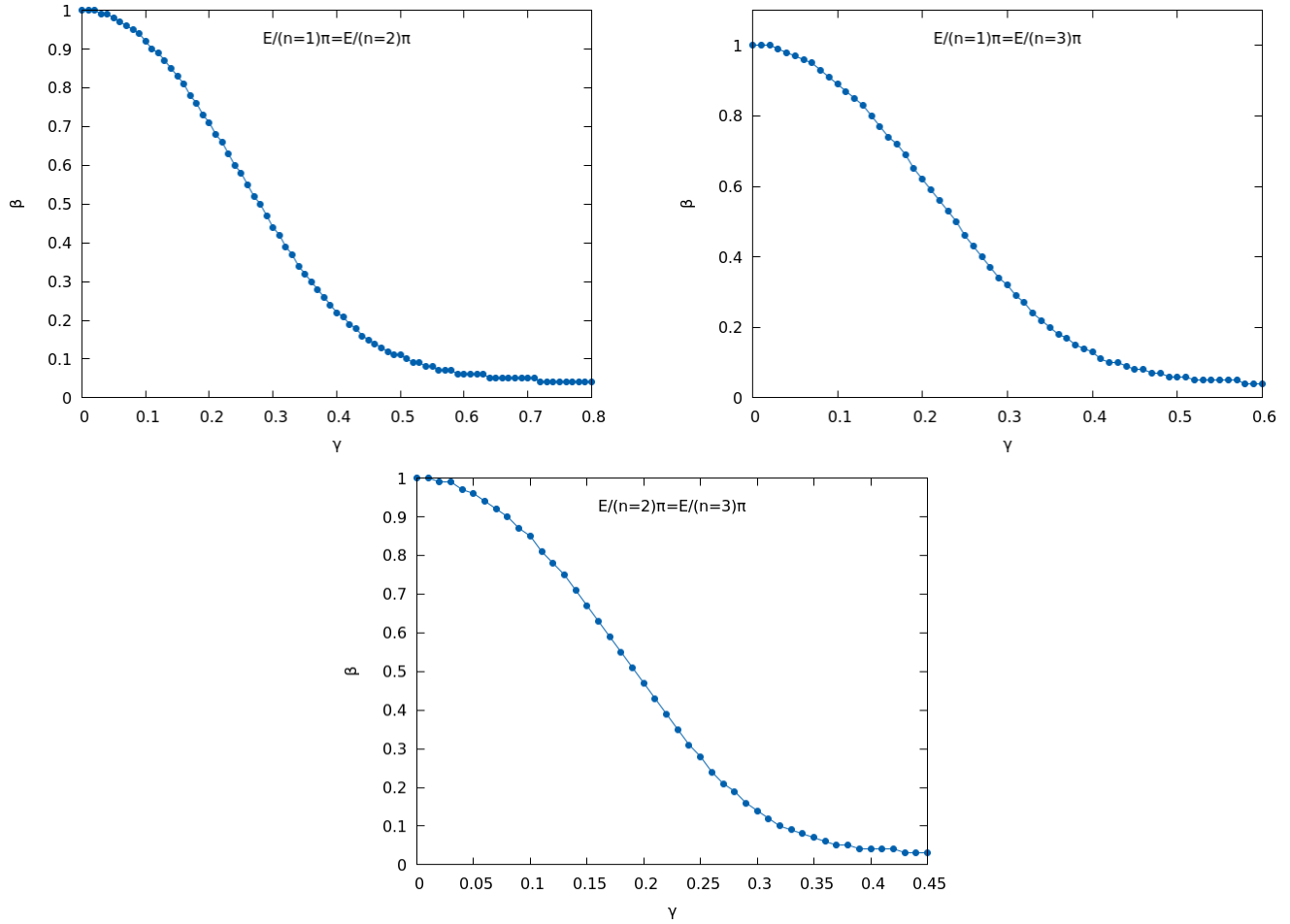




Irudia 8: Soka-energia (bi dimentsio espazialetan),  $n$  bira zenbakiarekiko eta  $\pi$ -ren unitatetan,  $E/\pi n$ , CS akoplamenduaren,  $\gamma$ , balio finko ezberdinetarako:  $\gamma = 0, 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1, 5$ ; eta  $n$ -ren zenbait baliotarako:  $n = 1, 2, 3$ ,  $\beta$  akoplamendu-konstantearen funtzioan.



Irudia 9: Soka energia  $n$  bira zenbakiarekiko,  $\pi$ -ren unitatetan,  $E/\pi n$ ,  $\beta$  parametro askearen eta  $n$  zenbait balio finkotarako: hurrenez hurren,  $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 1, 1.5, 2$ , eta  $n = 1, 2, 3$ ,  $e$ -ren unitatetan adierazitako CS akoplamendu-konstantearen funtzioan,  $\gamma$ .



Irudia 10:  $\beta$  akoplamendu-konstantea,  $\gamma$ -ren funtzioan, zeinetarako bira-zenbakiarekiko soka-energiak ( $\pi$ -ren unitatetan),  $E/\pi n$ , berdina diren  $n = 1, 2$ ;  $n = 1, 3$  eta  $n = 2, 3$ -erako, hurrenez hurren.

# Kapitulua 6

## Ondorioak eta etorkizunerako ikuspegia

Labur dezagun artikulua honen emaitza garrantzitsuenak eta eman ditzagun zenbait itxiera ideia lan honi amaiera emateko.

Lan honetan, soka global zuzenen  $U(1)_G$  simetria  $U(1)_L$  inbariantzara aldatuz, AH eredua aurkeztu dugu, soken formazioa azaltzen duen teoriarik sinpleena dena eta, frogatu dugun gisara, fluxu magnetiko kuantizatudun, baina elektrikoki neutroak diren, soka egiturak eratzen dituen.

Azaldu dugun lez, AH eredua parametro bakar batez dago gobernatuta,  $\beta$ ,  $U(1)_L$  simetriatik 1-erako simetria haustura espontaneoaren osteko teoriako masen zatiketaren karratuaren baliokidea dena.

Beranduago, ANO soka soluzioak, estatikoak eta simetria-ardatzarekiko simetrikoak, txertatu ditugu Abeldar-Higgs ereduan. Soluzio hauek  $n$  bira-zenbakia gehitzen dute teorian. Zenbakizko metodoen bitartez higidura-ekuazioak betetzen dituzten soluzioak eraiki ditugu eta kasuan-kasuko bira-zenbakiaz normalizatutako soka-energia aztertu dugu. Frogatu dugun legez, II. motako supereroaleen eskualdean ( $\beta > 1$ ), bat baino handiagoa den bira-zenbakia,  $n > 1$ , duten sokak ezegonkorrak dira, bira-zenbaki txikiagoko soketan bana baitaitezke.

AH sokek  $Q$  karga elektrikoa izateko ezintasuna arrazoitu dugu. Haatik ere, azpimarratu dugun gisara, AH ereduari CS formako termino bat gehituz –AHCS teoria deritzona– sokek karga elektrikoa izatea baimentzen du, betiere, euren energia totala (bi dimentsio espazialean) finitu mantenduz. Karga elektriko hau kuantizatuta dago, fluxu magnetikoaren antzera eta, gainera, azkeneko honen proportzionala da, proportzionaltasun erlazio hau  $\kappa$ -rekin, CS terminoari dagokion akoplamendu konstantearekin, lotuta dagoela.

Nabarmendu dugu, dena den, CS terminoa gehitzean, gure barietateak dimentsio kopuru bakoitia izan behar duela. Kasu honetan, murrizketa  $(3+1)$  espazio-denborako dimentsioetatik  $(2+1)$ d-tara egin dugu.

AH ereduarekin gauzatu dugun moduan, AHCS soken interakzioen analisia burutu dugu. Xede honetarako,  $(\beta, n, \kappa)$  parametroen-espazioa luze-zabal simulatu dugu.

Arestian aipatu dugun moduan, jakina da AH sokek portaera oso desberdina dutela  $\beta$  parametroaren menpean.  $\beta < 1$  kasurako (I. motako supereroaleak) sokek bateratzeko joera dute, bira-zenbaki altuagoko sokak eratuz; esaterako,  $n = 1$ -eko bi sokek  $n = 2$ -eko soka bat osatuko lukete. Beste era batera azalduta,  $n = 2$ -eko sokak, adibide partikular honetan, edo,  $n > 1$ -ekoak, orokorrean, egonkorrak dira (ez dira banatzen)  $\beta < 1$ -erako. Beste alde batetik,  $\beta > 1$ -erako

(II. motako supereroaleak), kontrakoa gertatzen da. Sokek bat balioko bira-zenbakiko  $n$  soketan banatzeko joera dute. Hau da,  $n > 1$ -eko sokak ezegonkorak dira  $\beta > 1$ -erako. I. eta II. motako eskualde supereroaleen arteko muga  $\beta = 1$  da, non mota honetako soka zuzenak berdin dirauten, ez dute interakzionatzen.

AHCS soken egonkortasuna edo interakzioak ikertu nahi genituen. AH ereduari gehitutako CS terminoak,  $\vec{E}$  eremu elektrikoa sortzen duena, erakarpina edo aldarapena eragiten du? Beste modu batera esanda,  $\vec{B}$  eremu elektrikoaren eraginaren kontra egiten du, soken arteko erakarpina areagotuz, edo, kontrara, soken arteko aldarapen indarren alde egiten du CS interakzioak?

Burututako analisia oinarritzat hartuta, ziurtasunez baieztatu daiteke beti areagotzen dela soken arteko aldarapen indarra AH dentsitate Lagrange-arrari CS interakzio-terminoa gehitzean. Hots, I. motako eskualdearen tamaina murriztu egiten da  $\kappa$  CS akoplamendua hazi ahala. Berez,  $\kappa > e/2$ -rako, sokek elkar aldaratzen dute,  $\beta$ -ren balioa edozein izanda ere. Gainera, azpimarra daiteke,  $\beta$ -ren menpean gertatzen den moduan, bira-zenbakiko soka-energia ( $\pi$ -ren unitatetan),  $E/\pi n$ , era monotonoan handitzen dela  $\gamma$ -rekin.

Halaber, AH ereduko  $\beta = 1$  muga-lerroaren analogoa den  $\beta$  AH akoplamenduaren balioa estimatu dugu,  $\kappa$  bakoitzerako. Id est, parametro-espazioko  $(\beta, \kappa)$  puntua estimatu dugu, zeinetarako sokez ez duten elkar aldaratzen ezta erakartzen ere. Hau,  $n = 1$  eta  $n = 2$ ,  $n = 1$  eta  $n = 3$ , eta  $n = 2$  eta  $n = 3$  balioetarako egin dugu. Beste modu batean esanda,  $(\beta, \kappa)$  parametro-espazioko mapa egin dugu,  $n$  bira-zenbaki ezberdinen funtzioan.

Modu honetan, AHCS soka kosmikoen interakzioak ikertzeko hasierako xedea bete dugu. Iradokienezake gehitutako CS terminoaren aldaratze eragina AHCS soketako eremu elektrikoaren pantailatze-efektuaren (ingelesez, screening effect) ondorioa izan daitekeela [4, p. 3444, l. 23-24], AH zurrumbiloei ez duten ezaugarria, azkeneko hauek, aipatu dugun moduan, elektrikoki neutroak direlako.

Etorkizuneko ikerketei dagokionean, azterketa hau Cherns-Simons terminodun gauge teoria ez-Abeldarretara hedatu daiteke. Gainera, Higgs eremuarekin norgehiagokan diharduen eremu eskalarra gehienezake, Chern-Simons zurrumbilo Abeldar zen ez-Abeldarretan. Azkeneko honen ondorioak eztabaidatzea justifikatuta dago, interes berritua baitago oinarritzeko-egoera ezberdineko bi eremu eskalar –kasu, Higgs eremua,  $\phi(x)$ , eta berarekin lehiatzen den beste eskalarra,  $\chi(x)$ – dituzten ereduetan [13, p. 1, l. 10-12].

Zehazki, kasu Abeldarrerako, gure lanean jorratu ditugun AHCS zurrumbiloei  $\chi(x) \in \mathbb{C}$  eremu eskalar lehiakorra gehienezake. Eredu hau  $((2 + 1)d$ -etan, gogoratu), honako akzioaren bitartez deskribatuta dago:

$$S_{\text{AHCS}\chi} = \int d^3x \mathcal{L}_{\text{AHCS}\chi}, \quad (74)$$

non dentsitate Lagrangearra honako hau den:

$$\mathcal{L}_{\text{AHCS}_\chi} = \mathcal{L}_{\text{AHCS}} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi(x)) (\partial^\mu \chi(x))^* + \mathcal{V}(|\phi(x)|, |\chi(x)|), \quad (75)$$

eta energia-potentzial dentsitatea ondorengo adierazpenaz emanda dagoela:

$$\mathcal{V}(|\phi(x)|, |\chi(x)|) = \frac{\lambda_\phi}{4} (|\phi(x)|^2 - \eta_\phi^2) + \frac{\lambda_\chi}{4} |\chi(x)|^2 (|\chi(x)|^2 - 2\eta_\chi^2)^2 + \frac{\lambda_{\phi\chi}}{2} |\phi(x)|^2 |\chi(x)|^2, \quad (76)$$

Witten-en zurrumbilo supereroankorren eredu analogoa dena [14, p. 559, Eq. (2)].

Beste alde batetik, kasu ez-Abeldarrerako,  $SU(N=2)$  Chern-Simons-Higgs teoria izan daiteke aukeratutako eredua aipatutako  $\chi(x) \in \mathbb{C}$  eremu eskalarraz –i.e.,  $N=2$  eremu eskalar guztira– zabal daitekeena, zein Higgs eremuarekin lehiatzen den. Teoria hau deskribatzen duen dentsitate Lagrangearra honako hau da: [13, p. 2, Eq. (1)][13, p. 3, Eq. (13)]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CSH}_\chi} = & \frac{1}{2} D_\mu(x) \vec{\phi}(x) \cdot D^\mu(x) \vec{\phi}(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\chi}(x) \cdot \partial^\mu \vec{\chi}(x) \\ & + \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left( \vec{F}_{\mu\nu}(x) \cdot \vec{A}_\lambda(x) - \frac{e}{3} \vec{A}_\mu(x) \cdot \left( \vec{A}_\nu(x) \times \vec{A}_\lambda(x) \right) \right) - \mathcal{V}(|\vec{\phi}(x)|, |\vec{\chi}(x)|), \end{aligned} \quad (77)$$

non  $\vec{F}_{\mu\nu}(x)$  indar eremua eta  $SU(2)$ -ren deribatu kobariantea,  $D_\mu(x)$ , honela idatz daitezkeen:

$$\vec{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \vec{A}_\nu(x) - \partial_\nu \vec{A}_\mu(x) + e \vec{A}_\mu(x) \times \vec{A}_\nu(x), \quad (78)$$

$$D_\mu(x) \vec{\phi}(x) = \partial_\mu \vec{\phi}(x) + e \vec{A}_\mu(x) \times \vec{\phi}(x), \quad (79)$$

eta potentzial dentsitatea honela adierazten da [13, p. 2, Eq. (8)][13, p. 3, Eq. (14)]

$$\mathcal{V}(|\vec{\phi}(x)|, |\vec{\chi}(x)|) = \frac{\lambda^2}{2} |\vec{\phi}(x)|^2 \left( |\vec{\phi}(x)|^2 - \eta^2 \right)^2 + \gamma \left[ \left( |\vec{\phi}(x)|^2 - \mu^2 \right) |\vec{\chi}(x)|^2 + \beta |\vec{\chi}(x)|^4 \right], \quad (80)$$

$\gamma, \mu \in \mathbb{R}_+$ .  $\vec{A}_\mu(x)$  ( $\mu=0, 1, 2$ ) gauge eremuak  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$  Lie aljebraren arauak egiten dituenak,

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \equiv \vec{A}_\mu \cdot \vec{T}, \quad T^a \text{ generadoreek honakoa betetzen dutela:} \quad (81)$$

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc} T^c, \quad \{T^a, T^b\} = \text{Tr}(T^a T^b) = \frac{\delta^{ab}}{2}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (82)$$

Honako tesia era laburtuan aurkeztu berri ditugun lanekin erlazionatutako artikuluen parte izango da.

# Bibliografia

- [1] A. Achúcarro & T. Vachaspati, *Semilocal and electroweak strings*, Phys. Rep. **327** (2000) 347-426, doi: [10.1016/s0370-1573\(99\)00103-9](https://doi.org/10.1016/s0370-1573(99)00103-9).
- [2] M. Sakellariadou, *Cosmic strings and cosmic superstrings*, Nucl. Phys. B - Proc. Suppl. (2009) 68-90, doi: [10.1016/j.nuclphysbps.2009.07.046](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2009.07.046).
- [3] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, McGraw-Hill (1996), ISBN: 0-07-064878-6.
- [4] L. Jacobs, A. Khare, C.Ñ. Kumar & S. K. Paul, *The Interaction of Chern-Simons Vortices*, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 3441-3466, doi: [10.1142/s0217751x91001672](https://doi.org/10.1142/s0217751x91001672).
- [5] P. A. Horvathy & P. Zhang, *Vortices in (Abelian) Chern-Simons gauge theory*, Phys. Reports **481** (2009) 83-142, doi: [10.1016/j.physrep.2009.07.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.07.003).
- [6] N. Manton & P. Sutcliffe, *Topological solitons*, Cambridge University Press (2004), doi: [10.1017/CBO9780511617034](https://doi.org/10.1017/CBO9780511617034).
- [7] D. S. Gorbunov & V. A. Rubakov, *Introduction to the theory of the early universe*, World Scientific Publishing (2011), doi: [10.1142/10447](https://doi.org/10.1142/10447).
- [8] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*, Wiley-VCH (2008), ISBN: 978-3-527-40601-2.
- [9] B. Julia & A. Zee, *Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory*, Phys. Review D **11** (1975) 2227-2232, doi: [10.1103/physrevd.11.2227](https://doi.org/10.1103/physrevd.11.2227).
- [10] S. K. Paul & A. Khare, *Charged Vortices in Abelian-Higgs Model with Chern-Simons Term*, Phys. Lett. B **174** (1986) 420-422, doi: [10.1016/0370-2693\(86\)91028-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)91028-2). **Erratum**: Phys. Lett. B **174** (1986) 453.
- [11] G. V. Dunne, *Aspects of Chern-Simons Theory* (1999), [arXiv:hep-th/9902115](https://arxiv.org/abs/hep-th/9902115).
- [12] U. Ascher, J. Christiansen & R. D. Russell, *A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems*, Math. of Comp. **33** (1979) 659-679, doi: [10.1090/S0025-5718-1979-0521281-7](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1979-0521281-7); *Collocation software for boundary-value ODEs*, ACM Trans. **7** (1981) 209-222, doi: [10.1145/355945.355950](https://doi.org/10.1145/355945.355950).
- [13] J. M. Pérez Ipiña, F. A. Schaposnik & G. Tallarita,  *$SU(2)$  Chern-Simons theory coupled to competing scalars*, Phys. Rev. D **97** (2018), doi: [10.1103/PhysRevD.97.116010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.116010).
- [14] E. Witten, *Superconducting strings*, Nucl. Phys. B **249** (1985) 557-592, doi: [10.1016/0550-3213\(85\)90022-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90022-7).
- [15] L. H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press (1996), doi: [10.1017/CBO9780511813900](https://doi.org/10.1017/CBO9780511813900).

# Eranskina A

## Konbentzioak eta definizioak

### A.1 Konbentzioak

Hemen erabilitako konbentzioa honakoa da:

- Unitate naturalak, i.e., Planck-en konstantea eta argiaren abiadurari bat balioa ematen zaie,  $\hbar = c = 1$ .
- $(x)$  notazioa  $(x^0, x^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, d-1$ , espazio-denborako koordenatu denak adierazteko laburdura da, non  $x^0 = t$ . Testuingurutik argi geratuko da noiz esan gura dugun  $x$ -koordenatua.
- Errepikatu indizeetarako Einstein-en konbentzioa erabiltzen da,  $\sum_{\mu} a^{\mu} a_{\mu} \equiv a^{\mu} a_{\mu}$ .
- Konjugazio konplexua honako sinboloaz adierazten da:  $(*)$ .
- Deribatu partzialak,  $_{,\mu} \equiv \partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ .
- $(3+1)$  dimentsiotan,  $(-+++)$  metrika signaturarekin egiten dugu lan.  
 $d = (2+1)$ -tan,  $(-++)$  signatura metrikoa erabiltzen da.
- $(3+1)$  espazio denborako indizeak letra grekoekin adierazten dira,  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ .  
 $(2+1)$ -etan,  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2$ .
- $(3+1)$  espazio-denborako dimentsiotan, letra latinek,  $i, j, \dots = 1, 2, 3$  osagai espazialak adierazten dituzten.  
 $(2+1)$  dimentsiotan,  $i, j, \dots = 1, 2$ .
- $\varepsilon^{012} = 1$ .

(83)

### A.2 Definizioak

- $g_{\mu\nu}$  metrika tentsorea eta bere alderantzizkoa,  $g^{\mu\nu}$  -zeinetarako  $g_{\mu\nu} g^{\nu\gamma} = \delta_{\mu}^{\gamma}$  eta  $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \mathbb{1}_4$ , koordenatu polarretan, honela adierazten dira, hurrenez hurren:  
 $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, r^2)$ ,  $(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1} = \text{diag}(-1, 1, r^{-2})$ .
- (84)
- $g_{\mu\nu}$  metrika tentsorea eta bere alderantzizkoa,  $g^{\mu\nu}$ , koordenatu zilindrikoetan honako hauek dira:  
 $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, r^2, 1)$ ,  $(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1} = \text{diag}(-1, 1, r^{-2}, 1)$ .
- (85)



- $\phi(x)$  funtzio eskalar bati dagokion Laplacearraren forma orokorra honakoa da:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x)). \quad (86)$$

Koordenatu zilindrikoetan,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) &\stackrel{(86)}{=} \frac{1}{r} \left( \partial_t (r (-1) \partial_t \phi(x)) + \partial_r (r 1 \partial_r \phi(x)) + \partial_\theta \left( r \frac{1}{r^2} \partial_\theta \phi(x) \right) + \partial_z (r 1 \partial_z \phi(x)) \right) \\ &= \left( -(\partial_t)^2 + \underbrace{\frac{\partial_r}{r} + (\partial_r)^2}_{\frac{\partial_r}{r} (r \partial_r)} + \frac{(\partial_\theta)^2}{r^2} + (\partial_z)^2 \right) \phi(x), \end{aligned} \quad (87)$$

$$\text{non } g = \det(g^{\mu\nu}) \stackrel{(85)}{=} \det(\text{diag}(-1, 1, r^2, 1)) = |-r^2| = r^2.$$

$$\text{Koordenatu polarretan, } \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) \stackrel{(86)}{=} \left( -(\partial_t)^2 + \frac{\partial_r}{r} (r \partial_r) + \frac{(\partial_\theta)^2}{r^2} \right) \phi(x). \quad (88)$$

$$\bullet \quad \boxed{F_{i0}} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i \stackrel{(1)}{=} \partial_i (-\phi) - \partial_t A_i = \left( \nabla(-\phi) - \partial_t \vec{A} \right)_i = \boxed{E_i}, \quad (89)$$

[5, p. 84, Footnote 1] erreferentzian adierazten den gisara, eta non (89(1)) urratsean  $A_\mu = (-\phi, \vec{A})$  gogoratu dugun.

$$\bullet \quad \boxed{\vec{B}} = B^k \hat{e}_k = \epsilon^{ijk} \partial_i A_j \hat{e}_k = \boxed{\nabla \times \vec{A}}. \quad (90)$$

$$\text{For } k=0, \quad B = |(\mathbf{90})|_{k=0} = B^{k=0} = \epsilon^{ij0} \partial_i A_j \equiv \epsilon^{ij} \partial_i A_j, \quad [5, \text{p. 84, Footnote 1}] \text{ erreferentziazatik.} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \epsilon^{ijk} F_{ij} &= \epsilon^{ijk} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) = \epsilon^{ijk} \partial_i A_j - (-\epsilon^{jik}) \partial_j A_i = \epsilon^{ijk} \partial_i A_j + \underbrace{\epsilon^{jik} \partial_j A_i}_{\epsilon^{ijk} \partial_i A_j, \text{ "dummy" } i \leftrightarrow j} \\ &= 2\epsilon^{ijk} \partial_i A_j \stackrel{(90)}{=} 2B^k \quad \leftrightarrow \quad \boxed{B^k = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{ij}}, \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \text{Then, } (\mathbf{92}) \quad &\leftrightarrow \quad \epsilon_{ljk} (2B^k = \epsilon^{ijk} F_{ij}) = 2\epsilon_{ljk} B^k = \epsilon_{ljk} \epsilon^{ijk} F_{ij} = \epsilon_{klj} \epsilon^{kij} F_{ij} \\ &\stackrel{(1)}{=} \left( \delta_l^i \underbrace{\delta_j^j}_3 - \underbrace{\delta_l^j \delta_j^i}_{\delta_l^i} \right) F_{ij} = 2\delta_l^i F_{ij} = 2F_{lj} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{F_{lj} = \epsilon_{ljk} B^k}, \end{aligned} \quad (93)$$

$$\text{where in } (\mathbf{93}(1)) \text{ we used } \epsilon_{123} \epsilon^{156} = \delta_2^5 \delta_3^6 - \delta_2^6 \delta_3^5. \quad (94)$$

### A.3 Eremuen teoriako kalkuluak

Sekzio honetan ageri direnak eremuen teoriako kalkuluetan erabili ohi diren emaitzak dira. Hemen azaltzen dira erakusteko ikertuak izan direla ikasleagatik. CS terminoaren higadura-ekuazioak lortzeko beharrezko urratsa izan zen honakoa.

#### A.3.1 AH ereduaren dentsitate Hamiltondarra

AH ereduari dagokion  $\mathcal{H}$  dentsitate Hamiltondarra honako hau da:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi(x))} (\partial_0 \phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^*(x))} (\partial_0 \phi^*(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu(x))} (\partial_0 A_\nu(x)) - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial |D_0 \phi(x)|^2}{\partial(\partial_0 \phi(x))} (\partial_0 \phi(x)) + \frac{1}{2} \frac{\partial |D_0 \phi(x)|^2}{\partial(\partial_0 \phi^*(x))} (\partial_0 \phi^*(x)) + \frac{1}{4} \frac{\partial (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}{\partial(\partial_0 A_\nu(x))} (\partial_0 A_\nu(x)) - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{2} (D^0 \phi(x))^* (\partial_0 \phi(x)) + \frac{1}{2} (D^0 \phi(x)) (\partial_0 \phi^*(x)) + \frac{1}{4} (4F^{0\nu}) (\partial_0 A_\nu(x)) - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{2} (D^0 \phi(x))^* (\partial_0 \phi(x)) + \frac{1}{2} (D^0 \phi(x)) (\partial_0 \phi^*(x)) - \underbrace{F^{0\nu} (\partial_0 A_\nu(x))}_{-E^2} - \frac{1}{4} \underbrace{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\stackrel{(1)}{=} 2(E^2 - B^2)} \\
&\quad - \frac{1}{2} |D_\mu(x) \phi(x)|^2 - \mathcal{V}(|\phi(x)|) \\
&= \frac{1}{2} |D_0(x) \phi(x)|^2 + \frac{1}{2} |D_i(x) \phi(x)|^2 + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + \mathcal{V}(|\phi(x)|), \tag{95}
\end{aligned}$$

non (95(1)) pausuan ondorengoa erabili dugun:

$$\begin{aligned}
\boxed{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} &= F_{0\nu} F^{0\nu} + F_{i\nu} F^{i\nu} = \left( 0 + \underbrace{F_{0i}}_{E_i} \underbrace{F^{0i}}_{\underbrace{g^{00}}_{-1} g^{ii} \underbrace{F_{0i}}_{E_i}} \right) + \left( \underbrace{F_{i0}}_{(-F_{0i})} \underbrace{F^{i0}}_{(-F^{0i})} + \underbrace{F_{ij}}_{\stackrel{(93)}{=} B^k \epsilon_{ijk}} \underbrace{F^{ij}}_{\stackrel{(93)}{=} B_k \epsilon^{ijk}} \right) \\
&= -2E_i E^i + B^k B_k = \boxed{2(B^2 - E^2)}. \tag{96}
\end{aligned}$$

### A.3.2 AH ereduaren eremu-ekuazioak

Higidura-ekuazioak lortzeko, Euler-Lagrange ekuazioak erabili dira, kasuan-kasuko  $\varphi(x) = \phi(x)$ ,  $A_\nu(x)$  eremuaz,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = 0, \quad (97)$$

- $\phi(x)$ -rentzat, [5, p. 91, Eq. (2.1.3)]

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \frac{1}{2} \underbrace{\left( \overbrace{g^{\alpha\beta} (D_\alpha(x)\phi(x))^*}^{(D^\beta(x)\phi(x))^*} \overbrace{(\partial_\beta \phi(x) - i e A_\beta(x)\phi(x))}^{D_\beta(x)\phi(x)} \right)}_{g^{\alpha\beta} (D_\alpha(x)\phi(x))^* (\delta_\beta^\mu - 0) = (D^\mu(x)\phi(x))^*} \\ & - \left\{ \frac{1}{2} \underbrace{g^{\alpha\beta} (D_\alpha(x)\phi(x))^*}_{(D^\mu(x)\phi(x))^* (-i e A_\mu(x)), \text{“dummy” } \beta \rightarrow \mu} \underbrace{(0 - i e A_\beta(x))}_{\partial (D_\beta(x)\phi(x)) / \partial \phi(x)} + \overbrace{\frac{\lambda}{4} 2 (\phi(x)\phi^*(x) - \eta^2)\phi^*(x)}^{\partial \mathcal{V}(|\phi(x)|) / \partial \phi(x)} \right\} \\ & = \boxed{\frac{1}{2} \underbrace{(\partial_\mu + i e A_\mu(x)) (D^\mu(x)\phi(x))^*}_{(D_\mu(x) D^\mu(x)\phi(x))^*} - \frac{\lambda}{2} (|\phi(x)|^2 - \eta^2)\phi^*(x) = 0}. \end{aligned} \quad (98)$$

- $A^\mu(x)$ -rentzat, [5, p. 91, Eq. (2.1.4)]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \partial_\mu \underbrace{\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu(x))} \left( F_{\alpha\beta} \overbrace{F_{\gamma\rho} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\rho}}^{F^{\alpha\beta}} \right)}_{g^{\alpha\gamma} g^{\beta\rho} \left( (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) F_{\gamma\rho} + F_{\alpha\beta} (\delta_\gamma^\mu \delta_\rho^\nu - \delta_\rho^\mu \delta_\gamma^\nu) \right)} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_\nu(x)} \left\{ \underbrace{g^{\alpha\beta} (\partial_\beta + i e A_\beta(x)) \phi^*(x)}_{(D^\alpha(x)\phi(x))^*} \underbrace{(\partial_\alpha - i e A_\alpha(x)) \phi(x)}_{D_\alpha(x)\phi(x)} \right\} \\ & \underbrace{\left( g^{\mu\gamma} g^{\nu\rho} - g^{\nu\gamma} g^{\mu\rho} \right) F_{\gamma\rho} + F_{\alpha\beta} \left( g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} \right)}_{F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} \stackrel{(1)}{=} 4F^{\mu\nu}(x)} \\ & = \frac{1}{4} \partial_\mu \left( 4F^{\mu\nu}(x) \right) - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left\{ (0 + i e \delta_\beta^\nu) \phi^*(x) D_\alpha(x) \phi(x) + (D_\beta(x) \phi(x))^* (0 - i e \delta_\alpha^\nu) \phi(x) \right\} = 0 \\ & = \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) - \underbrace{\frac{i e}{2} \left( \phi^*(x) D^\nu(x) \phi(x) - \phi(x) (D^\nu(x) \phi(x))^* \right)}_{j^\nu(x)} = 0}, \end{aligned} \quad (99)$$

non (99(1)) urratsean erabili dugun  $F_{\mu\nu}(x)$  indar tentsore elektromagnetikoa antisimetrikoa dela,

$$F^{\nu\mu}(x) = \partial^\nu A^\mu(x) - \partial^\mu A^\nu(x) = - \left( \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \right) = -F^{\mu\nu}(x). \quad (100)$$

### A.3.3 AHCS ereduaren eremu-ekuazioak

AHCS ereduari, (48), dagozkion higidura-ekuazioak honako hauek dira: a(98) ekuazioa bera, Chern-Simons terminoa ez delako  $\phi(x)$  eremu eskalarraren menpeko, eta, (99) eta (51) ekuazioetatik, [5, p. 91, Eq. (2.1.4)]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) - \frac{ie}{2} \left( \phi^*(x) D^\nu(x) \phi(x) - \phi(x) (D^\nu(x) \phi(x))^* \right) + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\nu\alpha\mu} F_{\alpha\mu}(x) = 0. \quad (101)$$

$$(101) = \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) - \frac{ie}{2} \left( \underbrace{\phi^*(x) \underbrace{D^\nu \phi(x)}_{\partial^\nu \phi(x) - i e A^\nu(x) \phi(x)} - \phi(x) \underbrace{(D^\nu(x) \phi(x))^*}_{\partial^\nu \phi^*(x) + i e A^\nu(x) \phi^*(x)}}_{\phi^*(x) \partial^\nu \phi(x) - \phi(x) \partial^\nu \phi^*(x) - 2i e A^\nu(x) |\phi(x)|^2} \right) + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\nu\alpha\mu} F_{\alpha\mu}(x) = 0, \quad (102)$$

non  $j^\nu$  korrrontea honela definitzen den: [4, p. 3446, Eq. (2.4)]

$$j^\nu \equiv \frac{ie}{2} \left( \phi^*(x) \partial^\nu \phi(x) - \phi(x) \partial^\nu \phi^*(x) - 2i e A^\nu(x) |\phi(x)|^2 \right). \quad (103)$$

(55) Ansatz-a ordezkatzuz,  $A_\mu(x)$  gauge eremuari dagozkion eremu ekuazioak ematen ditu, (101), ondoren ageri dena, non primak parentesi arteko aldagaiarekiko deribatua adierazten duen,

- $$\begin{aligned}
 (102)_{\nu=0} &\stackrel{(55)}{=} \partial_\mu \left( \partial^\mu \underbrace{A^t(r)}_{g^{00} A_0(r) \stackrel{(84b)}{=} -A_0(r)} - \underbrace{\partial^t A^\mu(r)}_0 \right) - \frac{ie}{2} \left( 0 - 0 - 2i e \underbrace{A^t(r)}_{g^{00} A_0(r) = -A_0(r)} |\phi(r, \theta)|^2 \right) \\
 &+ \frac{\kappa}{2} \left( \underbrace{\epsilon^{012} F_{12}}_{\epsilon^{012} (\partial_1 A_2(r))} + \underbrace{\epsilon^{021} F_{21}}_{(-\epsilon^{012}) (-\partial_1 A_2(r))} \right) = 0 \\
 &\stackrel{=}{=} \kappa \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{r^2}} \epsilon_{012} \partial_1 A_2 = -\frac{\kappa}{r} \partial_1 \left( \frac{n-P(r)}{e} \right) \\
 &= \partial_\mu \partial^\mu (-A_0(r)) - e^2 (-A_0(r)) f^2(r) - \frac{\kappa}{r} \left( \frac{0 - P'(r)}{e} \right) \\
 &\stackrel{(88)}{=} \left( -0^2 + \frac{\partial_r}{r} + (\partial_r)^2 + \frac{0^2}{r^2} \right) (-V(r)) + e^2 V(r) f^2(r) + \frac{\kappa}{r} \frac{P'(r)}{e} \leftrightarrow \\
 &= - \left( \frac{V'(r)}{r} + V''(r) \right) + e^2 V(r) f^2(r) - \frac{\kappa}{e} \frac{P'(r)}{r} = 0 \\
 &\stackrel{(22a)}{=} - \left( \frac{V'(x)}{x} + V''(x) \right) + e^2 \frac{V(x)}{(\sqrt{\lambda})^2} f^2(x) + \frac{\kappa}{e} \frac{P'(x)}{x} = 0 \\
 &\stackrel{(22b-c)}{=} \boxed{-\frac{(xV'(x))'}{x} + \frac{V(x)}{\alpha^2} f^2(x) + \gamma \frac{P'(x)}{x} = 0}, \quad \text{Gauss-en lege bezala ezaguna}
 \end{aligned} \quad (104)$$

[4, p. 3442, Eq. (1.3a)],  $A_0(x)$ -rekiko higidura-ekuazioa da.

- $$\begin{aligned}
(102)_{\nu=1} &\stackrel{(55)}{=} \partial_\mu \left( \partial^\mu \underbrace{A^r}_0 - \partial^r A^\mu(r) \right) - \frac{ie}{2} \left( \phi^*(r, \theta) \underbrace{\partial^1}_{g^{11}\partial_1 \stackrel{(84)}{=} \partial_1} \phi(r, \theta) - \phi(r, \theta) \partial^1 \phi^*(r, \theta) - 0 \right) + 0 \\
&= -\partial_\mu \partial^r A^\mu(r) + ie^2 \underbrace{(f(r)f'(r) - f(r)f'(r))}_0 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \partial_\mu \partial^r A^\mu(r) = 0 \\
&= \partial_t \left( \underbrace{g^{rr}}_1 \partial_r \left( \underbrace{g^{tt}}_{-1} A_t(r) \right) \right) + \partial_r \left( \underbrace{g^{rr}}_1 \partial_r \left( \underbrace{g^{rr}}_1 \underbrace{A_r}_0 \right) \right) + \partial_\theta \left( \underbrace{g^{rr}}_1 \partial_r \left( \underbrace{g^{\theta\theta}}_{r^{-2}} \frac{(n - P(r))}{e} \right) \right) \\
&= \partial_t(-V'(r)) + (\partial_r)^2(0) + \partial_\theta \left( -2 \frac{n - P(r)}{er^3} - \frac{P'(r)}{er^2} \right) \quad \leftrightarrow \quad 0 = 0, \tag{105}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
(102)_{\nu=2} &\stackrel{(55)}{=} \partial_\mu \left( \partial^\mu \underbrace{A^\theta(r)}_{g^{22}A_2(r) \stackrel{(84)}{=} r^{-2}A_2(r)} - \underbrace{\partial^\theta A^\mu(r)}_0 \right) \\
&\quad - \frac{ie}{2} \left( \phi^*(r, \theta) \underbrace{\partial^\theta}_{g^{22}\partial_2 \stackrel{(84)}{=} r^{-2}\partial_2} \phi(r, \theta) - \phi(r, \theta) \partial^\theta \phi^*(r, \theta) - 2ie \underbrace{A^\theta(r)}_{g^{22}A_2(r) \stackrel{(84)}{=} r^{-2}A_2(r)} |\phi(r, \theta)|^2 \right) \\
&\quad + \frac{\kappa}{2} \left( \underbrace{\epsilon^{201} F_{01}}_{\epsilon^{201}(-\partial_1 A_0)} + \underbrace{\epsilon^{210} F_{10}}_{-\epsilon^{201}(\partial_1 A_0)} \right) = 0 \\
&\quad \underbrace{\kappa \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{r^2}} \varepsilon_{012}(-\partial_1 A_0) = +\frac{\kappa}{r} \partial_1 A_0}_{\kappa \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{r^2}} \varepsilon_{012}(-\partial_1 A_0) = +\frac{\kappa}{r} \partial_1 A_0} \\
&= \partial_\mu \partial^\mu \left( \frac{A^\theta(r)}{r^2} \right) - \frac{ie}{2r^2} f^2(r) (in - (-in)) - e^2 \frac{A_2(r)}{r^2} f^2(r) + \frac{\kappa}{r} V'(r) \\
&\stackrel{(88)}{=} \left( -0 + \frac{\partial_r}{r} + (\partial_r)^2 + 0 \right) \frac{n - P(r)}{er^2} + \cancel{\frac{ne}{r^2} f^2(r)} - e^2 \frac{n - P(r)}{er^2} f^2(r) + \frac{\kappa}{r} V'(r) \\
&\stackrel{\leftarrow er^2}{\rightarrow} -P''(r) + \frac{P'(r)}{r} + 2e^2 P(r) f^2(r) - 2\kappa er V'(r) = 0 \\
&\stackrel{(\text{22a}), (2\lambda)^{-1}}{\rightarrow} -P''(x) + \frac{P'(x)}{x} + \frac{e^2}{\lambda} P(x) f^2(x) + \frac{\kappa e}{\lambda} x V'(x) = 0 \\
&\stackrel{(\text{22b-c})}{=} \boxed{-P''(x) + \frac{P'(x)}{x} + \frac{P(x) f^2(x)}{\alpha^2} + \frac{\gamma x V'(x)}{\alpha^2} = 0}. \tag{106}
\end{aligned}$$

Bestalde, (55) Ansatz-a erabilita,  $\phi(x)$  eremu eskalarrari dagokion eremu-ekuazioa, (98), honela adieraz daiteke,

$$\begin{aligned}
(98) &= \underbrace{(D_\mu(x)D^\mu(x)\phi(x))^*}_{2A^\mu(x)\partial_\mu} - \lambda(|\phi(x)|^2 - 1^2)\phi^*(x) = 0 \\
&\stackrel{(55, 87)}{=} \left\{ \left( -0^2 + \frac{\partial_r}{r} + (\partial_r)^2 + \frac{(\partial_\theta)^2}{r^2} \right) + i e \underbrace{(\partial_t A^t(r) + 2A^t(r))}_0 \underbrace{\partial_t}_0 - e^2 A_t(r) \underbrace{A^t(r)}_{g^{00}A_0(r) \stackrel{(84)}{=} -A_0(r)} \right. \\
&\quad \left. + i e \underbrace{(\partial_\theta A^\theta(r))}_0 + 2 \underbrace{A^\theta(r)}_{g^{22}A_2(r)=r^{-2}A_2(r)} \underbrace{\partial_\theta}_{-in} - A_\theta(r) \underbrace{A^\theta(r)}_{g^{22}A_2(r)=r^{-2}A_2(r)} \right\} f(r) e^{-in\theta} \\
&\quad - \lambda(f^2(r) - 1^2)f(r) e^{-in\theta} = 0 \quad \xleftrightarrow{e^{+in\theta}} \frac{f'(r)}{r} + f''(r) + e^2 (A_0(r))^2 f(r) \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left( -n^2 + i e 2A_2(r)(-in) - e^2 (A_2(r))^2 \right)}_{-n^2 + 2n \underbrace{\frac{n-P(r)}{r}}_{\frac{1}{r}} - \underbrace{\frac{e^2 n^2 + P^2(r) - 2nP(r)}{r^2}}_{\frac{e^2}{r^2}} = -P^2(r)} f(r) - \lambda(f^2(r) - 1^2)f(r) \\
&= \frac{f'(r)}{r} + f''(r) + e^2 V^2(r) f(r) - \frac{P^2(r) f(r)}{r^2} - \lambda(f^2(r) - 1^2)f(r) = 0 \\
&\stackrel{(22a)}{=} (\sqrt{2\lambda})^2 \frac{f'(x)}{x} + (\sqrt{2\lambda})^2 f''(x) + e^2 V^2(x) f(x) - \frac{(\sqrt{2\lambda})^2}{x^2} P^2(x) f(x) - \lambda(f^2(x) - 1^2)f(x) \\
&\leftrightarrow \boxed{\frac{f'(x)}{x} + f''(x) + \frac{V^2(x) f(x)}{\alpha^2} - \frac{P^2(x) f(x)}{x^2} - \frac{1}{2}(f^2(x) - 1^2)f(x) = 0}. \tag{107}
\end{aligned}$$

# Simetriaren haustura espontaneoa

Eremu fisikoak (hemen,  $\phi(x)$  eremu eskalarra), oinarritzko-egoeren gaineko kitzikapenak direnak, oinarritzko-egoera partikularrarekiko desbideraketa moduan adieraziak izan daitezke, i.e., oinarritzko-egoera bat aukeratu eta “zentrotik” edo “orekatik” apur bat desplazatuz [8, p. 374, l. 3]. AH ereduaren oinarritzko-egoera degeneratua da, oinarritzko-egoeren barietatean,  $\mathcal{M} - (5)$  ekuazioko  $S^1$  zirkulua, infinitu oinarritzko-egoera posible daude, denak erlazionatuak errotazio-simetria bitartez. Bat aukeratzearekin nahikoa da. Minimo bat aukeratzen dugu, esaterako,  $\phi_1(x) = \eta$  eta  $\phi_2(x) = 0$ <sup>7</sup>, eta  $\rho(x)$   $\xi(x)$  eremu berriak aurkeztuko ditugu, perturbazioak direnak  $\phi(x)$ -ren magnitude eta fasean, hurrenez hurren, hautatutako oinarritzko-egoeraren inguruan:

non  $|\rho(x)|, |\xi(x)| \ll \eta$ . Hots,  $\phi(x)$  eremu konplexua  $\rho(x)$  eta  $\xi(x)$  eremu eskalar errealeen funtzioan adierazi dugu.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\stackrel{(108)}{=} \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \\ &+ \frac{1}{2} \underbrace{\left( \partial_\mu - i e A_\mu(x) \right) \left( \eta + \rho(x) \right)}_{\substack{\partial_\mu \eta + \partial_\mu \rho(x) - i e A_\mu(x) (\eta + \rho(x)) \\ 0 + \eta \partial_\mu \quad \partial_\mu \rho(x) + \rho(x) \partial_\mu}} e^{-i\xi(x)} \left( \partial^\mu + e i A^\mu(x) \right) \left( (\eta + \rho(x)) e^{i\xi(x)} \right) \\ &\underbrace{e^{-i\xi(x)} \left( \eta \left( -i \partial_\mu \xi(x) \right) + \partial_\mu \rho(x) + \rho(x) \left( -i \partial_\mu \xi(x) \right) - i e A_\mu(x) \left( \eta + \rho(x) \right) \right)}_{\left| \partial_\mu \rho(x) + i \left( \eta + \rho(x) \right) \left( \partial_\mu \xi(x) + e A_\mu(x) \right) \right|^2} \\ &\underbrace{\quad}_{\partial_\mu \rho(x) \partial^\mu \rho(x) + \left( \eta^2 + \rho^2(x) + 2 \eta \rho(x) \right) \left( \partial_\mu \xi(x) \partial^\mu \xi(x) + e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) + 2 e \partial_\mu \xi(x) A^\mu(x) \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\frac{\lambda}{4} \left( (\eta + \rho(x))^2 - \eta^2 \right)^2}_{\frac{\lambda}{4} \rho^4(x) + \lambda \eta \rho^3(x) + \lambda \eta^2 \rho^2(x)} \\
& = \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)}_{\text{kinetic term of } A^\mu(x)} + \underbrace{\frac{\eta^2 e^2}{2} A_\mu(x) A^\mu(x)}_{\text{mass term of } A^\mu(x)} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \rho(x) \partial^\mu \rho(x)}_{\text{kinetic term of } \rho(x)} + \underbrace{\frac{\lambda \eta^2 \rho^2(x)}{2}}_{\text{mass term of } \rho(x)} + \underbrace{\frac{1}{2} \eta^2 \partial_\mu \xi(x) \partial^\mu \xi(x)}_{\text{kinetic term of } \xi(x)} + \underbrace{0}_{\text{mass term of } \xi(x)} \\
& + \underbrace{\eta^2 e \partial_\mu \xi(x) A^\mu(x) + \mathcal{O}(\rho(x) A_\mu(x) A^\mu(x), \rho(x) \xi^2(x), \rho^3(x), \dots)}_{\mathcal{L}_{\text{int.}}}
\end{aligned} \tag{109}$$

Modu honetan, jatorrizko teoriako, (10),  $U(1)_L$  simetria –hau da,  $(\phi_1(x), \phi_2(x))$ -ko errotazioen menpeko inbariantza, non  $\phi(x) = \phi_1(x) + i \phi_2(x)$ – apurtua izan da,  $U(1)_L \mapsto \mathbb{1}$ , oinarritzko-egoera (asimetriko) partikularren hautu arbitrarioaren bitartez. Esaterako, (10) funtzio bikoitia da  $\phi(x)$ -rekiko, i.e., ez da aldatzen  $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$ -rekiko, baina (109) Lagrangeak berfomulatua ez da bikoitia bere eremuekiko.

Hau gertatu da ez dagoelako  $U(1)_L$ -rekiko inbariantea den oinarritzko-egoerarik. Oinarritzko-egoera bakoitzak, berak bakarrik, ez du jatorrizko dentsitate Lagrangearren simetria betetzen. Dentsitate Lagrangearra fase-transformazioekiko inbariantea den arren, Higgs eremuaren oinarritzko-egoera, ez. Zehazki, fase-transformazio baten menpean, zein errotazio bat den  $\phi(x)$ -ren plano konplexuan, oinarritzko-egoera bat beste oinarritzko egoera batera aldatzen da, oinarritzko-egoerak degeneratuta baitaude eta teoriaren simetria eragiketengatik konektatuta baitaude. Oinarritzko-egoera guztien bildumak badu jatorrizko dentsitate Lagrangearren simetria, baina partikulen espektrua lortzeko oinarritzko-egoera bakarria hautatu behar dugu, eta horrek simetria hori hausten du. Honi simetria haustura “espontaneo” deritzo inolako kanpo-eragileren ondorio ez delako,  $\mathcal{V}(|\phi(x)|)$  Higgs potentzialak berak apurtzen du gauge inbariantza lokala oinarritzko-egoeretako asimetria bat dela medio. [8, p. 375]

Kalkula dezagun masen espektrua, hau da, lor ditzagun eremuei dagozkien masak, eremua<sup>2</sup> forma-ko terminoen koefizienteak erreparatuta.  $A_\mu^2(x) = A_\mu(x) A^\mu(x)$ -rekiko proportzionala den terminoak adierazten du "fotoi-ak,  $A^\mu(x)$  eremu elektrodinamikoaren kuantua, zeinen presentziak  $U(1)_G$ -ren menpeko inbariantza  $U(1)_L$ -rekiko inbariantzara aldatzen duen, masa lortu duela, ( $m_A = +e\eta$ ) simetria haustura espontaneoaren bitartez ("Higgs mekanismoa"), Goldstone bosoiak xurgatuz<sup>8</sup> kasu globaletik.  $A^\mu(x)$ -ren masa jatorrizko Lagrangearrean, (10),  $\phi^*(x)\phi(x)A_\mu(x)A^\mu(x)$ -ren proportzionala den terminotik dator, zeinek, behin  $\phi(x)$  ordezkaturik hautatutako oinarritzko-egoeraren inguruko fluktuazioen moduan, (108),  $A_\mu(x)A^\mu(x)$  eta konstante baten arteko biderketa ematen duen; id est,  $A^\mu(x)$ -ren masa-termino bat.

(109)-ren hirugarren eta laugarren batugaiek,  $(1/2)\partial_\mu \rho(x)\partial^\mu \rho(x) + \lambda \eta^2 \rho^2(x)$ ,  $\rho(x)$  eremu eskalarraren Klein-Gordon Lagrangeak aske bat osatzen dute, zeinek  $m_\rho = \sqrt{2\lambda}\eta$  masa dakarren.

<sup>8</sup>Goldstone-n teorema dion legez, simetria global jarraitu baten simetria apurketa espontaneoak masa gabeko partikula eskalar ("Goldstone bosoiak") bat edo gehiagoren agerpena dakar [8, p. 377, l. 19-23][15, p. 286, l. 11-12].



Bostgarren terminoa,  $(1/2)\eta^2\partial_\mu\xi(x)\partial^\mu\xi(x)$ ,  $\xi(x)$ -rentzako Lagrangea aske bat da, masa gabekoa ( $m_\xi = 0$ ), ez dagoelako  $\xi^2(x)$  formako terminorik.

Modu intuitiboan azalduta,  $m_\xi = 0$  izatea erlazionatuta dago  $\xi(x)$  aldatzen duten eremu kitzikapenei inolako erresistentziarik ez egotearekin. Kitzikapen hauek norabide erradialarekiko perpendikularki gertatzen dira,  $(\phi_1(x), \phi_2(x))$  plano konstantean gertatzen diren errotazioak dira,  $|\phi(x)| = \eta$  oinarritzko-egoerako haran zirkularrean barrena gertatzen direnak, potentzial dentsitatearen hondoa mantenduz. Fenomeno hau erlazionatuta dago dentsitate Lagrangearra eta, beraz, baita  $\mathcal{V}(|\phi(x)|)$  potentzial dentsitatea ere, (6a) fase-transformazioekiko –hau da,  $\phi(x) = 0$  puntuaren inguruko errotazioekiko– inbariante izatearekin.

Bestalde, fluktuazio erradialek esan nahi dute  $\rho(x)$  desplazatzeko, hau da,  $\mathcal{V}(|\phi(x)|)$  energia potentzialaren beste balio bat hartzeko, energia behar dela, energia potentziala gutxi gorabehera parabolikoa delako minimoen zirkulutik hurbil [8, p. 377, Footnote 1][15, p. 286, l. 4-7].

Gainontzeko terminoek,  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ . Lagrangearren bilduta, interakzioak edo akoplamenduak definitzen dituzte.  $\eta^2\partial_\mu\xi(x)A^\mu(x)$  terminoak  $\xi(x)$   $A^\mu(x)$  bihurtzen deneko erpina edo bertzea deskribatzen du eta  $\xi(x)$  eremu faltsua dela iradokitzen du [8, p. 380, l. 1-5]. Honengatik,  $\xi(x)$  gauge artefaktu edo “mamu” partikula ez-fisiko gisara ezagutzen da.

Hala ere, nahi ez dugun  $\xi(x)$  <sup>9</sup> “Goldstone bosoi” eta  $\eta^2\partial_\mu\xi(x)A^\mu(x)$  akoplamendu-termino ez-fisikoa zeharo ezaba daitezke Lagrangea originalaren, (10), gauge inbariantza lokalaz baliatuta. Hots, (108) ekuazioa (10) ekuazioan ordezkatu aurretik,  $e\alpha(x) = -\xi(x) \in \mathbb{R}$  balioko (6a) gauge fase-transformazioa aplikatu dezakegu, zeinen menpean, simetria hausturarik pairatu ez duen Lagrangearra, (10), inbariantea den. Honela, (108) ekuazioko  $e^{i\xi(x)}$  ezabatuko dugu:

$$\phi(x) \xrightarrow{U(1)_L|_{e\alpha(x)=-\xi(x)}} \phi(x) e^{i(-\xi(x))} \stackrel{(108)}{=} (\eta + \rho(x)) e^{i\xi(x)} e^{i(-\xi(x))} = (\eta + \rho(x)). \quad (110)$$

Honek esan nahi du  $\xi(x)$  eremu laguntzaile edo auxiliarrak gauge askatasun-graduak dituela soilik, ez du esangura fisikorik. Berez, masa gabeko eremu eskalarrik ez da aurkitu oraindik.

Jatorrizko dentsitate Lagrangearrean, (10), (110) ekuazioa ordezkatuta, (109) ekuazioan lortu genuenaren berdina dugu, baina  $\xi(x) = 0$  eginda. Hau da, Lagrangearrak forma bera hartzen du eremu-aldagai berrien zein zaharren funtzioan ( $\mathcal{L}$  Lagrangearra inbariante izateak esan nahi duenaren beste interpretazio bat da) [8, p. 380, l. 15-17]. Era honetan,  $\xi(x)$ , nahi ez genuen “Goldstone bosoi” eta  $\eta^2\partial_\mu\xi(x)A^\mu(x)$  termino ez-fisikoa eliminatu ditugu (109) ekuaziotik. Honela,  $\rho(x)$  masadun eremu eskalarrarekin (“Higgs” partikula) eta  $A^\mu(x)$  masadun gauge eremu bektorialarekin geratu gara soilik. (110) gauge komenigarria hautatu dugu, eta  $\eta$  oinarritzko-egoera jakin baten inguruko fluktuazio moduan idatzi ditugu eremuak, baina bi dentsitate Lagrangearek, (10) eta (109)| $_{\xi(x)=0}$ , sistema fisiko bera deskribatzen dute.

Eremu eskalarrek (masadunak zein masa gabeak) askatasun-gradu bakarra dute [15, p. 294, l. 25-26]. Bestalde,  $A_\mu(x)$  eremu bektorial masa gabeak bi askatasun-gradu ditu (zeharkako polari-

<sup>9</sup>Ez dugu nahi, Goldstone bosoiak simetria jarraitu eta globalaren simetria apurketa espontaneoaren ondorioz agertzen direlako –ikusi 8 orri oina–; gure kasuan, berriz, simetria hori ez da globala, lokala da.

zazioak). Ondorioz, simetria haustura espontaneo gertatu aurretik:  $2 \times 1$  ( $\phi_1(x)$ -tik eta  $\phi_2(x)$ -tik) +  $2$  ( $A_\mu(x)$  masa gabeko eremutik) =  $4$ .  $A^\mu(x)$  gauge eremuak Goldstone bosoiaren duenean simetria haustura espontaneoaren ostean, askatasun-gradu extra bat hartzen du (polarizazio longitudinal egoera) [8, p. 381, l. 1-2][15, p. 294, l. 27-28], masa irabazteaz aparte. Ondorioz, honakoa dugu  $1$  ( $\rho(x)$ -tik) +  $3$  ( $A_\mu(x)$  masdunetik) =  $4$ . Beraz, askatasun-graduen kopurua kontserbatzen da.