

# FINANZAS CUANTITATIVAS

## APUNTES-ESQUEMA

Autor:  
Asier Merino Herrán



# Índice general

<b>I Fundamentos básicos de derivados, riesgo y rentabilidad</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Conceptos financieros básicos . . . . .	5
1.1.1. Terminología básica . . . . .	5
1.1.2. Contratos forward y futures . . . . .	6
1.1.3. Contratos future . . . . .	7
1.1.4. Conteo de días . . . . .	7
<b>2. Productos financieros básicos</b>	<b>9</b>
2.1. Opciones . . . . .	9
2.1.1. Terminología . . . . .	10
2.1.2. Tipos de opciones . . . . .	11
2.1.3. Call-Put Parity . . . . .	11
2.1.4. Opciones binarias/ digitales . . . . .	11
2.1.5. Portfolio of options/Option strategy . . . . .	12
2.1.6. Opciones a largo plazo . . . . .	16
2.1.7. Otros derivados . . . . .	16
2.2. Productos de renta fija: bonos . . . . .	18
2.2.1. Contratos simples de renta fija . . . . .	18
2.2.2. Mercado internacional de bonos . . . . .	19
2.2.3. Rentabilidad de bonos (Yield) . . . . .	19
2.2.4. Yield Curve . . . . .	20
2.2.5. Duración . . . . .	20
2.2.6. Convexidad . . . . .	21
2.2.7. Intereses dependientes del tiempo (Time-Dependent Interest Rates) . . . . .	22
2.2.8. Tasas Forward y bootstrapping . . . . .	22
2.3. Swaps . . . . .	24
2.3.1. Swaps de intereses vainillas . . . . .	24
2.3.2. Relación entre swaps y bonos: obtener valor justo del interés fijo . . . . .	25
2.3.3. Bootstrapping . . . . .	26
2.3.4. Otras características de contratos swap . . . . .	27
2.3.5. Otros tipos de swaps . . . . .	27
<b>3. Aletoriedad</b>	<b>29</b>
3.1. Algunas propiedades . . . . .	29
3.1.1. Desigualdad de Jensen . . . . .	29
3.1.2. Propiedad de Markov . . . . .	29
3.1.3. Propiedad de martingala . . . . .	29
3.1.4. Lema de Itô . . . . .	29
3.1.5. Algunos ejemplos de caminos aleatorios . . . . .	30
3.2. Función de densidad de transición . . . . .	31
3.2.1. Ecuación de Fokker-Planck o de Kolmogorov hacia delante . . . . .	31
3.3. Tiempos de primer escape (First-exit times) . . . . .	32
3.3.1. Funciones de distribución acumulada para first-exit times . . . . .	33
3.3.2. Tiempos de primer escape esperados (Expected first-exit times) . . . . .	33
3.4. Estrategias en apuestas . . . . .	34
3.4.1. Blackjack . . . . .	34
3.4.2. Criterio de Kelly . . . . .	35
3.4.3. Apuestas a eventos deportivos: carreras de caballos . . . . .	35

3.5. Extreme value theory . . . . .	38
<b>4. Modelación básica de opciones</b>	<b>39</b>
4.1. Modelos Black-Scholes . . . . .	39
4.1.1. Modelo opciones básicas . . . . .	39
4.1.2. Opciones de activos con dividendos continuos . . . . .	39
4.1.3. Currency options . . . . .	40
4.1.4. Commodity options . . . . .	40
4.1.5. Forwards contracts . . . . .	40
4.1.6. Future contracts . . . . .	40
4.1.7. Opciones sobre futuros . . . . .	41
4.1.8. Condiciones de frontera y finales . . . . .	41
4.1.9. Algunas propiedades de las opciones europeas . . . . .	41
4.2. Comportamiento de las EDPs . . . . .	45
4.2.1. Significado de los términos de una EDP . . . . .	45
4.3. Soluciones y griegas . . . . .	46
4.3.1. Griegas . . . . .	46
4.3.2. Tablas de soluciones . . . . .	46
4.3.3. Representación gráfica de soluciones . . . . .	47
4.3.4. Volatilidad implícita . . . . .	51
4.3.5. Tipos de coberturas . . . . .	52
4.4. Generalizaciones sencillas del modelo . . . . .	53
4.4.1. Dividendos discretos . . . . .	53
4.4.2. Préstamo de acciones . . . . .	53
4.4.3. Parámetros dependientes del tiempo . . . . .	53
4.4.4. Power options y log contracts . . . . .	53
4.5. Modelización la volatilidad . . . . .	54
4.5.1. Volatilidad por media estadística . . . . .	54
4.5.2. Estimar parámetros: maximum likelihood estimation (MLE) . . . . .	57
4.5.3. Volatilidad dependiente del tiempo en modelos sencillos . . . . .	58
4.6. Cobertura: volatilidad implícita vs real . . . . .	59
4.6.1. Comportamiento de la volatilidad implícita . . . . .	61
4.7. Opciones americanas . . . . .	62
4.7.1. Dividendos discretos . . . . .	62
4.7.2. Opciones one-touch . . . . .	62
4.7.3. Otros tipos de opciones americanas . . . . .	63
4.8. Opciones multiasset . . . . .	64
4.8.1. Obtención de la correlación . . . . .	64
4.8.2. Opciones basket . . . . .	65
4.8.3. Opciones exchange . . . . .	65
4.8.4. Quantos . . . . .	66
<b>5. Valoración del riesgo</b>	<b>67</b>
5.1. Gestión de carteras . . . . .	67
5.1.1. Carteras diversificadas . . . . .	67
5.1.2. Elección de activos dentro de una cartera diversificada: modelo de Markowitz (MPT) . . . . .	68
5.1.3. Capital Asset Pricing Model (CAPM) . . . . .	70
5.1.4. Medición del desempeño . . . . .	71
5.2. Value at Risk (VaR) . . . . .	72
5.2.1. VaR de un solo activo . . . . .	72
5.2.2. VaR de una cartera de activos . . . . .	73
5.2.3. Carteras con derivados . . . . .	73
<b>6. Predicción del mercado</b>	<b>75</b>
6.1. Análisis técnico . . . . .	75
6.2. Wave theory . . . . .	81
6.2.1. Olas de Elliott y números de Fibonacci . . . . .	81

<b>II    Otros tipos de opciones y derivados</b>	<b>83</b>
<b>7. Clasificación genérica de opciones exóticas</b>	<b>85</b>
7.1. Clasificación de opciones complejas . . . . .	85
7.1.1. Dependencia del tiempo . . . . .	86
7.1.2. Flujo de dinero . . . . .	86
7.1.3. Dependencia del camino . . . . .	86
7.1.4. Dimensionalidad . . . . .	87
7.1.5. Orden . . . . .	87
7.1.6. Decisiones integradas . . . . .	88
7.2. Algunos ejemplos de derivados exóticos y dependientes del camino . . . . .	88
7.2.1. Compounds options . . . . .	88
7.2.2. Choosers options . . . . .	88
7.2.3. Extendible options . . . . .	89
7.2.4. Range Notes . . . . .	89
7.2.5. Barrier Options . . . . .	89
7.2.6. Asian Options . . . . .	89
7.2.7. Lookback Options . . . . .	90
7.3. Resumen de la clasificación . . . . .	90
<b>8. Algunas opciones exóticas</b>	<b>91</b>
8.1. Barrier options . . . . .	91
8.1.1. Modelización de opciones barrera . . . . .	91
8.1.2. Fórmulas analíticas . . . . .	93
8.1.3. Otras posibles características . . . . .	94
8.1.4. First-exit times . . . . .	95
8.2. Derivados fuertemente dependientes del camino . . . . .	96
8.2.1. Muestras continuas . . . . .	96
8.2.2. Muestras discretas . . . . .	97
8.2.3. Ejercicio anticipado . . . . .	97
8.3. Opciones asiáticas . . . . .	98
8.3.1. Algunas soluciones analíticas . . . . .	100
8.4. Opciones lookback . . . . .	102
8.4.1. Medición continua del máximo . . . . .	102
8.4.2. Medición discreta del máximo . . . . .	102
8.4.3. Algunas soluciones analíticas . . . . .	103
8.5. Opciones passport . . . . .	105
8.5.1. Limitación en el número de operaciones . . . . .	106
8.5.2. Limitación de tiempo entre operaciones . . . . .	106
8.6. Otras opciones exóticas . . . . .	108
8.6.1. Forward-start options . . . . .	108
8.6.2. Shout options . . . . .	108
8.6.3. Capped lookbacks y asiáticas . . . . .	108
8.6.4. Combinaciones de cualidades . . . . .	109
8.6.5. Volatility options . . . . .	109
8.6.6. Ladder options . . . . .	110
8.6.7. Parisian options . . . . .	110
8.6.8. Balloon option . . . . .	111
8.6.9. Break/cancelable forward . . . . .	111
8.6.10. Contingent premium option . . . . .	111
8.6.11. Coupe option . . . . .	111
8.6.12. Extendible option/swap . . . . .	111
8.6.13. Hawai'ian option . . . . .	111
8.6.14. Himalayan option . . . . .	112
8.6.15. HYPER option . . . . .	112

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>III Renta fija y derivados</b>	<b>113</b>
<b>9. Modelización de instrumentos de renta fija</b>	<b>115</b>
9.1. Modelado de tasas de interés one-factor . . . . .	115
9.1.1. Modelización de bonos . . . . .	115
9.1.2. Market price of risk $\lambda(r, t)$ . . . . .	117
9.1.3. Modelos y soluciones manejables . . . . .	117
9.1.4. Algunos modelos famosos . . . . .	121
9.1.5. Forwards y futures con tipos estocásticos . . . . .	122
9.2. Ajuste de la Yield Curve . . . . .	124
9.2.1. Ho & Lee . . . . .	124
9.2.2. Vasicek extendido de Hull & White . . . . .	124
9.2.3. Pros y contras del ajuste para modelos de un solo factor para ajustar yield curve .	126
9.3. Derivados de la tasa de interés . . . . .	127
9.3.1. Bonos callable . . . . .	127
<b>IV Apéndices</b>	<b>129</b>
<b>A. Cálculo básico</b>	<b>131</b>
A.1. Algunos resultados básicos de cálculo . . . . .	131
<b>B. Apéndices de la Parte 1</b>	<b>133</b>
B.1. Cálculo de Itô . . . . .	133
B.2. Generalizaciones sencillas de Black-Scholes . . . . .	136
B.3. Opciones Make Your Mind Up . . . . .	139
B.4. Media y varianza de cobertura con volatilidad implícita . . . . .	145
<b>C. Apéndices de la Parte 2</b>	<b>155</b>
<b>D. Apéndices extra</b>	<b>157</b>
D.1. Blackjack y apuestas . . . . .	157
D.1.1. Reglas del blackjack . . . . .	157



## **Parte I**

# **Fundamentos básicos de derivados, riesgo y rentabilidad**



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Conceptos financieros básicos

En esta sección se explican ciertos conceptos financieros básicos en inglés.

#### 1.1.1. Terminología básica

- **Equity, stock, share:** acción de una empresa.
- **Shareholders:** accionistas.
- **Dividends:** dividendos. Pagas generalmente cada 6 meses. **Cum** cuando se va a pagar el siguiente dividendo o **Ex** cuando no. Suele haber bajadas del precio de acción cuando se paga dividendo. Si en cierto momento  $t_d$  se paga un dividendo  $q \cdot S$ , justo después de pagar el dividendo la acción en ausencia de arbitraje vale

$$S(1 - q)$$

- **Stock split:** De vez en cuando empresas pueden hacer división de acciones, i.e, cada acción pasa a ser  $N$  acciones y el precio se divide entre  $N$ .
- **Commodities:** producto en bruto como oro, petróleo, ... Se suelen usar en mercados a futuro.
- **Foreign exchange, Forex, FX:** Cambio de divisas. Debe haber cambio consistente entre divisas para evitar arbitraje.
- **Índice:** Medida de cómo va un mercado/economía. Se calcula como la suma de un **basket** o conjunto selecto de acciones.
- **Interest:**

- **Simple interest:** se aplica interés  $r$  al valor inicial.

$$(1 + r)P$$

- **Compound interest:** se aplica interés  $r$  al valor inicial y al interés ganado:
  - **Discretely compounded interest:**

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} P$$

- **Continuously compounded interest:**

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} P = e^{nr} P$$

- **Fixed:** interés fijo.

- **Floating:** interés variable.
- **Present value:** actualización de un valor futuro.
- **Coupon-bearing bonds:** bonos con cupón cada X tiempo que finalmente paga un **principal**.
- **Interest rate swaps:** dos partes se intercambian los intereses, por ejemplo, uno paga un  $r$  fijo y el otro el del Euribor 6M, o Euribor 3M vs Euribor 6M. Hay un capítulo entero a continuación.
- **Index-linked bond:** bonos asociados a un índice para evitar la inflación.
- **Retail Price Index (RPI):** índice que mide la inflación en el Reino Unido.
- **Consumer Price Index (CPI):** índice que mide la inflación en EE.UU.
- **Short position:** vender un activo (esperando que baje de precio).
- **Long position:** comprar un activo (esperando que suba de precio).
- **Derivatives:** instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otro activo.
- **Close position:** terminar una inversión o apuesta que se había abierto anteriormente, p.e. vender/comprar algo, dejar que algo expire, ejercer un contrato, ...
- **Fundamental analysis:** determinar el valor intrínseco o correcto de una empresa estudiando sus balances contables, estados financieros, equipo de gestión, patentes, competencias, proyecciones de beneficios, flujos de caja, ... Es muy complejo y hay veces en las que el mercado se comporta de manera irracional.
- **Technical analysis:** no importa lo que hace la empresa, se analiza cómo se comporta la acción usando gráficos de precios, tendencias, patrones técnicos, ... Se considera una pseudo-ciencia.
- **Quantitative analysis:** enfoque matemático y estadístico de los mercados financieros. Se usa para valorar derivados, gestión de riesgos, teoría de carteras, ...
- **Return:** porcentaje de crecimiento.

### 1.1.2. Contratos forward y futures

- **Forward contract:** una parte se compromete (y se **obliga**) a comprarle un activo a otra parte en la **delivery date** o **maturity** del contrato por un **delivery price**. El **forward price** es el precio actualizado del subyacente (teniendo en cuenta interés, cupones, etc para que el contrato tenga valor inicial del contrato sea 0). El forward price cambia en cada momento, pero el delivery price se fija al firmar el contrato.
- **Future contract:** como el forward, pero más público, estandarizado, con un ajuste diario y menor flexibilidad. Por ejemplo, un trader especulando con el SP500.
- **Spot price:** el valor de activo subyacente en tiempo  $t$ , i.e.,  $S_t$ .
- **Going short:** vender un activo que no tienes, con la promesa de recomprarlo más adelante para devolverlo.

Para que uno de estos contratos no tenga arbitraje se debe cumplir que

$$S(t)e^{r(T-t)} - F = 0 \Rightarrow F = S(t)e^{r(T-t)}$$

### 1.1.3. Contratos future

Siempre hay un **delivery and Settlement** en el que se debe entregar el subyacente, pero muchas veces el contrato se cierra antes o se liquida en efectivo la diferencia entre lo pactado y el valor actual. Al entrar en futuros, debe haber un depósito de dinero (**Margin**) como garantía de que vas a pagar. Según va cambiando día a día el precio del contrato, se va añadiendo o retirando dinero de tu **margin account**. Como se da esta compensación diaria (cada dia me pagan/pago lo que haya ganado/perdido según lo que firmé), el valor del contrato de resetea a 0 todos los días.

- **Initial Margin:** fianza inicial al abrir posición.
- **Maintenance Margin:** mínimo que debe haber en la cuenta.

#### 1.1.3.1. Commodity futures

Futuros sobre materias primas, entra en juego costo de almacenamiento y rendimiento de conveniencia.

$$F = S(t)e^{(r+s-c)(T-t)}$$

donde  $s$  es el **storage cost** y  $c$  es el **convenience yield**, que es el beneficio de tener el bien físicamente.

- **Backwardation:** cuando el storage cost domina sobre el convenience yield

$$F = S(t)e^{(r+s-c)(T-t)} < S(t)e^{r(T-t)}$$

- **Contango:** cuando el convenience yield domina sobre el storage cost. SObre todo cuando el bien es escaso

$$F = S(t)e^{(r+s-c)(T-t)} > S(t)e^{r(T-t)}$$

#### 1.1.3.2. FX futures

Contrato para comprar o vender divisas. No hay costes de almacenamiento, pero la divisa extranjera genera intereses si se invierte en banco extranjero.

$$F = S(t)e^{(r-r_f)(T-t)}$$

donde  $r$  es interés doméstico y  $r_f$  es interés extranjero.

#### 1.1.3.3. Index futures

Futuros sobre índices de acciones. Similar a los FX, los dividendos bajan el valor del futuro.

$$F = S(t)e^{(r-q)(T-t)}$$

donde  $q$  es el porcentaje anual de dividendo.

### 1.1.4. Conteo de días

Algunas maneras de contar los días entre dos fechas:

- **Actual/Actual:** número de días normal que hay en el calendario.
- **30/360:** cada mes tiene 30 días y el año tiene 360 días
- **Actual/360:** cada mes tiene los días que toca, pero el año tiene 360 días.



## Capítulo 2

# Productos financieros básicos

### 2.1. Opciones

Una **Call option** es el derecho a comprar un **underlying asset** por un **exercise/strike price** hasta o el **expiry/expiration date**. Una **put option** es lo mismo, pero te da derecho a vender. Muchas veces las opciones se agrupan en **series**, i.e. diferentes combinaciones de strike y vencimiento disponibles para un mismo activo. Su **payoff function** es:

- **Call option:** Apuestas a que el mercado sube

$$\max(S - K, 0)$$

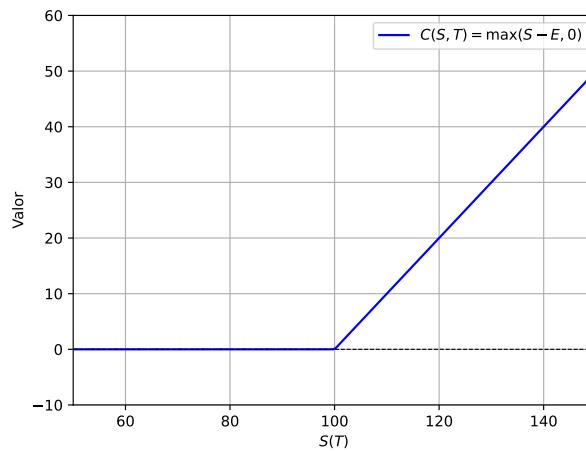


Figura 2.1: Payoff de opción Call a vencimiento

- **Put option:** Apuestas a que el mercado baje

$$\max(K - S, 0)$$

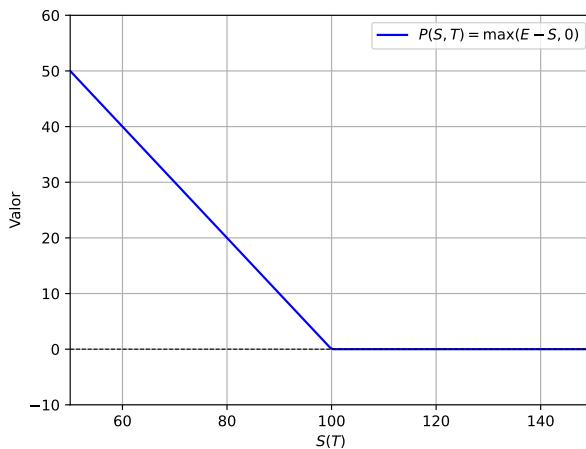


Figura 2.2: Payoff de opción Put a vencimiento

A veces el strike  $K$  se representa con una  $E$ . Las opciones **vainilla** son aquellas más simples; la función de pago solo depende del valor del subyacente en el momento del pago. Los **derivatives or contingent claims** son contratos que tienen dependencias más complejas.

### 2.1.1. Terminología

- **Premium:** lo que se paga inicialmente por el contrato (prima).
- **Underlying (asset):** subyacente sobre el que depende el contrato.
- **Strike (price)/exercise price:** precio al que se compra o vende el subyacente. Se define con  $E$  o con  $K$ .
- **Expiration (date) o expiry (date):** fecha en la que se puede ejercer o cuando se caduca la opción. Se denota por  $T$ .
- **Intrinsic value:** Valor del beneficio si la opción se ejerce en ese momento.
- **Time value:** Valor extra que tiene la opción por la incertidumbre futura.
- **In the money:** Opción con valor intrínseco positivo. Call: precio activo  $>$  strike. Put: precio activo  $<$  strike.
- **Out of the money:** Opción sin valor intrínseco. Call: precio activo  $<$  strike. Put: precio activo  $>$  strike.
- **At the money:** Precio del activo  $\approx$  strike.
- **Long position:** Posición positiva en una cantidad o exposición.
- **Short position:** Posición negativa o venta en corto de un activo. “Vender sin tener activo para adelantar dinero”.
- **Profit diagram:** Como el payoff, pero restandole la prima.

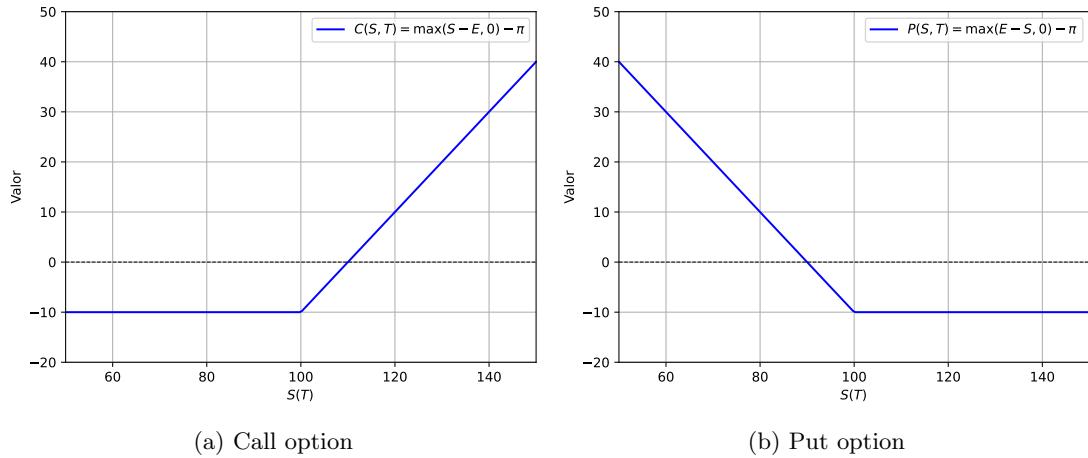


Figura 2.3: Profit diagram de opción a vencimiento

- **Over the counter/OTC:** opciones que se realizan fuera de la bolsa y que no tienen que seguir las convenciones estándar. Los términos se especifican en una **term sheet**.
- **Gearing/leverage:** relación entre la posible ganancia y la inversión. Las opciones tienen una gran gearing, pero el punto negativo es que si no hay ganancias, la pérdida es del 100% (se pierde la prima). Aquí el writer es el que tiene mucho riesgo.
- **Hedging:** tomar posiciones contrarias, por ejemplo ser el writer de una opción y comprar/vender acciones del subyacente para reducir riesgos. También se usa para describir la reducción de la aleatoriedad en general.

### 2.1.2. Tipos de opciones

- **European options:** solo se puede ejercer en vencimiento.
- **American options:** se puede ejercer en cualquier momento hasta el vencimiento.
- **Bermudan options:** se puede ejercer en ciertas fechas específicas.

### 2.1.3. Call-Put Parity

La relación en cualquier tiempo  $t$  entre una Call y una Put con los mismos parámetros es:

$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$$

### 2.1.4. Opciones binarias/ digitales

A fecha de ejercicio son discontinuas. Pagan una cierta cantidad fija (como un \$1) si el subyacente está por encima/debajo de cierto precio de ejercicio  $E$  (o  $K$ ). Las vainilla tienen un potencial de ganancia ilimitado, mientras que las binarias están acotadas, porque las compras cuando crees que el crecimiento/bajada es limitado.

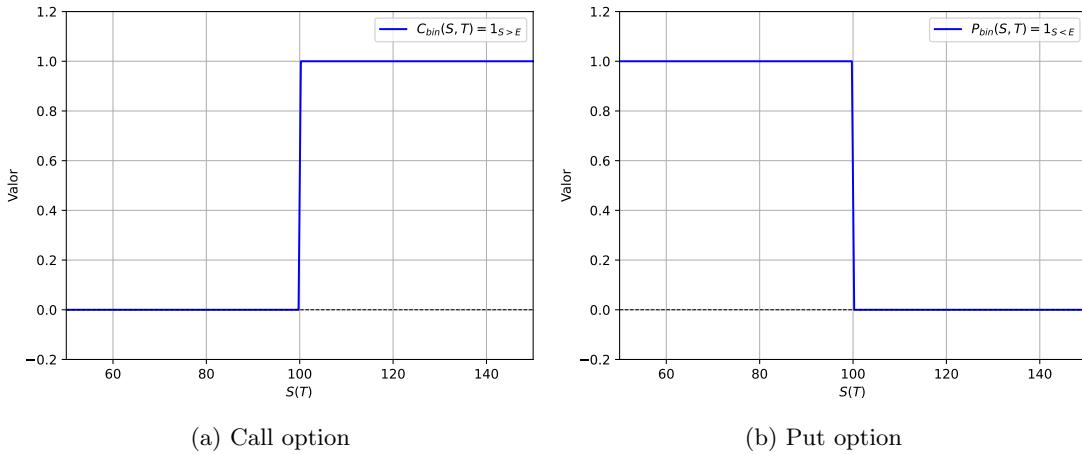


Figura 2.4: Binary option payoff

Su relación de paridad se obtiene considerando que tienes una opción binary de cada tipo, porque a precio de ejercicio se obtiene el \$1 que se paga (o la cantidad que se haya firmado) actualizado:

$$\text{Binary call} + \text{Binary put} = e^{-r(T-t)}$$

### 2.1.5. Portfolio of options/Option strategy

Conjunto de opciones combinadas de manera estratégica para un objetivo concreto (maximizar ganancias, minimizar riesgos, ...). Para saber su payoff se suman los payoff de las opciones que compras y se restan los payoff de las opciones que vendes. De forma genérica, las estrategias se pueden clasificar en **spread** que son estrategias que involucran opciones del mismo tipo (calls o puts), y **combinations** que combinan opciones de distinto tipo (calls o puts); también existen las **calendar spread**, que combinan opciones con distintas fechas de vencimiento. Algunos ejemplos son:

- **Bull Spread (Spread Alcista):** consiste en comprar una opción **call** con un strike más bajo  $E_1$  y vender otra opción call con strike más alto  $E_2$  ( $E_1 < E_2$ ). Hay beneficio si subyacente **sube**, pero está limitado a diferencia  $E_2 - E_1$ . Su payoff es:

$$\max(S - E_1, 0) - \max(S - E_2, 0)$$

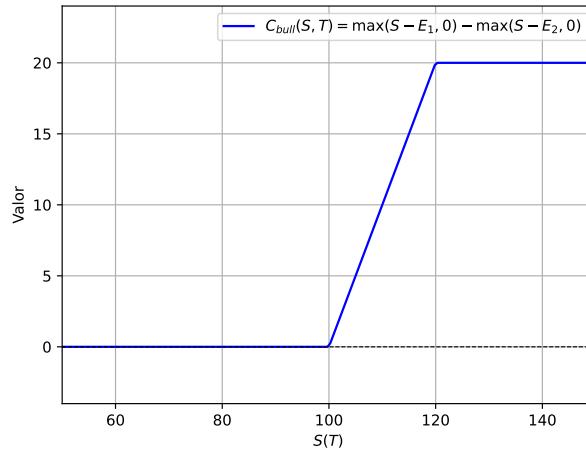


Figura 2.5: Payoff de Bull Spread a vencimiento (normalizado)

Para normalizarlo se divide por  $E_2 - E_1$

- **Bear Spread (Spread Bajista):** consiste en comprar opción **put** con strike más alto  $E_2$  y vender otra con strike más bajo  $E_1$  ( $E_1 < E_2$ ). Hay beneficio si el subyacente **baja**, pero está limitado a diferencia  $E_2 - E_1$ . Su payoff es:

$$\max(E_2 - S, 0) - \max(E_1 - S, 0)$$

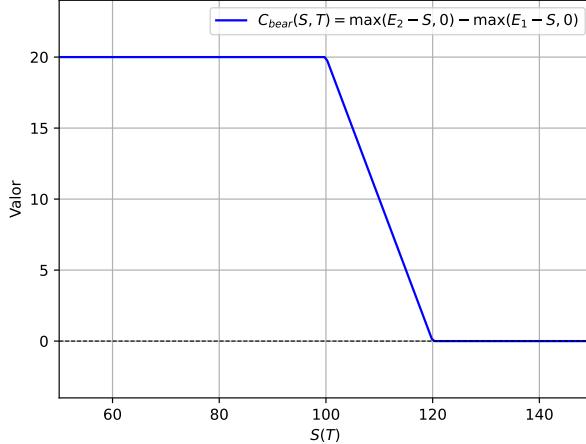


Figura 2.6: Payoff de Bear Spread a vencimiento (normalizado)

Para normalizarlo se divide por  $E_2 - E_1$

- **Straddles:** comprar una call y una put con mismo strike y mismo expiry. Beneficio depende de la magnitud del movimiento del subyacente, pero costo alto por primas de dos opciones. Se suele hacer cuando hay un anuncio importante. Su payoff es:

$$\max(S - E, 0) + \max(E - S, 0)$$

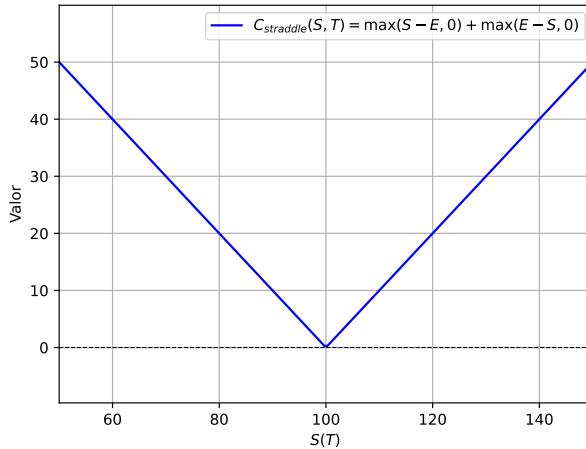


Figura 2.7: Payoff de Straddle

- **Strangle:** similar a straddles, pero con strikes distintos. Es más barato pero precisa de mayores cambios en el subyacente para que haya beneficios. Su payoff es:

$$\max(S - E_C, 0) + \max(E_P - S, 0)$$

Según los strikes pueden ser:

- **Out-of-the-Money Strangle (OTM):** se compra call con strike por encima de precio actual y put con strike por debajo de actual. Es más barato (primas bajas) pero se necesita un movimiento grande del subyacente.

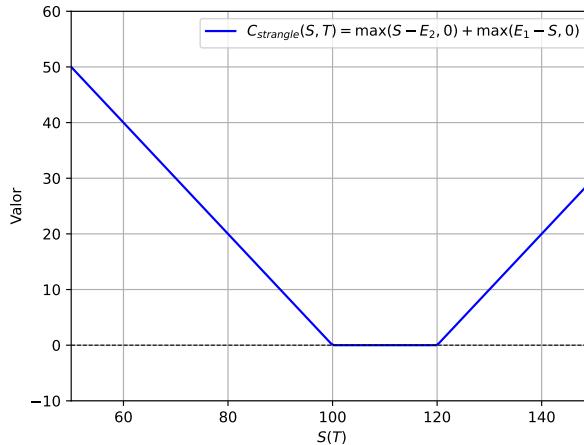


Figura 2.8: Payoff de Strangle OTM

- **In-the-Money Strangle (ITM):** se compra call con strike por debajo de precio actual y put con strike por encima de actual. Algo más caro (por primas) que OTM, pero un poco más seguro.

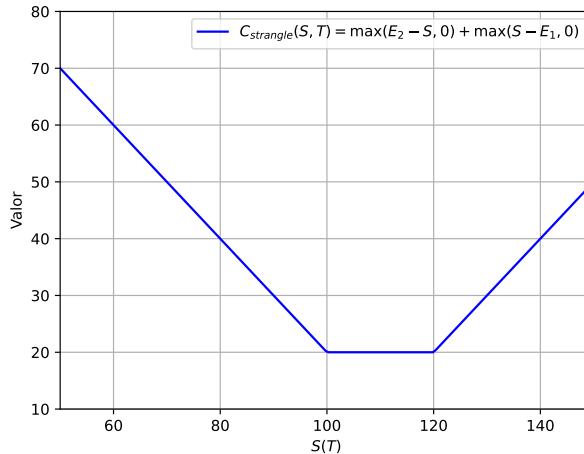


Figura 2.9: Payoff de Strangle ITM

- **Risk Reversal:** comprar/vender una call con strike mayor que el precio actual y vender/comprar una put con un strike inferior al precio actual. Se apuesta a que el subyacente va a subir (y que como mucho no va a bajar demasiado) o al contrario. Se puede perder dinero, pero las primas son más baratas. Su payoff sería:

- **Bullish risk reversal:**

$$\max(S - E_C, 0) - \max(E_P - S, 0)$$

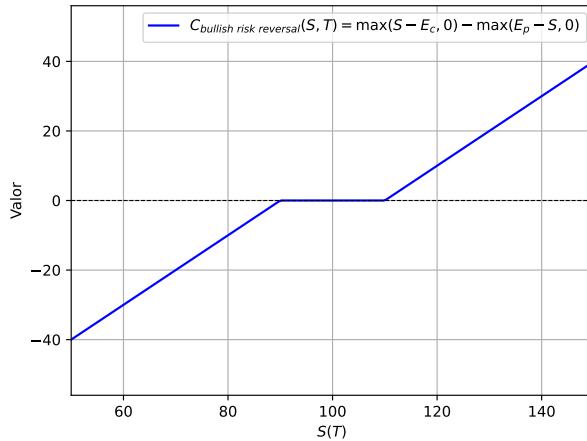


Figura 2.10: Payoff de Risk Reversal a vencimiento

- Bearish risk reversal:

$$\boxed{\max(E_P - S, 0) - \max(S - E_C, 0)}$$

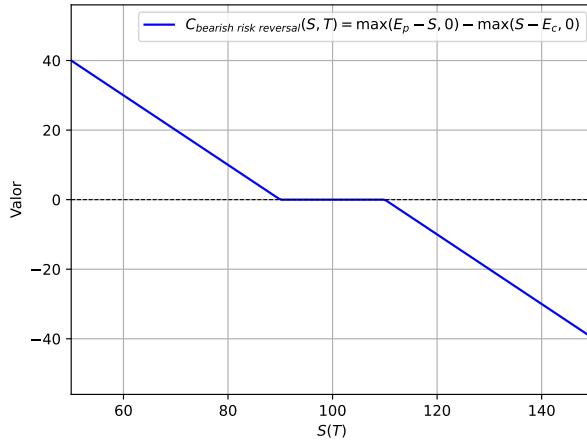


Figura 2.11: Payoff de Risk Reversal a vencimiento

- **Butterflies:** se compra una call ITM ( $E_{C_{ITM}}$ ), se venden dos calls ATM (at-the-money) ( $E_{C_{ATM}}$ ) y se compra una call OTM ( $E_{C_{OTM}}$ ). Es decir,  $E_{C_{ITM}} < E_{C_{ATM}} < E_{C_{OTM}}$ . Además, generalmente se cumple que  $E_{C_{OTM}} - E_{C_{ATM}} = E_{C_{ATM}} - E_{C_{ITM}}$ . Se usa cuando se espera que el subyacente esté cerca de cierto precio central y haya poca volatilidad. Su payoff es:

$$\boxed{\max(S - E_{C_{ITM}}, 0) - 2 \max(S - E_{C_{ATM}}, 0) + \max(S - E_{C_{OTM}}, 0)}$$

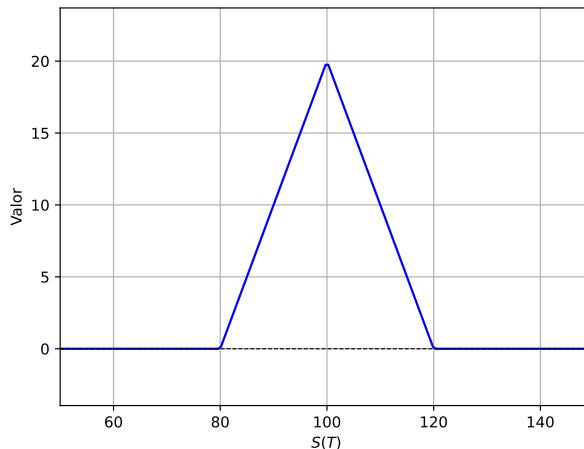


Figura 2.12: Payoff de Butterfly a vencimiento

- **Condors:** parecido a butterflies, se compra call con strike  $E_1$ , se vende call con strike  $E_2$ , se vende call con strike  $E_3$ , y se compra call con strike  $E_4$  tal que  $E_1 < E_2 < E_3 < E_4$ . Además, generalmente se cumple que  $E_2 - E_1 = E_4 - E_3$ . Se obtienen ganancias máximas si el subyacente se mantiene entre  $E_2$  y  $E_3$ . Su payoff es:

$$\max(S - E_1, 0) - \max(S - E_2, 0) - \max(S - E_3, 0) + \max(S - E_4, 0)$$

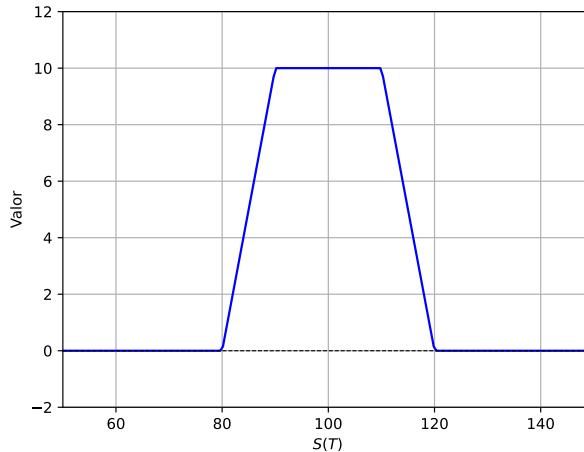


Figura 2.13: Payoff de Condors a vencimiento

### 2.1.6. Opciones a largo plazo

- **LEAPS/ long-term equity anticipation securities:** opciones con hasta 3 años de fecha de vencimiento. Usualmente vencen en enero. Se suelen emitir a 3 precios de ejercicio: ATM (precio actual), 20 % ITM (más favorable para el comprador) o 20 % OTM (más especulativo).
- **FLEX/ FFlexible EXchange-traded options:** permiten más personalización de la opción de la fecha de vencimiento (hasta 5 años), el strike o el tipo de ejercicio (europeo o americano).

### 2.1.7. Otros derivados

- **Warrants:** parecido a opciones call, pero emitido por la propia empresa del subyacente que da derecho a comprar acciones *nuevas* (frente a acciones ya existentes en las opciones) emitidas por la empresa. Tiene plazos largos, de hasta 5 años.

- **Convertible bonds/ CBs:** bono normal que paga cupones y un capital a vencimiento, pero que tiene la opción de convertirse en acciones antes de vencimiento (perderías los cupones siguientes). Se comporta como una opción americana.

## 2.2. Productos de renta fija: bonos

### 2.2.1. Contratos simples de renta fija

#### 2.2.1.1. Bonos de cupón cero

Es un contrato que paga una cantidad fija conocida (**principal**) en una fecha determinada (**maturity date**)  $T$ . Dicho valor se debe actualizar para calcular su precio.

#### 2.2.1.2. Bonos con cupón (coupon-bearing bond)

Además de pagar el principal a fecha de vencimiento, paga **cupones** en ciertas fechas preestablecidas. Los cupones suelen ser un porcentaje del principal y se suelen pagar en períodos regulares.

#### 2.2.1.3. Money Market Account

Cuentas de dinero (p.e. en el banco) que acumulan intereses compuestos de vez en cuando. El interés suele ser a corto plazo e impredecible, por lo que es “arriesgado”. Tiene la ventaja de ser flexible (lo puedes mover cuando quieras).

#### 2.2.1.4. Floating Rate Bonds

Los bonos de tasa flotante son bonos cuya tasa de interés está ligada a un índice de referencia como el LIBOR (p.e. se puede recibir LIBOR+1%). Protegen al inversor contra subidas de interés pero tiene poca flexibilidad (hay que esperar a vencimiento) y hay incertidumbre de lo que se va a recibir.

#### 2.2.1.5. Forward Rate Agreements (FRA)

Se fija una tasa de interés fija sobre un principal. Una parte paga el principal en  $T_1$  y la otra parte lo devuelve con los intereses acordados en  $T_2 > T_1$ . El valor del contrato al inicio suele no ser cero, por lo que puede haber un pago inicial entre las partes.

#### 2.2.1.6. Repos

Es un acuerdo de recompra. Consiste en vender un activo financiero a otra parte y acordar recomprarlo en una fecha y cantidad fijada. El precio de recompra suele ser mayor que el de venta, y la diferencia implica un tipo de interés llamado **repo rate**. El más común es el *overnight repo*, que se renegocia diariamente. Si el acuerdo dura más de 30 días se denomina *term repo*. Un **reverse repo** es la operación inversa: la compra de un valor con el compromiso de venderlo posteriormente.

#### 2.2.1.7. Bonos separables (STRIPS)

‘Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities’. Consisten en separar los cupones y el principal de los bonos tradicionales, creando así bonos artificiales de cupón cero con vencimientos más largos de los que normalmente estarían disponibles.

Por ejemplo se ha comprado un bono con cupones que dan 5€ al año. Se pueden vender cada uno de esos cupones como bonos de cupón cero, y valdrían los 5€ actualizados.

### 2.2.1.8. Amortización

El principal va disminuyendo poco a poco durante la vida del contrato y los intereses se calculan sobre el principal pendiente.

La amortización puede ser fija (con un calendario conocido de antemano) o depender de algún índice (por ejemplo, si el índice sube, el principal se amortiza más rápido).

### 2.2.1.9. Cláusula de rescate anticipado (Call Provision)

Es una cláusula que se pone a contratos de renta fija que permite al emisor recomprar el contrato en ciertas fechas o períodos por un importe preestablecido. Esto reduce el valor del contrato para el inversor.

## 2.2.2. Mercado internacional de bonos

### ■ USA:

- **Bill:** maturity menor que un año y normalmente sin cupón.
  - **Note:** maturity entre 2 y 10 años, con cupón cada 6 meses.
  - **Bond:** maturity mayor que 10 años, con cupón cada 6 meses.
  - **Yankees:** comerciados en USA por instituciones extranjeras.
- **UK:** los emitidos por el gobierno se llaman **gilts**. Incluyen bonos *callable*, *irredeemable*, *convertible* o *index-linked* ligados a Retail Price Index (RPI). Más adelante se explicará qué es cada cosa.
  - **Japón:** **Japanese Government Bonds (JGBs)** pueden ser a corto plazo (letras del tesoro, sin cupones), plazo medio (con o sin cupones), largo plazo (maturity de 10 años, cupones cada 6 meses) o plazo muy largo (maturity de 20 años, cupones cada 6 meses). Los emitidos en yenes por instituciones extranjeras son bonos **Samurai**.

## 2.2.3. Rentabilidad de bonos (Yield)

Existen varias maneras de calcular la rentabilidad de un bono:

### ■ Current Yield:

$$\frac{\text{ingresos anuales por cupones}}{\text{precio bono}}$$

Es útil solo para bonos a corto plazo. No tiene en cuenta el valor temporal del dinero ni el principal.

### ■ Yield to Maturity (YTM)/ Internal Rate of Return (IRR)/ tasa interna de rendimiento (TIR):

tiene en cuenta el valor temporal del dinero y el principal. El YTM o IRR  $y$  se calcula como:

$$B = \frac{P}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+y)^t}$$

en el caso discreto o como

$$B = Pe^{-yT} + \sum_{t=1}^T C_t e^{-yt}$$

en el caso continuo, donde  $B$  es el precio del bono,  $P$  es el valor nominal,  $C$  es el cupón y  $T$  es el tiempo hasta el vencimiento. Para obtener  $y$  se usan métodos numéricos.

### 2.2.4. Yield Curve

Muestra cómo varía el rendimiento de los bonos en función de su vencimiento. Es útil para medir las expectativas de una economía:

- **Normal Yield Curve:** los bonos a largo plazo tienen mayor rendimiento que los a corto plazo, lo que indica una economía en crecimiento.
- **Inverted Yield Curve:** los bonos a corto plazo tienen mayor rendimiento que los a largo plazo, lo que puede indicar una recesión económica.
- **Flat Yield Curve:** los rendimientos son similares para todos los plazos, lo que puede indicar incertidumbre económica.

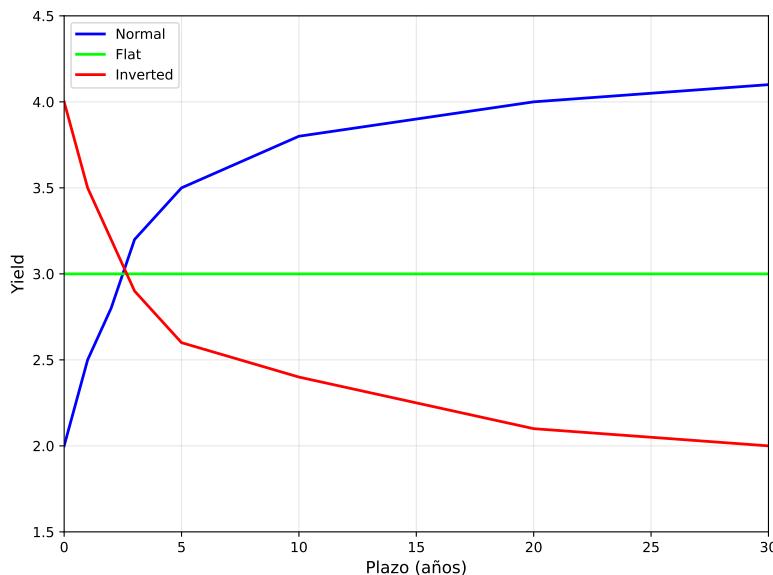


Figura 2.14: Yield Curve

### 2.2.5. Duración

Hay dos maneras de definir la duración de un bono:

- **Duración modificada:** mide la sensibilidad del precio del bono ante pequeños cambios en la tasa de interés. P.e. si la duración es de 5.1, entonces un aumento del 1% del interés reduce el precio del bono un 5.1%. Se calcula como:

$$D_{\text{mod}} = -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial y}$$

- **Duración Macaulay:** es el tiempo promedio ponderado hasta que se reciben los flujos del bono. P.e. si la duración es de 4.2, significa que, en promedio, el inversor recupera su dinero en 4.2 años. Se calcula como:

$$D_{\text{mac}} = (1 + y) D_{\text{mod}} = -\frac{1 + y}{B} \frac{\partial B}{\partial y}$$

Las derivadas para el caso discreto y continuo son:

- Caso discreto:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{P}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+y)^t} \\
 \frac{\partial B}{\partial y} &= -\frac{PT}{(1+y)^{T+1}} - \sum_{t=1}^T \frac{C_t t}{(1+y)^{t+1}} = -\frac{1}{1+y} \left( \frac{PT}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t t}{(1+y)^t} \right) \\
 \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} &= \frac{PT(T+1)}{(1+y)^{T+2}} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t t(t+1)}{(1+y)^{t+2}} = \frac{1}{(1+y)^2} \left( \frac{PT(T+1)}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t t(t+1)}{(1+y)^t} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

- Caso continuo:

$$\begin{aligned}
 B &= Pe^{-yT} + \sum_{t=1}^T C_t e^{-yt} \\
 \frac{\partial B}{\partial y} &= -PTe^{-yT} - \sum_{t=1}^T C_t t e^{-yt} \\
 \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} &= PT^2 e^{-yT} + \sum_{t=1}^T C_t t^2 e^{-yt}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

por lo que las duraciones son:

- Caso discreto:

$$\begin{aligned}
 D_{\text{mod}} &= -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{1}{B} \left( -\frac{1}{1+y} \left( \frac{PT}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t t}{(1+y)^t} \right) \right) \\
 &= \boxed{\frac{1}{1+y} \left( \frac{\frac{PT}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t t}{(1+y)^t}}{\frac{P}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+y)^t}} \right)} \\
 D_{\text{mac}} &= (1+y)D_{\text{mod}} = \boxed{(1+y) \frac{\frac{PT}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t t}{(1+y)^t}}{\frac{P}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+y)^t}}}
 \end{aligned}$$

- Caso continuo:

$$\begin{aligned}
 D_{\text{mod}} &= -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial y} = \boxed{\frac{PTe^{-yT} + \sum_{t=1}^T C_t t e^{-yt}}{Pe^{-yT} + \sum_{t=1}^T C_t e^{-yt}}} \\
 D_{\text{mac}} &= (1+y)D_{\text{mod}} = \boxed{(1+y) \frac{PTe^{-yT} + \sum_{t=1}^T C_t t e^{-yt}}{Pe^{-yT} + \sum_{t=1}^T C_t e^{-yt}}}
 \end{aligned}$$

### 2.2.6. Convexidad

Es otro orden para medir la sensibilidad del precio del bono frente a cambios del interés. Una mayor convexidad implica menor pérdida ante subidas de tasas y mayor ganancia ante bajadas. Se calcula como:

$$\boxed{C = \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}}$$

observando las derivadas calculadas en (2.1) y (2.2) tiene que:

- Caso discreto:

$$C = \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \boxed{\frac{1}{(1+y)^2} \frac{\frac{PT(T+1)}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t t(t+1)}{(1+y)^t}}{\frac{P}{(1+y)^T} + \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+y)^t}}}$$

- Caso continuo:

$$C = \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \boxed{\frac{PT^2 e^{-yT} + \sum_{t=1}^T C_t t^2 e^{-yt}}{Pe^{-yT} + \sum_{t=1}^T C_t e^{-yt}}}$$

### 2.2.7. Intereses dependientes del tiempo (Time-Dependent Interest Rates)

Se considera un interés dependiente del tiempo  $r(t)$ , por lo que el valor del bono también es dependiente del tiempo  $B(t)$ . Se considera que el principal 1, por lo que  $B(T) = 1$ . Todas las constantes que se calculan a continuación son relativas a esta condición.

Se tiene por una parte que la variación del valor del bono es:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dt} \Rightarrow dB = \frac{dB}{dt} dt$$

este argumento se puede justificar de forma más estricta con intervalos infinitesimales o aproximaciones de Taylor. Para evitar arbitraje se iguala al interés:

$$dB = \frac{dB}{dt} dt = r(t)B dt \Rightarrow B(t; T) = e^{\int_t^T r(\tau) d\tau} \quad (2.3)$$

Estudiando ahora el caso de un bono con cupones, se tiene que se ha recibido un cupón  $K(t)dt$  en el periodo  $[t, t + dt]$ , por lo que la variación del valor del bono es:

$$dB = \left( \frac{dB}{dt} + K(t) \right) dt$$

que igualando al interés:

$$\frac{dB}{dt} + K(t) = r(t)B \Rightarrow \boxed{B(t; T) = e^{\int_t^T r(\tau) d\tau} \left( 1 + \int_t^T K(t') e^{\int_t^T r(\tau) d\tau} dt' \right)}$$

habiendo elegido las constantes para que  $B(T) = 1$ .

### 2.2.8. Tasas Forward y bootstrapping

Es la tasa de interés esperada de un bono sabiendo la tasa de interés actual de varios bonos de cupón cero con diferentes vencimientos.

En el caso continuo, y que todo es diferenciable correctamente, no hace falta más que la ecuación (2.3) para calcular la tasa forward  $f(t, T)$  entre dos fechas  $t$  y  $T$ .

$$Z(t; T) = e^{\int_t^T r(\tau) d\tau} \Rightarrow r(T) = -\frac{\partial}{\partial T} (\ln(Z(t; T))) \Rightarrow F(t; T) = -\frac{\partial}{\partial T} (\ln(Z(t; T)))$$

que en términos de rendimiento se tiene que

$$Z(t; T) = e^{-y(t; T)(T-t)} \Rightarrow \boxed{F(t; T) = y(t; T) + \frac{\partial y}{\partial T}}$$

Para el caso discreto se consideran varios bonos de cupón cero ordenados según su vencimiento, siendo el primero el que tenga el vencimiento más temprano. Luego se tiene  $Z_i^M$  siendo  $i$  la posición en el ranking. El primer bono tendrá un interés implícito de

$$Z_1^M = e^{y_1(T_1-t)} \Rightarrow y_1 = \frac{\ln(Z_1^M)}{T_1 - t}$$

este es el interés que se usa para descontar desde el momento actual hasta  $T_1$  para todos los bonos e instrumentos. Por lo tanto el interés implícito del segundo bono sería

$$Z_2^M = e^{-y_1(T_1-t)} e^{y_2(T_2-T_1)} \Rightarrow y_2 = \frac{\ln(Z_2^M/Z_1^M)}{T_2 - T_1}$$

se puede seguir este proceso de forma iterativa para los bonos que hagan falta. A esto se le llama **bootstrapping**.

## 2.3. Swaps

Los **swaps** son contratos en los que dos partes acuerdan intercambiar flujos de efectivo futuro según una fórmula preestablecida. En un primer momento lo típico eran swaps de divisas, pero derivó en swaps de intereses.

### 2.3.1. Swaps de intereses vainillas

Contratos bastante comunes en los que se intercambian flujos de intereses. Por ejemplo, una parte paga un tipo fijo y la otra un tipo variable como el Euribor a 3 meses, 6 meses, etc. A vencimiento, los principales no se intercambian, solo los intereses.

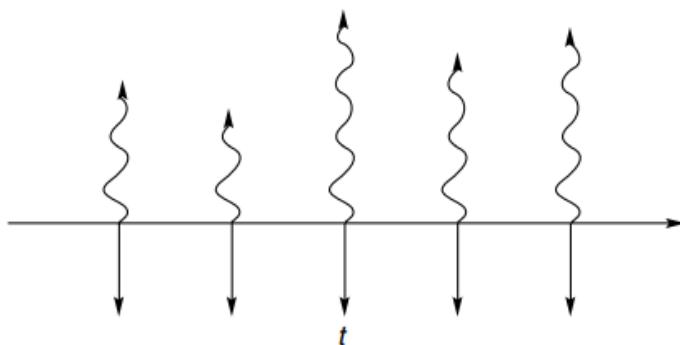


Figura 2.15: Swaps de intereses vainillas

#### 2.3.1.1. Ejemplo de uso

Dos empresas, A y B quieren pedir un préstamo, A quiere que sea variable y B que sea fijo. Los intereses que les cobran están en la siguiente tabla:

	Fijo	Variable
A	7%	LIBOR a 6 meses + 0.3%
B	8.2%	LIBOR a 6 meses + 1%

Luego si ambos piden el préstamos los intereses que pagan son:

- A variable y B fijo:

$$\text{LIBOR} + 0,3\% + 8,2\% = \text{LIBOR} + 8,5\%$$

- A fijo y B variable:

$$7\% + \text{LIBOR} + 1\% = \text{LIBOR} + 8\%$$

Luego es mejor la segunda opción, pero como no es el tipo de interés que quieren cada uno, hacen un swap. Se reparten los intereses extra de manera equitativa. Para dar la vuelta al tipo de interés, en el swap A le paga a B el LIBOR y B le paga una cantidad fija  $x\%$ . Entonces:

$$\begin{aligned} A: & \underbrace{7\%}_{\text{int A fijo}} + \underbrace{\text{LIBOR}}_{\text{pago swap}} - \underbrace{x\%}_{\text{cobro swap}} + \underbrace{\frac{0,5}{2}\%}_{\text{int extra}} = \underbrace{\text{LIBOR} + 0,3\%}_{\text{int A variable}} \Rightarrow x = 6,95\% \\ B: & \underbrace{\text{LIBOR} + 1\%}_{\text{int B variable}} + \underbrace{x\%}_{\text{pago swap}} - \underbrace{\text{LIBOR}}_{\text{cobro swap}} + \underbrace{\frac{0,5}{2}\%}_{\text{int extra}} = \underbrace{8,2\%}_{\text{int B fijo}} \Rightarrow x = 6,95\% \end{aligned}$$

por lo tanto, las empresas A y B pagan un interés:

$$A: \underbrace{7\%}_{\text{int A fijo}} + \underbrace{\text{LIBOR}}_{\text{pago swap}} - \underbrace{6,95\%}_{\text{cobro swap}} = \text{LIBOR} + 0,05\%$$

$$B: \underbrace{\text{LIBOR} + 1\%}_{\text{int B variable}} + \underbrace{6,95\%}_{\text{pago swap}} - \underbrace{\text{LIBOR}}_{\text{cobro swap}} = 7,95\%$$

que es tipo de interés que quería cada empresa y es mejor que si hubieran pedido el préstamo directamente con los intereses de la tabla.

### 2.3.2. Relación entre swaps y bonos: obtener valor justo del interés fijo

En primer lugar, el interés fijo se puede ver como un bono de cupón cero. Por lo tanto, el total de pagos por parte del interés fijo es

$$r_s \tau \sum_{i=1}^N Z(t; T_i)$$

donde  $r_s$  es el interés (p.e. anual),  $\tau$  es el tiempo entre pagos (escrito en la misma escala que el interés, p.e. 0.5 años) y  $Z(t; T)$  es el valor actualizado de un bono de cupón cero y principal 1.

Por otro lado, se debe escribir el valor de los intereses variables pagados en términos de un bono. Se tiene el siguiente esquema para el pago del interés variable en tiempo  $T_i$ :

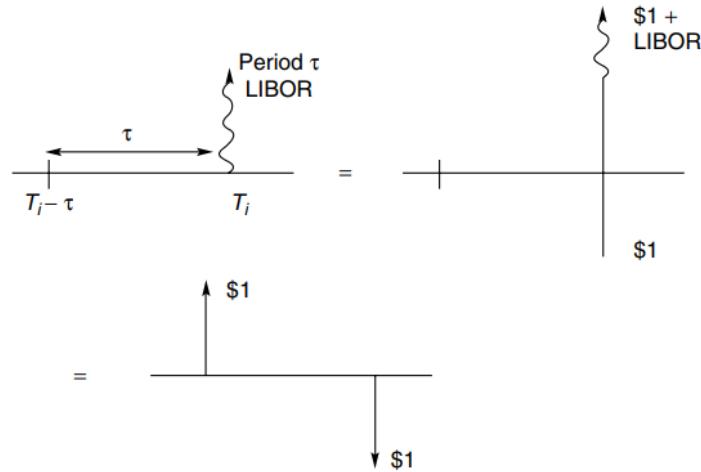


Figura 2.16: Interés variable swap

En la primera imagen se representa el interés variable  $r_{\tau}\tau$  en tiempo  $T_i$ , mientras que en la segunda se suma y resta un dólar en tiempo  $T_i$ . Por definición, un dólar más el interés variable  $r_{\tau}\tau$  en tiempo  $T_i$  es igual que ese mismo dólar en tiempo  $T_{i-\tau}$ , lo que da lugar a la tercera imagen. Esta tercera imagen implica que el pago de un interés variable en tiempo  $T_i$  es igual que pagar un bono de cupón cero con principal 1 en tiempo  $T_i$  y venderlo en tiempo  $T_{i-\tau}$ .

Si se sigue este esquema para todos los pagos de interés variable, se van cancelando los depósitos y retiros quedando solo el primero y el último. Por otro lado, se debe escribir el valor de los intereses variables pagados en términos de un bono. Se tiene el siguiente esquema para el pago del interés variable en tiempo  $T_i$ :

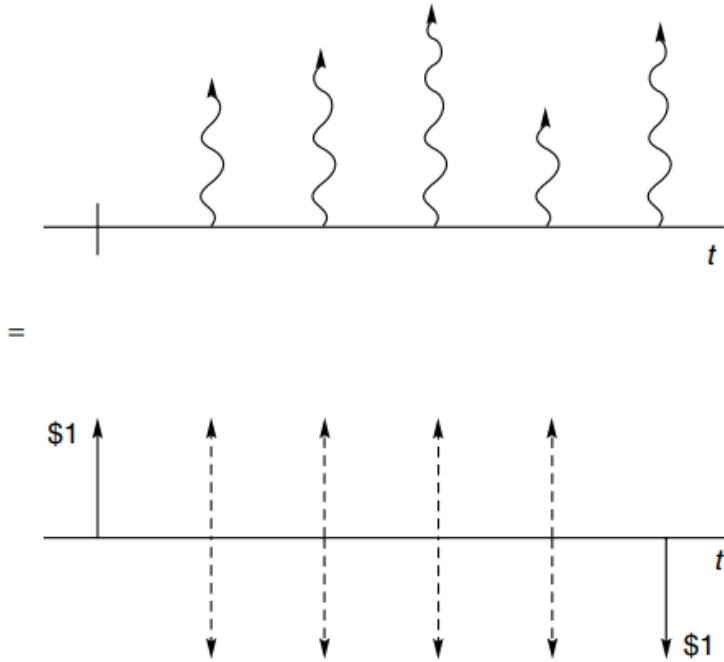


Figura 2.17: Todos los intereses variables swap

Por lo tanto, el total de pagos por parte del interés variable es

$$1 - Z(t; T_N)$$

siendo  $Z(t; T_N)$  el valor actualizado de un bono de cupón cero y principal 1 (que es lo mismo que actualizar 1\$).

Luego sumando el total de pagos de la parte del interés fijo y restando la parte del interés variable, el contrato swap para la parte variable es de:

$$r_s \tau \sum_{i=1}^N Z(t; T_i) - (1 - Z(t; T_N)) = \boxed{r_s \tau \sum_{i=1}^N Z(t; T_i) - 1 + Z(t; T_N)}$$

para que el contrato tenga valor cero, el interés fijo debe ser

$$r_s \tau \sum_{i=1}^N Z(t; T_i) - 1 + Z(t; T_N) = 0 \Rightarrow \boxed{r_s = \frac{1 - Z(t; T_N)}{\tau \sum_{i=1}^N Z(t; T_i)}} \quad (2.4)$$

En vez de cero también se le puede dar cualquier valor.

### 2.3.3. Bootstrapping

El resultado anterior se puede usar para hacer el bootstrapping descrito en la sección 2.2.8 para conseguir el valor de cupones cupón cero. Usando la ecuación (2.4), se obtiene el valor de un bono de cupón cero y vencimiento  $T_i$

$$r_s(T_1) = \frac{1 - Z(t; T_1)}{\tau Z(t; T_1)} \Rightarrow \boxed{Z(t; T_1) = \frac{1}{1 + r_s(T_1)\tau}}$$

y luego de forma iterativa

$$\boxed{Z(t; T_{j+1}) = \frac{1 - r_s(T_{j+1})\tau \sum_{i=1}^j Z(t; T_i)}{1 + r_s(T_{j+1})\tau}}$$

### 2.3.4. Otras características de contratos swap

- **Swaps Callable y puttable:** Permiten a un lado cerrar el contrato antes de vencimiento. Matemáticamente son del tipo opciones americanas, que se verán más adelante.
- **Extendible swaps:** se puede ampliar el vencimiento con la tasa swap original.
- **Index amortizing rate swaps:** mientras que en los swaps vainilla el principal es constante (aunque nunca se llegue a pagar), en estos swaps el principal cambia con el tiempo siguiendo un calendario y muchas veces ligado a algún índice.

### 2.3.5. Otros tipos de swaps

- **Basis Rate Swap:** los intereses son ambos variables ligados a distintos índices. P.e. un banco saca swaps de LIBOR contra los intereses que dan en los préstamos (que normalmente van ligados) para reducir riesgos en caso que dejen estar correlacionados.
- **Equity Swaps:** una parte paga interés fijo o flotante y la otra paga el retorno total de un índice bursátil (como el S&P 500, EuroStoxx, etc.) incluyendo dividendos.
- **Equity basis swap:** como el anterior pero con dos índices distintos.
- **Currency Swaps:** dos partes intercambian flujos de efectivo en distintas divisas. P.e. una parte paga 1000\$ y la otra 1000€ a un tipo de cambio preestablecido. Normalmente se intercambia el principal al inicio y al final del contrato.



# Capítulo 3

## Aleatoriedad

### 3.1. Algunas propiedades

#### 3.1.1. Desigualdad de Jensen

Sea la función convexa  $f(S)$  (que se curva hacia arriba, con forma de cuenco) de la variable aleatoria  $S$ , entonces

$$\mathbb{E}[f(S)] \geq f(\mathbb{E}[S])$$

De hecho, la diferencia es de

$$\frac{1}{2}f''(\mathbb{E}[S])\mathbb{E}[\epsilon]$$

donde  $\epsilon$  es la desviación de  $S$  de la media, i.e  $S = \mathbb{E}[S] + \epsilon$ .

#### 3.1.2. Propiedad de Markov

*El futuro depende solo del presente, no del pasado.* Se usa en los caminos aleatorios para decir que el valor  $S_{t+1}$  solo depende de  $S_t$ , es decir,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in A \mid X_t = x, X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in A \mid X_t = x)$$

#### 3.1.3. Propiedad de martingala

*Lo que esperas tener en el futuro, sabiendo todo hasta ahora, es exactamente lo que tienes ahora.* Es decir, el valor esperado de algo en un juego justo es exactamente lo que tienes ahora:

$$\mathbb{E}[S_i | S_j, j < i] = S_j$$

#### 3.1.4. Lema de Itô

Sea

$$dS = a(S, t)dt + b(S, t)dX$$

entonces

$$dV = \left( \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}b^2 \frac{d^2V}{dS^2} \right) dt + \frac{dV}{dS} dS = \left( \frac{dV}{dt} + a \frac{dV}{dS} + \frac{1}{2}b^2 \frac{d^2V}{dS^2} \right) dt + b \frac{dV}{dS} dX \quad (3.1)$$

En el apéndice B.1 se encuentra la fórmula para dimensiones mayores. Para el caso en el que se tenga varios procesos correlacionados, la fórmula de Ito se puede escribir como:

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_i b_j \rho_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} \right) dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial V}{\partial S_i} dS_i \quad (3.2)$$

### 3.1.5. Algunos ejemplos de caminos aleatorios

- **Brownian Motion with Drift:**  $dS = \mu dt + \sigma dX$

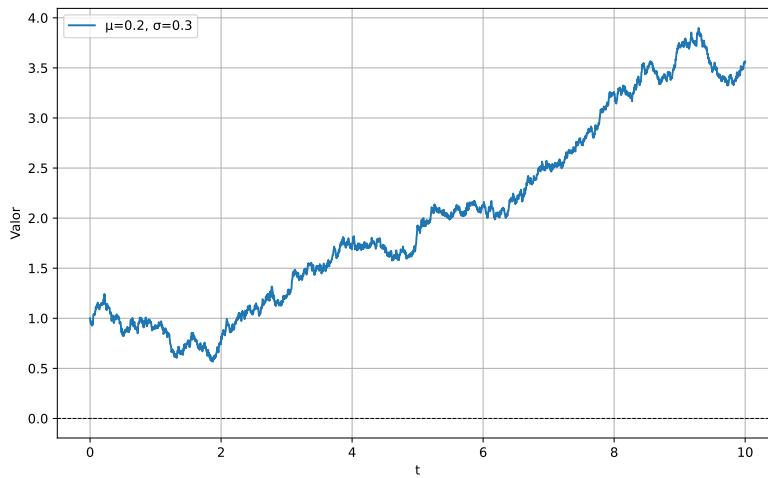


Figura 3.1: Brownian Motion with Drift

- **The Lognormal Random Walk:**  $dS = S\mu dt + S\sigma dX$

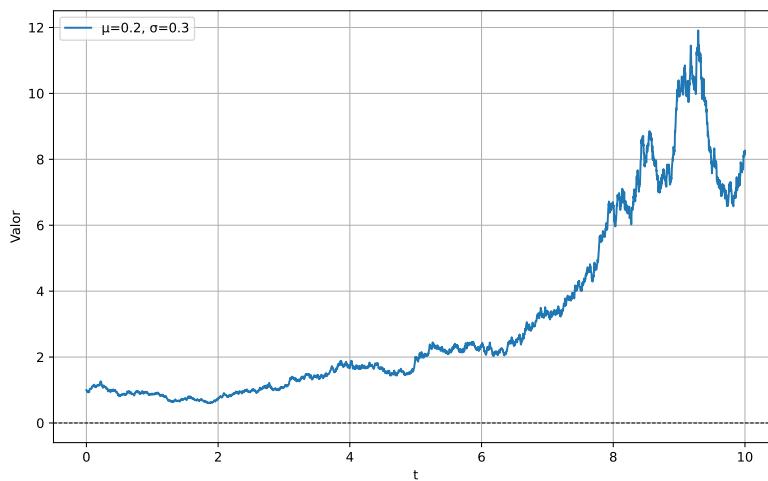


Figura 3.2: The Lognormal Random Walk

- **A Mean-reverting Random Walk:** reversion a la media, cuando se está fuera del crecimiento normal el camino tiende a corregirse.

Su EDE es

$$dS = \kappa(\theta - S)dt + \sigma dX$$

donde  $\kappa$  es la velocidad de reversión a la media,  $\theta$  es la tasa de interés a largo plazo y  $\sigma$  es la volatilidad. Un ejemplo común es el modelo Vasicek para el ratio de interés,  $dr = \kappa(\theta + r)dt + \sigma dX$

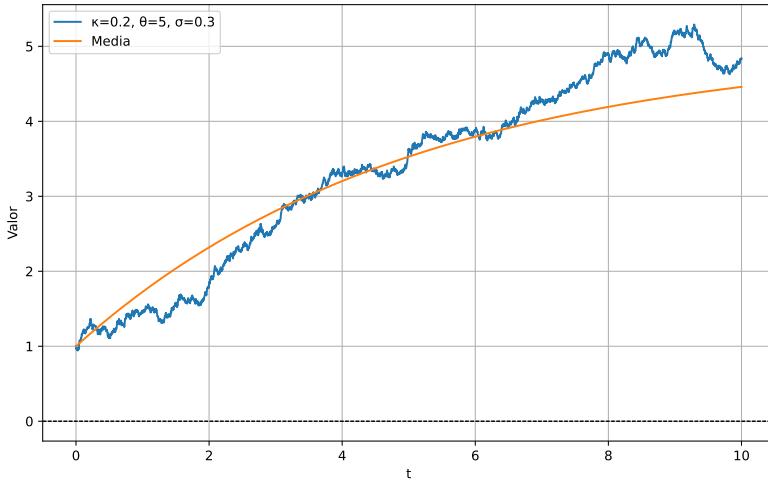


Figura 3.3: Mean-reverting Random Walk

## 3.2. Función de densidad de transición

Es la ‘probabilidad de que una variable aleatoria  $y$  esté entre  $a$  y  $b$  en el instante futuro  $t'$ , sabiendo que ha empezado con un valor  $y$  en el instante  $t$ ’. En concreto la función de densidad de transición  $p(y, t; y', t')$  es:

$$\text{Prob}(a < y' < b \text{ en } t' | y \text{ en } t) = \int_a^b p(y, t; y', t') dy'$$

### 3.2.1. Ecuación de Fokker-Planck o de Kolmogorov hacia delante

Se centra en cómo evoluciona la transición con respecto al tiempo futuro  $t'$ . Se enfoca en el destino del proceso y cómo cambia la probabilidad de estar en distintos valores futuros  $y'$  a medida que avanza el tiempo  $t'$ . Esta ecuación se usa cuando hay un espacio especial ahora y se quiere saber qué va a pasar en el futuro. Sabiendo que la variable aleatoria cumple la EDE

$$dy = A(y, t)dt + B(y, t)dX$$

entonces la función de densidad de transición es la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial p}{\partial t'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y'^2} (B(y', t')^2 p) - \frac{\partial}{\partial y'} (A(y', t') p)$$

por ejemplo para la EDE

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

se tiene que resolver la EDP

$$\frac{\partial p}{\partial t'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S'^2} (\sigma^2 S'^2 p) - \frac{\partial}{\partial S'} (\mu S' p)$$

que da como solución

$$p(S, t; S', t') = \frac{1}{\sigma S' \sqrt{2\pi(t' - t)}} \exp \left( -\frac{(\log(S/S') + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t' - t))^2}{2\sigma^2(t' - t)} \right)$$

$$p(S=50, t=0; S', t' | \mu=0.05, \sigma=0.2)$$

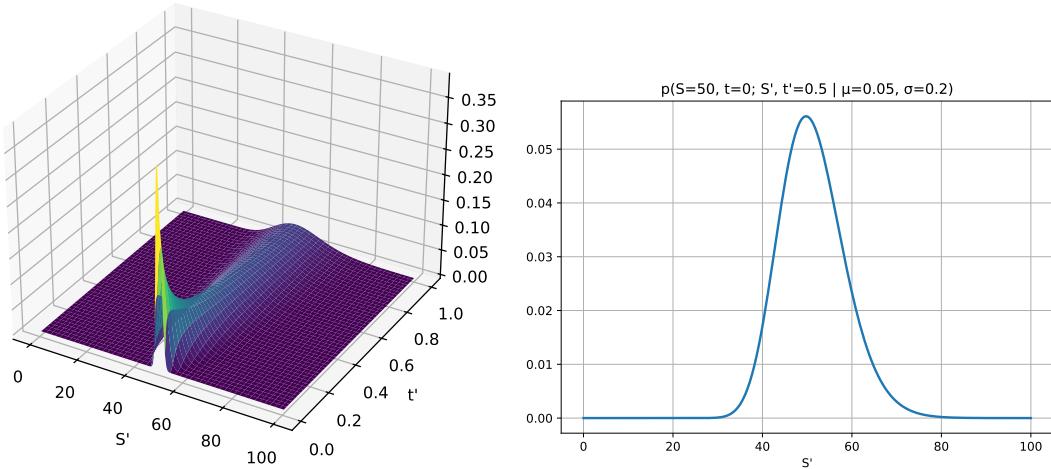


Figura 3.4: Función de densidad de transición

### 3.2.1.1. Ecuación de Kolmogorov hacia detrás

Se centra en cómo evoluciona la densidad de transición con respecto al tiempo actual  $t$ . Se enfoca más en el origen y cómo cambian las probabilidades de llegar al punto  $y'$ ,  $t'$  dependiendo de donde se está en el momento. La EDP es

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} B(y, t)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + A(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} = 0}$$

### 3.2.1.2. Distribución en estado estacionario (steady-state distribution)

Son aquellas cuya función de densidad de transición  $p(y, t; y', t')$  tiende, cuando  $t' \rightarrow \infty$ , a una distribución que ya no depende del estado inicial  $y$  ni del tiempo  $t$ . Para eso se debe cumplir que el proceso sea homogéneo en el tiempo, i.e.  $A$  y  $B$  sean independientes de  $t$  en el límite asintótico. Cuando se cumple la función de densidad de transición converge a  $p_\infty(y')$  que satisface:

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy'^2} (B_\infty^2 p_\infty) - \frac{d}{dy'} (A_\infty p_\infty) = 0}$$

donde  $A_\infty$  y  $B_\infty$  son los valores de los coeficientes en el límite  $t \rightarrow \infty$ .

## 3.3. Tiempos de primer escape (First-exit times)

El *first-exit time* es el tiempo en el cual un camino aleatorio alcanza un cierto límite por primera vez. El objetivo de esta sección es calcular la probabilidad de que un camino aleatorio alcance cierto límite antes de cierto tiempo.



Figura 3.5: First-exit Time

### 3.3.1. Funciones de distribución acumulada para first-exit times

Se define la función  $C(y, t; t')$  como la probabilidad de que la variable  $y$  salga de la región  $\Omega$  antes del tiempo  $t'$ , habiendo comenzado en  $y$  en el tiempo  $t$ . Esta función puede interpretarse como una función de distribución acumulada para first-exit time.

El objetivo es calcular la probabilidad de que un camino aleatorio abandone una región  $\Omega$  antes de un tiempo dado  $t'$ . Para ello, se tiene que satisfacer el problema de la EDP hacia atrás:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} B(y, t)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + A(y, t) \frac{\partial C}{\partial y} = 0 & (y, t) \in \Omega \times (0, t') \\ C(y, t; t') = 1 & (y, t) \in \partial\Omega \times (0, t') \\ C(y, t'; t') = 0 & y \in \Omega \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

### 3.3.2. Tiempos de primer escape esperados (Expected first-exit times)

Una vez calculado (3.3) es posible calcular el tiempo esperado de primer escape:

$$u(y, t) = \int_t^\infty (t' - t) \frac{\partial C}{\partial t'} dt' \stackrel{\text{partes}}{=} \int_t^\infty 1 - C(y, t; t') dt'$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_t^\infty 1 - C(y, t; t') dt' \right) \stackrel{\text{Leibniz}}{=} -(1 - C(y, t, t)) + \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} (1 - C(y, t; t')) dt' \\ &\stackrel{(3.3)}{=} -1 - \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} C(y, t; t') dt' \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial y} (1 - C(y, t; t')) dt' = - \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial y} C(y, t; t') dt' \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= - \int_t^\infty \frac{\partial^2}{\partial y^2} C(y, t; t') dt' \end{aligned}$$

que volviendo a la EDP (3.3):

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} B(y, t)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + A(y, t) \frac{\partial C}{\partial y} dt' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_t^\infty \frac{\partial C}{\partial t} dt' + \frac{1}{2} B(y, t)^2 \int_t^\infty \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} dt' + A(y, t) \int_t^\infty \frac{\partial C}{\partial y} dt' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} B(y, t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - A(y, t) \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

por lo que el tiempo esperado de primer escape  $u(y, t)$  satisface la EDP

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}B(y, t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A(y, t) \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \\ u(y, t) = 0 \quad y \in \partial\Omega \end{array} \right\}$$

Por ejemplo, si se tiene una EDE independiente del tiempo  $A = \mu S$ ,  $B = \sigma S$ , se puede buscar una solución en estado estacionario, es decir,  $u(y, t) = u(y)$ , que satisface la EDP

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 u}{dS^2} + \mu S \frac{du}{dS} = -1$$

con condiciones de contorno  $u(S_0) = u(S_1) = 0$ . La solución en este caso sería.

$$u(S) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu} \left( \log(S/S_0) - \frac{1 - (S/S_0)^{1-2\mu/\sigma^2}}{1 - (S_1/S_0)^{1-2\mu/\sigma^2}} \log(S_1/S_0) \right)$$

## 3.4. Estrategias en apuestas

### 3.4.1. Blackjack

La distribución del beneficio en el blackjack (explicado en el apéndice D.1) es la siguiente. Se denota  $\phi$  a la variable aleatoria que representan el resultado de la apuesta,  $\mu$  es la media de y  $\sigma$  es la desviación típica de  $\phi$ . En blackjack, los valores discretos de  $\phi$  son:

$\phi = -1$ ,	el jugador pierde la apuesta
$\phi = 0$ ,	el jugador empata
$\phi = 1$ ,	el jugador gana la apuesta
$\phi = 3/2$ ,	el jugador consigue un blackjack o natural

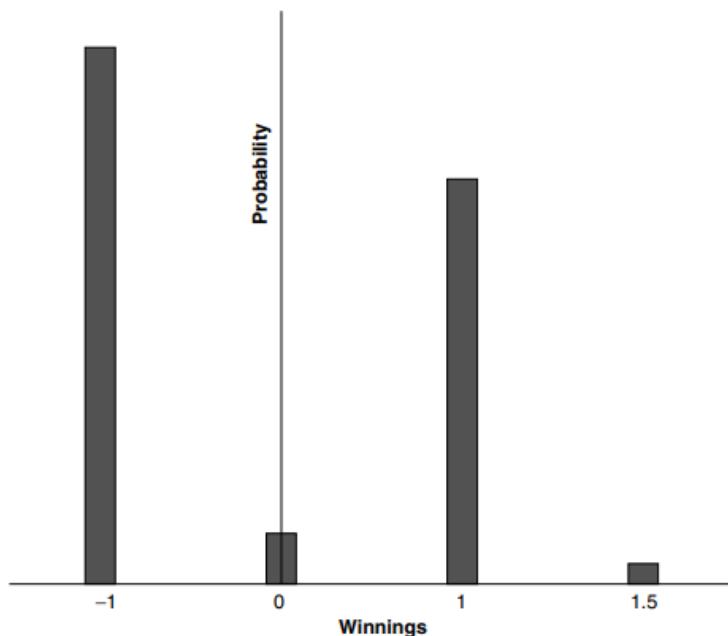


Figura 3.6: Distribución de beneficios en el blackjack

### 3.4.2. Criterio de Kelly

Siguiendo con el ejemplo del blackjack, se tiene la v.a.  $\phi_i$  para denotar el resultado de mano  $i$ -ésima, con media  $\mu_i$  y desviación típica  $\sigma_i$ . Suponiendo además que en total inicialmente se tiene una cantidad de dinero  $P$  y en cada mano se apuesta una fracción  $f$  de la cantidad de dinero que se tenga en ese momento. Por lo tanto en la primera mano se obtiene

$$P(1 + f\phi_1)$$

en la segunda mano

$$P(1 + f\phi_1)(1 + f\phi_2)$$

y tras  $M$  manos se obtiene

$$P \prod_{i=1}^M (1 + f\phi_i)$$

se plantea ahora cómo se elige  $f$  para maximizar las ganancias. Si  $f$  es muy grande eventualmente se perderá todo (o casi todo el dinero) aunque las expectativas sean positivas (por ejemplo, si se apuesta todo el dinero en una mano); si  $f$  es muy pequeño, se ganará poco y se tardará demasiado en conseguir una cantidad significativa de dinero. Por lo tanto se busca un valor intermedio.

En este caso se va a elegir  $f$  de forma que maximice la **tasa de crecimiento esperada a largo plazo**, si bien se pueden maximizar con otras estrategias. La tasa de crecimiento es

$$\frac{1}{M} \ln \left( P \prod_{i=1}^M (1 + f\phi_i) \right) = \frac{1}{M} \ln(P) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \ln(1 + f\phi_i)$$

ignorando el reescalado del primer término y suponiendo que el resultado de cada mano es independiente (no es el caso en el blackjack), su esperanza es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\ln(1 + f\phi_i)] &\stackrel{\text{(Taylor)}}{=} \mathbb{E}[f\phi_i - \frac{1}{2}f^2\phi_i^2 + O(f^3)] \\ &= f\mathbb{E}[\phi_i] - \frac{1}{2}f^2\mathbb{E}[\phi_i^2] + O(f^3) \\ &= f\mu - \frac{1}{2}f^2\sigma^2 + O(f^3) \end{aligned}$$

Luego, despreciando los términos de orden superior, la tasa de crecimiento esperada a largo plazo es

$$f\mu - \frac{1}{2}f^2\sigma^2 \tag{3.4}$$

que se maximiza cuando

$$f = \frac{\mu}{\sigma^2}$$

dando un crecimiento esperado de

$$\frac{\mu}{\sigma^2}\mu - \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 \sigma^2 = \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \boxed{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$$

por mano.

Lo importante para obtener ganancias a largo plazo es que la ecuación (3.4) sea positiva:

$$f\mu - \frac{1}{2}f^2\sigma^2 > 0 \Leftrightarrow f\mu > \frac{1}{2}f^2\sigma^2 \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{2}f\sigma^2 \Leftrightarrow \boxed{f < \frac{2\mu}{\sigma^2}}$$

### 3.4.3. Apuestas a eventos deportivos: carreras de caballos

Se tiene en una carrera de caballos  $N$  caballos, habiéndose apostado una cantidad total  $W_i$  sobre el  $i$ -ésimo caballo. La casa de apuestas paga  $1 : q_i$  por el  $i$ -ésimo caballo. Para evitar pérdidas, la casa de apuestas tiene que elegir  $q_i$  de forma que nunca pierda.

El total de dinero recaudado antes de la carrera es de

$$\sum_{i=1}^N W_i$$

y si el gana el caballo  $j$  la casa de apuestas paga

$$(1 + q_j)W_j$$

luego para conseguir ganancias, lo único de lo que tiene que asegurarse la casa de apuestas es de que

$$\sum_{i=1}^N W_i \geq (1 + q_j)W_j$$

es decir que

$$q_j \leq \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{W_j} - 1, \quad \forall j = 1, \dots, N$$

Como se puede observar, las probabilidades no tienen nada que ver con las probabilidades reales, si no de lo que se haya apostado.

Ahora desde el punto de vista del apostador, veamos si se puede observar si hay arbitraje. Sea  $w_i$  la cantidad apostada al  $i$ -ésimo caballo y que el total de dinero apostado es 1, entonces

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

y lo que se gana siendo el  $j$ -ésimo caballo el ganador es

$$(q_j + 1)w_j$$

El objetivo es por lo tanto encontrar  $w_i$  para todo  $i$  tal que son todos positivos, suman 1 y la ganancia sea postiva para todo  $j$ . Por lo tanto, para que haya arbitraje se tiene que conseguir más de 1 (lo invertido):

$$(q_j + 1)w_j > 1 \Leftrightarrow w_j > \frac{1}{q_j + 1}$$

luego el problema es encontrar  $w_i$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ w_j > \frac{1}{q_j + 1} \quad \forall j \end{array} \right\}$$

La primera parte implica que la solución debe estar en el plano  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$  mientras que la segunda dice que para que haya arbitraje el punto  $\frac{1}{q_j + 1}$  debe estar por debajo de dicho plano, teniendo en cuenta que todos los valores deben ser positivos. En 2D esto se traduce en la siguiente imagen:

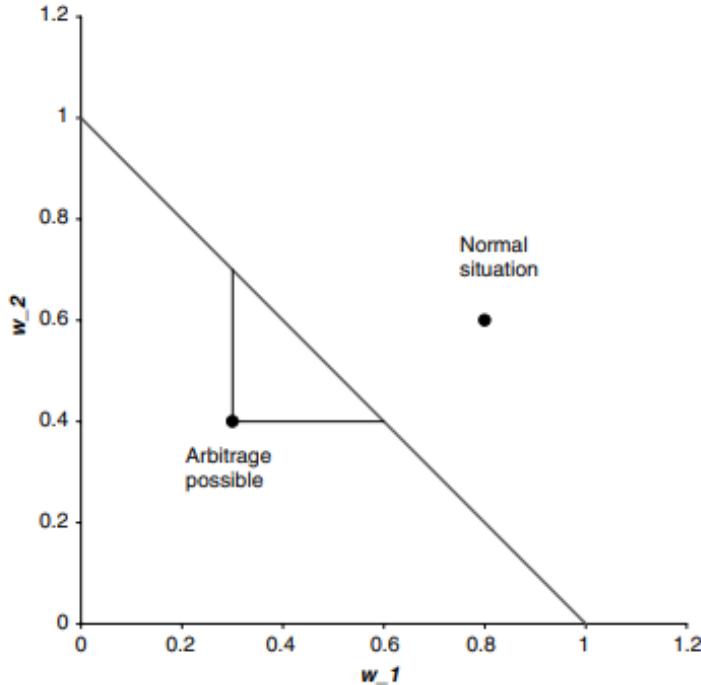


Figura 3.7: Arbitraje en carreras de caballos de dos caballos

Una manera rápida de comprobar si hay arbitraje es transformar la ecuación (3.4.3) y comprobar si se cumple:

$$1 = \sum_{i=1}^N w_i > \sum_{i=1}^N \frac{1}{q_i + 1} \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^N \frac{1}{q_i + 1} < 1}$$

en caso contrario no hay arbitraje. Una vez comprobado que hay arbitraje, para conseguir ganancias simplemente se debe conseguir un punto  $\vec{w}$  dentro de la recta (o plano)  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$  (comprobando que se cumple la otra condición).

Si no se cumple la condición de arbitraje, existen varias maneras de apostar. Sea  $p_i$  la probabilidad de que el  $i$ -ésimo caballo gane, entonces se debe cumplir.

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1$$

Si se ha apostado en todos los caballos un total de 1, entonces el beneficio o pérdida esperado es

$$m = \sum_{i=1}^N p_i w_i (q_i + 1) - 1$$

Por otro lado, la desviación estandar es

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N p_i (w_i (q_i + 1) - m)^2}$$

Existen varias estrategias de apuestas:

- **Maximizar el valor esperado:** en este caso se apuesta todo al caballo con mayor probabilidad de ganar, i.e. maximizar  $p_i(q_i + 1)$ . Esta es una apuesta muy arriesgada ya que la esperanza es muy alta pero también la desviación.

- **Minimizar la desviación estándar:** muchas veces se consigue una desviación nula, pero resulta en una esperanza negativa, por lo que no es una buena estrategia.
- **Maximizar rendimiento dividido por desviación estándar:** en este caso se busca un equilibrio entre la esperanza y la desviación  $m/\sigma$ .

### 3.5. Extreme value theory

Estudia el comportamiento de los valores extremos de una variable aleatoria, es decir, los máximos y mínimos. Se centra en la distribución de los valores extremos, que normalmente con pocas observaciones.

Si  $X_i$  son variables identicamente distribuidas (iid) y

$$x = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

entonces la función de distribución de  $x$  converge a

$$F(x) = \exp \left( - \left( 1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right)$$

donde si  $\xi = 0$  se tiene la distribución Gumbel, si  $\xi > 0$  se tiene la distribución Fréchet y si  $\xi < 0$  se tiene la distribución Weibull. En concreto, la de Fréchet es importante en finanzas porque esta asociada a colas pesadas.

Se considera la probabilidad de una pérdida que excede  $u$  por una cantidad  $y$ , sabiendo que se ha superado  $u$ , es decir,

$$F_u(x) = \mathbb{P}(X - u \leq y \mid X > u)$$

Esto se puede aproximar por la Distribución Generalizada de Pareto (GPD):

$$1 - \left( 1 + \frac{\xi X}{\beta} \right)^{-1/\xi}$$

Para colas pesadas, se tiene que  $\xi > 0$ , en cuyo caso no todos los momentos existen:

$$\mathbb{E}[X^k] = \infty, \quad k \geq \frac{1}{\xi}$$

Para más información mirar teoría vista en el Athens.

# Capítulo 4

## Modelación básica de opciones

### 4.1. Modelos Black-Scholes

#### 4.1.1. Modelo opciones básico

Se construye cartera

$$\Pi = V(S, t) - \Delta S$$

sabiendo que

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

entonces, por el lema de Itô 3.1.4 se tiene que

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS$$

que, haciendo un **delta hedging**  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  se obtiene que, sin arbitraje:

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

que debe ser igual que

$$d\Pi = r\Pi dt = r \left( V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt$$

por lo que

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

Se debe de tener en cuenta que esto calcula el valor justo de la opción, que es el valor actualizado de su payoff bajo una **risk-neutral random walk** para el subyacente. Este camino aleatorio es

$$dS = rS dt + \sigma S dX$$

Por lo tanto no es lo mismo que la probabilidad de que la opción quede ITM calculada con lo expuesto en el apartado 3.3.2.

#### 4.1.2. Opciones de activos con dividendos continuos

Tener comprado da un dividendo continuo de  $DSdt$ , luego la variación de la cartera es

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS - D\Delta dS$$

que usando igualmente que  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ , se tiene que

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

#### 4.1.3. Currency options

En vez de acciones como subyacente, se usa una moneda extranjera con un interés  $r_f$  que se comporta como un dividendo continuo, por lo que queda

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - r_f)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

#### 4.1.4. Commodity options

El subyacente es un commodity, que tiene un coste de almacenamiento. En este caso se asume continuo  $q$  (i.e.  $qSdt$ ). Como es un coste se puede ver como un dividendo negativo, por lo que

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r + q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

#### 4.1.5. Forwards contracts

Construyendo una cartera igual que BS clásico, se llega a la misma EDP.

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

pero se debe añadir como condición final

$$\boxed{V(S, T) = S - \bar{S}}$$

donde  $\bar{S}$  es el precio fijado (delivery price). Su solución es

$$\boxed{S - \bar{S}e^{-r(T-t_0)}}$$

Su delivery price es el que da valor 0 al contrato en un primer momento, luego

$$\bar{S} = S_0 e^{r(T-t_0)}$$

Su forward price, por otro lado, es

$$\text{Forward price} = S e^{r(T-t_0)}$$

#### 4.1.6. Future contracts

Como el valor del contrato se resetea a 0 todos los días (hay compensación diaria), el valor del contrato durante su vida es 0. Denotando por  $F(S, t)$  al valor del contrato:

$$\begin{aligned} \Pi &= F(S, T) - \Delta S = -\Delta S \\ d\Pi &= dF(S, T) - d\Delta S \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dt - \Delta dS \end{aligned}$$

luego tomando  $\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}$  y  $d\Pi = r\Pi dt$  se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dt + rS \frac{\partial F}{\partial S} = 0$$

con la condición final de que

$$F(S, T) = S$$

Su solución es

$$F(S, t) = Se^{r(T-t)}$$

por lo que para el caso de interés constante, los futures y los forwards valen lo mismo.

#### 4.1.7. Opciones sobre futuros

Son opciones en las que el subyacente es un contrato de futuro. Se sabe que

$$F = Se^{r(T-t)}$$

por lo que, haciendo un cambio de variable  $V(S, t) = W(F, t)$  se obtiene la EDP

$$\frac{\partial W}{\partial t} dt + \frac{\sigma^2}{2} F^2 \frac{\partial^2 W}{\partial F^2} dt - rW = 0$$

#### 4.1.8. Condiciones de frontera y finales

En una opción europea, se tienen las siguientes condiciones:

- Condiciones temporales:

- Call:

$$C(S, T) = \max(S - E, 0)$$

- Put:

$$C(S, T) = \max(E - S, 0)$$

- Condiciones de frontera: (se justificarán más adelante)

- Call:

$$C(0, t) = 0$$

$$C(S, t) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} S - Ee^{-r(T-t)}$$

- Put:

$$P(0, t) = Ee^{-r(T-t)}$$

$$P(S, t) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} 0$$

#### 4.1.9. Algunas propiedades de las opciones europeas

**Observación 1.** Si el payoff de una cartera es mayor o igual a  $M$ , entonces, en ausencia de arbitraje, el valor actual de la cartera es mayor o igual que el valor actualizado:

$$\Pi(T) \geq M \Rightarrow \Pi(t) \geq M e^{-r(T-t)}$$

Si no fuese el caso, se podría pedir al banco una cantidad  $M e^{-r(T-t)}$  en tiempo  $t$  y comprar la cartera. Entonces, en tiempo  $T$  se pagaría el préstamo con el payoff y se generaría beneficio.

**Proposición 1.** Sea  $C(S, t)$  una opción Call europea con fecha de ejercicio  $T$  y subyacente  $S$  sin dividendos; entonces, en ausencia de arbitraje:

1.  $\boxed{C \leq S}$
2.  $\boxed{C \geq \max(S - Ee^{-r(T-t)}, 0)}$
3.  $\boxed{0 \leq C_1 - C_2 \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)} \text{ con } E_1 < E_2}.$

*Demostración.* Utilizando la observación 1:

1. Sea la cartera  $\Pi = S - C$ , entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= S - \max(S - E, 0) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} S, & 0 \leq S \leq E \\ E, & S \geq E \end{array} \right\} \geq 0 \xrightarrow{1} \\ &\xrightarrow{1} \Pi(t) = S - C \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow S \geq 0\end{aligned}$$

2. Sea la cartera  $\Pi = S - C$ , entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= S - \max(S - E, 0) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} S, & 0 \leq S \leq E \\ E, & S \geq E \end{array} \right\} \leq E \xrightarrow{1} \\ &\xrightarrow{1} \Pi(t) = S - C \leq Ee^{-r(T-t)} \\ &\Rightarrow C \geq S - Ee^{-r(T-t)} \xrightarrow{C \geq 0} \\ &\xrightarrow{C \geq 0} C \geq \max(S - Ee^{-r(T-t)}, 0)\end{aligned}$$

3. Sea la cartera  $\Pi = C_1 - C_2$ , entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= \max(S - E_1, 0) - \max(S - E_2, 0) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ S - E_1, & E_1 \leq S < E_2 \\ E_2 - E_1, & S \geq E_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &0 \leq \Pi(T) \leq E_2 - E_1 \xrightarrow{1} \\ &\xrightarrow{1} 0 \leq \Pi(t) \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq C_1 - C_2 \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)}\end{aligned}$$

□

**Proposición 2.** Sea  $P(S, t)$  una opción Put europea con fecha de ejercicio  $T$  y subyacente  $S$  sin dividendos; entonces, en ausencia de arbitraje:

1.  $\boxed{P \leq Ee^{-r(T-t)}}$
2.  $\boxed{P \geq Ee^{-r(T-t)} - S}$
3.  $\boxed{0 \leq P_2 - P_1 \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)} \text{ con } E_1 < E_2}.$

*Demostración.* Utilizando la observación 1:

1. Sea la cartera  $\Pi = P - E$ , entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= \max(E - S, 0) - E \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} -S, & 0 \leq S < E \\ -E, & S \geq E \end{array} \right\} \leq 0 \xrightarrow{1} \\ &\xrightarrow{1} \Pi(t) = P - Ee^{-r(T-t)} \leq 0 \\ &\Rightarrow P \leq Ee^{-r(T-t)}\end{aligned}$$

2. Sea la cartera  $\Pi = S + P$ , entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= S + \max(E - S, 0) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} E, & 0 \leq S < E \\ S, & S \geq E \end{array} \right\} \geq E \xrightarrow{1} \\ &\xrightarrow{1} \Pi(t) = S + P \geq Ee^{-r(T-t)} \\ &\Rightarrow P \geq Ee^{-r(T-t)} - S\end{aligned}$$

3. Sea la cartera  $\Pi = P_2 - P_1$ , entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= \max(E_2 - S, 0) - \max(E_1 - S, 0) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} E_2 - E_1, & 0 \leq S < E_1 \\ E_2 - S, & E_1 \leq S < E_2 \\ 0, & S \geq E_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &0 \leq \Pi(T) \leq E_2 - E_1 \xrightarrow{1} \\ &\xrightarrow{1} 0 \leq \Pi(t) \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq P_2 - P_1 \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)}\end{aligned}$$

□

**Proposición 3.** *Sea  $P(S, t)$  una opción Put europea con fecha de ejercicio  $T$  y subyacente  $S$  sin dividendos; entonces, en ausencia de arbitraje:*

1.  $\boxed{C_A \geq C_B}$  donde  $C_A, C_B$  son Calls europeas con precio de ejercicio  $E$  y fechas de ejercicio  $T_A, T_B$  tal que  $T_A > T_B$ .
2.  $\boxed{C_2 \leq \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1} C_1 + \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1} C_3}$  donde  $C_1, C_2, C_3$  son Calls europeas con fecha de ejercicio  $T$  y strikes  $E_1, E_2, E_3$  donde  $E_1 < E_2 < E_3$ .

*Demostración.* Utilizando la observación 1:

1. Sea la cartera  $\Pi = C_A - C_B$ , entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T_B) &= C_A(S, T_B) - \max(S - E, 0) \xrightarrow{1} \\ &\geq \max(S - Ee^{-r(T-t)}, 0) - \max(S - E, 0) \geq \\ &\geq \max(S - E) - \max(S - E, 0) = 0 \\ &\Rightarrow \Pi(T_B) \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Pi(t) = C_A - C_B \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_A \geq C_B\end{aligned}$$

2. Sea la cartera  $\Pi = -C_2 + \lambda C_1 + (1 - \lambda)C_3$  y se considera

$$\begin{aligned} E_2 &= \lambda E_1 + (1 - \lambda)E_3 = \lambda E_1 + E_3 - \lambda E_3 = E_3 + \lambda(E_1 - E_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{E_2 - E_3}{E_1 - E_3} = \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - \lambda) &= \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \Pi(T) &= -\max(S - E_2, 0) + \lambda \max(S - E_1, 0) + (1 - \lambda) \max(S - E_3, 0) = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \lambda(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ -(S - E_2) + \lambda(S - E_1), & E_2 \leq S < E_3 \\ -(S - E_2) + \lambda(S - E_1) + (1 - \lambda)(S - E_3), & S \geq E_3 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1}(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ (1 - \lambda)(E_3 + S), & E_2 \leq S < E_3 \\ (1 - \lambda)(E_3 + S) + (1 - \lambda)(S - E_3), & S \geq E_3 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \lambda(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ (1 - \lambda)(E_3 + S), & E_2 \leq S < E_3 \\ (1 - \lambda)2S, & S \geq E_3 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1}(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1}(E_3 + S), & E_2 \leq S < E_3 \\ \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1}2S, & S \geq E_3 \end{array} \right\} \geq 0 \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{1} \Pi(t) &= -C_2 + \lambda C_1 + (1 - \lambda)C_3 \geq 0 \\ C_2 &\geq \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1}C_1 + \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1}C_3 \end{aligned}$$

□

## 4.2. Comportamiento de las EDPs

### 4.2.1. Significado de los términos de una EDP

Sea una EDP de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = D(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R(u)$$

entonces se tienen los siguientes términos:

- **Término de difusión** ( $D(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ): es el responsable de disipar o concentrar la solución . Si  $D(u) > 0$  entonces la solución se suaviza mientras que  $D(u) < 0$  hace que la solución se concentre.
- **Término de convección** ( $c(u) \frac{\partial u}{\partial x}$ ): representa el transporte con velocidad  $c(u)$  hacia la derecha si  $c(u) > 0$  o hacia la izquierda si  $c(u) < 0$ .
- **Término de reacción** ( $R(u)$ ): representa la salida o entrada local de  $u$ . Se puede ver como crear/eliminar masa (fuentes o sumideros).

Sabiendo que la EDP de Black-Scholes clásica es

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

entonces:

- El término de **difusión**  $\frac{\sigma^2}{2} S^2 > 0$  indica que la solución se suaviza y que los picos se homogenizan.
- El término de **convección**  $rS > 0$  indica que el resultado se mueve hacia los valores de  $S$  positivos (hacia la derecha).
- El término de **reacción**  $rV > 0$  indica un decaimiento general del valor de la opción a medida que pasa el tiempo.

## 4.3. Soluciones y griegas

### 4.3.1. Griegas

<b>Delta</b> $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$	Lo que se tiene que comprar/vender en cada momento según el valor del subyacente para mantener la cartera libre de riesgo.
<b>Gamma</b> $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	Es una medida de cuánto y cuantas veces se tiene que <i>rehedged</i> para mantener la cartera libre de riesgo.
<b>Theta</b> $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$	Contribuye a que la cartera gane el interés correspondiente.
<b>Speed</b> $\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}$	Como gamma, pero para mayor precisión.
<b>Vega</b> $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	Variación con respecto a la volatilidad del subyacente.
<b>Rho</b> $\frac{\partial V}{\partial r}$	Sensibilidad de la opción a cambios en la tasa de interés. En la práctica se usa la estructura temporal completa de tasas.

Sabiendo la *call-put parity*  $C(S, t) - P(S, t) = S - Ee^{-r(T-t)}$ , las relaciones entre las griegas en opciones europeas Call y Put son:

- **Delta:**  $\boxed{\Delta_{Call} = 1 + \Delta_{Put}}$
- **Gamma:**  $\boxed{\Gamma_{Call} = \Gamma_{Put}}$
- **Theta:**  $\boxed{\Theta_{Call} = \Theta_{Put} - rEe^{-r(T-t)}}$
- **Vega:**  $\boxed{\nu_{Call} = \nu_{Put}}$
- **Rho:**  $\boxed{\rho_{Call} = \rho_{Put} + E(T-t)e^{-r(T-t)}}$

### 4.3.2. Tablas de soluciones

	<b>Call</b>	<b>Put</b>
<b>Value (Black-Scholes value)</b>	$Se^{-D(T-t)}N(d_1)$ $Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-Se^{-D(T-t)}N(-d_1)$ $Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)$
<b>Delta</b> $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)$	$e^{-D(T-t)}N(d_1)$	$e^{-D(T-t)}(N(d_1) - 1)$
<b>Gamma</b> $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)$		$\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S \sqrt{T-t}}$
<b>Theta</b> $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$	$-\frac{\sigma Se^{-D(T-t)}N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}}$ $DSN(d_1)e^{-D(T-t)}$ $rEe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{\sigma Se^{-D(T-t)}N'(-d_1)}{2\sqrt{T-t}}$ $DSN(-d_1)e^{-D(T-t)}$ $rEe^{-r(T-t)}N(-d_2)$
<b>Speed</b> $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}\right)$		$-\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma^2 S^2(T-t)}(d_1 + \sigma\sqrt{T-t})$
<b>Vega</b> $\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)$		$S\sqrt{T-t}e^{-D(T-t)}N'(d_1)$
<b>Rho</b> $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)$	$E(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-E(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$
<b>Rho</b> $\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)$	$-(T-t)Se^{-D(T-t)}N(d_1)$	$(T-t)Se^{-D(T-t)}N(-d_1)$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (4.1)$$

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (4.2)$$

	<b>Binary Call</b>	<b>Binary Put</b>
<b>Value (Black-Scholes value)</b>	$e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$e^{-r(T-t)}(1 - N(d_2))$
<b>Delta</b>	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S \sqrt{T-t}}$	$-\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S \sqrt{T-t}}$
<b>Gamma</b> $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)$	$-\frac{e^{-r(T-t)}d_1 N'(d_2)}{\sigma^2 S(T-t)}$	$\frac{e^{-r(T-t)}d_1 N'(d_2)}{\sigma^2 S(T-t)}$
<b>Theta</b> $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$	$re^{-r(T-t)}N(d_2) \left( \frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{r-D}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)$	$re^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) \left( \frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{r-D}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)$
<b>Speed</b> $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}\right)$	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma^3 S^3(T-t)} \left( -2d_1 + \frac{1-d_1 d_2}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)$	
<b>Vega</b> $\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)$	$-\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)d_1}{\sigma \sqrt{T-t}}$	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)d_1}{\sigma \sqrt{T-t}}$
<b>Rho</b> $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)$	$-(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2) + \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} e^{-r(T-t)}N'(d_2)$	$-(T-t)e^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) - \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} e^{-r(T-t)}N'(d_2)$
<b>Rho</b> $\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)$	$\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} e^{-r(T-t)}N'(d_2)$	$-\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} e^{-r(T-t)}N'(d_2)$

$$d_1 = \frac{\log \left( \frac{S}{E} \right) + \left( r - D + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

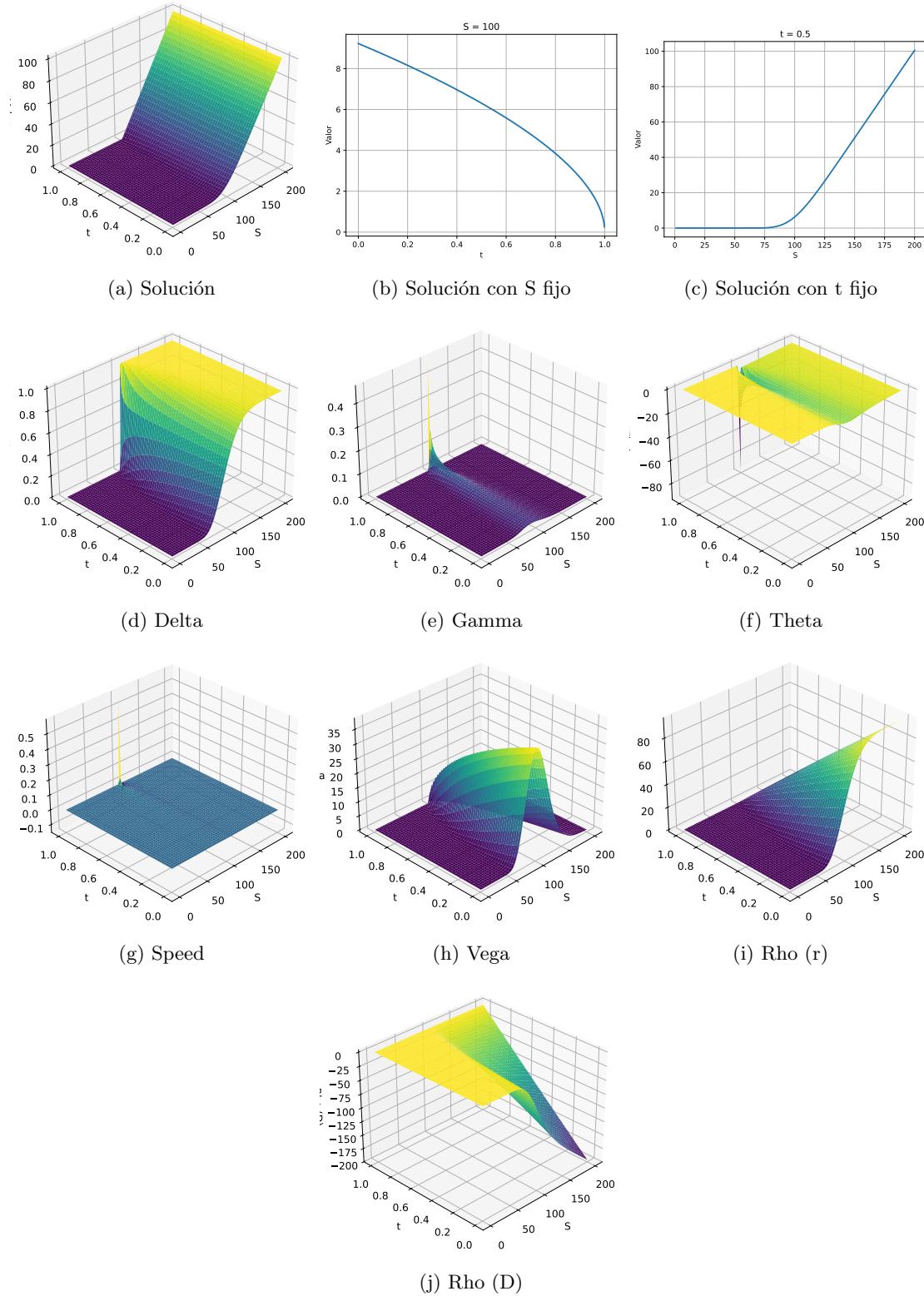
$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

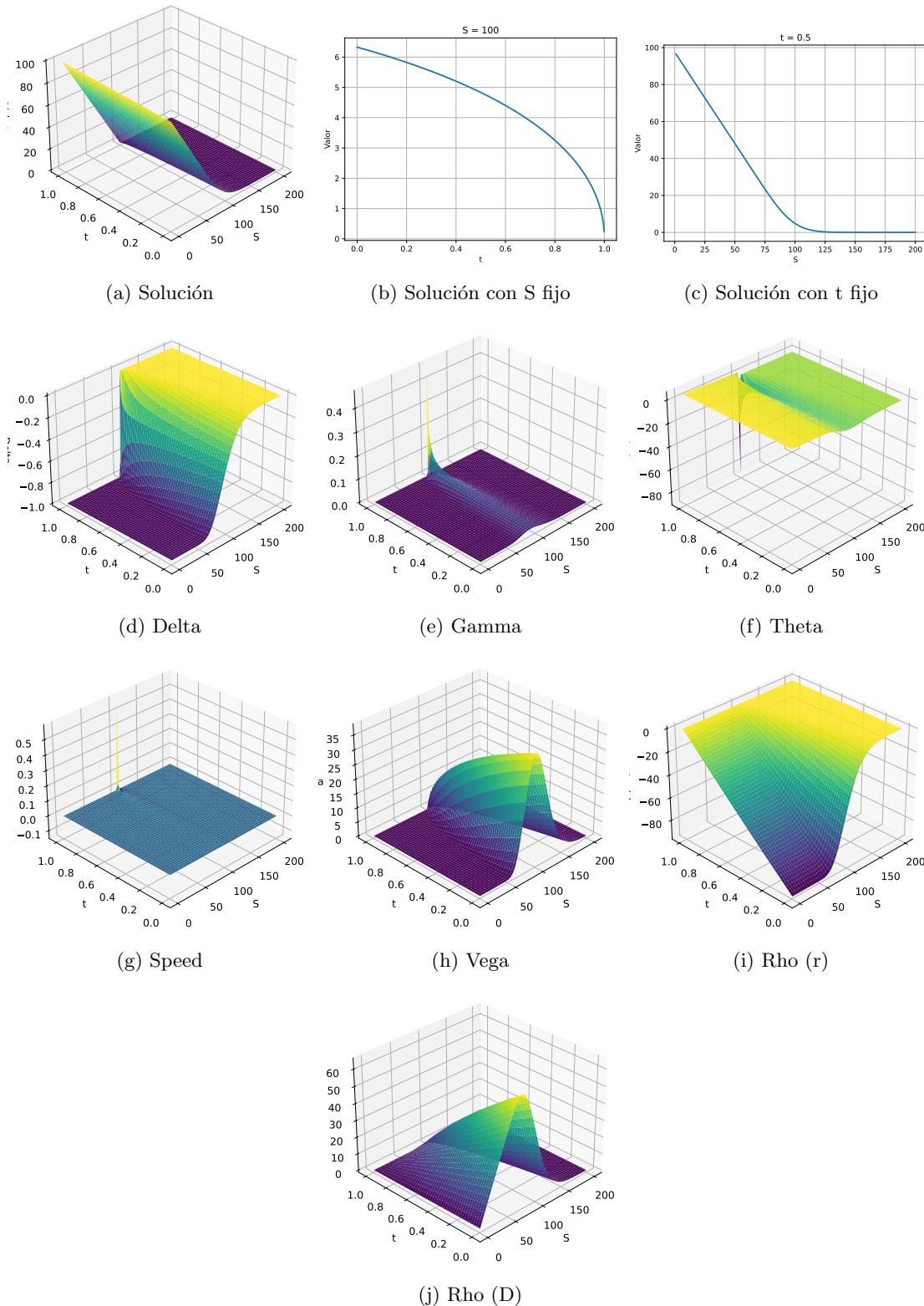
#### 4.3.3. Representación gráfica de soluciones

En este apartado se va a graficar cada una de las soluciones

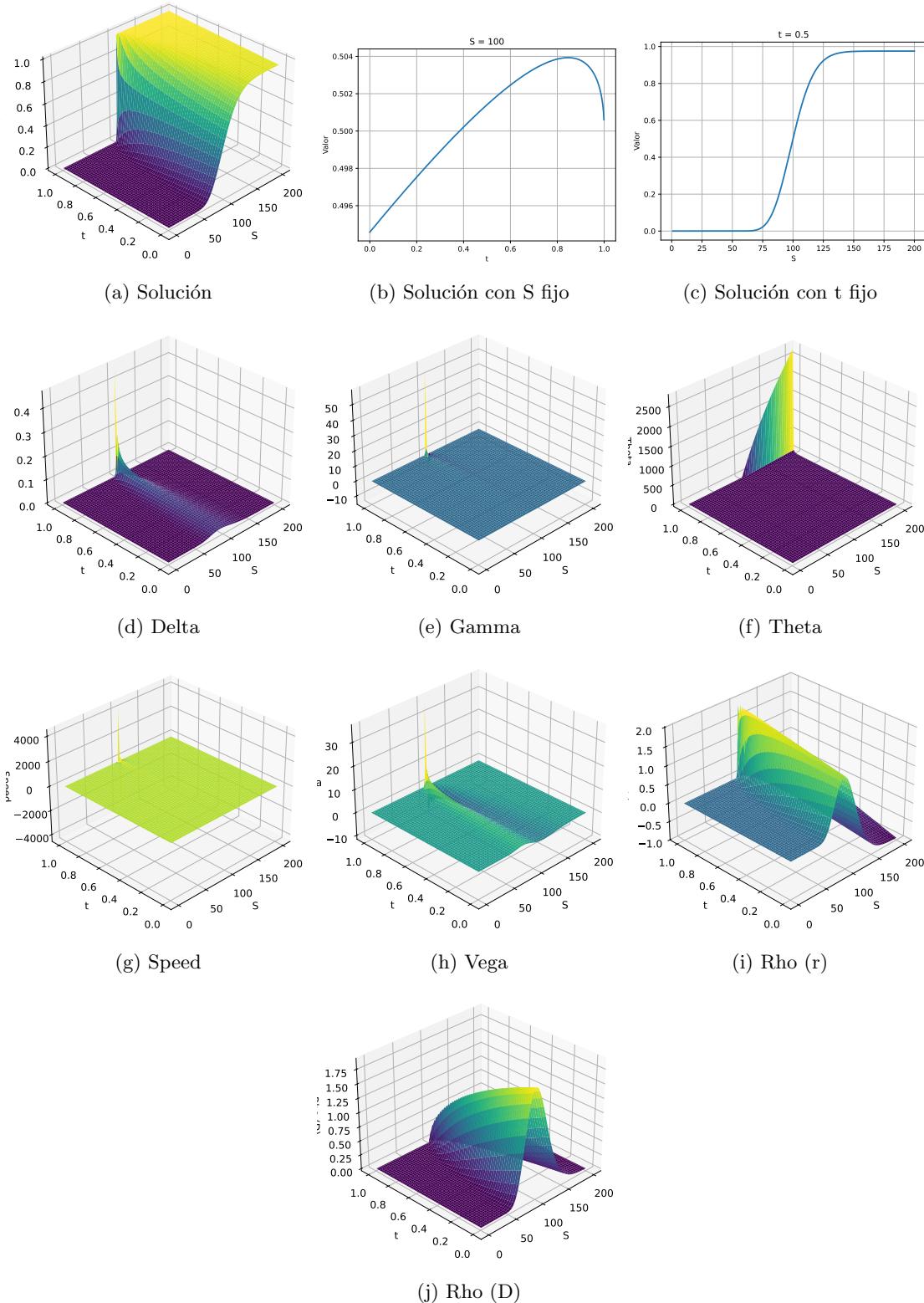
### 4.3.3.1. Call option



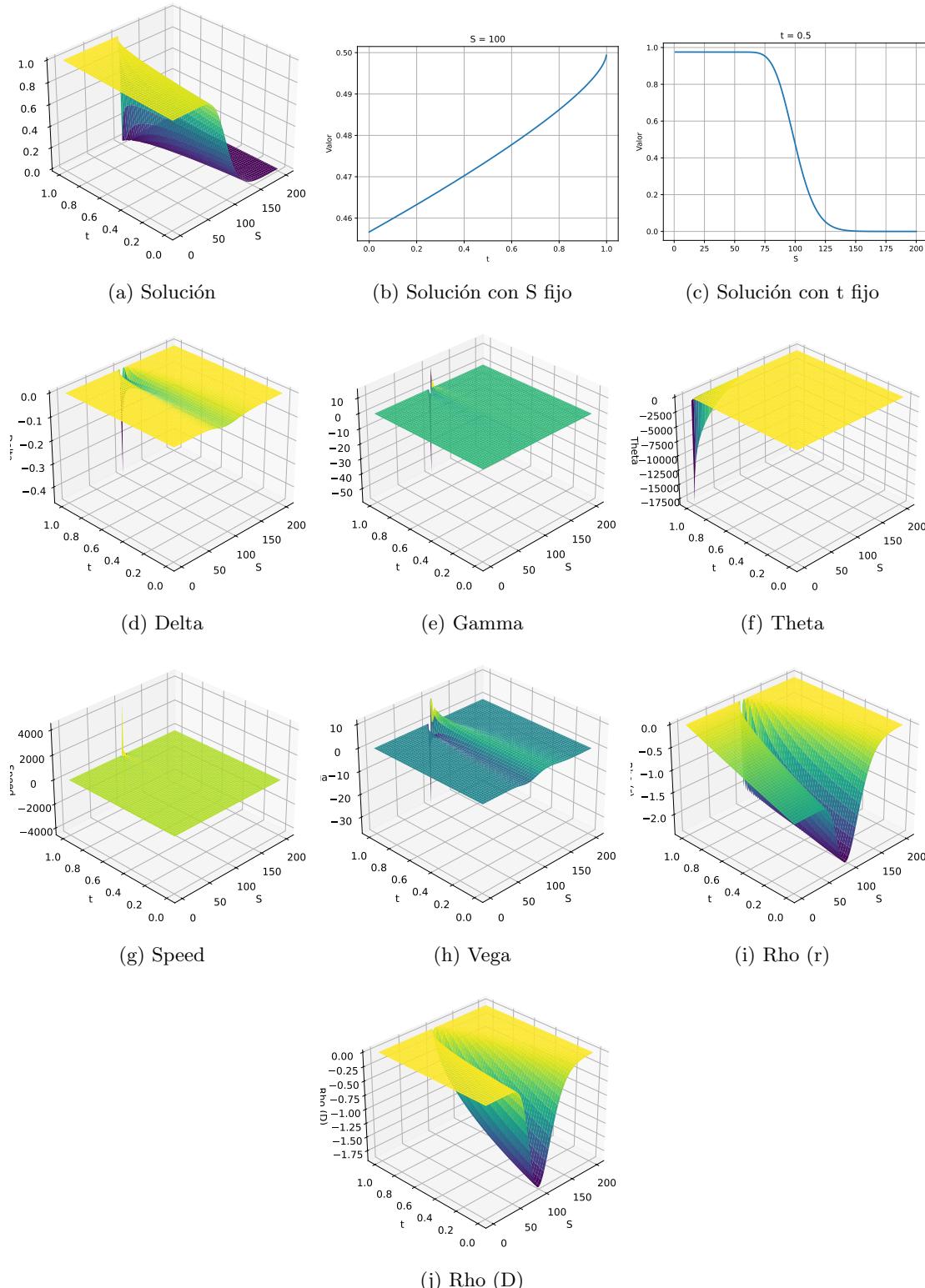
#### 4.3.3.2. Put option



### 4.3.3.3. Binary Call option



#### 4.3.3.4. Binary Put option



#### 4.3.4. Volatilidad implícita

Valor de  $\sigma$  que iguala precio teórico (Black-Scholes) al precio de mercado. Para su cálculo se utilizan métodos numéricos como Newton-Raphson usando vega.

No es consistente si se calcula para diferentes strikes y vencimientos, lo que genera distintas curvas de volatilidad implícita:

- **Smile:** Volatilidad más alta para opciones ITM y OTM, mínima en ATM.
- **Skew:** Inclinación de la curva; típicamente negativa en mercados de acciones (mayor IV en puts OTM).
- **Frown:** Forma invertida del smile; menos común.

#### 4.3.5. Tipos de coberturas

Según la independencia con el modelo:

- **Model-independent hedging:** Son pocos. No dependen de la dinámica del subyacente ni de la volatilidad. Por ejemplo la relación put-call parity.
- **Model-dependent hedging:** Son muchos más. Ejemplo más típico es la cobertura usada en el análisis de Black-Scholes. Al valorar el derivado se necesita al menos la volatilidad.

Otros tipos de coberturas son:

- **Delta hedging:** es la perfecta eliminación teórica del riesgo usando cobertura entre la opción y el subyacente. Es un ejemplo de cobertura **dinámica**: la cobertura se debe monitorizar y ajustar todo el rato, por lo que en la vida real va a dar lugar a pérdidas por los costes de transacción.
- **Gamma hedging:** usada para disminuir el tamaño de cada cobertura o para incrementar el tiempo entre coberturas (y así disminuir coste de transacción). Una cartera de este tipo es insensible a cambios del subyacente mientras sean movimientos pequeños.
- **Vega hedging:** usada para eliminar el riesgo de volatilidad. En realidad esto en ocasiones da lugar a inconsistencias y no se debe usar una volatilidad constante.
- **Static hedging:** usada para reducir el riesgo de opciones exóticas mediante contratos más líquidos que se mantienen hasta el vencimiento, eliminando la necesidad de ajustes dinámicos.
- **Margin hedging:** usada para equilibrar las llamadas de margen (depósitos obligatorios) en una parte del portafolio con los reembolsos de otras partes, evitando así grandes llamadas de margen que puedan ser difíciles de cumplir.
- **Crash (Platinum) hedging:** diseñada para minimizar el peor resultado posible en mercados extremos (p.e. caídas), donde los movimientos son tan grandes que no se puede seguir el ritmo con las coberturas, y además las correlaciones normales se vuelven irrelevantes. Incluye dos tipos: cobertura del valor nominal del portafolio y cobertura de llamadas de margen.

## 4.4. Generalizaciones sencillas del modelo

### 4.4.1. Dividendos discretos

Para evitar arbitraje, el precio de una acción con dividendo  $D_i$  en el instante  $t_i$  debe cumplir la condición de salto:

$$S(t_i^+) = S(t_i^-) - D_i$$

luego la opción que tenga esa acción como suyacente debe cumplir que

$$V(S(t_i^-), t_i^-) = V(S(t_i^+), t_i^+) \Rightarrow \boxed{V(S, t_i^-) = V(S - D_i, t_i^+)}$$

El valor de la opción no pega un salto en el instante  $t_i$  y es continua.

### 4.4.2. Préstamo de acciones

Cuando se habla de ir *short* en una acción, muchas veces no se tiene por lo que se pide prestada. Pero este préstamo tiene un coste de interés  $R$  sobre el valor de la acción. Usando el mismo argumento que para el modelo básico de Black-Scholes:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} dS = \mu S dt + \sigma S dX \\ \Pi = V(S, t) - \Delta S \end{array} \right. \Rightarrow d\Pi = dV - \Delta dS \\ \Rightarrow d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS \end{aligned}$$

Pero como ahora se tiene que pagar un interés por el préstamo de la acción:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS - R \max(\Delta, 0) S dt$$

que, haciendo un **delta hedging**  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  se obtiene que, sin arbitraje:

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - RS \max\left(\frac{\partial V}{\partial S}, 0\right) \right) dt$$

igualando a que  $d\Pi = r\Pi dt$  se obtiene que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV - RS \max\left(\frac{\partial V}{\partial S}, 0\right) = 0$$

### 4.4.3. Parámetros dependientes del tiempo

Para el caso de una opción europea, resolver el problema con parámetros  $r(t), D(t), \sigma(t)$  es lo mismo que reolverlo con los parámetros constantes

$$\boxed{\begin{aligned} r_c &= \frac{1}{T-t} \int_t^T r(\tau) d\tau \\ D_c &= \frac{1}{T-t} \int_t^T D(\tau) d\tau \\ \sigma_c^2 &= \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau \end{aligned}}$$

Para el caso de opciones americanas o exóticas se deben estudiar las condiciones de frontera.

### 4.4.4. Power options y log contracts

Se puede encontrar más información en el apéndice B.2.

## 4.5. Modelización la volatilidad

Tipos de volatilidad:

- **Actual volatility:** Es la medida de la cantidad de aleatoriedad en el retorno de un activo en un instante dado, variando de momento a momento sin asociarse a una escala temporal.
- **Historical or realized volatility:** Es una medida de la aleatoriedad en un periodo pasado específico, calculada con métodos matemáticos y utilizada como estimación para la volatilidad futura.
- **Implied volatility:** Es la volatilidad que, al ser introducida en el modelo de Black-Scholes, iguala el precio de mercado de la opción, reflejando la expectativa del mercado sobre la volatilidad futura. Se ha introducido en la sección 4.3.4.
- **Forward volatility:** Es la volatilidad asociada a un periodo de tiempo futuro o a un instante futuro, ya sea actual o implícita.

### 4.5.1. Volatilidad por media estadística

#### 4.5.1.1. Volatilidad constante

Para el caso de volatilidad constante o variaciones lentas, entonces se puede considerar:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i^2$$

donde

$$R_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$$

representa el retorno del día  $i$ . Este método tiene limitaciones, como el efecto espurio que hace que por picos instantáneos muy altos o muy bajos, la volatilidad se mantendrá muy alta durante unos días.

#### 4.5.1.2. Volatilidad con regresión a la media

Considerando una volatilidad dependiente del tiempo y para modelar que la volatilidad tiende a una media a largo plazo  $\bar{\sigma}$ , se usa el modelo **ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)** asigna un peso a cada estimación de volatilidad a largo plazo y a la estimación actual basada en los últimos  $n$  retornos:

$$\sigma_n^2 = \alpha \bar{\sigma}^2 + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i^2$$

Donde  $\alpha$  es el parámetro que controla la importancia relativa entre la volatilidad a largo plazo y la volatilidad basada en los retornos recientes.

#### 4.5.1.3. Volatilidad con media móvil exponencialmente ponderada (EWMA)

Se utiliza el modelo:

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{n-i+1}^2$$

donde  $\lambda$  es un parámetro entre 0 y 1 que controla el peso de los retornos pasados. Este modelo asigna mayor peso a los retornos más recientes. La expresión puede simplificarse como:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) R_n^2$$

Esto utiliza el retorno más reciente y la estimación previa de la volatilidad, siendo conocido como la medida de volatilidad de RiskMetrics.

#### 4.5.1.4. Modelo GARCH

El modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) combina la volatilidad a largo plazo, la volatilidad previa y los retornos recientes para estimar la volatilidad actual:

$$\sigma_n^2 = \alpha\bar{\sigma}^2 + (1 - \alpha)(\lambda\sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda)R_n^2)$$

Este modelo es útil para capturar la dinámica de la volatilidad en el tiempo, considerando tanto la persistencia como la regresión hacia una media a largo plazo.

#### 4.5.1.5. Volatilidad futura esperada

Estando a día  $n$  se quiere estimar la volatilidad en  $k$  días, i.e. en el día  $n+k$ . Dos maneras de hacerlo son:

- **Modelo EWMA:**

$$\begin{aligned}\sigma_{n+k}^2 &= \lambda\sigma_{n+k-1}^2 + (1 - \lambda)R_{n+k}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \lambda\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2] + (1 - \lambda)\mathbb{E}[R_{n+k}^2] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \lambda\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2] + (1 - \lambda)\mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2]\end{aligned}$$

luego

$$\mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] = \mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2]$$

Esto implica que la volatilidad futura esperada es igual a la estimación de volatilidad del día anterior.

- **Modelo GARCH:**

$$\begin{aligned}\sigma_{n+k}^2 &= \alpha\bar{\sigma}^2 + (1 - \alpha)(\lambda\sigma_{n+k-1}^2 + (1 - \lambda)R_{n+k}^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \alpha\bar{\sigma}^2 + (1 - \alpha)(\lambda\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2] + (1 - \lambda)\mathbb{E}[R_{n+k}^2]) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \frac{\alpha\bar{\sigma}^2}{1 - (1 - \alpha)(1 - \lambda)} + \frac{\lambda(1 - \alpha)}{1 - (1 - \alpha)(1 - \lambda)}\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2]\end{aligned}$$

Mirando más hacia el futuro:

$$\mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\mathbb{E}[\sigma_n^2] - \bar{\sigma}^2)(1 - \nu)^k, \quad \nu = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \lambda)}$$

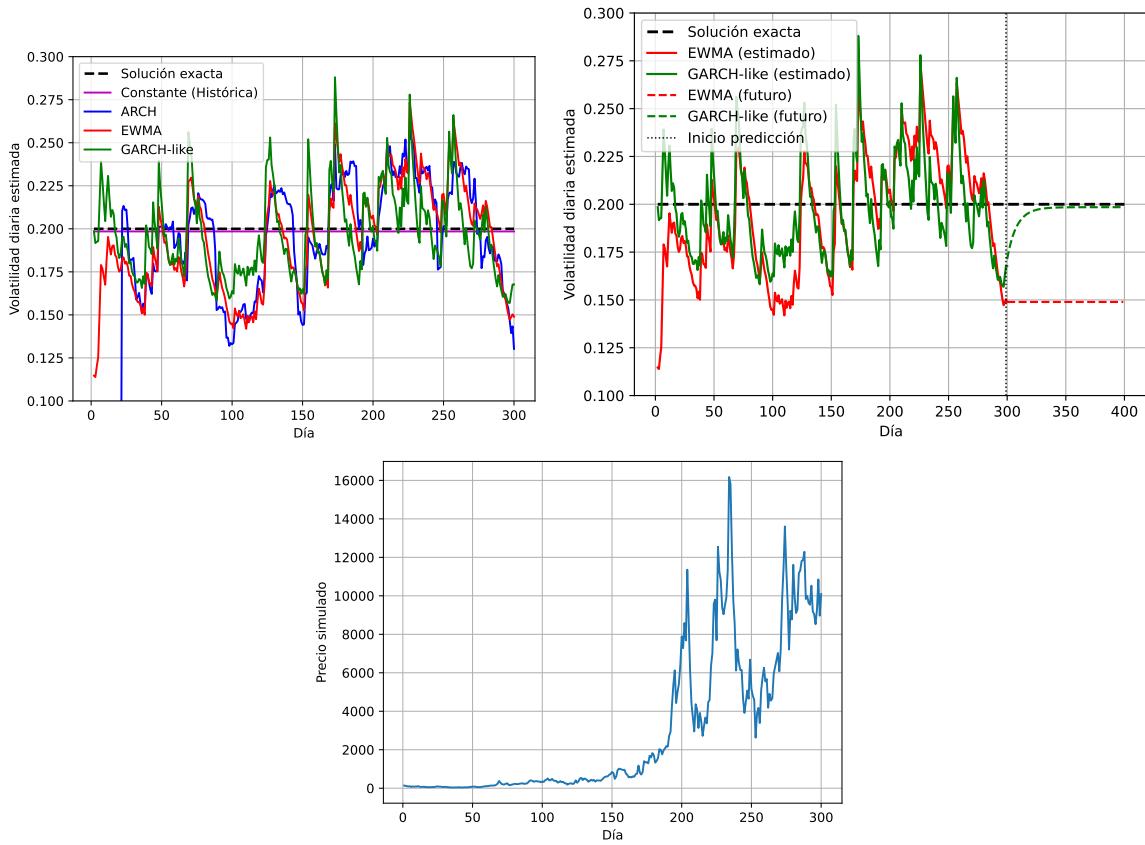


Figura 4.5: Comparación de estimadores de volatilidad

#### 4.5.1.6. Estimación de volatilidad basada en rangos de tiempo

Usar demasiados datos puede capturar variaciones temporales del parámetro, mientras que usar pocos datos puede generar errores de muestreo. En primer lugar, sabiendo que  $\text{Varianza\_anual} = \text{Varianza\_diaria} \times \text{Número\_días\_trading}$ , entonces la volatilidad anualizada sería:

$$\sigma_{anual} = \sigma_{diaria} \times \sqrt{\text{Número\_días\_trading}}$$

Algunas maneras de estimar la volatilidad diaria según los rangos de tiempo son:

- **Medición tradicional close-to-close:** Sea  $C_i$  el precio de cierre del día  $i$ , entonces:

- Drift pequeño:

$$\sigma_{cc}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \log \left( \frac{C_i}{C_{i-1}} \right) \right)^2$$

- Drift genérico:

$$\sigma_{acc}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \left( \log \left( \frac{C_i}{C_{i-1}} \right) \right)^2 - \frac{\left( \log \left( \frac{C_n}{C_0} \right) \right)^2}{n(n-1)} \right)$$

- **Medición basada en rangos extremos (Parkinson, 1980):** Utiliza los valores extremos del día, los máximos  $H_i$  y los mínimos  $L_i$ . Es 5 veces más efectiva que la medición close-to-close:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{4n \log(2)} \sum_{i=1}^n \left( \log \left( \frac{H_i}{L_i} \right) \right)^2$$

- **Medición basada en rangos extremos y apertura (Garman & Klass, 1980):** Utiliza los valores extremos del día y el precio de apertura  $O_i$ . Es 7.4 veces más efectiva que la medición close-to-close:

$$\sigma_{gk}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( 0,511 \left( \log \left( \frac{H_i}{L_i} \right) \right)^2 - 0,019 \log \left( \frac{C_i}{O_i} \right) - 2 \log \left( \frac{H_i}{O_i} \right) \log \left( \frac{L_i}{O_i} \right) \right)$$

- **Medición basada en rangos extremos y cierre (Rogers & Satchell, 1991):** Es independiente del drift, no como Parkinson y Garman & Klass:

$$\sigma_{rs}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \log \left( \frac{H_i}{C_i} \right) \log \left( \frac{H_i}{O_i} \right) + \log \left( \frac{L_i}{C_i} \right) \log \left( \frac{L_i}{O_i} \right) \right)$$

#### 4.5.2. Estimar parámetros: maximum likelihood estimation (MLE)

Llegas a una ciudad y coges el taxi número 20922, ¿cuantos taxis hay en la ciudad? El concepto del MLE consiste en elegir los parámetros de manera que se maximice la probabilidad de que ocurra el evento observado. En este caso, la probabilidad de subirse en un taxi en específico es de  $1/N$  y el  $N$  que maximiza la probabilidad de subirse en el taxi 20922 es  $N = 20922$  (100 %).

La lógica es la siguiente: se tiene un modelo (p.e. una normal de media 0 y desviación a estimar) con 3 (o los que sean) parámetros (p.e. desviación). Obtengo varios datos, calculo su probabilidad de ocurrir para cada uno de los modelos, hago una probabilidad conjunta de todos los datos y se elige el modelo que maximice esa probabilidad conjunta.

Matemáticamente, el proceso es el siguiente, sabiendo que para una distribución normal con media cero y desviación estándar  $\sigma$ , la probabilidad de obtener un valor  $\phi_i$  es:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\phi_i^2}{2\sigma^2}}$$

Luego la probabilidad conjunta de obtener  $N$  valores  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$  es:

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\phi_i^2}{2\sigma^2}}$$

Para maximizar esta probabilidad conjunta, se deriva con respecto a  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left( -\frac{\phi_i^2}{2\sigma^2} \right) \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^N \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 \right) \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \ln \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^N \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 \right) \right) \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( N \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( -N \ln \left( \sqrt{2\pi} \right) - N \ln (\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 & \end{aligned}$$

#### 4.5.3. Volatilidad dependiente del tiempo en modelos sencillos

Cuando se tiene una volatilidad dependiente del tiempo pero el modelo utiliza una volatilidad constante, se puede considerar una volatilidad constante promedio de forma similar a lo que se hace en las opciones asiáticas:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t)^2 dt$$

## 4.6. Cobertura: volatilidad implícita vs real

Esta sección se centra en el caso en el que la volatilidad implícita es diferente a la volatilidad que se ha calculado a partir de los datos históricos. Si se compra un ATM strangle, el beneficio esperado es aproximadamente de

$$\sqrt{\frac{2(T-t)}{\pi}} (\sigma - \tilde{\sigma}) S.$$

con una desviación típica de

$$\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}} \sigma S \sqrt{T-t}.$$

donde  $\sigma$  es la volatilidad real y  $\tilde{\sigma}$  es la volatilidad implícita. La desviación depende de la volatilidad y tiene la misma magnitud que la media, por lo que el riesgo es muy alto, por lo que se debe seguir alguna estrategia para minimizar riesgos.

**Notación 1.** Se define la  $a$  superíndice para la volatilidad real y la  $i$  como superíndice para la volatilidad implícita. Por ejemplo,  $V^a$  es la delta usando la volatilidad real en la fórmula y  $V^i$  es la delta usando la volatilidad implícita en la fórmula.

Según sobre qué volatilidad se decida hacer la cobertura, se obtiene distintos resultados:

- **Cobertura sobre la volatilidad real:** Sea el modelo

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX.$$

se construye una cartera comprando la opción por  $V^i$  y cubriendo con  $\Delta^a$  del subyacente, lo que da lugar a un efectivo de  $-V^i + \Delta^a S$ . Es decir las cartera es:

Componente	Valor
Opción	$V^i$
Acción	$-\Delta^a S$
Efectivo	$-V^i + \Delta^a S$

$$\Pi = V^i - \Delta^a S - V^i + \Delta^a S$$

Se supone además unos dividendos continuos de  $D$  y una tasa de interés  $r$ . Entonces, la variación de la cartera es

$$d\Pi = dV^i - \Delta^a dS - r(V^i - \Delta^a S)dt - \Delta^a D S dt$$

Asumiendo que la opción está correctamente valorada en  $V^a$ , se tiene que

$$\begin{aligned} dV^a - \Delta^a dS - r(V^a - \Delta^a S)dt - \Delta^a D S dt &= 0 \\ \Rightarrow -\Delta^a dS - \Delta^a D S dt &= -dV^a + r(V^a - \Delta^a S)dt \end{aligned}$$

por lo que sustituyendo en la variación de la cartera se obtiene

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV^i - r(V^i - \Delta^a S)dt - dV^a - r(V^a - \Delta^a S)dt \\ &= dV^i - dV^a - r(V^i - V^a)dt \end{aligned}$$

Se sabe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-rt}(V^i - V^a)) &= -re^{-rt}(V^i - V^a) + e^{-rt} \left( \frac{d}{dt} V^i - \frac{d}{dt} V^a \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow d(e^{-rt}(V^i - V^a)) &= e^{-rt} (-r(V^i - V^a)dt + dV^i - dV^a) \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{rt} d(e^{-rt}(V^i - V^a)) &= -r(V^i - V^a)dt + dV^i - dV^a \Rightarrow \end{aligned}$$

que sustituyendo en la variación de la cartera se obtiene

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV^i - dV^a + e^{rt} d(e^{-rt}(V^i - V^a)) + dV^a - dV^i \\ &= e^{rt} d(e^{-rt}(V^i - V^a)) \end{aligned}$$

que actualizada actualizada a tiempo  $t_0$  es

$$\begin{aligned} d\Pi &= e^{-r(t-t_0)} e^{rt} d(e^{-rt}(V^i - V^a)) \\ &= e^{rt_0} d(e^{-rt}(V^i - V^a)) \end{aligned}$$

La ganacia total desde  $t_0$  hasta el vencimiento es

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T d\Pi &= \int_{t_0}^T e^{-rt_0} d(e^{rt}(V^i - V^a)) \\ &= e^{-rt_0} [e^{rT}(V^i(T) - V^a(T)) - e^{rt_0}(V^i(t_0) - V^a(t_0))] = \\ &= e^{-rt_0} [-e^{rt_0}(V^i(t_0) - V^a(t_0))] \end{aligned}$$

Por lo tanto, el beneficio total garantizado al vencimiento es

$$V^a(t_0) - V^i(t_0)$$

Se debe de tener en cuenta que el beneficio final está garantizado, pero los beneficios en el camino son aleatorios.

Se puede desmostrar que la variación de la cartera tambien se puede escribir como

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)S^2\Gamma^i dt + (\Delta^i - \Delta^a)((\mu - r + D)Sdt + \sigma SdX)$$

- **Cobertura sobre la volatilidad implícita:** Se usa igualmente el modelo

$$dS = \mu Sdt + \sigma SdX$$

y se construye la cartera

$$\Pi = V^i - \Delta^i S - V^i + \Delta^i S$$

Sabiendo que hay un dividendos continuos, entonces su variación es

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV^i - \Delta^i dS - r(V^i - \Delta^i S)dt - \Delta^i DSdt \\ &= \Theta^i dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma^i dt - r(V^i - \Delta^i S)dt - \Delta^i DSdt \\ &= \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)S^2\Gamma^i dt \end{aligned}$$

que actualizada a tiempo  $t_0$  es

$$d\Pi = e^{r(t-t_0)} \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)S^2\Gamma^i dt$$

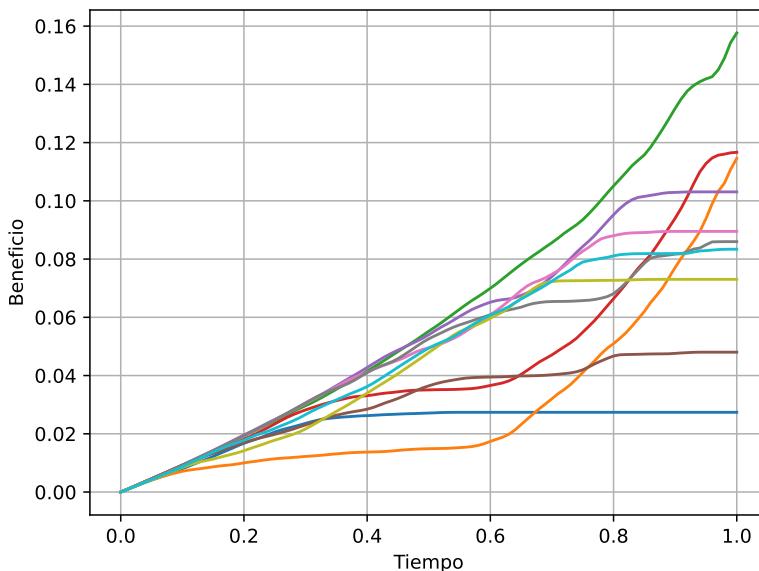


Figura 4.6: Beneficios de cobertura sobre la volatilidad implícita

por lo que en tiempo final hay un beneficio debe ser

$$\int_{t_0}^T d\Pi = \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) \int_{t_0}^T e^{r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i dt$$

que es siempre positivo si la volatilidad real es mayor que la implícita. Se puede calcular la media y varianza de este beneficio. Para mas información, ver el apéndice B.4.

Por lo tanto, el beneficio solo depende de gamma, por lo que las opciones put call tienen el mismo beneficio esperado. Si se construyen carteras con opciones con distintos strikes, se obtiene un beneficio de

$$\frac{1}{2} \sum_k (\sigma^2 - \tilde{\sigma}_k^2) \int_{t_0}^{T_k} e^{r(t-t_0)} S^2 \Gamma_k^i dt$$

cuya media y varianza se pueden calcular.

- **Cobertura cuando la volatilidad implícita es aleatoria:** Sean los modelos

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S dX_1 \\ d\tilde{\sigma} &= adt + bdX_2 \end{aligned}$$

y la correlación  $\rho$  entre  $dX_1$  y  $dX_2$ .

- **Cobertura sobre la volatilidad real:** Usando los mismo argumentos que antes, se llega a que el beneficio final está asegurado. Por otro lado, la variación de la cartera está

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) S^2 \Gamma^i dt + (\Delta^i - \Delta^a) ((\mu - r + D) S dt + \sigma S dX_1) + \\ &\quad + \frac{\partial V^i}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 V^i}{\partial \tilde{\sigma}^2} dt + \rho \sigma b S \frac{\partial^2 V^i}{\partial S \partial \tilde{\sigma}} dt. \end{aligned}$$

- **Cobertura sobre la volatilidad implícita:** Usando los mismos argumentos que antes se llega a que la variación de la cartera está

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV^i - \Delta dS - r(V^i - \Delta S)dt - \Delta D S dt \\ &= \Theta^i dt + \Delta^i dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma^i dt + \frac{\partial V^i}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 V^i}{\partial \tilde{\sigma}^2} dt \\ &\quad + \rho \sigma b S \frac{\partial^2 V^i}{\partial S \partial \tilde{\sigma}} dt - \Delta dS - r(V^i - \Delta S)dt - \Delta D S dt. \end{aligned}$$

se puede obtener su esperanza y varianza.

#### 4.6.1. Comportamiento de la volatilidad implícita

Existen varios “modelos” de cómo se comporta la volatilidad implícita:

- **Sticky Strike:** es constante para cada opción (i.e. para cada strike y vencimiento). Es común en los mercados de renta variable. Si la volatilidad implícita difiere de la volatilidad real se pueden obtener beneficios como se ha explicado.
- **Sticky Delta:** depende de su moneyness ( $\xi = S/E$ ). Es común en mercados como el FX, donde se cotizan precios y volatilidades para opciones con deltas específicas. Se modela como  $\tilde{\sigma} = g(\xi, t)$  por lo que:

$$d\tilde{\sigma} = \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \mu \frac{S}{E} \frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{S^2}{E^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} \right) dt + \sigma \frac{S}{E} \frac{\partial g}{\partial \xi} dX_1,$$

La variación de la volatilidad implícita está perfectamente correlacionada con el subyacente, permitiendo una cobertura perfecta en términos de mark-to-market.

Hay una variantes donde la volatilidad implícita depende de la volatilidad ATM y de una función del moneyness, por ejemplo:

$$\tilde{\sigma} = \sigma_{ATM} g \left( \frac{\log(S/E)}{\sqrt{T-t}} \right).$$

## 4.7. Opciones americanas

Aquellas que pueden ejercerse en cualquier momento antes de su vencimiento. Sea  $\Phi(S)$  el payoff de la opción, entonces se cumple que:

$$V \geq \Phi(S)$$

Si no fuese el caso, entonces  $V < \Phi(S) \Rightarrow \Phi(S) - V > 0$ , por lo que se podría comprar una opción y ejercer al momento obteniendo un beneficio sin riesgo, por lo que habría arbitraje.

En general, el punto óptimo de ejercicio es aquel que hace que la pendiente de la opción sea la misma que la pendiente del *payoff*.

Sea la cartera

$$\Pi = V - \Delta S$$

entonces la diferencia entre el cambio de valor de la cartera y su crecimiento por el interés es:

$$d\Pi - r\Pi dt = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r(V - \Delta S) \right) dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS$$

y eligiendo  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ , se obtiene:

$$d\Pi - r\Pi dt = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \right) dt$$

Para evitar arbitraje solo se debe asegurar que esta resta sea no positiva, de manera que la cartera no gane mas que el interés:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \leq 0$$

El caso  $\dots < 0$  no produce arbitraje porque al vender una opción y meterlo en el banco (para que crezca a ritmo  $r$ ), se corre el riesgo de que el comprador ejerza en cualquier momento.

### 4.7.1. Dividendos discretos

Como se ha visto en la ecuación (4.4.1), si hay dividendo discreto se cumple que  $V(S, t_i^-) = V(S - D_i, t_i^+)$ , por lo que para evitar que el valor de la opción caiga por debajo del valor de ejercicio inmediato se impone

$$V(S, t_d^-) = \max(V(S - D, t_d^+), \Phi(S))$$

garantizando que el valor de la opción nunca sea menor que el payoff si se ejerciera justo antes del dividendo evitando así arbitraje.

### 4.7.2. Opciones one-touch

Es una versión americana de la opción binaria europea. Se paga una cantidad fija si el subyacente alcanza una cierta barrera antes de vencimiento. El pago realiza tan pronto como se alcanza la barrera, sin esperar al vencimiento.

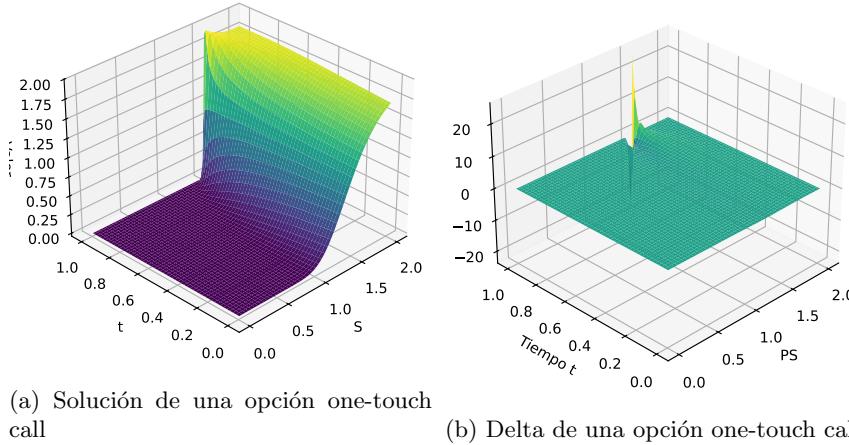
- **One-touch call:** paga si el subyacente  $S$  alcanza un nivel superior  $S_u$ .

$$V(S, t) = \left( \frac{S_u}{S} \right)^{2r/\sigma^2} N(d_6) + \frac{S}{S_u} N(d_1)$$

donde

$$d_6 = \frac{\log(S/S_u) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

y  $d_1$  es el mismo que en Black-Scholes (4.3.2).



- **One-touch put:** paga si  $S$  cae hasta un nivel inferior  $S_l$ .

$$V(S, t) = \left( \frac{S_l}{S} \right)^{2r/\sigma^2} N(-d_6) + \frac{S}{S_l} N(-d_1)$$

con

$$d_6 = \frac{\log(S/S_l) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y  $d_1$  es el mismo que en Black-Scholes (4.3.2).

- **Double one-touch:** paga si  $S$  alcanza cualquiera de dos barreras (superior  $S_u$  o inferior  $S_l$ ) antes del vencimiento. El valor se puede calcular mediante series de Fourier y no es simplemente la suma de una call y una put one-touch.

#### 4.7.3. Otros tipos de opciones americanas

- **Opciones israelíes:** opciones americanas en las que el escritor puede cancelar la opción más temprano pagando una penalización.
- **Opciones Bermuda:** opciones americanas que solo pueden ejercerse en fechas específicas, no en cualquier momento. Lo único que cambia con respecto a las americanas es que la condición (4.7) se aplica solo en los momentos de ejercicio permitido.
- **Opciones Make Your Mind Up:** opciones americanas en las que hay que avisar con cierta antelación si se va a ejercer. Hay más información en el apéndice B.3.
- **Opciones instalment:** no son exactamente americanas, pero son similares. Hay más información en el apéndice B.3.

## 4.8. Opciones multiasset

Cada uno de los subyacentes sigue un un camino aleatorio

$$dS_i = \mu_i S_i dt + \sigma_i S_i dX_i$$

tal que

$$\mathbb{E}[dX_i] = 0, \quad \mathbb{E}[dX_i^2] = dt$$

y tienen una correlación

$$\mathbb{E}[dX_i dX_j] = \rho_{ij} dt$$

donde los  $\rho_{ij}$  vienen dados por la matriz de correlación

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

que es definida positiva, (i.e.  $y^T \Sigma y \geq 0$ ). Sea  $M$  una matriz diagonal con los valores de  $\sigma$ , la matriz de covarianza es

$$M\Sigma M = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Como se muestra en el apéndice B.1, el cálculo de Itô se puede generalizar como:

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} \right) dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial V}{\partial S_i} dS_i$$

### 4.8.1. Obtención de la correlación

Si se tiene una serie de datos de precios de los activos a intervalos  $\delta t$ , se puede calcular la correlación entre ellos. En primer lugar se debe calcular el retorno en cada punto:

$$R_i(t_K) = \frac{S_i(t_k + \delta t) - S_i(t_k)}{S_i(t_k)}$$

luego la volatilidad histórica de cada activo es

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{\delta t(M-1)} \sum_{k=1}^M (R_i(t_k) - \bar{R}_i)^2}$$

donde  $M$  es el número de puntos de datos y  $\bar{R}_i$  es la media de los retornos. La covarianza entre activos es de

$$\text{Cov}(S_i, S_j) = \frac{1}{\delta t(M-1)} \sum_{k=1}^M (R_i(t_k) - \bar{R}_i) (R_j(t_k) - \bar{R}_j)$$

Finalmente, la correlación entre los activos  $i$  y  $j$  es

$$\boxed{\rho_{ij} = \frac{1}{\delta t(M-1)\sigma_i\sigma_j} \sum_{k=1}^M (R_i(t_k) - \bar{R}_i) (R_j(t_k) - \bar{R}_j)}$$

Esta correlación suele ser bastante inestable y cambia mucho dependiendo de la ventana de tiempo que se utilice.

### 4.8.2. Opciones basket

También llamadas **basket options**, **options on baskets** o **rainbow options**. Se construye la cartera:

$$\Pi = V(S_1, \dots, S_d, t) - \sum_{i=1}^d \Delta_i S_i$$

cuya variación es

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV(S_1, \dots, S_d, t) - \sum_{i=1}^d \Delta_i dS_i \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} \right) dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial V}{\partial S_i} dS_i - \sum_{i=1}^d \Delta_i dS_i \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} \right) dt + \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial V}{\partial S_i} - \Delta_i \right) dS_i \end{aligned}$$

luego la cobertura se debe hacer con  $\Delta_i = \frac{\partial V}{\partial S_i}$ , lo que da lugar a

$$\begin{aligned} d\Pi &= r\Pi dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} \right) dt = r \left( V - \sum_{i=1}^d \Delta_i S_i \right) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} = rV - r \sum_{i=1}^d \frac{\partial V}{\partial S_i} S_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + r \sum_{i=1}^d \frac{\partial V}{\partial S_i} S_i - rV = 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta dividendos y siguiendo la misma lógica, se obtiene la EDP

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + \sum_{i=1}^d (r - D_i) \frac{\partial V}{\partial S_i} S_i - rV = 0} \quad (4.3)$$

cuya solución analítica es

$$\boxed{V = \frac{e^{-r(T-t)}}{(\sigma_1 \cdots \sigma_d) \sqrt{(2\pi(T-t))^d \det(\Sigma)}} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\text{Payoff}(S'_1, \dots, S'_d)}{S'_1 \cdots S'_d} \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha^T \Sigma^{-1} \alpha\right) dS'_1 \cdots dS'_d}$$

donde

$$\alpha_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{T-t}} \left( \log\left(\frac{S_i}{S'_i}\right) + \left(r - D_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)(T-t)\right)$$

### 4.8.3. Opciones exchange

Dan el derecho al poseedor de un activo por otro con un ratio. Su payoff es

$$\max(q_1 S_1 - q_2 S_2, 0)$$

con  $q_1$  y  $q_2$  constantes. La EDP que sigue es igualmente (4.3) con  $d = 2$ . Para encontrar la solución se puede hacer el cambio

$$V(S_1, S_2, t) = q_1 S_2 H(\xi, t), \quad \xi = \frac{S_1}{S_2}$$

lo que llevaria a una condición final

$$H(\xi, T) = \max\left(\xi - \frac{q_2}{q_1}, 0\right)$$

y una edp

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\frac{\partial^2 H}{\partial\xi^2} + (D_2 - D_1)\xi\frac{\partial H}{\partial\xi} - D_2H = 0, \quad \sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

Resolviendo y rehaciendo el cambio, se obtiene

$$V(S_1, S_2, t) = q_1S_1e^{-D_1(T-t)}N(d'_1) - q_2S_2e^{-D_2(T-t)}N(d'_2)$$

donde

$$d'_1 = \frac{\log(q_1S_1/q_2S_2) + (D_2 - D_1 + \frac{1}{2}\sigma'^2)(T-t)}{\sigma'\sqrt{T-t}}, \quad d'_2 = d'_1 - \sigma'\sqrt{T-t}$$

#### 4.8.4. Quantos

El payoff está definido en base a un activo o índice en una divisa que luego es convertida a otra en el momento del pago. Se va a tomar como ejemplo un contrato basado en un índice definido en yenes y pagado en dólares. Se define  $S_{\$}$  como el ratio de conversión de yenes a dólares y  $S_N$  el índice. Se asume que se satisfacen la EDEs

$$\begin{aligned} dS_{\$} &= \mu_{\$}S_{\$}dt + \sigma_{\$}S_{\$}dX_{\$} \\ dS_N &= \mu_NS_Ndt + \sigma_NS_NdX_N \end{aligned}$$

con una correlación  $\rho$ . Se construye la cartera

$$\Pi = V(S_{\$}, S_N, t) - \Delta_{\$}S_{\$} - \Delta_NS_NS_{\$}$$

Todo en esta cartera está medido en dólares:  $\Delta_{\$}$  es el número de yenes que se tiene en short,  $\Delta_{\$}S_{\$}$  es el valor en dólares de esos yenes;  $\Delta_N$  es la cantidad el índice que se tiene en short y  $\Delta_NS_NS_{\$}$  es el valor de todo esa cantidad de índice convertido a dólares. La variación de la cartera es

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{\$}^2S_{\$}^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_{\$}^2} + \rho\sigma_{\$}\sigma_NS_{\$}S_N\frac{\partial^2 V}{\partial S_{\$}\partial S_N} + \frac{1}{2}\sigma_N^2S_N^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_N^2} - \rho\sigma_{\$}\sigma_N\Delta_NS_{\$}S_N - r_f\Delta_{\$}S_{\$} \right) dt \\ &\quad + \left( \frac{\partial V}{\partial S_{\$}} - \Delta_{\$} - \Delta_NS_N \right) dS_{\$} + \left( \frac{\partial V}{\partial S_N} - \Delta_NS_{\$} \right) dS_N. \end{aligned}$$

luego para eliminar el riesgo se elige

$$\Delta_{\$} = \frac{\partial V}{\partial S_{\$}} - \frac{S_N}{S_{\$}}\frac{\partial V}{\partial S_N}, \quad \Delta_N = \frac{1}{S_{\$}}\frac{\partial V}{\partial S_N}$$

que igualando al interés  $r_{\$}$  da lugar a EDP

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{\$}^2S_{\$}^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_{\$}^2} + \rho\sigma_{\$}\sigma_NS_{\$}S_N\frac{\partial^2 V}{\partial S_{\$}\partial S_N} + \frac{1}{2}\sigma_N^2S_N^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_N^2} + (r_{\$} - r_f)S_{\$}\frac{\partial V}{\partial S_{\$}} + (r_f - \rho\sigma_{\$}\sigma_N)S_N\frac{\partial V}{\partial S_N} - r_{\$}V = 0$$

con la condición final

$$V(S_{\$}, S_N, T) = \max(S_N - E, 0)$$

Si se busca una solución de la forma

$$V(S_{\$}, S_N, t) = W(S_N, t)$$

se obtiene la EDP

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_N^2S_N^2\frac{\partial^2 W}{\partial S_N^2} + S_N\frac{\partial W}{\partial S_N} (r_f - \rho\sigma_{\$}\sigma_N) - r_{\$}W = 0$$

Lo que quiere decir que un quanto es equivalente a un modelo básico de Black-Scholes con una tasa de dividendo  $r_{\$} - r_f + \rho\sigma_{\$}\sigma_N$

# Capítulo 5

## Valoración del riesgo

### 5.1. Gestión de carteras

#### 5.1.1. Carteras diversificadas

Se tiene una cartera con  $N$  activos. El valor hoy del  $i$ -ésimo activo es  $S_i$  y tiene un retorno aleatorio  $R_i$  sobre el periodo  $T$ . Los retornos están distribuidos de forma normal con media  $\mu_i T$  y varianza  $\sigma_i \sqrt{T}$ . La correlación entre los activos  $i$  y  $j$  es  $\rho_{ij}$ . Se tiene una cantidad  $w_i$  del activo  $i$  en la cartera, por lo que

$$\begin{aligned}\Pi &= \sum_{i=1}^N w_i S_i \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta\Pi &= \sum_{i=1}^N w_i R_i S_i \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\delta\Pi}{\Pi} &= \frac{\sum_{i=1}^N w_i R_i S_i}{\sum_{i=1}^N w_i S_i} \\ &= \sum_{i=1}^N W_i R_i, \quad W_i = \frac{w_i S_i}{\sum_{j=1}^N w_j S_j}\end{aligned}$$

por lo que el retorno esperado de la cartera es

$$\begin{aligned}\mu_\Pi &= \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[ \frac{\delta\Pi}{\Pi} \right] = \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N W_i R_i \right] = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N W_i \mathbb{E}[R_i] = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N W_i \mu_i T \\ &= \boxed{\sum_{i=1}^N W_i \mu_i}\end{aligned}\tag{5.1}$$

y la desviación estandar

$$\sigma_\Pi = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\text{var} \left[ \frac{\delta\Pi}{\Pi} \right]} = \boxed{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}}\tag{5.2}$$

siendo

$$\boxed{W_i = \frac{w_i S_i}{\sum_{j=1}^N w_j S_j}}$$

y sabiendo que

$$\sum_{i=1}^N W_i = 1.$$

En estos contextos, a la volatilidad o desviación típica se le llama **risk** y a rentabilidad esperada se le llama **return**.

### 5.1.2. Elección de activos dentro de una cartera diversificada: modelo de Markowitz (MPT)

Se va a definir las carteras de manera que sean eficientes, que son aquellas que dan el mayor reward dado un nivel de risk o que el menor risk dado un nivel de reward.

Por ejemplo, se tiene que elegir una cartera que combine dos activos *A* y *B*. Usando las ecuaciones (5.1) y (5.2), se tiene que

$$\begin{aligned}\mu_{\Pi} &= W\mu_A + (1 - W)\mu_B \\ \sigma_{\Pi}^2 &= W^2\sigma_A^2 + 2W(1 - W)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B + (1 - W)^2\sigma_B^2\end{aligned}$$

Lo que da la siguiente curva:

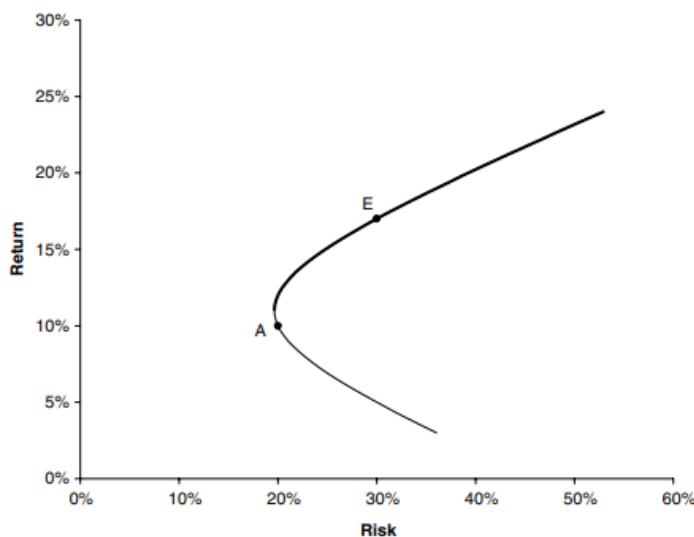


Figura 5.1: Combinación de activos en una cartera

la mejor opción en este caso es elegir un  $W$  para encontrarse dentro de la **efficient frontier** (parte en negrita de la curva), según el nivel de riesgo que se quiera asumir. Dependiendo del lugar en la curva, se debe tener una posición long o short de los activos.

También se puede añadir un activo libre de riesgo con un retorno  $r$ , como sería el activo *F* en la siguiente figura:

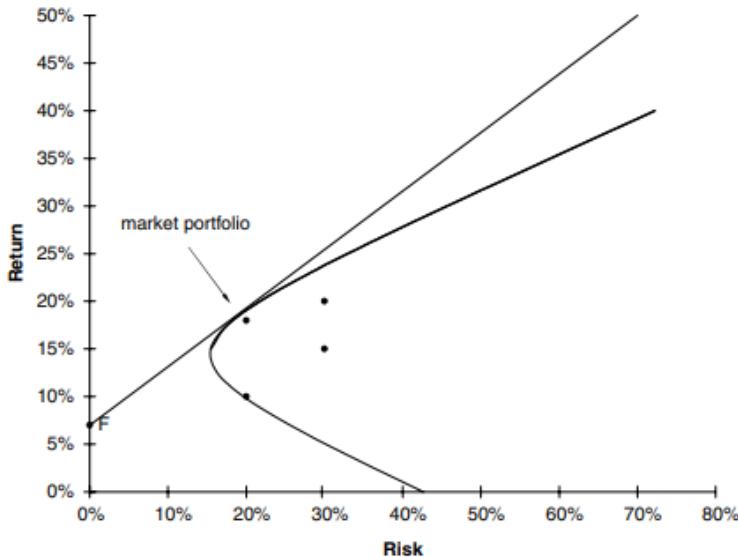


Figura 5.2: Combinación de activos en una cartera con activo libre de riesgo

Este nuevo activo da una nueva frontera eficiente que es una línea recta llamada **Capital Market Line** (CML) y el punto con el que toca la frontera eficiente original se llama **Market Portfolio**.

La elección de activos dentro de la frontera eficiente es subjetiva y depende del riesgo que se quiera asumir, pero hay maneras de interpretar el risk/reward.

Se compra  $\alpha$  “unidades” de la cartera  $\Pi$  y  $(1 - \alpha)$  del activo libre de riesgo, por lo que el nuevo retorno esperado es

$$\mu = \alpha\mu_{\Pi} + (1 - \alpha)r = r + \alpha(\mu_{\Pi} - r)$$

y la nueva desviación estándar es

$$\sigma = \alpha\sigma_{\Pi}$$

por lo que

$$\mu = r + \frac{\sigma}{\sigma_{\Pi}} (\mu_{\Pi} - r)$$

es decir

$$\mu = r + s\sigma, \quad s = \frac{\mu_{\Pi} - r}{\sigma_{\Pi}}$$

EL valor  $s$  es una medida de probabilidad de que la rentabilidad de la cartera sea mayor que  $r$ . Sea  $C(\cdot)$  la función de distribución acumulada de la normal (se asume que el retorno de la cartera  $\Pi$  sigue una normal, por lo que también lo siguen  $\mu_{\Pi}$  y  $\sigma_{\Pi}$ ), entonces  $C(s)$  es la probabilidad de que el retorno de la cartera sea mayor que  $r$ . Por lo que si se quiere minimizar la probabilidad de que el retorno sea menor que  $r$ , se debe elegir una cartera  $\Pi_{\text{eff}}$  dentro de la frontera eficiente con la mayor pendiente

$$\frac{\mu_{\text{eff}} - r}{\sigma_{\text{eff}}}$$

Si se consigue mantener la pendiente de la recta de la figura 5.2, se puede decir con una confianza  $C(s)$  que la cartera no perderá más de

$$\mu_{\text{eff}} - s\sigma_{\text{eff}}$$

por lo que el objetivo es elegir una cartera que maximice esa cantidad.

Un problema del modelo de Markowitz es que necesita muchos parámetros de entrada.

### 5.1.3. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

En primer lugar, se define **beta** de un activo con respecto a una cartera  $M$  como el ratio entre la covarianza entre el retorno del activo y el rendimiento en la cartera por la varianza de la cartera

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\text{var}(R_M)}$$

De forma intuitiva, mide cuánto se mueve el activo en promedio cuando la cartera o el mercado se mueve.

Valor de $\beta_i$	Interpretación
$\beta_i = 1$	El activo se mueve igual que el mercado.
$\beta_i > 1$	El activo es más volátil que el mercado (más riesgoso, mayor retorno esperado).
$\beta_i < 1$	El activo es más defensivo: se mueve menos que el mercado.
$\beta_i = 0$	El activo no tiene relación con el mercado (ej.: bono de corto plazo).
$\beta_i < 0$	El activo se mueve en dirección contraria al mercado (activo refugio).

Se va a construir ahora un **single-index model**, que realciona la rentabilidad de todos los activos a la rentabilidad de un índice representativo  $M$ . Se escribe el retorno del  $i$ -ésimo activo como

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i$$

por lo que el retorno de un activo se puede descomponer en un drift constante ( $\alpha_i$ ), una parte aleatoria común con el índice  $M$  ( $\beta_i R_M$ ) y una parte aleatoria ( $\epsilon_i$ ) no correlada con el índice. Esta parte aleatoria no correlada es única para cada activo y tiene media cero.

EL retorno esperado del  $i$ -ésimo activo es

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M$$

y la desviación estandar es

$$\sigma_i = \sqrt{\beta_i^2 \sigma_M^2 + e_i^2}$$

siendo  $e_i$  la desviación estandar de  $\epsilon_i$ . Por lo tanto el retorno de una cartera con estos activos es

$$\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \sum_{i=1}^N W_i R_i = \left( \sum_{i=1}^N W_i a_i \right) + R_M \left( \sum_{i=1}^N W_i \beta_i \right) + \sum_{i=1}^N W_i \epsilon_i$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mu_\Pi &= \left( \sum_{i=1}^N W_i a_i \right) + \mathbb{E}[R_M] \left( \sum_{i=1}^N W_i \beta_i \right) \\ &= \alpha_\Pi + \beta_\Pi \mathbb{E}[R_M] = [\alpha_\Pi + \beta_\Pi \mu_M] \end{aligned}$$

siendo

$$\alpha_\Pi = \sum_{i=1}^N W_i a_i, \quad \beta_\Pi = \sum_{i=1}^N W_i \beta_i$$

Por otro lado el riesgo de la cartera es

$$\sigma_\Pi = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \beta_i \beta_j \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^N W_i^2 e_i^2}$$

Si los pesos son todos parecidos (i.e. en torno a  $1/N$ ), los términos finales de la raíz son  $\mathcal{O}(N^{-1})$  por lo que cuando  $N \rightarrow \infty$

$$\sigma_\Pi = \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \right| \sigma_M = |\beta_\Pi| \sigma_M$$

Es decir, a medida que se incrementa el número de activos en la cartera, la contribución de la parte aleatoria no correlada con el índice se vuelve despreciable. El riesgo asociado a  $\epsilon$  se le llama **diversifiable risk** y el correlato al índice **systematic risk**.

El problema de elección de una cartera es la misma que la de Markowitz, pero son necesarios muchos menos parámetros.

Este modelo se puede extender a un **multi-index model** en el que se relacionan los activos con varios índices representativos. En este caso, el retorno del i-ésimo activo se escribe como

$$R_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} R_j + \epsilon_i$$

donde hay  $n$  índices con retorno  $R_j$ . Los índices pueden estar correlados entre sí.

Existen otros modelos más avanzados que involucran la **cointegración** que no se van a explicar.

#### 5.1.4. Medición del desempeño

Al medir el desempeño de una cartera, no solo es importante que el retorno sea alto, si no que también se haya producido con la mejor aleatoriedad posible (no haya sido suerte). Para ello se usan los siguientes indicadores:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{\mu_\Pi - r}{\sigma_\Pi}$$

$$\text{Treynor Ratio} = \frac{\mu_\Pi - r}{\beta_\Pi \sigma_M}$$

donde  $\mu_\Pi$  y  $\sigma_\Pi$  son el retorno desviación estándar real de la cartera y  $\beta_\Pi$  es la medida de la volatilidad de la cartera. El Sharpe ratio se utiliza generalmente cuando la cartera abarca la totalidad de la inversión, y el Treynor ratio, cuando se examina el rendimiento de un componente de la cartera completa de la empresa, por ejemplo. Cuando la cartera en cuestión está altamente diversificada, ambas medidas son iguales (hasta un factor de la desviación estándar del mercado).

## 5.2. Value at Risk (VaR)

Value at Risk es una estimación, con un cierto grado de confianza, de cuánto se puede perder de la cartera en un horizonte temporal determinado.

Por ejemplo decir que en la siguiente semana hay una 95 % de probabilidad de que no se perderán más de 10 millones de euros se escribe como:

$$\mathbb{P}(\delta V \leq -10M) = 0,05$$

donde  $\delta V$  es la variación del valor de la cartera. Con símbolos:

$$\mathbb{P}(\delta V \leq \text{VaR}) = 1 - c$$

donde  $c$  es el grado de confianza. El value at risk no tiene en cuenta condiciones extremas, por lo que es válido solo para operaciones del día a día. Para el cálculo del VaR se requiere los precios actuales de los activos de la cartera y sus volatilidades y correlaciones. Normalmente se asume que los movimientos de la cartera son aleatorios y siguen una distribución normal.

### 5.2.1. VaR de un solo activo

Se tiene una cantidad  $\Delta$  de un activo con precio  $S$  y volatilidad  $\sigma$ . Se quiere saber con una confianza  $c$  cual es la pérdida máxima esperada en un horizonte temporal  $\delta t$ . Se asume que el precio del activo sigue un proceso estoástico basado en la distribución normal:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Suponiendo que  $\delta t$  es pequeño, se puede ignorar la media por lo que

$$dS \approx \sigma S \sqrt{\delta t} Z$$

siendo  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , por lo que

$$\text{std}(dS) = \sigma S \sqrt{\delta t}$$

y como la cartera tiene una cantidad  $\Delta$  del activo, la desviación estándar de la variación del valor de la cartera es

$$\sigma \Delta S \sqrt{\delta t}$$

Se quiere calcular la posición de la cola izquierda de la distribución correspondiente a  $1 - c$ . Por lo tanto, el VaR de un activo es

$$\boxed{\text{VaR} = -\sigma \Delta S \sqrt{\delta t} \cdot \alpha(1 - c)}$$

siendo  $\alpha(\cdot)$  la función inversa de distribución acumulativa de la normal estándar. En la tabla 5.1 se muestran los valores de la función inversa de la distribución normal estándar para diferentes niveles de confianza y  $c$ .

Confi	<b>0.000</b>	<b>0.001</b>	<b>0.002</b>	<b>0.003</b>	<b>0.004</b>	<b>0.005</b>	<b>0.006</b>	<b>0.007</b>	<b>0.008</b>	<b>0.009</b>
<b>0.80</b>	0.84162	0.84520	0.84879	0.85239	0.85600	0.85962	0.86325	0.86689	0.87055	0.87422
<b>0.81</b>	0.87790	0.88159	0.88529	0.88901	0.89273	0.89647	0.90023	0.90399	0.90777	0.91156
<b>0.82</b>	0.91537	0.91918	0.92301	0.92686	0.93072	0.93459	0.93848	0.94238	0.94629	0.95022
<b>0.83</b>	0.95417	0.95812	0.96210	0.96609	0.97009	0.97411	0.97815	0.98220	0.98627	0.99036
<b>0.84</b>	0.99446	0.99858	1.00271	1.00686	1.01103	1.01522	1.01943	1.02365	1.02789	1.03215
<b>0.85</b>	1.03643	1.04073	1.04505	1.04939	1.05374	1.05812	1.06252	1.06694	1.07138	1.07584
<b>0.86</b>	1.08032	1.08482	1.08935	1.09390	1.09847	1.10306	1.10768	1.11232	1.11699	1.12168
<b>0.87</b>	1.12639	1.13113	1.13590	1.14069	1.14551	1.15035	1.15522	1.16012	1.16505	1.17000
<b>0.88</b>	1.17499	1.18000	1.18504	1.19012	1.19522	1.20036	1.20553	1.21073	1.21596	1.22123
<b>0.89</b>	1.22653	1.23186	1.23723	1.24264	1.24808	1.25357	1.25908	1.26464	1.27024	1.27587
<b>0.90</b>	1.28155	1.28727	1.29303	1.29884	1.30469	1.31058	1.31652	1.32251	1.32854	1.33462
<b>0.91</b>	1.34076	1.34694	1.35317	1.35946	1.36581	1.37220	1.37866	1.38517	1.39174	1.39838
<b>0.92</b>	1.40507	1.41183	1.41865	1.42554	1.43250	1.43953	1.44663	1.45381	1.46106	1.46838
<b>0.93</b>	1.47579	1.48328	1.49085	1.49851	1.50626	1.51410	1.52204	1.53007	1.53820	1.54643
<b>0.94</b>	1.55477	1.56322	1.57179	1.58047	1.58927	1.59819	1.60725	1.61644	1.62576	1.63523
<b>0.95</b>	1.64485	1.65463	1.66456	1.67466	1.68494	1.69540	1.70604	1.71689	1.72793	1.73920
<b>0.96</b>	1.75069	1.76241	1.77438	1.78661	1.79912	1.81191	1.82501	1.83842	1.85218	1.86630
<b>0.97</b>	1.88079	1.89570	1.91104	1.92684	1.94313	1.95996	1.97737	1.99539	2.01409	2.03352
<b>0.98</b>	2.05375	2.07485	2.09693	2.12007	2.14441	2.17009	2.19729	2.22621	2.25713	2.29037
<b>0.99</b>	2.32635	2.36562	2.40892	2.45726	2.51214	2.57583	2.65207	2.74778	2.87816	3.09023

Cuadro 5.1: Tabla de valores de la función inversa de la distribución normal estándar

El desprecio de la media solo es válido para horizontes temporales pequeños. Si el horizonte temporal es grande, la media no se puede despreciar y el VaR se calcula como:

$$\text{VaR} = \Delta S \left( \mu \delta t - \sigma \sqrt{\delta t} \cdot \alpha(1 - c) \right)$$

### 5.2.2. VaR de una cartera de activos

Para el caso de una cartera, se puede probar que el VaR es

$$\text{VaR} = -\alpha(1 - c) \delta t^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \Delta_i \Delta_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j}$$

### 5.2.3. Carteras con derivados

Para este tipo de carteras, aunque el subyacente siga tener un comportamiento de una distribución normal, el valor de los derivados no tiene porque seguir una distribución normal, por lo que puede ser complicado. Existen distintas estrategias.

#### 5.2.3.1. La aproximación delta

Útil para marcos temporales pequeños.

La delta  $\Delta$  mide la sensibilidad de la opción al precio del subyacente. Si la desviación estándar del subyacente es  $\sigma S \sqrt{\delta t}$ , entonces la desviación estandar de la opción es

$$\sigma S \sqrt{\delta t} \Delta$$

EN el caso de una cartera de opciones la  $\Delta$  debe ser de la posición entera, i.e. la suma de las deltas de todas las opciones sobre el mismo subyacente. Si el marco temporal es pequeño, una aproximación del

VaR de la cartera es

$$\boxed{\text{VaR} = -\alpha(1 - c) \delta t^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \Delta_i \Delta_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j}}$$

donde  $\Delta_i$  es el ratio de cambio de la cartera con respecto a i-ésimo activo.

Normalmente, la volatilidad que se usa es la implícita.

### 5.2.3.2. La aproximación delta-gamma

Se puede usar para marcos temporales más grandes.

Suponiendo que la cartera consiste en una opción con una acción como subyacente, entonces la relación entre el cambio del subyacente  $\delta S$  y el cambio de la opción  $\delta V$ , mediante una expansión de Taylor, es

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial S} \delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\delta S)^2 + \frac{\partial V}{\partial t} \delta t + \dots$$

Asumiendo que

$$\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \delta t^{1/2} Z$$

donde  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , se puede escribir ignorando los términos de orden mayor como

$$\begin{aligned} \delta V &= \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S \delta t^{1/2} Z + \delta t \left( \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 Z^2 + \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \dots \Rightarrow \\ &= \Delta \sigma S \delta t^{1/2} Z + \delta t \left( \Delta \mu S + \frac{1}{2} \Gamma \sigma^2 S^2 Z^2 + \Theta \right) + \dots \end{aligned}$$

Si esto se ve como una función  $f(Z)$ , entonces  $\delta V$  cumple con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} \delta V \geq -\frac{\Delta^2}{2\Gamma} \Rightarrow \min(\delta V) = -\frac{\Delta^2}{2\Gamma}, & \Gamma > 0 \\ \delta V \leq -\frac{\Delta^2}{2\Gamma} \Rightarrow \max(\delta V) = -\frac{\Delta^2}{2\Gamma}, & \Gamma < 0. \end{cases}$$

que se da cuando

$$Z = -\frac{\Delta}{\Gamma \sigma S \delta t^{1/2}}$$

Como ya no se está trabajando con una distribución normal, si no una distribución cuadrática de una normal, ya no se puede usar la función inversa de la normal estándar. En su lugar, se suelen usar simulaciones.

# Capítulo 6

## Predicción del mercado

### 6.1. Análisis técnico

Como se ha explicado en el capítulo 1.1.1, el **análisis técnico** (también llamado **charting**) es una forma de predecir los movimientos futuros de precios basándose únicamente en la observación del historial de precios (que también puede incluir volúmenes de tráfico). Por otro lado, el **análisis fundamental** se basa en factores subyacentes al instrumento financiero, como la salud de la empresa, el estado de la economía, etc. Esto puede incluir análisis económicos o políticos generales, o análisis de factores específicos de la acción (p.e. el calentamiento global en las nevadas en los Alpes, si se trata de una empresa de viajes).

En la práctica se usa una combinación de ambos tipos de análisis. Se considera que el análisis técnico es especialmente útil para predecir los movimientos del mercado; el análisis fundamental puede predecir la dirección correcta, pero no necesariamente cuándo ocurrirá el movimiento.

- **Plotting:** Es el gráfico más simple. En ocasiones el eje vertical es logarítmico para representar el retorno más que el valor absoluto de la acción. También hay veces que aparece un gráfico con el volumen de transacciones.

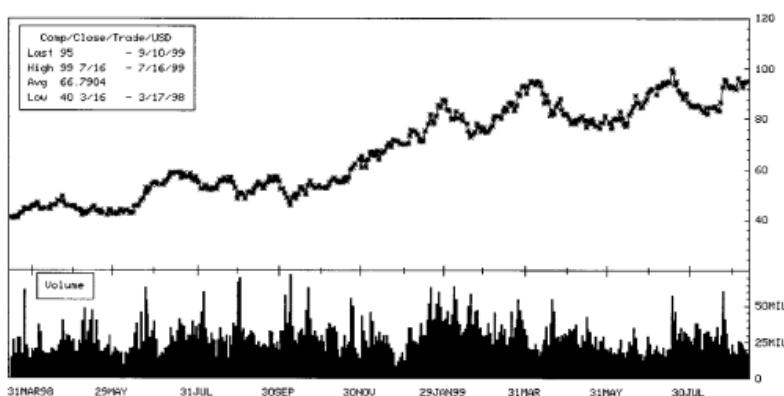


Figura 6.1: Ejemplo de un gráfico de precios

- **Resistance:** Es un nivel de precio que un activo parece tener dificultades para superar. Puede ser un valor máximo alcanzado previamente o una cifra (redonda) psicológicamente importante.

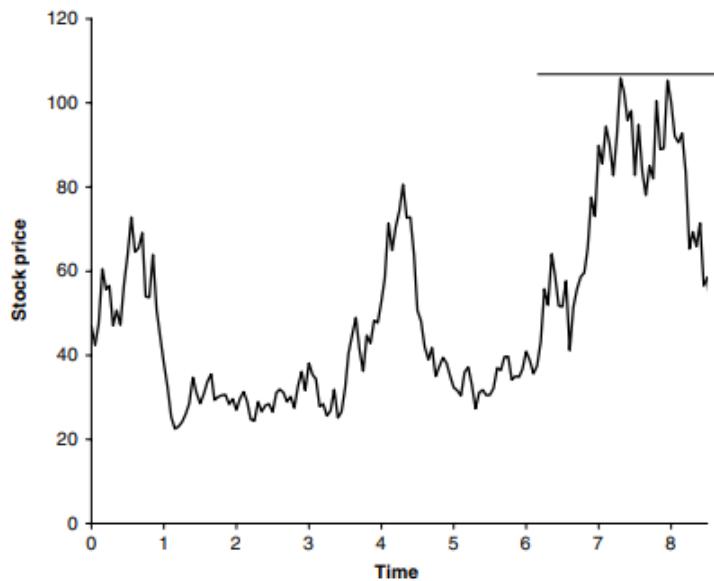


Figura 6.2: Ejemplo de un nivel de resistencia

- **Support:** Es un nivel por debajo del cual el precio de un activo parece reacio a caer. Puede haber suficiente demanda a este bajo precio para evitar que siga bajando.

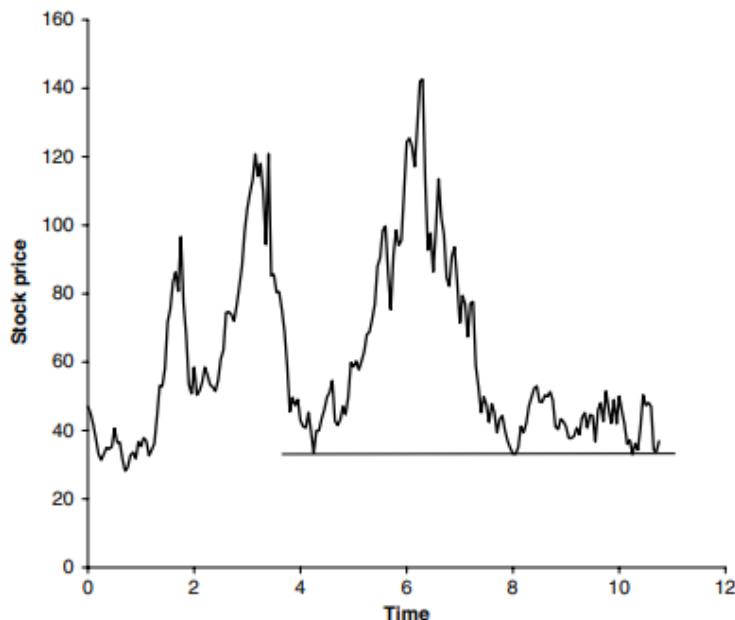


Figura 6.3: Ejemplo de un nivel de soporte

- **Trend lines:** son similares al soporte y la resistencia. Se forman uniendo picos y/o valles sucesivos en el historial de precios para formar un nivel de soporte o resistencia ascendente o descendente.

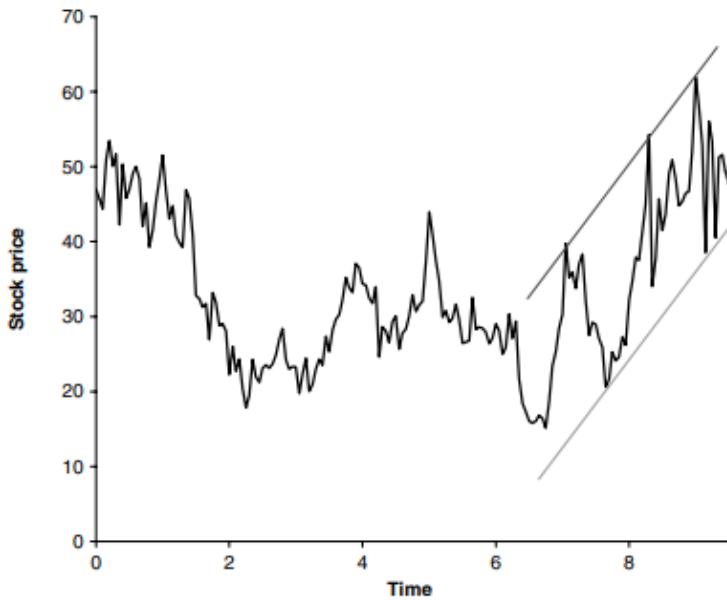


Figura 6.4: Ejemplo de una línea de tendencia

- **Moving Averages:** se pueden calcular de varias maneras, con distintas ventanas temporales o incluso calcular medias ponderadas exponencialmente. Se supone que destilan la tendencia básica de un precio suavizando el ruido aleatorio. Se suelen calcular dos medias: una a corto plazo y otra a largo plazo. Cuando la media a corto plazo cruza por encima de la de largo plazo, se considera una señal de compra; cuando cruza por debajo, es una señal de venta.
- **Indice de fuerza relativa (RFI):** es el porcentaje de movimientos alcistas en los últimos  $N$  días. Un valor superior al 70 % se considera sobrecomprado y, por lo tanto, es probable que baje, y un valor inferior al 30 % se considera sobrevenido y debería subir.
- **Oscillators:** es otro indicador de condiciones de sobrecompra o sobreventa. Una forma de calcularlo es la siguiente. Se define  $k$  como:

$$k = 100 \times \frac{\text{Cierre actual} - \text{mínimo en } n \text{ períodos}}{\text{Máximo en } n \text{ períodos} - \text{mínimo en } n \text{ períodos}}$$

Luego se toma un promedio móvil de los últimos tres días, por ejemplo. Este promedio se representa en el tiempo y cualquier movimiento fuera del rango 30–70 % podría indicar un movimiento en el activo.

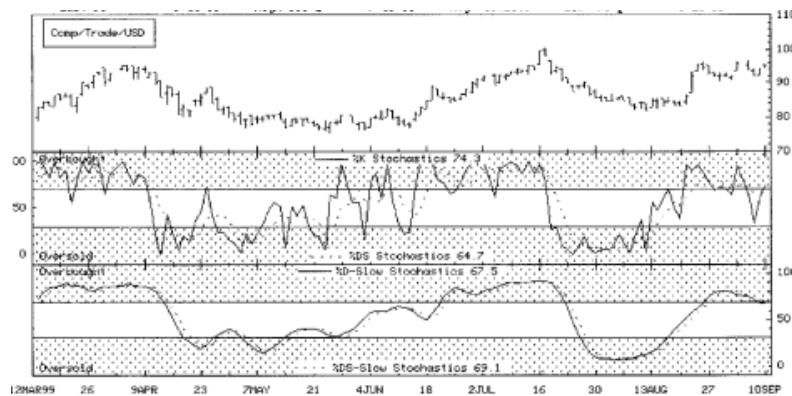


Figura 6.5: Ejemplo de un oscilador

- **Bollinger Bands:** son gráficos de un número específico de desviaciones estándar por encima y por debajo de una media móvil específica. Se considera que el precio está sobrecomprado cuando toca la banda superior y sobrevenido cuando toca la banda inferior.

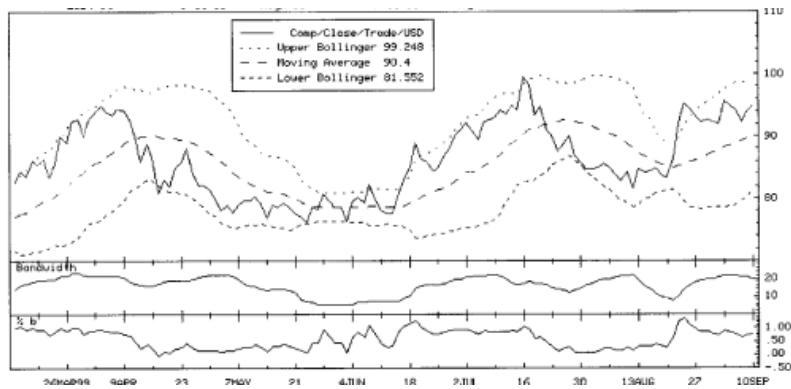


Figura 6.6: Ejemplo de bandas de Bollinger

- **Miscellaneous Patterns:** son patrones que se pueden encontrar en los gráficos. Es pseudociencia. Algunos patrones:

- **Head and shoulders:** Hay un hombro izquierdo y uno derecho con la cabeza elevándose por encima. A continuación del hombro derecho debería producirse una caída drástica en el precio del activo. Este patrón se considera uno de los predictores más fiables. También se observa en una formación invertida.

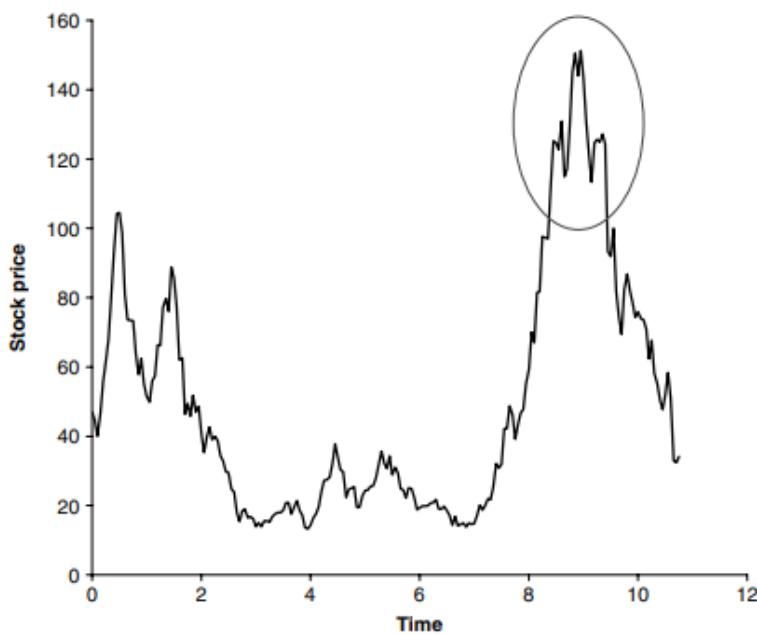


Figura 6.7: Ejemplo de un patrón de cabeza y hombros

- **Saucer tops and bottoms/ rounding tops and bottoms:** Son el resultado de un cambio gradual en la oferta y la demanda. Su forma suele ser bastante simétrica a medida que los precios suben y bajan. Estos patrones son bastante raros. No contienen información sobre la fuerza de la nueva tendencia.

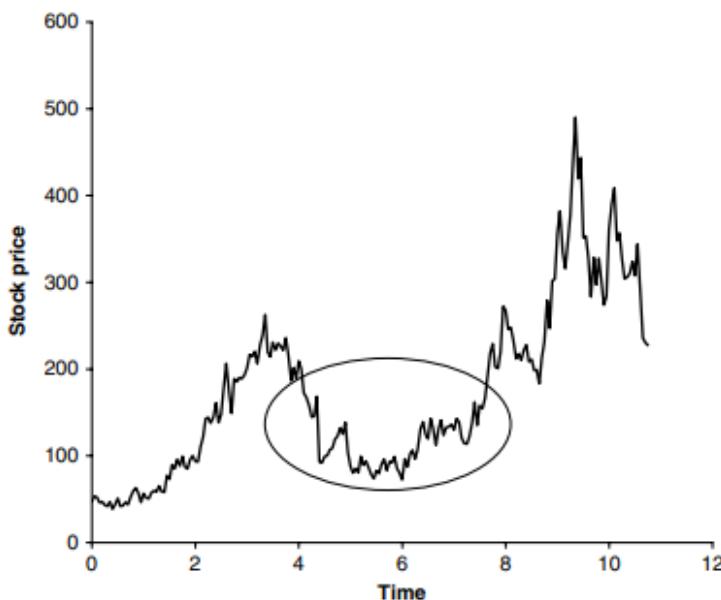


Figura 6.8: Ejemplo de un patrón de plato

- **Double and triple tops and bottoms:** Son patrones bastante raros, siendo el triple aún más raro que el doble. El doble techo se asemeja a una M y el doble suelo a una W. El triple techo es similar, pero con tres picos. La clave de los picos y valles es que todos deben estar aproximadamente al mismo nivel.

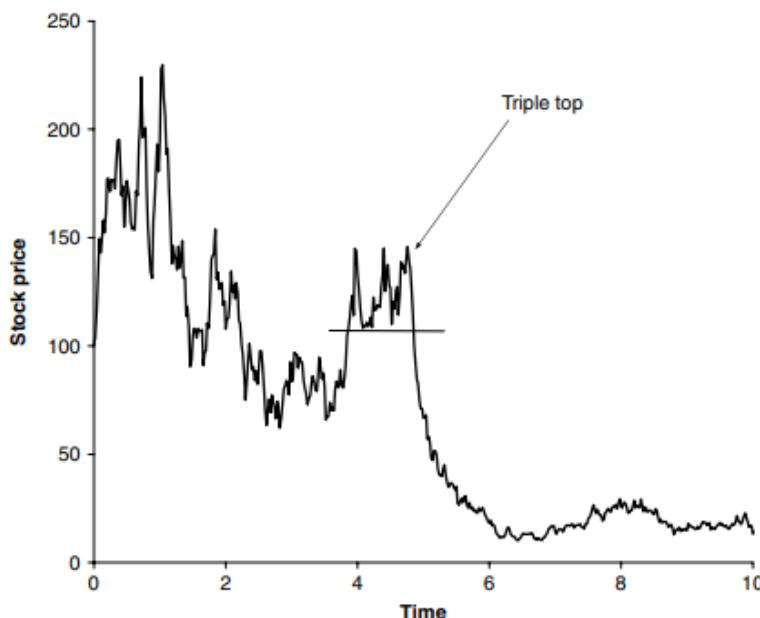


Figura 6.9: Ejemplo de un patrón de triple techo

- **Japanese Candlesticks:** Registran los precios de apertura y cierre, así como los máximos y mínimos del día. Se dibuja un rectángulo que se extiende desde el cierre hasta la apertura, y se colorea de blanco si el cierre está por encima de la apertura y de negro si está por debajo de la apertura. El rango máximo-mínimo se marca con una línea continua. Ciertas combinaciones de velas, que aparecen consecutivamente, tienen significados y nombres especiales, como "Hombre Colgado" y "Dos Cuervos con Brecha alcista". Véase Figura 6.11 para ver las velas en acción. En este gráfico de letras se muestran: "HR" = Harami Bajista, "D" = Doji (que representa indecisión), "BH" = Harami Alcista, "EL" = Línea Envolvente Bajista y "H" = Hombre Colgado (que representa un cambio de tendencia).

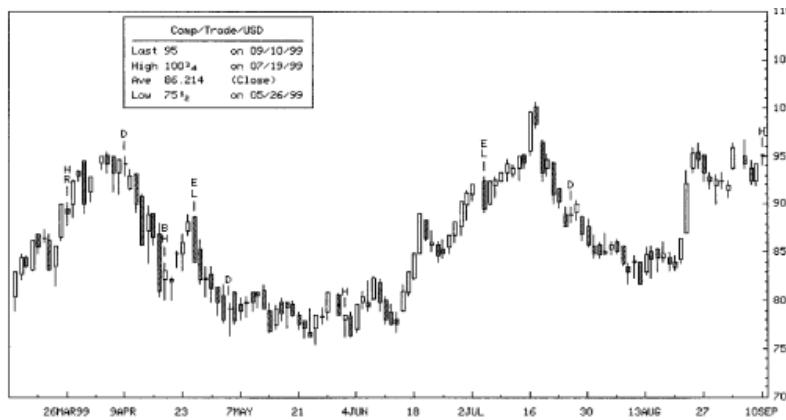


Figura 6.10: Ejemplo de un gráfico de velas japonesas

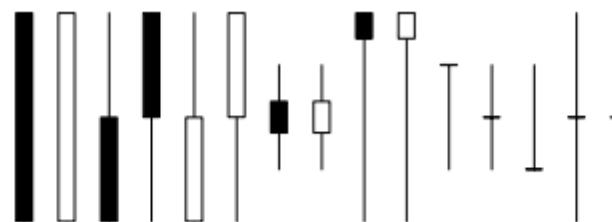


Figura 6.11: Significado de algunas velas japonesas

- **Point and Figure Charts:** No tienen una escala temporal explícita en el eje horizontal. Cada casilla del gráfico representa un movimiento predefinido del precio de un activo. Las casillas permiten discretizar los movimientos del precio de los activos, en lugar de hacerlo en el tiempo. Por cada subida consecutiva del precio de un activo del tamaño de la casilla, dibuje una "X" en la casilla, en una columna ascendente, una encima de la otra. Cuando esta tendencia alcista termine y el activo baje, comience a escribir una "O" en una columna descendente, a la derecha de las X ascendentes anteriores.

- Una columna larga de X indica que la demanda supera a la oferta.
- Una columna larga de O indica que la oferta supera a la demanda.
- Columnas cortas ascendentes y descendentes indican un equilibrio entre oferta y demanda.

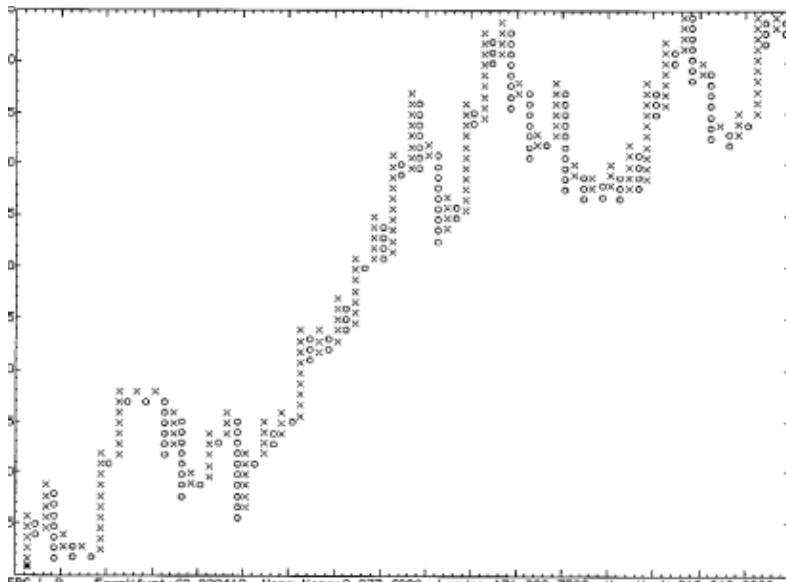


Figura 6.12: Ejemplo de un gráfico de Puntos y Figuras

- **Volume:** El número de contratos negociados en un período determinado. Un precio al alza y un volumen alto indican un mercado con una tendencia alcista sólida. Sin embargo, un precio al alza con un volumen bajo podría indicar que el mercado está a punto de cambiar de rumbo.
- **Open interest:** El número de contratos de futuros aún vigentes, aquellos que no se han liquidado. Dado que hay el mismo número de compradores y vendedores, el open interest no proporciona necesariamente información direccional, pero un aumento en el open interest puede indicar que una tendencia existente es fuerte.

## 6.2. Wave theory

Existen algunas teorías de predicción de precios basadas en ciclos o olas del mercado.

### 6.2.1. Olas de Elliott y números de Fibonacci

Alpha N. Elliott observó patrones, ondas o ciclos repetitivos en los precios. En términos generales, se supone que hay cinco puntos en una onda alcista y tres en una bajista (véase la Figura 20.14). Dentro de esta teoría de ondas de Elliott también se supone que existe cierta capacidad predictiva en cuanto al tamaño de los picos de cada onda. Además, se supone que la proporción de picos en una tendencia es bastante constante; la proporción entre el segundo pico y el primero debería ser de aproximadamente 1,618 y entre el tercero y el segundo, de 2,618. El valor 1,618 se acerca bastante a Golden ratio  $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ ; y es el ratio en números consecutivos de Fibonacci dados por  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  para un  $n$  grande.

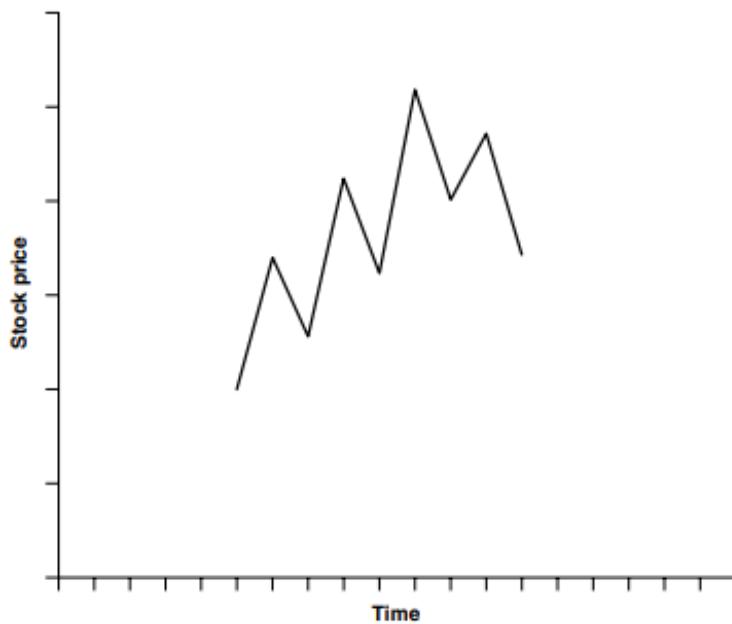


Figura 6.13: Ejemplo de ondas de Elliott

También hay otras hipótesis como la de Gann Charts.

## **Parte II**

# **Otros tipos de opciones y derivados**



# Capítulo 7

## Clasificación genérica de opciones exóticas

### 7.1. Clasificación de opciones complejas

Para poder clasificar opciones más complejas, es útil observar las siguientes características: **dependencia del tiempo**, **flujo de dinero**, **dependencia del camino**, **dimensionalidad**, **orden** y **decisiones integradas**. Estas características darán información del método de fijación de precios se debe usar, si se puede usar código antiguo, cuanto tiempo se tardará en codificarlo y con qué velocidad se ejecutará.

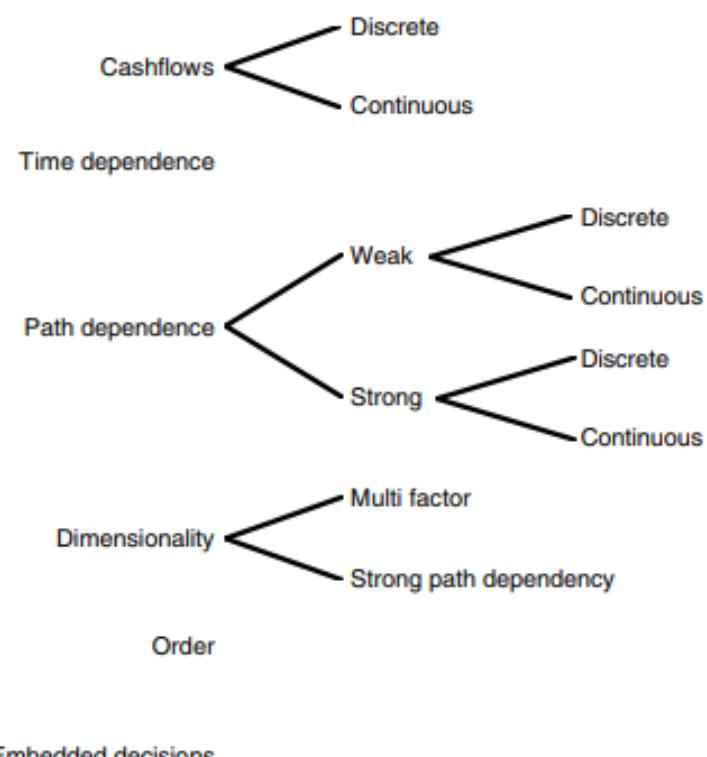


Figura 7.1: Clasificación de opciones

### 7.1.1. Dependencia del tiempo

Referido a si se puede ejercer el derecho de compra o venta en cualquier momento, en ciertas fechas específicas o solo a tiempo de vencimiento. Es importante a la hora de hacer simulaciones porque por ejemplo si la opción es tipo Bermuda, en la discretización del tiempo debe estar ese instante concreto.

### 7.1.2. Flujo de dinero

Se tiene que el contrato paga al propietario una cantidad fija  $q$  en tiempo  $t_0$ , entonces se debe imponer una **condición de salto** para evitar arbitraje que, ignorando la dependencia del suyacente (como si fuese un bono con cupones), es:

$$V(t_o^-) = V(t_o^+) + q$$

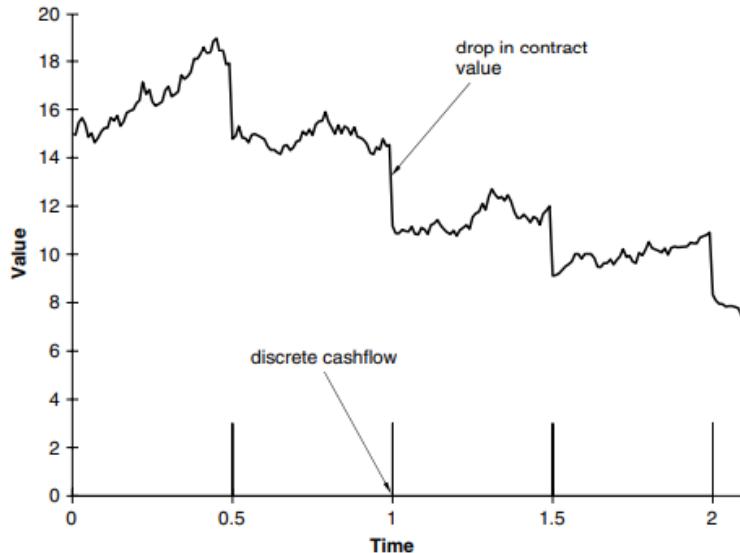


Figura 7.2: Condición de salto

Si el contrato depende de un subyacente ( $V(S, t)$ ), entonces el flujo de dinero dependería del subyacente  $q(S)$ .

Si el flujo no fuese determinista (p.e. se lanza una moneda y se paga solo si sale cara), es más complejo y no se puede apelar al arbitraje. Se puede, por ejemplo, decir que la condición de salto sería que el cambio en el valor del contrato fuera el valor *esperado* del flujo de caja

$$V(t_o^-) = V(t_o^+) + \mathbb{E}[q]$$

pero esto tiene un riesgo.

Hasta aquí se ha hablado de pagos discretos, pero también podría haber pagos continuos, que son mucho más sencillos de incluir en el modelo y simplemente modifican la EDP.

### 7.1.3. Dependencia del camino

El payoff no solo depende del valor del subyacente a timepo de vencimiento, si no de todo el camino que ha recorrido.

### 7.1.3.1. Strong Path Dependence

Dependen de alguna propiedad del camino que ha recorrido el subyacente, por lo que tiene al menos una variable de dependencia extra y no se pueden definir como  $V(S, t)$ . Un ejemplo son las opciones asiáticas, que dependen del promedio del subyacente a lo largo del tiempo. En este caso, las variables independientes son el subyacente, el tiempo y el promedio del subyacente a lo largo del tiempo ( $V(S, t, \bar{S})$ ).

Existen dos tipos de contratos así, los **discretely sampled** y los **continuously sampled** dependiendo de si el promedio se calcula en puntos discretos o continuamente.

Una fuerte dependencia del camino implica que se debe trabajar en dimensiones superiores. Como consecuencia, el código puede tardar más en ejecutarse.

### 7.1.3.2. Weak Path Dependence

Tiene una cierta dependencia si ocurre cierto evento en el camino, pero no es necesario que se conozca todo el camino. Un ejemplo son las opciones barrier, que dependen de si el subyacente ha alcanzado cierto nivel. En este caso, las variables independientes solo son el subyacente y el tiempo ( $V(S, t)$ ), pero se debe tener en cuenta si ha alcanzado cierto nivel o no. De nuevo, existen discretos y continuos, dependiendo de si se mira el subyacente en puntos discretos o continuamente.

A diferencia de las strong path dependence, estas opciones no necesitan trabajar en dimensiones superiores, por lo que el código puede ser más rápido y sencillo de implementar.

### 7.1.4. Dimensionalidad

Se refiere al número de variables independientes que tiene el contrato. Por ejemplo, para opciones vainilla europeas u opciones barrera las variables aleatorias son dos: subyacente y activo.

Dentro de los contratos con tres variables independientes se distinguen dos tipo:

- Opciones en las que la variable extra es una medida de la trayectoria. Un ejemplo sería las opciones con una strong path dependence.
- Opciones en las que existe una segunda fuente de incertidumbre. Un ejemplo sería una opción sobre el máximo entre dos activos.

Computacionalmente, dimensiones mayores suponen tiempos de ejecución mayores. El número de dimensiones también indica qué tipo de método numérico utilizar. Para un número alto de dimensiones es útil usar Monte Carlo; para un número bajo es útil usar diferencias finitas.

### 7.1.5. Orden

Se puede expresar como la cantidad de opciones y por lo tanto de complejidad del contrato. Por ejemplo, los contratos de primer orden son aquellos sencillos como las vainilla europeas o incluso alguna opción dependientes del camino que solo dependan del camino del subyacente.

Ordenes superiores son aquellos que dependen de otras opciones. Un ejemplo es la opción compuesta, p.e. una opción call que da derecho a comprar una put. La opción compuesta tiene una fecha de vencimiento  $T_1$  y la opción subyacente tiene una fecha de vencimiento  $T_2$ .

Cuando una opción es de segundo orden o superior, primero se debe resolver la opción de primer orden. Por lo tanto, se debe trabajar a capas; primero los niveles inferiores y los resultados de estos se aplican a los niveles superiores. Esto significa que, computacionalmente, se debe resolver más de un problema para determinar el precio de la opción.

### 7.1.6. Decisiones integradas

El ejemplo más típico es el de las opciones americanas, que permiten ejercer el derecho de compra o venta en cualquier momento.

Otro ejemplo son las passport option, en las que se compra y vende un activo: si a vencimiento hay beneficios se obtiene ese dinero y si no el contrato se cancela. Las decisiones en este caso son cuándo y cómo comprar y vender el activo.

Cuando un contrato incorpora decisiones, se necesita un algoritmo para determinar cómo se tomará esa decisión. Este algoritmo supone que el tenedor del contrato actúa para que el valor de la opción sea lo más alto posible para el emisor de la cobertura. El algoritmo de fijación de precios consiste entonces en buscar, entre todas las posibles estrategias de decisión del tenedor, la que maximice el valor de la opción.

Este tipo de opciones suelen suponer usar diferencias finitas en el código, y contendrá alguna línea en la que se busque el mejor precio, por lo que se debe tener cuidado con  $\leq$  y  $\geq$ .

## 7.2. Algunos ejemplos de derivados exóticos y dependientes del camino

### 7.2.1. Compounds options

Las **compound options** son opciones sobre opciones, da la opción al poseedor de comprar (call) o vender (put) otra opción. Sea  $F(S)$  el payoff de la opción subyacente a tiempo de vencimiento  $T$ , y sea  $T_{C_0} < T$  la fecha de vencimiento de la opción compuesta en la que se obtiene  $G(V(S, T_{C_0}))$  donde  $V(S, t)$  es el valor de la opción subyacente. El primer paso es obtener el valor de la opción subyacente  $V(S, t)$  que satisface:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\ V(S, T) = F(S) \end{cases}$$

Resolviendo se puede obtener  $V(S, T_{C_0})$ , que es el valor teórico de la opción subyacente a tiempo de vencimiento de la opción compuesta. A continuación se debe obtener el valor de la opción compuesta  $C_0(S, t)$ , que satisface:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_0}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C_0}{\partial S} - rC_0 = 0 \\ C_0(S, T_{C_0}) = G(V(S, T_{C_0})) \end{cases}$$

Por ejemplo, si se tiene una call sobre una call con strikes de  $E$  para el subyacente y  $E_{C_0}$  para la compuesta, los payoffs son:

$$\begin{aligned} F(S) &= \max(S - E, 0) \\ G(V) &= \max(V - E_{C_0}, 0) \end{aligned}$$

### 7.2.2. Choosers options

Las **chooser options** son parecidas a las compound, pero dan al poseedor la opción de elegir si quiere una call o una put como subyacente. Luego se quiere obtener el valor de la opción chooser  $C_h(S, t)$  a

partir del valor de las opciones subyacentes  $V_1(S, t)$  y  $V_2(S, t)$ . Se cumple que:

Call subyacente:	$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1 = 0 \\ V_1(S, T) = \max(S - E_1, 0) \end{cases}$
Put subyacente:	$\begin{cases} \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_2}{\partial S} - rV_2 = 0 \\ V_2(S, T) = \max(E_2 - S, 0) \end{cases}$
Opción chooser:	$\begin{cases} \frac{\partial C_h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_h}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C_h}{\partial S} - rC_h = 0 \\ C_h(S, T_{C_h}) = \max(V_1(S, T_{C_h}) - E_1, V_2(S, T_{C_h}) - E_2, 0) \end{cases}$

### 7.2.3. Extendible options

Parecidas a las compound y choosers, pero en ciertos tiempos específicos, el poseedor elige entre aceptar el payoff original o extender el tiempo del contrato o incluso cambiar el strike.

### 7.2.4. Range Notes

Se suele aplicar sobre acciones, divisas o productos de renta fija. En su forma más básica, se paga una tasa  $L$  siempre que el subyacente esté en un rango  $S_l \leq S \leq S_u$  i.e. por cada  $dt$  del subyacente que esté dentro del rango, se paga  $Ldt$ . Se define  $\mathcal{I}(S)$  como una función que toma el valor 1 si  $S_l \leq S \leq S_u$  y 0 en caso contrario. Entonces, el range note satisface:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV + L\mathcal{I}(S) = 0$$

Pueden existir variantes más complejas.

### 7.2.5. Barrier Options

El valor de una **barrier option** depende de si el subyacente alcanza cierto nivel llamado barrera.

Existen dos variedades principales:

- **Knock-in:** se activan si el subyacente alcanza la barrera.
- **Knock-out:** se desactivan si el subyacente alcanza la barrera.

Siguen la ecuación clásica de Black-Scholes con una condición frontera especial. Se verá en profundidad en la sección 8.1.

### 7.2.6. Asian Options

El valor de una **Asian option** depende del promedio del subyacente a lo largo del tiempo. Se ven más adelante en la sección 8.3.

### 7.2.7. Lookback Options

Las **lookback options** son opciones cuyo valor depende del máximo o mínimo del subyacente a lo largo del tiempo. Se verán más adelante en la sección 8.4.

## 7.3. Resumen de la clasificación

Clasificación	Ejemplos	Consecuencias
Dependencia del tiempo	Bermudan, ejercicio discreto, muestreo discreto, ...	Hay que llevar la cuenta del tiempo en el código
Flujo de dinero	Swap, pagos, ...	Salto en el valor de la opción / Término fuente en la EDP
Dependencia del camino	Barrera, asiática, lookback, ...	Si la dependencia del camino es fuerte, se necesita una dimensión extra
Dimensión	Muy dependiente del camino, multi-activo, ...	Monte Carlo puede ser mejor que diferencias finitas
Orden	Compuestas, en barreras, ...	Resolver primero las opciones de nivel inferior e introducir el resultado en el nivel superior
Decisiones	Americana, passport, chooser, ...	Diferencias finitas mejor que Monte Carlo, 'optimizar'

Cuadro 7.1: Implicaciones de la clasificación de derivados

	Depend. tiempo	Flujo dinero	Depend. camino	Dimensión	Orden	Decisiones
<b>Compound/ Chooser</b>	No	No	Weak	2	Segundo	No
<b>Range Notes</b>	No	Sí (continuo)	Weak	2	Primero	No
<b>Barrier Options</b>	No	No	Weak	2	Primero (Knock-Out)/ Segundo (Knock-In)	No
<b>Asian Options</b>	Si (discreto)/ No (continuo)	No	Strong	3	Primero	No
<b>Lookback Options</b>	Si (discreto)/ No (continuo)	No	Strong	3	Primero	No
<b>Passport Options</b>	No	No	Weak	3	Primero	Si
<b>Forward-start Options</b>	No	No	Weak	2	Segundo	No
<b>Shout Options</b>	No	No	Strong	3	Primero	Yes
<b>Volatility Options</b>	Si	No	Strong (discreto)	4	Primero	No
<b>Parisian Options</b>	No	No	Strong (continuo)	3	Primero(Out)/Segundo?(In)	No

Cuadro 7.2: Clasificación de derivados

# Capítulo 8

## Algunas opciones exóticas

### 8.1. Barrier options

Como se ha explicado en la sección anterior, las **barrier options** son opciones cuyo valor depende de si el subyacente alcanza o no una barrera. Se suelen usar cuando se tiene confianza de que alcanzará/no alcanzará la barrera y no se quiere pagar el precio de una opción vainilla normal (que será más cara). La barrera puede ser constante o dependiente del tiempo.

Existen dos tipos de opciones barrier:

- **Out option:** solo paga si no se ha alcanzado la barrera. Si se alcanza la barrera, se dice que la opción se ha **knock-out** (se desactiva).
- **In option:** solo paga si se ha alcanzado la barrera. Si no se alcanza la barrera, se dice que la opción se ha **knock-in** (se activa).

Y por otro lado se puede clasificar según la posición de la barrera con respecto al subyacente en el momento inicial:

- **Up option:** la barrera está por encima del subyacente.
- **Down option:** la barrera está por debajo del subyacente.

Y por último se puede clasificar según el payoff: los usuales son call, put, binarios, etc.

También puede haber una **double barrier**, en la que hay dos barreras, una por encima y otra por debajo del subyacente en el momento inicial. En este caso, una double *out* se desactiva si se alcanza cualquiera de las dos barreras, y una double *in* se activa si se alcanza cualquiera de las dos barreras. También se pueden mezclar barreras.

En ocasiones se paga una **rebate** si se alcanza la barrera. Este suele ser el caso de las *out* en cuyo caso este reembolso puede considerarse como una forma de amortiguar el impacto de perder el resto de la recompensa.

#### 8.1.1. Modelización de opciones barrera

Sea  $V(S, t)$  el valor de la opción barrera en un momento  $t$  y precio subyacente  $S$ , bajo el supuesto de que aún no se ha activado/desactivado la barrera. En todos los casos, satisface la EDP clásica de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Según el tipo de opción, se añaden condiciones de frontera y condiciones finales distintas. Sea un payoff genérico  $F(S)$ , el valor de la opción vanilla correspondiente  $V_v(S, t)$  y un rebate  $R$ , entonces:

- **Opciones Out:** se desactivan si se toca la barrera antes del vencimiento, pagando un rebate  $R$  en ese instante.

- **Up-and-Out:**

- **Dominio:**

$$S \in (0, S_u)$$

- **Condiciones de frontera:**

$$\begin{aligned} V(S_u, t) &= R, & 0 \leq t < T \\ V(0, t) &= V_v(0, t), & \text{(opcional)} \end{aligned}$$

- **Condición final:**

$$V(S, T) = F(S), \quad S \in (0, S_u)$$

- **Down-and-Out:**

- **Dominio:**

$$S \in (S_d, \infty)$$

- **Condiciones de frontera:**

$$\begin{aligned} V(S_d, t) &= R, & 0 \leq t < T \\ V(S \rightarrow \infty, t) &= V_v(S \rightarrow \infty, t), & \text{(opcional)} \end{aligned}$$

- **Condición final:**

$$V(S, T) = F(S), \quad S \in (S_d, \infty)$$

- **Opciones In:** es simplemente una opción vainilla europea con la condición de que paga solamente si se ha alcanzado la barrera en algún momento (aunque a tiempo de vencimiento no se toque)

- **Dominio EDP:**

$$S \in (0, \infty)$$

- **Condiciones de frontera:** sea  $S_u$  la barrera superior y  $S_d$  la barrera inferior, entonces según corresponda:

$$V(S_i, t) = V_v(S_i, t), \quad 0 \leq t < T$$

- **Condición final:**

$$V(S, T) = \begin{cases} R, & \text{si no se ha alcanzado barrera} \\ F(S), & \text{si se ha alcanzado barrera} \end{cases}$$

- **Cálculo típico:** no se suele resolver directamente con EDPs, sino que se usa la relación:

$$V_{\text{In}}(S, t) = V_v(S, t) - V_{\text{Out}}(S, t)$$

añadiendo el rebate si es necesario.

### 8.1.2. Fórmulas analíticas

En esta sección se muestran las fórmulas analíticas para las opciones barrera, si bien no son comúnmente usadas. Sea

$$a = \left( \frac{S_b}{S} \right)^{-1 + \frac{2(r-q)}{\sigma^2}}, \quad b = \left( \frac{S_b}{S} \right)^{1 + \frac{2(r-q)}{\sigma^2}}$$

donde  $S_b$  es la posición de la barrera (ya sea  $S_u$  o  $S_d$  según el caso); y sea

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log(S/E) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_2 &= \frac{\log(S/E) + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_3 &= \frac{\log(S/S_b) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_4 &= \frac{\log(S/S_b) + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_5 &= \frac{\log(S_b^2/(SE)) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_6 &= \frac{\log(S_b^2/(SE)) + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_7 &= \frac{\log(SE/S_b^2) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_8 &= \frac{\log(SE/S_b^2) + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \end{aligned}$$

Sea  $N(\cdot)$  la función de distribución acumulativa de la normal estándar, entonces las fórmulas para las opciones barrera son:

■ **Up-and-out call:**

$$Se^{-q(T-t)} (N(d_1) - N(d_3) - b(N(d_6) - N(d_8))) - Ee^{-r(T-t)} (N(d_2) - N(d_4) - a(N(d_5) - N(d_7)))$$

■ **Up-and-in call:**

$$Se^{-q(T-t)} (N(d_3) + b(N(d_6) - N(d_8))) - Ee^{-r(T-t)} (N(d_4) + a(N(d_5) - N(d_7)))$$

■ **Down-and-out call:**

- Si  $E > S_b$ :

$$Se^{-q(T-t)} (N(d_1) - b(1 - N(d_8))) - Ee^{-r(T-t)} (N(d_2) - a(1 - N(d_7)))$$

- Si  $E < S_b$ :

$$Se^{-q(T-t)} (N(d_3) - b(1 - N(d_6))) - Ee^{-r(T-t)} (N(d_4) - a(1 - N(d_5)))$$

■ **Down-and-in call:**

- Si  $E > S_b$ :

$$Se^{-q(T-t)} b(1 - N(d_8)) - Ee^{-r(T-t)} a(1 - N(d_7))$$

- Si  $E < S_b$ :

$$Se^{-q(T-t)} (N(d_1) - N(d_3) + b(1 - N(d_6))) - Ee^{-r(T-t)} (N(d_2) - N(d_4) + a(1 - N(d_5)))$$

■ **Down-and-out put:**

$$-Se^{-q(T-t)} (N(d_3) - N(d_1) - b(N(d_8) - N(d_6))) + Ee^{-r(T-t)} (N(d_4) - N(d_2) - a(N(d_7) - N(d_5)))$$

■ **Down-and-in put:**

$$-Se^{-q(T-t)} (1 - N(d_3) + b(N(d_8) - N(d_6))) + Ee^{-r(T-t)} (1 - N(d_4) + a(N(d_7) - N(d_5)))$$

■ **Up-and-out put:**

- Si  $E > S_b$ :

$$-Se^{-q(T-t)} (1 - N(d_3) - bN(d_6)) + Ee^{-r(T-t)} (1 - N(d_4) - aN(d_5))$$

- Si  $E < S_b$ :

$$-Se^{-q(T-t)} (1 - N(d_1) - bN(d_8)) + Ee^{-r(T-t)} (1 - N(d_2) - aN(d_7))$$

■ **Up-and-in put:**

- Si  $E > S_b$ :

$$-Se^{-q(T-t)} (N(d_3) - N(d_1) + bN(d_6)) + Ee^{-r(T-t)} (N(d_4) - N(d_2) + aN(d_5))$$

- Si  $E < S_b$ :

$$-Se^{-q(T-t)} bN(d_8) + Ee^{-r(T-t)} aN(d_7)$$

### 8.1.3. Otras posibles características

Otras características que pueden tener las opciones barrera son:

- **Ejercicio anticipado:** Es posible un ejercicio anticipado al estilo americano, que será una simple restricción al valor de la opción. El contrato debe especificar el payoff si se ejerce antes del vencimiento.
- **Barrera intermitente:** La posición de la(s) barrera(s) puede depender del tiempo. Una versión más extrema de una barrera dependiente del tiempo consiste en que una barrera desaparezca por completo durante períodos específicos. Estas opciones se denominan **called protected options** o **partial barrier options**. Existen dos variantes: que se active si en los días de protección se ha cruzado la barrera (puede haber cruzado en otro momento), o que se active si en los días de protección se cruza la barrera (la barrera se tiene que cruzar esos días y no otros).
- **Repeated Hitting of the Barrier:** en los casos en los que hay doble barrera, se puede requerir que se deben alcanzar ambas barreras para activar el contrato.
- **Resetting of Barrier:** se puede hacer una variante de barrera *in* en las que si se alcanza una barrera antes de cierto tiempo, se obtiene una nueva opción barrera con otra barrera distinta. Puede haber tantos pasos como se quiera. Relacionados a estos contratos están los **roll-up options** y **roll-down options**, que comienzan como una opción vainilla pero si se alcanza cierto nivel se convierten en una opción barrera.
- **Outside/Rainbow Barrier Options:** se activan cuando un segundo subyacente activa la barrera. Son contratos multifactor.
- **Soft Barriers:** permite que el contrato se reduzca gradualmente. El contrato especifica dos niveles: uno superior y otro inferior; una parte del contrato se reduce en función de la distancia que el activo haya alcanzado entre las dos barreras. Por ejemplo, si se tiene las barreras  $B_1, B_2, B_1 < B_2$  y el activo alcanza un nivel intermedio, se pierde un porcentaje  $(S_{\max} - B_1)/(B_2 - B_1)$  del contrato.

- **Parisian Options:** se activa solo si se ha activado la barrera durante más de un tiempo especificado. Esta característica adicional reduce la posibilidad de manipulación del evento desencadenante y facilita la cobertura dinámica. Sin embargo, esta nueva característica también aumenta la dimensionalidad del problema. Se verá más en detalle en la sección ??.

- **The Emergency Exit:** Se trata de una cláusula de escape que permite salir de una posición bajo condiciones prescritas. Por ejemplo, una salida de emergencia en un contrato podría especificar que se puede salir en cualquier momento antes del vencimiento y recibir un reembolso. Esto es muy similar al ejercicio americano, por lo que si el reembolso es  $R$ , entonces:

$$V \geq R$$

Es posible que  $R$  dependa del tiempo, por lo que la cláusula de escape solo esté activa durante tiempos determinados, y/o que dependa de  $S$ , de modo que solo pueda escapar cuando el precio de las acciones se encuentre en ciertos niveles.

#### 8.1.4. First-exit times

También puede ser útil conocer la probabilidad de que un camino aleatorio alcance una barrera antes de cierto tiempo. Como se vio en la sección 3.3, la probabilidad de que el camino aleatorio alcance la barrera antes de cierto tiempo  $t$  es  $\mathcal{Q}(S, t)$  y cumple el sistema (3.3):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} + \frac{1}{2}B^2 \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial S^2} + A \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial S} = 0 \\ \mathcal{Q}(S, T) = 0 \\ \mathcal{Q}(S_b, T) = 1 \end{cases}$$

Por ejemplo, para una *Up-and-In* cuyo subyacente sigue una EDE  $dS = \mu S dt + \sigma S dX_t$ , el sistema es:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial S} = 0 \\ \mathcal{Q}(S, T) = 0 \\ \mathcal{Q}(S_u, T) = 1 \end{cases}$$

y el tiempo esperado de primer escape (visto en la sección 3.3.2) viene dado por:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial S} = -1$$

i.e.

$$u(S) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu} \log \left( \frac{S}{S_u} \right)$$

cuando  $2\mu > \sigma^2$ . Si no fuese el caso, el tiempo esperado es infinito.

## 8.2. Derivados fuertemente dependientes del camino

### 8.2.1. Muestras continuas

Para calcular el payoff, se usa al menos una nueva variable independiente  $I$  llamada **state variable**; por lo tanto el payoff se representa como  $P(S, I)$ . Esta variable suele venir dada por la integral:

$$I(t) = \int_0^t f(S, \tau) d\tau \quad (8.1)$$

donde  $f$  es una función que se modela según el interés del escritor. Por lo tanto el payoff debe ser de la forma:

$$P(S, I)$$

Algunos ejemplos son:

- **Media aritmética:**  $f(S, \tau) = S$
- **Media geométrica:**  $f(S, \tau) = \log(S)$
- Contrato que paga según el tiempo que el subyacente ha estado por encima de un nivel:  $f(S, \tau) = \mathcal{H}(S - S_u)$
- Contrato que paga según el tiempo que el subyacente ha estado por encima de un nivel y el cuadrado de ese valor:  $f(S, \tau) = S^2 \mathcal{H}(S - S_u)$

Se considera que el subyacente sigue la EDE:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

y de la ecuación (8.1) se obtiene que:

$$dI = f(S, t) dt$$

Por otro lado, se considera la cartera:

$$\Pi = V(S, I, t) - \Delta S$$

usando el lema de Itô bidimensional descrito en el apéndice B.1, se obtiene que la variación de la cartera es:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial I} dI - \Delta dS \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + f(S, t) \frac{\partial V}{\partial I} dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + f(S, t) \frac{\partial V}{\partial I} \right) dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS \end{aligned}$$

que eligiendo  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  es:

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + f(S, t) \frac{\partial V}{\partial I} \right) dt$$

e igualando a la tasa libre de riesgo

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V - \Delta S) dt = r \left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt$$

se obtiene la EDP:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + f(S, t) \frac{\partial V}{\partial I} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (8.2)$$

a lo que se le debe añadir la condición final:

$$V(S, I, T) = P(S, I)$$

Se podría considerar más de una variable de estado.

### 8.2.2. Muestras discretas

La expresión (8.1) consideran muestras continuas, pero en la realidad se usan siempre muestras discretas. Por ello, se suele usar la **updating rule**, que permite actualizar la variable de estado  $I_i$  en cada paso de tiempo  $t_i \leq t < t_{i+1}$ . Es decir, a tiempo  $t_i$  la cantidad  $I_{i-1}$  se actualiza como:

$$I_i = F(S(t_i), I_{i-1}, t_i) \quad (8.3)$$

Durante los momentos entre tiempos  $(t_i, t_{i+1})$ , el incremento de la variable de estado permanece nula:

$$dI = 0$$

por lo tanto, la EDP (8.2) pasa a ser la ecuación clásica de Black-Scholes::

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0} \quad (8.4)$$

a la que se le debe añadir la condición de salto:

$$V(S, I_{i-1}, t_i^-) = V(S, I_i, t_i^+) \xrightarrow{8.3} \boxed{V(S, I, t_i^-) = V(S, F(S, I, i), t_i^+)} \quad (8.4)$$

Por ejemplo, para una opción asiática (media aritmética), se usa:

$$\begin{aligned} A_M &= \frac{I_M}{M} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^M S(t_k) \Rightarrow \\ \xrightarrow{\text{updating rule}} A_i &= \frac{1}{i} \sum_{k=0}^i S(t_k) = \frac{1}{i} S(t_i) + \frac{i-1}{i} A_{i-1} \end{aligned}$$

con una condición de salto:

$$V(S, I, t_i^-) = V(S, \frac{i-1}{i} A + \frac{1}{i} S, t_i^+)$$

y un payoff:

$$P(S, A_M) = \max(A_M - S, 0)$$

Se podría considerar más de una variable de estado.

### 8.2.3. Ejercicio anticipado

En cualquier caso, en sencillo modelizar el ejercicio anticipado, simplemente se añade una condición de ejercicio anticipado:

$$V(S, I, t) \geq P(S, I)$$

### 8.3. Opciones asiáticas

En ellas el payoff depende del valor promedio del activo subyacente durante un período de tiempo, lo que las hace menos susceptibles a la manipulación del mercado y puede reducir la volatilidad del precio de la opción. Existen muchos tipos de payoffs, como por ejemplo:

- **Average strike:**

- **Average strike call:**  $\max(S - A, 0)$
- **Average strike put:**  $\max(A - S, 0)$

- **Average rate:**

- **Average rate call:**  $\max(A - E, 0)$
- **Average rate put:**  $\max(E - A, 0)$

Algunas maneras de calcular el promedio son:

- Tipo de promedio:

- **Aritmético:** la suma de todos los precios constituyentes, igualmente ponderados, dividida por el número total de precios utilizados.
- **Geométrico:** el exponente de la suma de todos los logaritmos de los precios constituyentes, igualmente ponderados, dividido por el número total de precios utilizados.
- Otros: como el aritmético con diferentes pesos.

- Muestreo:

- **Continuo:** se toman muestras de precios en intervalos de tiempo infinitesimales.
- **Discreto:** se toman muestras de precios en intervalos de tiempo discretos, como diariamente, semanalmente, etc.

Algunos ejemplos específicos de variable de estado y su EDP asociada son:

- **Promedio con muestreo continuo:**

- **Promedio aritmético:** El promedio se calcularía como:

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau$$

introduciendo la variable de estado

$$I = \int_0^t S(\tau) d\tau$$

y la EDP asociada sería:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- **Promedio geométrico:** El promedio se calcularía como:

$$\exp \left( \frac{1}{t} \int_0^t \log(S(\tau)) d\tau \right)$$

introduciendo la variable de estado

$$I = \int_0^t \log(S(\tau)) d\tau$$

y la EDP asociada sería:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \log(S) \frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Para este caso existe una solución analítica, que es parecida a la de la opción europea (tabla 4.3.2), pero con los siguientes cambios:

- La volatilidad de sustituye por  $\sigma\sqrt{3}$
- Los dividendos se sustituyen por  $D + \sigma^2/6$

Para usar en este modelo sencillo una volatilidad dependiente del tiempo, se puede usar una fórmula similar a la de la sección 4.5.3:

$$\overline{\sigma_G}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t)^2 \left( \frac{T-t}{T} \right)^2 dt$$

que cuando la volatilidad es constante se reduce a  $\sigma_G = \sigma\sqrt{3}$ .

■ **Promedio con muestreo discreto:**

- **Promedio aritmético:** El promedio se calcularía como:

$$A_i = \frac{i-1}{i} A_{i-1} + \frac{1}{i} S(t_i)$$

y la condición de salto sería:

$$V(S, A, t_i^-) = V \left( S, \frac{i-1}{i} A + \frac{1}{i} S, t_i^+ \right)$$

- **Promedio geométrico:** El promedio se calcularía como:

$$\exp \left( A_i = \frac{i-1}{i} \log(A_{i-1}) + \frac{1}{i} \log(S(t_i)) \right)$$

y la condición de salto sería:

$$V(S, A, t_i^-) = V \left( S, \exp \left( \frac{i-1}{i} \log(A) + \frac{1}{i} \log(S) \right), t_i^+ \right)$$

■ **Promedios ponderados exponencialmente:**

- **Promedio aritmético ponderado exponencialmente con muestreo continuo:** Se introduce la variable de estado:

$$I = \lambda \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} S(\tau) d\tau$$

que satisface

$$dI = \lambda(S - I)dt$$

por lo que la EDP asociada sería:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda(S - I) \frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- **Promedio geométrico ponderado exponencialmente con muestreo continuo:** Se introduce la variable de estado:

$$I = \lambda \int_{\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \log(S(\tau)) d\tau$$

que satisface

$$dI = \lambda(\log(S) - I)dt$$

por lo que la EDP asociada sería:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda(\log(S) - I)\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

- **Promedio hasta punto fijo:** cuando para calcular el promedio solo se tiene en cuenta el valor del activo hasta un punto fijo en el tiempo, se introduce la variable de estado:

$$\boxed{I = \int_0^{T_0} S(\tau) d\tau, \quad T_0 < T}$$

por lo que la EDP asociada sería:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + S\mathcal{H}(T_0 - t)\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

También es posible añadir el ejercicio anticipado o aumentar la dimensionalidad, como la **anteater option**, cuyo payoff depende del payoff de dos subyacentes  $S_1$  y  $S_2$ :

$$\boxed{I = \int_0^t \frac{S_1(\tau)}{S_2(\tau)} d\tau}$$

### 8.3.1. Algunas soluciones analíticas

No existen muchas soluciones analíticas para las opciones asiáticas, de las cuales las más comunes son promedios geométricos de average rate calls y puts, que son:

- **Geometric average rate call:** con un payoff de:

$$\max(A - E, 0)$$

donde  $A$  es el promedio geométrico del activo subyacente, y su valor se puede calcular como:

$$\boxed{e^{-r(T-t)} \left( G \exp \left( \frac{(r - D - \sigma^2/2)(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6T^2} \right) N(d_1) - EN(d_2) \right)}$$

donde

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \log(S(\tau)) d\tau, \\ G &= e^{I/T} S^{(T-t)/T}, \\ d_1 &= \frac{T \log(G/E) + (r - D - \sigma^2/2)(T-t)^2/2 + \sigma^2(T-t)^3/3T}{\sigma \sqrt{(T-t)^3/3}}, \\ d_2 &= \frac{T \log(G/E) + (r - D - \sigma^2/2)(T-t)^2/2}{\sigma \sqrt{(T-t)^3/3}}. \end{aligned}$$

- **Geometric average rate put:** con un payoff de:

$$\max(E - A, 0)$$

donde  $A$  es el promedio geométrico del activo subyacente, y su valor se puede calcular como:

$$\boxed{e^{-r(T-t)} \left( EN(-d_2) - G \exp \left( \frac{(r - D - \sigma^2/2)(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6T^2} \right) N(d_1) \right)}$$

donde

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \log(S(\tau)) d\tau, \\ G &= e^{I/T} S^{(T-t)/T}, \\ d_1 &= \frac{T \log(G/E) + (r - D - \sigma^2/2)(T-t)^2/2 + \sigma^2(T-t)^3/3T}{\sigma \sqrt{(T-t)^3/3}}, \\ d_2 &= \frac{T \log(G/E) + (r - D - \sigma^2/2)(T-t)^2/2}{\sigma \sqrt{(T-t)^3/3}}. \end{aligned}$$

## 8.4. Opciones lookback

Este tipo de opciones paga en función del valor máximo y mínimo del activo subyacente durante un tiempo concreto. Existen dos casos a considerar: si el máximo y mínimo se miden de forma continua o discreta. Al igual que en las opciones asiáticas, están las opciones *rate* (llamadas **fixed strike**, con un payoff igual que las vainilla pero reemplazando el valor del subyacente por el máximo o mínimo) y las opciones *price* (llamadas **floating strike**, con un payoff como las vainilla pero reemplazando el strike por el mínimo o máximo).

### 8.4.1. Medición continua del máximo

Se introduce la variable  $M$  como el máximo del activo subyacente  $S(t)$  desde el inicio del contrato hasta el tiempo  $t$ :

$$M = \max_{0 \leq \tau \leq t} S(\tau).$$

El valor de la opción es por lo tanto una función de tres variables  $V(S, M, t)$ , con la restricción:

$$0 \leq S \leq M$$

Durante casi todo momento, el subyacente está por debajo del máximo, menos cuando el subyacente alcanza el máximo, en cuyo caso  $S = M$ . A excepción de esos momentos, se cumple que  $S < M$  y se satisface la EDP:

$$dM = 0$$

Por lo tanto, la EDP que gobierna el comportamiento en ese dominio es:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \quad S < M}$$

con la condición de contorno cuando se alcanza el máximo:

$$\frac{\partial V}{\partial M} = 0, \quad S = M$$

Por último, se debe imponer el payoff, que por ejemplo para una lookback rate call option es

$$\max(M - E, 0)$$

y para una lookback strike put option es

$$\max(M - S, 0)$$

### 8.4.2. Medición discreta del máximo

En este caso, solo se considera el máximo en puntos discretos, por lo que es posible que en algún momento el subyacente esté por encima del máximo. Si el máximo se mide en los tiempos  $t_i$ , la updating rule es:

$$\boxed{M_i = \max(S(t_i), M_{i-1})}$$

y la condición de salto es:

$$\boxed{V(S, M, t_i^-) = V(S, \max(S, M), t_i^+)}$$

### 8.4.3. Algunas soluciones analíticas

En ocasiones, es posible hacer ciertas reducciones de un problema con tres variables a uno de dos variables, consultar en el capítulo 26 de *Paul Wilmott on Quantitative Finance* [1]. Algunas soluciones analíticas son:

- **Floating strike lookback call:** si se mide continuamente, su payoff es:

$$\max(S - M, 0) = S - M,$$

donde  $M$  es el mínimo realizado del precio del activo, y su valor:

$$\boxed{Se^{-D(T-t)}N(d_1) - Me^{-r(T-t)}N(d_2) + Se^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2(r-D)} \cdot \left( \left(\frac{S}{M}\right)^{-2(r-D)/\sigma^2} N\left(-d_1 + \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) - e^{(r-D)(T-t)}N(-d_1) \right)}$$

donde

$$d_1 = \frac{\log(S/M) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

- **Floating strike lookback put:** si se mide continuamente, su payoff es:

$$\max(M - S, 0) = M - S,$$

donde  $M$  es el máximo realizado del precio del activo, y su valor:

$$\boxed{Me^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-D(T-t)}N(-d_1) + Se^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2(r-D)} \cdot \left( -\left(\frac{S}{M}\right)^{-2(r-D)/\sigma^2} N\left(d_1 - \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) + e^{(r-D)(T-t)}N(d_1) \right)}$$

donde

$$d_1 = \frac{\log(S/M) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

- **Fixed strike lookback call:** su payoff es

$$\max(M - E, 0)$$

donde  $M$  es el máximo realizado del precio del activo. Su valor justo es:

- $E > M$ :

$$\boxed{Se^{-D(T-t)}N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) + Se^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2(r-D)} \cdot \left( -\left(\frac{S}{E}\right)^{-2(r-D)/\sigma^2} N\left(d_1 - \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) + e^{(r-D)(T-t)}N(d_1) \right)}$$

donde

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

- $E < M$ :

$$\boxed{(M - E)e^{-r(T-t)} + Se^{-D(T-t)}N(d_1) - Me^{-r(T-t)}N(d_2) + Se^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2(r-D)} \cdot \left( -\left(\frac{S}{M}\right)^{-2(r-D)/\sigma^2} N\left(d_1 - \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) + e^{(r-D)(T-t)}N(d_1) \right)}$$

donde

$$d_1 = \frac{\log(S/M) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

- **Fixed strike lookback put:** su payoff es

$$\max(E - M, 0)$$

donde  $M$  es el mínimo realizado del precio del activo. Su valor justo es:

- $E < M$ :

$$\boxed{Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-D(T-t)}N(-d_1) + Se^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2(r-D)} \cdot \left( \left(\frac{S}{E}\right)^{-2(r-D)/\sigma^2} N\left(-d_1 + \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) - e^{(r-D)(T-t)}N(-d_1) \right)}$$

donde

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

- $E > M$ :

$$\boxed{(E - M)e^{-r(T-t)} - Se^{-D(T-t)}N(-d_1) + Me^{-r(T-t)}N(-d_2) + Se^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2(r-D)} \cdot \left( \left(\frac{S}{M}\right)^{-2(r-D)/\sigma^2} N\left(-d_1 + \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) - e^{(r-D)(T-t)}N(-d_1) \right)}$$

donde

$$d_1 = \frac{\log(S/M) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

## 8.5. Opciones passport

Se invierte en una acción en particular, comprando o vendiendo según se tenga una visión de futuro u otra. La cantidad de dinero que acumula al operar con esta acción se denominat**trading account**. Si se es bueno o se tiene suerte, esta cantidad será positiva pero si se es malo o se tiene mala suerte, esta cantidad será negativa. La **perfect trader/passport option** es una opción que permite asegurarse contra pérdidas en la cuenta de trading; es una opción call sobre la trading account que otorga al poseedor el saldo de la cuenta al final del contrato si es positivo y cero si es negativo.

Se introduce la nueva variable de estado  $\pi$  que es el valor de la trading account. Se introduce también la **variable de control**  $q$  como la cantidad de acción que se posee a tiempo  $t$ . Se tiene por lo tanto una posición de la acción  $qS$ , y como el valor total es  $\pi$ , se tiene  $\pi - qS$  en efectivo. La posición de la acción variará  $qdS$  mientras que el efectivo variará por los intereses una cantidad  $r(\pi - qS)dt$  (**aquí se asume que el efectivo crece por el intereses, pero en la realidad no tiene porque, se podría eleminar esta condición**). Por lo tanto, la variación total será de:

$$d\pi = r(\pi - qS)dt + qdS$$

La cantidad de  $q$  es una elección que varía según el tiempo y la acción cambia; es una función  $q(S, \pi, t)$ . En este caso se va a restringir a que  $\|q\| \leq 1$ . El contrato tendrá un payoff:

$$V(S, \pi, T) = \max(\pi, 0)$$

Se asume como siempre que  $S$  sigue la EDE:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

por lo que la variación de  $\pi$  es:

$$\begin{aligned} d\pi &= r(\pi - qS)dt + qdS \\ &= r(\pi - qS)dt + q(\mu S dt + \sigma S dX) \\ &= (r\pi - rqS + q\mu S)dt + q\sigma S dX \end{aligned}$$

y aplicando el lema de Itô de varios procesos (ver apendice B.1):

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + q \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi \partial S} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial \pi} d\pi \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + q \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi \partial S} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial \pi} (r(\pi - qS)dt + qdS) \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + q \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi \partial S} + r(\pi - qS) \frac{\partial V}{\partial \pi} \right) dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} + q \frac{\partial V}{\partial \pi} \right) dS \end{aligned}$$

Se considera la cartera:

$$\Pi = V - \Delta S$$

cuya variación es:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \Delta dS \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + q \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi \partial S} + r(\pi - qS) \frac{\partial V}{\partial \pi} \right) dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} + q \frac{\partial V}{\partial \pi} \right) dS - \Delta dS \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + q \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi \partial S} + r(\pi - qS) \frac{\partial V}{\partial \pi} \right) dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} + q \frac{\partial V}{\partial \pi} - \Delta \right) dS \end{aligned}$$

y eligiendo

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} + q \frac{\partial V}{\partial \pi}$$

e igualando a:

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V - \Delta S)dt = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S} - qS\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)dt$$

se obtiene que la EDP gobernante es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}q^2\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + q\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi \partial S} + r(\pi - qS)\frac{\partial V}{\partial \pi} &= r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S} - qS\cancel{\frac{\partial V}{\partial \pi}}\right) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}q^2\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + q\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi \partial S} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + r\pi\frac{\partial V}{\partial \pi} - rV &= 0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Esta ecuación no tiene dos dimensiones espaciales ya que  $S$  y  $\pi$  están perfectamente correladas. La ecuación es más bien de una dimensión espacial y una temporal.

Para valorar de forma correcta la opción se debe asumir que el poseedor actúa de forma óptima a la hora de elegir  $q$ . Esto ocurre cuando se elige  $q$  de manera que se maximicen los términos de (8.5) que dependen de  $q$ . Por lo tanto:

$$\max_{|q|\leq 1} \left( \frac{1}{2}q^2\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + q\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi \partial S} \right)$$

### 8.5.1. Limitación en el número de operaciones

Sea  $V^{n+}(S, \pi, t), V^{n-}(S, \pi, t)$  el valor de la opción cuando aún se permiten  $n$  operaciones y el  $+/-$  se refiere a si el operador está actualmente en posición larga o corta respecto de la cantidad máxima permitida del subyacente. Por lo tanto ahora las únicas opciones que se dan son estar en una posición larga ( $q = 1$ ) o corta ( $q = -1$ ). Además, como se tiene la opción de cambiar de posición en cualquier momento, se está ante una situación de optimización similar a las opciones americanas y se emplean inecuaciones. Por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{\partial V^{n+}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n+}}{\partial S^2} + \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n+}}{\partial S \partial \pi} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n+}}{\partial \pi^2} + rS\frac{\partial V^{n+}}{\partial S} + r\pi\frac{\partial V^{n+}}{\partial \pi} - rV^{n+} \leq 0$$

$$\frac{\partial V^{n-}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n-}}{\partial S^2} - \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n-}}{\partial S \partial \pi} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n-}}{\partial \pi^2} + rS\frac{\partial V^{n-}}{\partial S} + r\pi\frac{\partial V^{n-}}{\partial \pi} - rV^{n-} \leq 0$$

y la condición final es:

$$V^{0\pm}(S, \pi, T) = \max(\pi, 0)$$

Por último, una operación es óptima cuando el valor con  $n$  operaciones restantes (y actualmente en posición larga/corta) es el mismo que con  $n - 1$  operaciones restantes y la posición opuesta:

$$V^{n+} \geq V^{(n-1)-}, \quad V^{n-} \geq V^{(n-1)+}$$

También es posible añadir una penalización  $P$  a cada operación que se realice. Para modelarlo bastaría con modificar esta última condición a:

$$V^{n+} \geq V^{(n-1)-} + P, \quad V^{n-} \geq V^{(n-1)+} + P$$

### 8.5.2. Limitación de tiempo entre operaciones

También se puede limitar el tiempo entre operaciones: una vez hecha una operación, se debe esperar un tiempo  $\omega$  antes de realizar la siguiente. Por lo tanto se debe introducir un ‘reloj’ que registra el tiempo transcurrido desde la última operación. Este reloj se reinicia a cero en cuanto se realiza una operación.

Por lo tanto el valor de la opción viene dado por  $V^+(S, \pi, t, \tau)$ ,  $V^-(S, \pi, t, \tau)$ , donde  $\tau$  es el tiempo de ese reloj. Se cumplen las dos inecuaciones:

$$\frac{\partial V^+}{\partial t} + \frac{\partial V^+}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^+}{\partial S^2} + \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^+}{\partial S \partial \pi} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^+}{\partial \pi^2} + rS \frac{\partial V^+}{\partial S} + r\pi \frac{\partial V^+}{\partial \pi} - rV^+ \leq 0$$

$$\frac{\partial V^-}{\partial t} + \frac{\partial V^-}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^-}{\partial S^2} - \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^-}{\partial S \partial \pi} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^-}{\partial \pi^2} + rS \frac{\partial V^-}{\partial S} + r\pi \frac{\partial V^-}{\partial \pi} - rV^- \leq 0$$

con la condición final:

$$V^\pm(S, \pi, T, \tau) = \max(\pi, 0)$$

Una operación es óptima cuando el valor de la opción es el mismo que el de la posición opuesta en el activo subyacente y con una operación permitida. (i.e.  $\tau = \omega$ )

$$V^+(S, \pi, t, \omega) \geq V^-(S, \pi, t, 0), \quad V^-(S, \pi, t, \omega) \geq V^+(S, \pi, t, 0)$$

## 8.6. Otras opciones exóticas

### 8.6.1. Forward-start options

Es una opción que se materializa en algún momento del futuro, es decir, se compra en tiempo  $t = 0$  pero el strike no se conoce hasta el tiempo  $T_1$  (y será el valor de la acción en ese momento) y finalmente vence en tiempo  $T$ .

La primera manera de resolverlo es tratarlo como una opción *at-the-money* con  $S = S_1, t = T - T_1, E = S_1$  y dados  $r$  y  $\sigma$ . Para el caso de una call el resultado sería:

$$S_1 N(d_1) - S_1 e^{-r(T-T_1)} N(d_2)$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \sqrt{T - T_1} \\ d_2 &= \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \sqrt{T - T_1} \end{aligned}$$

La otra manera de resolverlo es tratarlo como una opción dependiente del camino e introducir la variable de estado  $\mathcal{S}$  definida en  $t \geq T_1$  como el valor de la acción en tiempo  $T_1$ :

$$\mathcal{S} = S(T_1)$$

Para tiempos anteriores se toma  $\mathcal{S} = 0$ . Por lo tanto, el valor de la opción depende de tres variables  $V(S, \mathcal{S}, t)$  y cumple la ecuación clásica de Black-Scholes en  $S$  y  $t$  ya que  $\mathcal{S}$  no es estocástica y es constante tras  $T_1$ . A tiempo final para una call se tiene:

$$V(S, \mathcal{S}, T) = \max(S - \mathcal{S}, 0)$$

Y se tiene que añadir la condición de salto en  $T_1$ :

$$V(S, \mathcal{S}, T_1^+) = V(S, \mathcal{S}, T_1^-)$$

### 8.6.2. Shout options

Es una opción normal pero con la posibilidad de hacer un ‘shouting’ que resetea el strike al precio actual del subyacente. A la vez suele haber un pago, normalmente de la diferencia entre strikes. Se introducen dos funciones,  $V_a(S, X, t)$  y  $V_b(S, X, t)$  que son el valor de la opción y después y antes del shouting respectivamente. Como  $X$  se actualiza de forma discreta, la EDP es la clásica de Black-Scholes. La condición final es:

$$V_a(S, X, T) = V_b(S, X, T) = \max(S - X, 0)$$

y se debe cumplir la condición:

$$V_b(S, X, t) \geq V_a(S, \max(S, X), t) - R(S, X)$$

donde  $R$  es el pago del shouting.

### 8.6.3. Capped lookbacks y asiáticas

En las que existe un límite o garantía del tamaño del máximo, mínimo o promedio. Un ejemplo sería una opción asiática cuyo promedio viene dado por:

$$A = \frac{1}{t} I = \frac{1}{t} \int_0^t \min(S, S_u) d\tau$$

y por lo que la  $I$  sigue una EDE:

$$dI = \min(S, S_u) dt$$

### 8.6.4. Combinaciones de cualidades

Es posible combinar varios tipos de opciones asiáticas, por ejemplo una opción lookback-asiática que depende del máximo (o mínimo) y del promedio. Existen varias maneras de combinar estas cualidades:

- **El máximo del activo y el promedio del activo:** por ejemplo, usando un promedio aritmético y que ambas cualidades dependientes del camino se muestrean discretamente se tiene que el valor de la opción depende de cuatro variables  $V(S, M, A, t)$  donde  $M$  es el máximo del activo y  $A$  el promedio. Las variables  $M, A$  se miden discretamente:

$$M_i = \max(S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_i)) = \max(M_{i-1}, S(t_i))$$

$$A_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i S(t_j) = \frac{(i-1)A_{i-1} + S(t_i)}{i}$$

por lo que la condición de salto es:

$$V(S, M, A, t_i^-) = V\left(S, \max(M, S), \frac{(i-1)A + S}{i}, t_i^+\right)$$

y se completaría el modelo con la EDP clásica de Black-Scholes y una condición final correspondiente.

- **El promedio del activo y el máximo del promedio:** se tiene entonces que las updating rules son:

$$A_i = \frac{(i-1)A_{i-1} + S(t_i)}{i}$$

$$M_i = \max(M_{i-1}, A_i)$$

y la condición de salto:

$$V(S, M, A, t_i^-) = V\left(S, \max\left(M, \frac{(i-1)A + S}{i}\right), \frac{(i-1)A + S}{i}, t_i^+\right)$$

y se completaría el modelo con la EDP clásica de Black-Scholes y una condición final correspondiente.

- **El máximo del activo y el promedio del máximo:** se tiene entonces que las updating rules son:

$$M_i = \max(M_{i-1}, S(t_i))$$

$$A_i = \frac{(i-1)A_{i-1} + M_i}{i}$$

y la condición de salto:

$$V(S, M, A, t_i^-) = V\left(S, \max(M, S), \frac{(i-1)A + \max(M, S)}{i}, t_i^+\right)$$

y se completaría el modelo con la EDP clásica de Black-Scholes y una condición final correspondiente.

### 8.6.5. Volatility options

En este tipo de opciones se tiene en cuenta la volatilidad histórica del subyacente en el sentido estadístico:

$$\sqrt{\frac{1}{\delta t} \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left( \log \left( \frac{S(t_j)}{S(t_{j-1})} \right) \right)^2}$$

donde  $\delta t$  es el tiempo entre mediciones.

Se va a valorar en un mundo de volatilidad constante. Se definen dos variables de estado  $I$  como la volatilidad actual y  $\mathcal{S}$  como el último precio del subyacente:

$$I_i = \sqrt{\frac{1}{\delta t(i-1)} \sum_{j=1}^i \left( \log \left( \frac{S(t_j)}{S(t_{j-1})} \right) \right)^2}$$

$$\mathcal{S}_i = S(t_{i-1})$$

Las dos updating rules son:

$$\mathcal{S}_i = S(t_{i-1})$$

$$I_i = \sqrt{\frac{i-2}{i-1} I_{i-1}^2 + \frac{1}{\delta t(i-1)} (\log(S(t_i)) - \log(\mathcal{S}_i))^2}$$

y la condición de salto es:

$$V(S, \mathcal{S}, I, t_i^-) = V \left( S, S, \sqrt{\frac{i-2}{i-1} I^2 + \frac{1}{\delta t(i-1)} (\log(S) - \log(\mathcal{S}))^2}, t_i^+ \right)$$

Se completaría el modelo con la EDP clásica de Black-Scholes y una condición final correspondiente.

Fuera de la volatilidad constante, se puede usar una volatilidad estocástica. Todas las condiciones son iguales pero aumenta la dimensionalidad en uno, convirtiéndose en un problema de cinco dimensiones.

### 8.6.6. Ladder options

Es una opción lookback en la que el máximo del subyacente se registra de forma discreta, pero en niveles de precio en vez de en el tiempo. El payoff depende del nivel más alto alcanzado entre un conjunto de precios predefinidos (los ‘peldaños’ de la ladder). Por ejemplo, si los peldaños están en múltiplos de 5 (\$50, \$55, \$60, etc.) y el activo alcanza un máximo de \$58, el nivel registrado sería \$55. Este tipo de opción suele ser más barata que la versión continua. Matemáticamente, el contrato puede verse como una combinación de opciones tipo barrera activadas en cada peldaño, o bien como una opción cuyo payoff es una función escalonada del máximo alcanzado.

### 8.6.7. Parisian options

Son como las opciones barrera, pero para activar la barrera se tiene que haber sobrepasado la barrera durante un tiempo determinado. En la opción parisina clásica (la única que va a considerar aquí) el ‘reloj’ que mide el tiempo habiendo sobrepasado la barrera se resetea si se vuelve a entrar en ella.

Se introduce la variable para una barrera *up*  $S_u$  que define el tiempo que el activo ha estado más allá de la barrera:

$$\tau = t - \sup \{t' \leq t \mid S(t') \leq S_u\}$$

La EDE para esta variable es:

$$d\tau = \begin{cases} dt & S > S_u \\ -\tau^- & S = S_u \\ 0 & S < S_u \end{cases}$$

donde  $\tau^-$  es el valor de  $\tau$  antes de que salte a cero al reiniciarse. Se debe resolver el problema  $V(S, \tau, t)$  en dos regiones:

- Dentro de la barrera ( $S < S_u$ ):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \tau} - rV = 0$$

- **Fuera de la barrera ( $S > S_u$ ):**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

En  $S = S_u$  donde  $\tau$  se resetea, se debe imponer continuidad:

$$V(S_u, t, \tau) = V(S_u, t, 0)$$

En cuanto al payoff, si la barrera no ha sido activada al vencimiento  $T$ , el payoff es  $F(S, \tau)$ . Si la barrera ha sido activada antes del vencimiento, el payoff es  $G(S)$  en el momento de la activación. Por ejemplo, para una up-and-in put,  $F = 0$  y  $G = \max(E - S, 0)$ . Para una up-and-out call,  $F = \max(S - E, 0)$  y  $G = 0$ . Las condiciones de contorno se aplican como:

$$V(S, T, \omega) = G(S), \quad V(S, T, \tau) = F(S, \tau)$$

donde  $\omega$  es el valor que alcanza  $\tau$  para que se active la barrera.

Se puede añadir una condición americana, en cuyo caso se debe añadir la condición:

$$V(S, t, \tau) \geq A(S, t, \tau)$$

con continuidad de la delta y donde  $A$  define el payoff en el caso de ejercicio anticipado.

### 8.6.8. Balloon option

La cantidad de opciones compradas aumenta si se cumplen ciertas condiciones, como la activación de barreras.

### 8.6.9. Break/cancelable forward

Contrato a plazo, normalmente en divisas, que el tenedor puede cancelar en ciertos momentos predeterminados.

### 8.6.10. Contingent premium option

Se paga una prima adicional si se cumplen ciertas condiciones.

### 8.6.11. Coupe option

Opción periódica en la que el strike se reajusta al peor valor entre el subyacente y el strike anterior, similar a una cliquet pero más barata.

### 8.6.12. Extendible option/swap

Opción o swap cuya fecha de vencimiento puede ser extendida por el tenedor.

### 8.6.13. Hawai'ian option

Opciones que combinan características de las opciones asiáticas y americanas.

#### 8.6.14. Himalayan option

Opciones sobre múltiples activos donde el mejor activo se elimina en fechas de muestreo, quedando solo uno al final para el cálculo del payoff. Existen variantes llamadas mountain **range options**.

#### 8.6.15. HYPER option

Opciones reversibles de alto rendimiento que permiten cambiar repetidamente entre call y put durante la vida de la opción, resolviendo la ecuación de Black-Scholes para cada estado.

## **Parte III**

# **Renta fija y derivados**



# Capítulo 9

## Modelización de instrumentos de renta fija

### 9.1. Modelado de tasas de interés one-factor

Ya que no se puede predecir de forma realista la tasa de interés, se trata como una variable aleatoria. Se va a modelar el comportamiento de  $r$ , la tasa de interés recibida por el depósito más corto posible. Esta tasa se denomina **spot interest rate**. A menudo se usa el rate a un mes como sustituto del spot rate. Se va a suponer que la tasa de interés va a seguir la EDE:

$$dr = u(r, t) dt + w(r, t) dX$$

#### 9.1.1. Modelización de bonos

Cuando los intereses son estocásticos, el valor de un bono viene dado como  $V(r, t; T)$ . En este caso no se puede hacer una cobertura como en opciones ya que no hay un subyacente para posicionarse en corto. En cambio se usan dos bonos con diferentes vencimientos  $T_1$  y  $T_2$  que serán  $V_1(r, t; T_1)$  y  $V_2(r, t; T_2)$  respectivamente. Se sabe que:

$$\begin{aligned} dV_i &= \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + u \frac{\partial V_i}{\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial r^2} \right) dt + w \frac{\partial V_i}{\partial r} dX \\ &= \frac{\partial V_i}{\partial t} dt + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial r^2} dt + \frac{\partial V_i}{\partial r} dr \end{aligned}$$

Se construye la cartera:

$$\Pi = V_1 - \Delta V_2$$

por lo que su variación es:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV_1 - \Delta dV_2 \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial t} dt + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} dt + \frac{\partial V_1}{\partial r} dr - \Delta \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} dt + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} dt + \frac{\partial V_2}{\partial r} dr \right) \\ &= \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \Delta \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) \right) dt + \left( \frac{\partial V_1}{\partial r} - \Delta \frac{\partial V_2}{\partial r} \right) dr \end{aligned}$$

se elige  $\Delta$  de forma que:

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} - \Delta \frac{\partial V_2}{\partial r} = 0 \implies \Delta = \frac{\partial V_1 / \partial r}{\partial V_2 / \partial r}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \Delta \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) \right) dt \\ &= \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \frac{\partial V_1 / \partial r}{\partial V_2 / \partial r} \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) \right) dt \end{aligned}$$

que igualando al argumento de no arbitraje

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V_1 - \Delta V_2) dt = r \left( V_1 - \frac{\partial V_1 / \partial r}{\partial V_2 / \partial r} V_2 \right) dt$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \frac{\partial V_1 / \partial r}{\partial V_2 / \partial r} \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) &= r \left( V_1 - \frac{\partial V_1 / \partial r}{\partial V_2 / \partial r} V_2 \right) \implies \\ \implies \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1 &= \frac{\partial V_1 / \partial r}{\partial V_2 / \partial r} \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2 \right) \implies \\ \implies \frac{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1}{\frac{\partial V_1}{\partial r}} &= \frac{\frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2}{\frac{\partial V_2}{\partial r}} \end{aligned}$$

pero ambos lados la parte derecha es una función de  $T_1$  y la parte izquierda es una función de  $T_2$ . Por lo tanto, ambos lados deben ser independientes de la fecha de vencimiento

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV}{\frac{\partial V}{\partial r}} = a(r, t)$$

y usando de forma conveniente la siguiente definición (dado un  $u$  y un  $w$  no nulo siempre es posible):

$$a(r, t) = w(r, t)\lambda(r, t) - u(r, t)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV}{\frac{\partial V}{\partial r}} &= w\lambda - u \implies \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV &= (w\lambda - u) \frac{\partial V}{\partial r} \implies \\ \boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - w\lambda) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0} & \tag{9.1} \end{aligned}$$

a la que se le tiene que añadir la condición final:

$$\boxed{V(r, T; T) = 1}$$

o el valor  $P$  del bono al vencimiento  $T$ . A esto se le tiene que añadir dos condiciones frontera, que dependen la  $u$  y  $w$ , por lo que se discutirá más adelante.

Es sencillo comprobar que si se reciben cupones  $K(r, t)dt$  de forma continua, entonces la EDP es:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - w\lambda) \frac{\partial V}{\partial r} - rV + K = 0}$$

y si se reciben de forma discreta, la lugar a una condición de salto:

$$\boxed{V(r, t_c^-; T) = V(r, t_c^+; T) + K(r, t_c)}$$

De esta sección una propiedad importante que puede ser útil es que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V/\partial t + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV}{\frac{\partial V}{\partial r}} &= w\lambda - u \implies \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV &= (w\lambda - u)\frac{\partial V}{\partial r} \implies \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= (w\lambda - u)\frac{\partial V}{\partial r} + rV \end{aligned}$$

luego el lema de Ito se puede escribir como:

$$\begin{aligned} dV &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial r} dr \implies \\ \implies dV &= \left( (w\lambda - u)\frac{\partial V}{\partial r} + rV \right) dt + \frac{\partial V}{\partial r} dr \end{aligned} \quad (9.2)$$

### 9.1.2. Market price of risk $\lambda(r, t)$

Se tiene que

$$\begin{aligned} dV &= w\frac{\partial V}{\partial r} dX + \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + u\frac{\partial V}{\partial r} \right) dt. \\ &= w\frac{\partial V}{\partial r} dX + \left( w\lambda\frac{\partial V}{\partial r} + rV \right) dt \implies \\ \implies dV - rV dt &= w\frac{\partial V}{\partial r}(dX + \lambda dt) \end{aligned}$$

El lado derecho de esta expresión contiene dos términos: un término determinista en  $dt$  y un término aleatorio en  $dX$ . La presencia de  $dX$  muestra que esta no es una cartera libre de riesgo. El término determinista puede interpretarse como el exceso de rentabilidad sobre la tasa libre de riesgo por aceptar cierto nivel de riesgo. A cambio de asumir el riesgo adicional, la cartera se beneficia de un  $\lambda dt$  adicional por unidad de riesgo adicional,  $dX$ . Por lo tanto, la función  $\lambda$  se denomina **market price of risk (precio de mercado del riesgo)**, i.e. el valor que el mercado asigna a la unidad de riesgo asumido.

La ecuación (9.1) tiene una estructura muy similar a la ecuación de Kolmogorov hacia detrás descrita en la sección (3.2.1.1) (a excepción del término final de descuento), que describe la evolución temporal hacia atrás de probabilidades o precios esperados. Por lo tanto, se puede interpretar la ecuación de valoración de un bono como el valor actual esperado de todos los flujos de caja. Suponiendo que se recibe un ‘Payoff’ en tiempo  $T$ , entonces el valor del contrato a día de hoy sería:

$$\mathbb{E} \left[ e^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} \text{Payoff} \right]$$

Se puede ver cómo se ha actualizado con una integral de la tasa de interés ya que se supone un interés estocástico. Sin embargo, este valor esperado no se toma sobre la variable real, si no sobre una variable neutral al riesgo. Existe esta diferencia porque el término de deriva de la ecuación (9.1) no es el real spot rate  $u$ , si no la deriva de otro rate llamado **risk-neutral spot rate**; esta deriva es  $u - \lambda w$ . Cuando se modelan derivados de las tasas de interés es importante modelar y valorar usando el risk-neutral rate, que satisface:

$$dr = (u - \lambda w) dt + w dX.$$

### 9.1.3. Modelos y soluciones manejables

Se eligen los valores de  $u$  y  $w$  de manera que tengan ciertas características y se puedan obtener soluciones analíticas. Se asume:

$$\begin{aligned} u(r, t) - \lambda(r, t)w(r, t) &= \eta(t) - \gamma(t)r \\ w(r, t) &= \sqrt{\alpha(t)r + \beta(t)}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Se va a restringir los parámetros para que el camino aleatorio  $r$  tengan ciertas propiedades:

- **Interés positivo (o acotado por debajo):** Se busca que la raíz sea positiva. Si  $\alpha(t) > 0$  y  $\beta(t) \leq 0$ , la raíz  $r = -\beta(t)/\alpha(t)$  es un límite inferior real por debajo del cual la raíz cuadrada se vuelve imaginaria, así que el proceso no puede cruzar a valores menores. En el caso especial en el que  $\alpha(t) = 0$ , se tiene que  $\beta(t) \geq 0$  para que la raíz sea real. Con este modelo el interés puede ir a infinito, pero con probabilidad cero.
- **Reversión a la media:** fijándose en la deriva, se ve que el interés tiene un comportamiento de reversión a la media: cuando  $r$  es muy grande, el término  $-\gamma(t)r$  domina y la deriva es negativa; cuando  $r$  es pequeño, el término  $\eta(t)$  domina y la deriva es positiva; por lo tanto el punto de equilibrio está en  $\eta(t)/\gamma(t)$ , que es el valor al que tiende el interés a largo plazo.

En primer lugar, se debe imponer la condición final:

$$V(r, t; T) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

También se busca que el límite inferior  $r = -\beta/\alpha$  sea inalcanzable; el tipo de interés spot no se debe quedar estancado para siempre en el límite inferior y se quiere evitar imponer condiciones adicionales para determinar con qué rapidez se aleja de este valor. La EDP que modela el comportamiento del valor del bono en este caso es:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}(\alpha(t)r + \beta(t))\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (\eta(t) - \gamma(t)r)\frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0$$

que tiene un término de difusión (el que acompaña a la derivada segunda) y un término de deriva (que acompaña a la derivada primera de  $r$ ). Se busca que la frontera  $r = -\beta/\alpha$  sea no absorbente y no obligue a imponer condiciones extra, por lo que hace falta que el término de deriva sea mayor que el de difusión cerca del límite. Se sustituye por lo tanto  $r = -\beta/\alpha + \epsilon = r_0 + \epsilon$  en cada uno de dichos términos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \frac{1}{2}(\alpha(r_0 + \epsilon) + \beta)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{\alpha\epsilon}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \\ (u - \lambda w)\frac{\partial V}{\partial r} &= (\eta - \gamma(r_0 + \epsilon))\frac{\partial V}{\partial r} \approx (\eta - \gamma r_0)\frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned}$$

La condición clásica de ‘no-sticky boundary’ en la clasificación de Feller pide que cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , el cociente:

$$\frac{\text{difusión}}{\text{deriva}} \sim \frac{\frac{\alpha}{2}\epsilon V_{rr}}{(\eta - \gamma r_0)V_r} \propto \frac{\alpha/2}{\eta - \gamma r_0}\epsilon$$

(donde  $\propto$  significa proporcional) sea lo bastante pequeño. Por lo tanto, debe cumplirse:

$$\eta + \gamma\frac{\beta}{\alpha} \geq \frac{\alpha}{2} \implies \boxed{\eta(t) \geq -\gamma(t)\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} + \frac{\alpha(t)}{2}}$$

Con estas elecciones de  $u$  y  $w$ , las soluciones de la EDP (9.1) para bonos de cupón cero son simplemente:

$$Z(r, t; T) = e^{A(t; T) - rB(t; T)}.$$

Sustituyendo en la EDP (9.1) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + (u - w\lambda) \frac{\partial Z}{\partial r} - rZ = 0 \implies \\ \implies \left( \frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial B}{\partial t} \right) Z + \frac{1}{2}w^2 B^2 Z + (u - w\lambda)(-B)Z - rZ = 0 \implies \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$\implies \frac{\partial A(t; T)}{\partial t} - r \frac{\partial B(t; T)}{\partial t} + \frac{1}{2}w(r, t)^2 B(t; T)^2 - (u(r, t) - w(r, t)\lambda(r, t))B(t; T) - r = 0 \implies \quad (9.4)$$

$$\overset{\frac{\partial}{\partial r}}{\implies} - \frac{\partial B(t; T)}{\partial t} + \frac{1}{2}B(t; T)^2 \frac{\partial}{\partial r} (w(r, t)^2) - B(t; T) \frac{\partial}{\partial r} (u(r, t) - w(r, t)\lambda(r, t)) - 1 = 0 \implies \quad (9.5)$$

$$\overset{\frac{\partial}{\partial r}}{\implies} \frac{1}{2}B(t; T)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (w(r, t)^2) - B(t; T) \frac{\partial^2}{\partial r^2} (u(r, t) - w(r, t)\lambda(r, t)) = 0 \implies$$

$$\implies B(t; T)^2 \phi_2(r, t) + B(t; T) \phi_1(r, t) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \phi_2(r, t) = 0 \\ \phi_1(r, t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (w^2) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (u - w\lambda) = 0 \end{cases} \quad (9.6)$$

tal y como cumple (9.3). Introduciendo los valores de  $u$  y  $w$  de la forma (9.3) en (9.5) se obtiene que:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}B^2 \frac{\partial}{\partial r} (w^2) - B \frac{\partial}{\partial r} (u - w\lambda) - 1 = 0 \implies \\ \implies & - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}B^2 \frac{\partial}{\partial r} (\alpha(t)r + \beta(t)) - B \frac{\partial}{\partial r} (\eta(t) - \gamma(t)r) - 1 = 0 \implies \\ \implies & - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\alpha(t)B^2 + \gamma(t)B - 1 = 0 \implies \\ \implies & \boxed{\frac{\partial B(t; T)}{\partial t} = \frac{1}{2}\alpha(t)B(t; T)^2 + \gamma(t)B(t; T) - 1} \end{aligned}$$

que introduciéndolo en (9.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 B^2 - (u - w\lambda)B - r = 0 \implies \\ \implies & \frac{\partial A}{\partial t} - r \left( \frac{1}{2}\alpha(t)B^2 + \gamma(t)B - 1 \right) + \frac{1}{2}(\alpha(t)r + \beta(t))B^2 - (\eta(t) - \gamma(t)r)B - r = 0 \implies \\ \implies & \boxed{\frac{\partial A(t; T)}{\partial t} = \eta(t)B(t; T) - \frac{1}{2}\beta(t)B(t; T)^2} \end{aligned}$$

Por último, se debe imponer la condición final  $Z(r, T; t) = 1$ :

$$\boxed{A(T; T) = 0, \quad B(T; T) = 0}$$

### 9.1.3.1. Solución analítica con parámetros constantes

El modelo más sencillo para encontrar una solución analítica es cuando los parámetros son constantes. Se puede demostrar que la solución es:

$$B(t; T) = \frac{2(e^{\psi_1(T-t)} - 1)}{(\gamma + \psi_1)(e^{\psi_1(T-t)} - 1) + 2\psi_1}$$

$$\frac{\alpha}{2}A(t; T) = a\psi_2 \log(a - B) + (\psi_2 + \frac{1}{2}\beta)b \log\left(\frac{B+b}{b}\right) - \frac{1}{2}B^2 - a\psi_2 \log a$$

siendo

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sqrt{\gamma^2 + 2\alpha} \\ \psi_2 &= \frac{\eta - a\beta/2}{a + b} \\ a &= \frac{\pm\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2\alpha}}{\alpha} = \frac{\pm\gamma + \psi_1}{\alpha}\end{aligned}$$

Cuando los cuatro parámetros son constantes, tanto  $A$  como  $B$  dependen únicamente de la variable  $\tau = T - t$ , y no de  $t$  y  $T$  por separado. Esto no sería cierto si alguno de los parámetros fuera dependiente del tiempo.

El modelo permite predecir una amplia variedad de curvas de rendimiento (yield curves). En el límite cuando  $\tau \rightarrow \infty$ , se tiene que

$$B \rightarrow \frac{2}{\gamma + \psi_1}$$

y la curva de rendimiento  $Y$  tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$Y \rightarrow \frac{2}{(\gamma + \psi_1)^2} (\eta(\gamma + \psi_1) - \beta).$$

Por tanto, para parámetros constantes y fijos, el modelo conduce a un tipo de interés a largo plazo fijo, independiente del tipo spot.

La función de densidad de probabilidad,  $P(r, t)$ , para el spot rate bajo la medida neutral al riesgo satisface la ecuación:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (w^2 P) - \frac{\partial}{\partial r} ((u - \lambda w) P).$$

En el largo plazo, esta ecuación converge a una distribución estacionaria  $P_\infty(r)$ , independiente del valor inicial del tipo de interés. Esta distribución satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} (w^2 P_\infty) = \frac{d}{dr} ((u - \lambda w) P_\infty).$$

Para el modelo afín general con parámetros constantes, la solución es:

$$P_\infty(r) = \frac{\left(\frac{2\gamma}{\alpha}\right)^k}{\Gamma(k)} \left(r + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{k-1} e^{-\frac{2\gamma}{\alpha}(r + \frac{\beta}{\alpha})}$$

donde

$$k = \frac{2\eta}{\alpha} + \frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$$

y  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma. La frontera  $r = -\beta/\alpha$  es inalcanzable si  $k > 1$ . La media de la distribución estacionaria es:

$$\frac{\alpha k}{2\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}$$

### 9.1.4. Algunos modelos famosos

- **Modelo Vasicek:** Con  $\alpha = 0$  y  $\beta > 0$  y el resto de parámetros constantes:

$$dr = (\eta - \gamma r) dt + \beta^{1/2} dX$$

Su solución es:

$$Z(r, t; T) = e^{A(t; T) - rB(t; T)}$$

donde

$$\begin{aligned} B(t; T) &= \frac{1}{\gamma} \left( 1 - e^{-\gamma(T-t)} \right) \\ A(t; T) &= \frac{1}{\gamma^2} (B(t; T) - (T-t)) \left( \eta - \frac{1}{2}\beta \right) - \frac{\beta B(t; T)^2}{4\gamma} \end{aligned}$$

Tiene reversión a la media, pero puede llegar a tener valores negativos. La función de densidad de probabilidad en estado estacionario es un caso degenerado de la ecuación general, ya que  $\alpha = 0$ . Se obtiene que:

$$P_\infty(r) = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma}{\beta}(r - \frac{\eta}{\gamma})^2\right).$$

Por lo que a la larga, el spot rate está distribuido normalmente con media  $\eta/\gamma$ .

- **Modelo CIR (Cox-Ingersoll-Ross):** Con  $\beta = 0$  y el resto de parámetros constantes:

$$dr = (\eta - \gamma r) dt + \sqrt{\alpha r} dX.$$

Tiene reversión a la media y si  $\eta > \alpha/2$  el spot rate se mantiene siempre positivo. La función de densidad de probabilidad en estado estacionario es un caso de la ecuación general y tiene media  $\eta/\gamma$ .

- **Modelo Ho-Lee:** con  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\eta$  una función de  $t$ :

$$dr = \eta(t) dt + \beta^{1/2} dX.$$

Su solución es:

$$Z(r, t; T) = e^{A(t; T) - rB(t; T)}$$

donde

$$\begin{aligned} B(t; T) &= T - t \\ A(t; T) &= - \int_t^T \eta(s)(T-s) ds + \frac{1}{6}\beta(T-t)^3 \end{aligned}$$

Fue el primer modelo de *no arbitraje* para la estructura temporal de los tipos de interés. Esto significa que, eligiendo cuidadosamente la función  $\eta(t)$ , se puede conseguir que los precios teóricos de los bonos cupón cero que da el modelo coincidan exactamente con los precios de mercado observados. Esta técnica se denomina **yield curve fitting** o ajuste de la curva de rendimientos. La elección cuidadosa de  $\eta(t)$  es:

$$\eta(t) = -\frac{\partial^2}{\partial T^2} \log Z_M(t^*; T) + \beta(t - t^*)$$

donde  $t^*$  es el momento actual y  $Z_M(t^*; T)$  es el precio de mercado hoy de un bono cupón cero con vencimiento  $T$ . Esto supone que existen bonos de todos los vencimientos y que los precios son dos veces diferenciables respecto al vencimiento. Así, el modelo ajusta exactamente la curva de rendimientos observada en el mercado, y además permite obtener fórmulas explícitas para opciones sobre bonos.

- **Modelo Hull-White:** son como el CIR y el de Vasicek, pero con parámetros dependientes del tiempo.

Otros modelos un poco más complejos a parte y que permiten simplificaciones de ajuste de la yield curve (ver sección siguiente 9.2) mediante ciertos esquemas numéricos son:

- Black, Derman & Toy (BDT):

$$d(\log r) = \left( \theta(t) - \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \log r \right) dt + \sigma(t) dX$$

- Black & Karasinski:

$$d \log r = (\theta(t) - a(t) \log r) dt + \sigma(t) dX.$$

### 9.1.5. Forwards y futures con tipos estocásticos

Se va a volver a deducir las EDPs vistas en las secciones 4.1.5 y 4.1.6 pero con tasas de interés estocásticas. Se va a considerar ahora que:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX_1$$

$$dr = u(r, t) dt + w(r, t) dX_2$$

habiéndolo una correlación  $\rho$  entre ambos procesos  $X_1$  y  $X_2$ .

#### 9.1.5.1. Forwards Contracts

Se construye la cartera:

$$\Pi = V - \Delta S - \Delta_1 Z$$

siendo  $Z$  un bono de cupón cero. Usando el lema de Ito de caminos correlacionados (3.2) y la propiedad (9.2) de la variación del bono, se obtiene que las distintas variaciones de la cartera son:

$$\begin{aligned} dV &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_i b_j \rho_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} \right) dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial V}{\partial S_i} dS_i \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma w S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial r} dr \\ dZ &= \left( \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} \right) dt + \frac{\partial Z}{\partial r} dr \implies \\ &= \left( (w\lambda - u) \frac{\partial Z}{\partial r} + rZ \right) dt + \frac{\partial Z}{\partial r} dr \end{aligned}$$

por lo que la variación de la cartera es:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \Delta dS - \Delta_1 dZ \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma w S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \Delta_1 (w\lambda - u) \frac{\partial Z}{\partial r} - \Delta_1 r Z \right) dt \\ &\quad + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS + \left( \frac{\partial V}{\partial r} - \Delta_1 \frac{\partial Z}{\partial r} \right) dr \end{aligned}$$

Eligiendo para evitar arbitraje los valores:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial r} / \frac{\partial Z}{\partial r}$$

se obtiene que la variación de la cartera libre de riesgo es:

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma w S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - (w\lambda - u) \frac{\partial V}{\partial r} - \Delta_1 r Z \right) dt$$

Por otro lado, para evitar arbitraje se debe igualar a la variación del activo libre de riesgo:

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V - \Delta S - \Delta_1 Z) dt = \left( rV - r \frac{\partial V}{\partial S} S - r \Delta_1 Z \right) dt$$

es decir:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma wS \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - (w\lambda - u) \frac{\partial V}{\partial r} - \Delta_1 rZ = rV - r \frac{\partial V}{\partial S} S - r\Delta_1 Z \implies$$

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma wS \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + (u - w\lambda) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0}$$

La condición final es el valor del activo menos el precio fijado:

$$V(S, r, t) = S - \bar{S}$$

siendo  $\bar{S}$  el fixed delivery price (lo que se acuerda en el instante inicial que se pagará por el subyacente).

La solución con estas condiciones es:

$$V(S, r, t) = S - \bar{S}Z$$

siendo  $Z$  un bono de cupón cero con la misma fecha de vencimiento que el contrato forward, que seguirá la EDP (9.1) y su correspondiente condición final (igualar a 1).

Por lo tanto, para evitar arbitraje, se debe elegir un fixed delivery price  $\bar{S}$  tal que:

$$0 = V(S_0, r, 0) = S_0 - \bar{S}Z(S_0, r, 0) \implies$$

$$\implies \boxed{\bar{S} = \frac{S_0}{Z(S_0, r, 0)}}$$

### 9.1.5.2. Futures Contracts

Se recuerda que el contrato de futuros es un contrato forward con la diferencia de que no se paga al vencimiento, si no que se paga cada día la variación del precio del activo subyacente. Por lo tanto, el valor del contrato de futuros siempre es cero. Se construye la cartera:

$$\Pi = F(S, r, t) - \Delta S - \Delta_1 Z = -\Delta S - \Delta_1 Z$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior de los forwards, se obtiene que se debe cumplir la EDP:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \rho\sigma wS \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + (u - w\lambda) \frac{\partial F}{\partial r} - rF = 0 \implies$$

$$\implies \boxed{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \rho\sigma wS \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + (u - w\lambda) \frac{\partial F}{\partial r} = 0}$$

con la condición final:

$$F(S, r, T) = S$$

Se puede probar que la solución de esta EDP con estas condiciones puede tomar la forma  $S/P(r, t)$  (de manera similar) a los forwards y que  $p$  sigue una EDP parecida a  $Z$  a excepción de dos términos que dependen de la volatilidad del interés y de la correlación entre ambos procesos. De eso también se puede deducir que el precio de los futures es siempre mayor o igual que el equivalente forward. La igualdad se da cuando la volatilidad del interés es cero.

## 9.2. Ajuste de la Yield Curve

Los modelos de tasas de interés one-factor construyen una yield curve completa. El objetivo es elegir los parámetros de estos modelos para que esta curva construida se ajuste a la curva de tasas de interés observada en el mercado. Normalmente, se suelen usar parámetros dependientes del tiempo para que la curva ajuste perfectamente.

### 9.2.1. Ho & Lee

Este modelo sigue una tasa spot neutral al riesgo:

$$dr = \eta(t) dt + c dX. \quad (9.7)$$

Como se ha visto antes, la solución de para un bono de cupón cero es:

$$Z(r, t; T) = e^{A(t; T) - r(T-t)} \quad (9.8)$$

donde

$$A(t; T) = - \int_t^T \eta(s)(T-s) ds + \frac{1}{6}c^2(T-t)^3 \quad (9.9)$$

Por lo tanto, sabiendo  $\eta(t)$ , esta solución da un valor para todos los bonos de cupón cero con cualquier vencimiento  $T$ .

Se debe elegir  $\eta(t)$  para que el valor teórico de las tasas de descuento para todos los vencimientos sea igual a los valores de mercado. Se denota esta elección como  $\eta(t)^*$ . Se quiere ajustar la yield curve hoy  $t = t^*$  (mañana los parámetros serán distintos), cuando la tasa de interés spot son  $r^*$  y las tasas de descuento de mercado  $Z_M(t^*; T)$ . Por lo tanto se debe igualar:

$$\begin{aligned} Z_M(t^*; T) &= e^{A(t^*; T) - r^*(T-t^*)} \\ \ln(Z_M(t^*; T)) &= - \int_{t^*}^T \eta(s)(T-s) ds + \frac{1}{6}c^2(T-t^*)^3 - r^*(T-t^*) \implies \\ \implies \int_{t^*}^T \eta(s)(T-s) ds &= - \ln(Z_M(t^*; T)) - r^*(T-t^*) + \frac{1}{6}c^2(T-t^*)^3 \implies \\ \implies \frac{\partial}{\partial T} \int_{t^*}^T \eta(s)(T-s) ds &= \frac{\partial}{\partial T} \left( - \ln(Z_M(t^*; T)) - r^*(T-t^*) + \frac{1}{6}c^2(T-t^*)^3 \right) \implies \\ \stackrel{\text{Leibniz}}{\implies} \int_{t^*}^T \frac{\partial}{\partial T} (\eta(s)(T-s)) ds + \cancel{\eta(T)(T-T)} &= - \frac{\partial}{\partial T} (\ln(Z_M(t^*; T))) - r^* + \frac{1}{2}c^2(T-t^*)^2 \implies \\ \implies \frac{\partial}{\partial T} \int_{t^*}^T \eta(s) ds &= \frac{\partial}{\partial T} \left( - \frac{\partial}{\partial T} (\ln(Z_M(t^*; T))) - r^* + \frac{1}{2}c^2(T-t^*)^2 \right) \implies \\ \stackrel{\text{Leibniz}}{\implies} \int_{t^*}^T \frac{\partial}{\partial T} \overbrace{\eta(s) ds}^{\cancel{\eta(T)(T-T)}} + \eta(T) &= c^2(T-t^*) - \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln(Z_M(t^*; T)) \implies \\ \implies \boxed{\eta(t) = c^2(t-t^*) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln(Z_M(t^*; t))} \end{aligned}$$

Se tiene por lo tanto que:

$$\boxed{A(t; T) = \log \left( \frac{Z_M(t^*; T)}{Z_M(t^*; t)} \right) - (T-t) \frac{\partial}{\partial t} \log(Z_M(t^*; t)) - \frac{1}{2}c^2(t-t^*)(T-t)^2}$$

Se debe de tener en cuenta que  $c$  se asume conocido y constante. Se podría estimar de forma estadística o como se considere.

### 9.2.2. Vasicek extendido de Hull & White

Proponen una extensión del modelo de Vasicek como:

$$dr = (\eta(t) - \gamma r) dt + c dX.$$

Se asume que  $\gamma$  y  $\eta$  se han estimado de forma estadística. Entonces se escoge  $\eta = \eta^*(t)$  a tiempor  $t^*$  para que los precios teóricos de mercado coincidan.

Se tiene que la solución de un bono de cupón cero es:

$$Z(r, t; T) = e^{A(t; T) - rB(t; T)},$$

donde

$$\begin{aligned} A(t; T) &= - \int_t^T \eta^*(s) B(s; T) ds + \frac{c^2}{2\gamma^2} \left( T - t + \frac{2}{\gamma} e^{-\gamma(T-t)} - \frac{1}{2\gamma} e^{-2\gamma(T-t)} - \frac{3}{2\gamma} \right) \\ B(t; T) &= \frac{1}{\gamma} \left( 1 - e^{-\gamma(T-t)} \right) \end{aligned}$$

Para ajustar la yield curve a tiempo  $t^*$ , se debe elegir  $\eta^*$  satisfaciendo:

$$\begin{aligned} Z_M(t^*; T) &= e^{A(t^*; T) - r^* B(t^*; T)} \\ \ln(Z_M(t^*; T)) &= A(t^*; T) - r^* B(t^*; T) \\ &= - \int_{t^*}^T \eta^*(s) B(s; T) ds + \frac{c^2}{2\gamma^2} \left( T - t^* + \frac{2}{\gamma} e^{-\gamma(T-t^*)} - \frac{1}{2\gamma} e^{-2\gamma(T-t^*)} - \frac{3}{2\gamma} \right) \\ &\quad - r^* B(t^*; T) \\ \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial T}} \frac{\partial}{\partial T} \ln(Z_M(t^*; T)) &= - \left( \int_{t^*}^T \eta^*(s) \frac{\partial}{\partial T} B(s; T) ds + \cancel{\eta^*(T) B(T; T)} \right) \\ &\quad + \frac{c^2}{2\gamma^2} \left( 1 - 2e^{-\gamma(T-t^*)} + e^{-2\gamma(T-t^*)} \right) - r^* \frac{\partial}{\partial T} B(t^*; T) \\ &= - \int_{t^*}^T \eta^*(s) e^{-\gamma(T-s)} ds + \frac{c^2}{2\gamma^2} \left( 1 - 2e^{-\gamma(T-t^*)} + e^{-2\gamma(T-t^*)} \right) - r^* \frac{\partial}{\partial T} B(t^*; T) \\ \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial T}} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln(Z_M(t^*; T)) &= - \left( \int_{t^*}^T \eta^*(s) (-\gamma) e^{-\gamma(T-s)} ds + \eta^*(T) \right) \\ &\quad + \frac{c^2}{2\gamma^2} \left( 2\gamma e^{-\gamma(T-t^*)} + (-2\gamma) e^{-2\gamma(T-t^*)} \right) - r^* \frac{\partial^2}{\partial T^2} B(t^*; T) \\ &= \gamma \int_{t^*}^T \eta^*(s) e^{-\gamma(T-s)} ds - \eta^*(T) + \frac{c^2}{\gamma} \left( e^{-\gamma(T-t^*)} - e^{-2\gamma(T-t^*)} \right) - r^* \frac{\partial^2}{\partial T^2} B(t^*; T) \\ &= \gamma \left( - \frac{\partial}{\partial T} \ln(Z_M(t^*; T)) + \frac{c^2}{2\gamma^2} \left( 1 - 2e^{-\gamma(T-t^*)} + e^{-2\gamma(T-t^*)} \right) - r^* \frac{\partial}{\partial T} B(t^*; T) \right) \\ &\quad - \eta^*(T) + \frac{c^2}{\gamma} \left( e^{-\gamma(T-t^*)} - e^{-2\gamma(T-t^*)} \right) - r^* \frac{\partial^2}{\partial T^2} B(t^*; T) \\ &= - \gamma \frac{\partial}{\partial T} \ln(Z_M(t^*; T)) + \frac{c^2}{2\gamma} - \frac{c^2}{\gamma} e^{-\gamma(T-t^*)} + \frac{c^2}{2\gamma} e^{-2\gamma(T-t^*)} - \\ &\quad - \eta^*(T) + \frac{c^2}{\gamma} e^{-\gamma(T-t^*)} - \frac{c^2}{\gamma} e^{-2\gamma(T-t^*)} - r^* \left( \gamma \frac{\partial}{\partial T} B(t^*; T) + \frac{\partial^2}{\partial T^2} B(t^*; T) \right) \\ &= - \gamma \frac{\partial}{\partial T} \ln(Z_M(t^*; T)) + \frac{c^2}{2\gamma} + \cancel{e^{-\gamma(T-t^*)} \left( \frac{c^2}{\gamma} - \frac{c^2}{\gamma} \right)} \\ &\quad + \cancel{e^{-2\gamma(T-t^*)} \left( \frac{c^2}{2\gamma} - \frac{c^2}{\gamma} \right)} - \eta^*(T) - \underline{r^* \left( \gamma e^{-\gamma(T-t^*)} - \cancel{\gamma e^{-\gamma(T-t^*)}} \right)} \\ &= - \gamma \frac{\partial}{\partial T} \ln(Z_M(t^*; T)) + \frac{c^2}{2\gamma} \left( 1 + e^{-2\gamma(T-t^*)} \right) - \eta^*(T) \end{aligned}$$

por lo que

$$\boxed{\eta^*(t) = - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln(Z_M(t^*; t)) - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \ln(Z_M(t^*; t)) + \frac{c^2}{2\gamma} \left( 1 + e^{-2\gamma(t-t^*)} \right)}$$

y se puede demostrar que entonces:

$$\boxed{A(t; T) = \log \left( \frac{Z_M(t^*; T)}{Z_M(t^*; t)} \right) - B(t; T) \frac{\partial}{\partial t} \log(Z_M(t^*; t)) - \frac{c^2}{4\gamma^3} \left( e^{-\gamma(T-t^*)} - e^{-\gamma(t-t^*)} \right)^2 \left( e^{2\gamma(t-t^*)} - 1 \right)}$$

### 9.2.3. Pros y contras del ajuste para modelos de un solo factor para ajustar yield curve

#### A favor

- Los modelos de un solo factor (como Ho & Lee o Hull & White) se basan en:
  - Cobertura delta.
  - Ausencia de arbitraje.
- Para que la cobertura funcione, los precios de los instrumentos usados para cubrir deben coincidir con los precios de mercado.
- El *yield curve fitting* ajusta la función  $\eta^*(t)$  para que los precios de bonos en el modelo igualen los de mercado.
- Una vez ajustados, se puede cubrir estática o dinámicamente:
  - Pérdidas en el derivado se compensan con ganancias en los instrumentos de cobertura.

#### En contra

- Al recalibrar días o semanas después:
  - $\eta^*(t)$  cambia drásticamente.
  - La curva de mercado apenas varía.
- Esto indica que el modelo no captura correctamente:
  - La pendiente (*slope*) típica alta de la curva de rendimientos.
  - La curvatura (*curvature*) típica negativa.
- Análisis mediante series de Taylor:
  - Pendiente de la curva a corto plazo  $\leftrightarrow$  deriva bajo la medida neutral al riesgo.
  - Curvatura de la curva a corto plazo  $\leftrightarrow$  derivada temporal de esa deriva.
- En curvas reales:
  - Pendiente alta  $\Rightarrow \eta^*(t)$  grande en el corto plazo.
  - Curvatura negativa  $\Rightarrow$  pendiente muy negativa de  $\eta^*(t)$ .
  - $\eta^*(t)$  no es estable en el tiempo.

#### Conclusiones

- El *yield curve fitting* en modelos de un solo factor es **inconsistente y arriesgado** cuando la curva presenta gran pendiente y curvatura.
- Puede ser razonable solo si la curva es relativamente plana.
- Pocos modelos manejan bien estas características:
  - Algunos modelos Heath-Jarrow-Morton (HJM).
  - Un modelo no probabilístico.

### 9.3. Derivados de la tasa de interés

En esta sección se van a modelar distintos derivados de la tasa de interés.

#### 9.3.1. Bonos callable

Se trata de un bono simple con cupón, pero que el emisor puede rescatar en fechas específicas por un importe determinado. El importe rescatable puede variar en función del tiempo. Esta característica reduce el valor del bono; si las tasas son bajas, de modo que el valor del bono es alto, el emisor lo rescatará. Sigue la misma EDP que un bono normal (9.1):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - w\lambda) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0$$

con la misma condición final:

$$V(r, T; T) = 1$$

la condición de continuidad en caso de cupones discretos:

$$V(r, t_c^-) = V(r, t_c^+) + K_c$$

y la condición extra de la conversión:

$$V(r, t) \leq C(t)$$

donde  $C(t)$  es el valor de conversión del bono en el tiempo  $t$ .



# **Parte IV**

## **Apéndices**



## Apéndice A

# Cálculo básico

### A.1. Algunos resultados básicos de cálculo

**Teorema 1** (Regla de Leibniz). *Sea  $f(x, t)$  una función continua en  $x$  y  $t$ , y sean  $a(x)$  y  $b(x)$  funciones diferenciables. Entonces,*

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = f(x, b(x)) b'(x) - f(x, a(x)) a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$



## Apéndice B

# Apéndices de la Parte 1

### B.1. Cálculo de Itô

## Lema de Ito para función de dos procesos de Ito (I)

Si tenemos dos procesos de Ito  $Y^1$  e  $Y^2$  de modo que

$$Y_t^i - Y_s^i = \int_s^t \alpha_u^i du + \int_s^t \beta_u^i dX_u, \quad i = 1, 2.$$

y una función  $f = f(t, x^1, x^2)$  con las derivadas parciales segundas continuas, entonces

$$\begin{aligned} f(t, Y_t^1, Y_t^2) - f(s, Y_s^1, Y_s^2) &= \int_s^t f_t(u, Y_u^1, Y_u^2) du + \\ &\int_s^t \left( \frac{1}{2} (\beta_u^1)^2 f_{x^1 x^1}(u, Y_u^1, Y_u^2) + \frac{1}{2} (\beta_u^2)^2 f_{x^2 x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) + \beta_u^1 \beta_u^2 f_{x^1 x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) \right) du + \\ &\int_s^t f_{x^1}(u, Y_u^1, Y_u^2) dY_u^1 + \int_s^t f_{x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) dY_u^2, \end{aligned}$$

donde se sigue la notación de subíndices para las derivadas parciales respecto  $t$ ,  $x^1$  y  $x^2$ . La fórmula se generaliza de manera natural para  $f(t, Y_t^1, \dots, Y_t^p)$ , con  $p \geq 2$ .

C.Vázquez (UDC), M2i 2024-25

## Lema de Ito para función de dos procesos de Ito (II)

Veamos la versión diferencial del resultado anterior. Si tenemos dos procesos de Ito  $Y^1$  e  $Y^2$  de modo que

$$dY_t^i = \alpha_t^i dt + \beta_t^i dX_t, \quad i = 1, 2. \quad (*)$$

y  $F_t = f(t, Y_t^1, Y_t^2)$ , entonces

$$\begin{aligned} dF_t &= f_t(t, Y_t^1, Y_t^2) dt + \\ &\left( \frac{1}{2} (\beta_t^1)^2 f_{x^1 x^1}(t, Y_t^1, Y_t^2) + \frac{1}{2} (\beta_t^2)^2 f_{x^2 x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) + \beta_t^1 \beta_t^2 f_{x^1 x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) \right) dt + \\ &f_{x^1}(t, Y_t^1, Y_t^2) dY_t^1 + f_{x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) dY_t^2. \end{aligned}$$

Se pueden sustituir las expresiones de  $dY_t^1$  y  $dY_t^2$  en función de  $dX_t$  utilizando (\*) y claramente el proceso  $F = (F_t, t \geq 0)$  es un proceso de Ito.

C.Vázquez (UDC), M2i 2024-25

## Lema de Ito más general (I)

Sean los brownianos  $X^j$ ,  $j = 1, \dots, m$  incorrelados y los procesos de Ito generales:

$$Y_t^i - Y_s^i = \int_s^t \alpha_u^i du + \int_s^t \sum_{j=1}^m \beta_u^{ij} dX_u^j, \quad i = 1, \dots, n,$$

o en forma diferencial para el proceso de Ito  $n$ -dimensional  $Y$ :

$$dY_t = \alpha_t dt + \beta_t dX_t.$$

Ejemplo con  $n = 2$ : Consideramos  $Y = (Y^1, Y^2)$  definidos por:

$$dY_t^1 = \alpha_t^1 dt + \beta_t^{11} dX_t^1 + \beta_t^{12} dX_t^2, \quad dY_t^2 = \alpha_t^2 dt + \beta_t^{21} dX_t^1 + \beta_t^{22} dX_t^2,$$

Aplicando  $dt^2 = dt dX_t^1 = dt dX_t^2 = 0$ ,  $dX_t^i dX_t^j = \delta_{ij} dt$  se obtiene:

$$dY_t^i dY_t^i = ((\beta_t^{11})^2 + (\beta_t^{22})^2) dt, \quad dY_t^1 dY_t^2 = (\beta_t^{11} \beta_t^{22} + \beta_t^{12} \beta_t^{21}) dt$$

C. Vázquez (UDC), M2i 2024-25

## Lema de Ito más general (II)

Sea  $f = (f_1(t, x), \dots, f_p(t, x))$  con derivadas parciales segundas continuas, entonces el proceso de Ito  $p$ -dimensional  $F_t = (f_1(t, Y_t), \dots, f_p(t, Y_t))$  verifica para  $k = 1, \dots, p$ :

$$dF_t^k = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, Y_t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t, Y_t) dY_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, Y_t) dY_t^i dY_t^j$$

donde aplicando  $dX_t^i dX_t^j = \delta_{ij} dt$ ,  $dX_t^i dt = dt dX_t^i = 0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} dF_t^k &= \left( \frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} \left[ \sum_{l,q=1}^m \beta_t^{il} \beta_t^{jq} \delta_{lq} \right] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \alpha_t^i \right) (t, Y_t) dt \\ &\quad + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \left[ \sum_{l=1}^m \beta_t^{il} \right] \right) (t, Y_t) dX_t^l \end{aligned}$$

Ejercicio: Escribir el resultado cuando  $dX_t^i dX_t^j = \rho_t^{ij} dt$ ,  $j = 1, \dots, m$ , correspondiente al caso de brownianos correlados

C. Vázquez (UDC), M2i 2024-25

## B.2. Generalizaciones sencillas de Black-Scholes

## 8.9 FORMULAE FOR POWER OPTIONS

An option with a payoff that depends on the asset price at expiry raised to some power is called a **power option**. Suppose that it has a payoff

$$\text{Payoff}(S^\alpha)$$

we can find a simple formula for the value of the option if we have a simple formula for an option with payoff given by

$$\text{Payoff}(S). \quad (8.9)$$

This is because of the lognormality of the underlying asset.

Writing

$$\mathcal{S} = S^\alpha$$

the Black–Scholes equation becomes, in the new variable  $\mathcal{S}$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2\mathcal{S}^2\frac{\partial^2 V}{\partial \mathcal{S}^2} + \alpha\left(\frac{1}{2}\sigma^2(\alpha - 1) + r\right)\mathcal{S}\frac{\partial V}{\partial \mathcal{S}} - rV = 0.$$

Thus whatever the formula for the option value with simple payoff (8.9), the formula for the power version has  $S^\alpha$  instead of  $S$  and adjustment made to  $\sigma$ ,  $r$  and  $D$ .

## 8.10 THE log CONTRACT

The **log contract** has the payoff

$$\log(S/E).$$

The theoretical fair value for this contract is of the form

$$a(t) + b(t)\log(S/E).$$

Substituting this expression into the Black–Scholes equation results in

$$\dot{a} + \dot{b}\log(S/E) - \frac{1}{2}\sigma^2b + (r - D)b - ra - rb\log(S/E) = 0,$$

where  $\cdot$  denotes  $d/dt$ . Equating terms in  $\log(S/E)$  and those independent of  $S$  results in

$$b(t) = e^{-r(T-t)} \quad \text{and} \quad a(t) = (r - D - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)e^{-r(T-t)}.$$

The two arbitrary constants of integration have been chosen to match the solution with the payoff at expiry.

This value is rather special in that the dependence of the option price on the underlying asset,  $S$ , and the volatility,  $\sigma$ , uncouples. One term contains  $S$  and no  $\sigma$  and the other contains  $\sigma$  and no  $S$ . We briefly saw in Chapter 7 the concept of vega hedging to eliminate volatility risk. It is conceivable, even though not entirely justifiably, that the simplicity of the log contract value makes it a useful weapon for hedging other contracts against fluctuations in volatility. Having said that, it's not exactly a highly liquid contract.

The log contract payoff can be positive or negative depending on whether  $S > E$  or  $S < E$ . If we modify the payoff to be

$$\max(\log(S/E), 0)$$

then we have a genuine ‘option’ which may or may not be exercised. The value of this option is

$$e^{-r(T-t)} \sigma \sqrt{T-t} N'(d_2) + e^{-r(T-t)} (\log(S/E) + (r - D - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)) N(d_2).$$

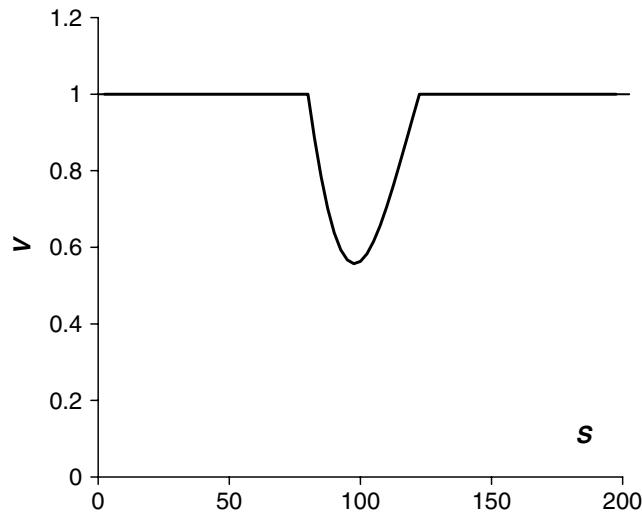
## 8.11 SUMMARY

In this chapter I made some very simple generalizations to the Black–Scholes world. I showed the effect of discretely paid dividends on the value of an option, deriving a jump condition by a no-arbitrage argument. Generally, this condition would be applied numerically and its implementation is discussed in Chapter 78. I also showed how time-dependent parameters can be incorporated into the pricing of simple vanilla options.

## FURTHER READING

- See Merton (1973) for the original derivation of the Black–Scholes formulae with time-dependent parameters.
- For a model with stochastic dividends, see Geske (1978).
- The practical implications of discrete dividend payments are discussed by Gemmill (1992).
- See Neuberger (1994) for further info on the log contract.

### B.3. Opciones Make Your Mind Up



**Figure 9.8** The value of a double one-touch option.

### 9.8.1 Bermudan Options

It is common for contracts that allow early exercise to permit the exercise only at certain specified times, and not at *all* times before expiry. For example, exercise may only be allowed on Thursdays between certain times. An option with such intermittent exercise opportunities is called a **Bermudan option**. All that this means mathematically is that the constraint (9.4) is only ‘switched on’ at these early exercise dates. The pricing of such a contract numerically is, as we shall see, no harder than the pricing of American options when exercise is permitted at all times.

This situation can be made more complicated by the dependence of the exercise dates on a second asset. For example, early exercise is permitted only when a second asset is above a certain level. This makes the contract a multi-asset contract, see Chapter 11.

### 9.8.2 Make Your Mind Up

In some contracts the decision to exercise must be made before exercise takes place. For example, we must give two weeks’ warning before we exercise, and we cannot change our mind. This contract is not hard to value theoretically. Suppose that we must give a warning of time  $\tau$ . If at time  $t$  we decide to exercise at time  $t + \tau$  then on exercise we receive a certain deterministic amount. To make the analysis easier to explain, assume that there is no time dependence in this payoff, so that on exercise we receive  $P(S)$ . The value of this payoff at a time  $\tau$  earlier is  $V^\tau(S, \tau)$  where  $V^\tau(S, t)$  is the solution of

$$\frac{\partial V^\tau}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^\tau}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V^\tau}{\partial S} - rV^\tau = 0$$

with

$$V^\tau(S, 0) = P(S).$$

This would have to be modified if the problem were time-inhomogeneous.

Obviously, we have

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0.$$

Because  $V^\tau(S, \tau)$  is the value of the contract at decision time if we have decided to exercise then our early-exercise constraint becomes

$$V(S, t) \geq V^\tau(S, \tau).$$

As an example, suppose that we get a payoff of  $S - E$ , this is  $P(S)$ . Note that there is no  $\max(\cdot)$  function in this; we have said we will exercise and exercise we must, even if the asset is out of the money. The function  $V^\tau(S, \tau)$  is clearly  $S - Ee^{-r\tau}$  so that our **make-your-mind-up option** satisfies the constraint

$$V(S, t) \geq S - Ee^{-r\tau}.$$

A further complication is to allow one change of mind. That is, we say we will exercise in two weeks' time, but when that date comes we change our mind, and do not exercise. But the next time we say we will exercise, we must. This is also not too difficult to price theoretically.

The trick is to introduce two functions for the option value,  $V_0(S, t)$  and  $V_1(S, t)$ . The former is the value before making the first decision to exercise, the latter is the value having made that decision but having changed your mind. We also need  $V_0^\tau(S, t', t)$  and  $V_1^\tau(S, t)$ . The latter is simply the earlier  $V^\tau$ . The former is slightly more complicated. In  $V_0^\tau(S, t', t)$  the  $t'$  represents the time at which the option will be exercised or exercise is declined. The  $t$  represents the time before that date.

The problem for  $V_1$  is exactly the same as for the basic make-your-mind-up option i.e.

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1 \leq 0$$

with

$$V_1(S, t) \geq V_1^\tau(S, \tau)$$

where

$$\frac{\partial V_0^\tau}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_0^\tau}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_0^\tau}{\partial S} - rV_0^\tau = 0$$

with

$$V_1^\tau(S, 0) = P(S).$$

The function  $V_0^\tau(S, t', t)$  satisfies

$$\frac{\partial V_0^\tau}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_0^\tau}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_0^\tau}{\partial S} - rV_0^\tau = 0$$

(with time derivatives with respect to  $t$  and *not*  $t'$ ) with

$$V_0^\tau(S, t', 0) = \max(P(S), V_1(S, t')).$$

Then we have

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_0}{\partial S} - rV_0 \leq 0$$

with the optimality constraint

$$V_0(S, t) \geq V_0^\tau(S, t + \tau, \tau).$$

Obviously, we can introduce more levels if we are permitted to change our minds a specified number of times.

In Part Two we will see many problems where we must introduce more than one function to value a single contract.

## 9.9 OTHER ISSUES

The pricing of American options and all the issues that this raises are important for many reasons. Some of these we describe here, but we will come back to the ideas again and again.

### 9.9.1 Non-linearity

The pricing of American options is a non-linear problem because of the free boundary. There are other non-linear problems in finance, some are non-linear because of the free boundary and some because the governing differential equation is itself non-linear. Non-linearity can be important for several reasons. Most obviously, non-linear problems are harder to solve than linear problems, usually requiring numerical solution.

Non-linear governing equations are found in Chapter 48 for models of pricing with transaction costs, Chapter 52 for uncertain parameter models, Chapter 58 for models of market crashes, and Chapter 59 for models of options used for speculative purposes.

### 9.9.2 Free-boundary Problems

Free-boundary problems, in other contexts, will be found scattered throughout the book. Again, the solution must almost always be found numerically. As an example of a free-boundary problem that is not quite an American option (but is similar), consider the **instalment option**. In this contract the owner must keep paying a premium, on prescribed dates, to keep the contract alive. If the premium is not paid then the contract lapses. Consider two cases, the first is when the premium is paid out continuously day by day, and the second, more realistic case, is when the premium is paid at discrete intervals. Part of the valuation is to decide whether or not it is worth paying the premium, or whether the contract should be allowed to lapse.

First, consider the case of continuous payment of a premium. If we pay out a constant rate  $L dt$  in a time step  $dt$  to keep the contract alive then we must solve

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV - L \leq 0.$$

The term  $L$  represents the continual input of cash. But we would only pay the premium if it is, in some sense, ‘worth it.’ As long as the contract value is positive, we should maintain the

payments. If the contract value ever goes negative, we should let the contract lapse. However, we can do better than this. If we impose the constraint

$$V(S, t) \geq 0,$$

with continuity of the delta, and let the contract lapse if ever  $V = 0$  then we give our contract the *highest value possible*. This is very much like the American option problem, but now we must optimally cease to pay the premium (instead of optimally exercising).

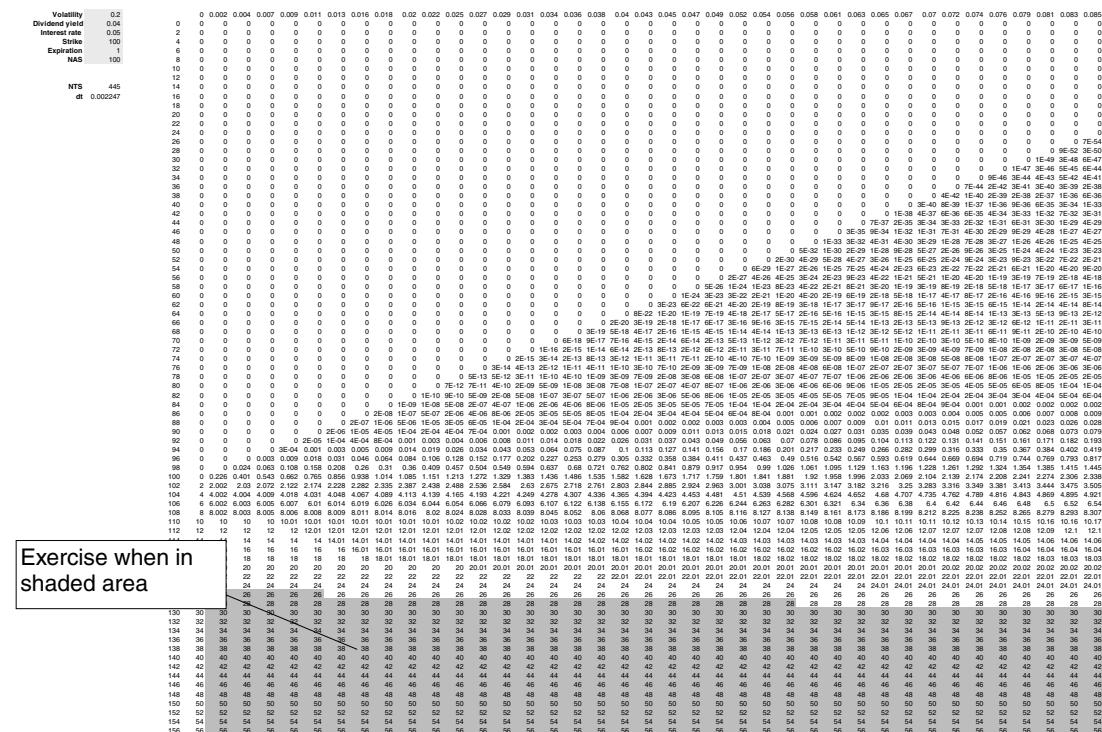
Now let us consider the more realistic discrete payment case. Suppose that payments of  $L$  (not  $L dt$ ) are made discretely at time  $t_i$ . The value of the contract must increase in value from before the premium is paid to just after it is paid. The reason for this is clear. Once we have paid the premium on date  $t_i$  we do not have to worry about handing over any more money until time  $t_{i+1}$ . The rise in value exactly balances the premium,  $L$ :

$$V(S, t_i^-) = V(S, t_i^+) - L,$$

where the superscripts + and – refer to times just after and just before the premium is paid. But we would only hand over  $L$  if the contract would be worth more than  $L$  at time  $t_i^+$ . Thus we arrive at the jump condition

$$V(S, t_i^-) = \max(V(S, t_i^+) - L, 0).$$

If  $V(S, t_i^+) \leq L$  then it is optimal to discontinue payment of the premiums.



**Figure 9.9** Spreadsheet showing the value of an American call option on a stock paying dividends. Shaded area is where you should exercise.

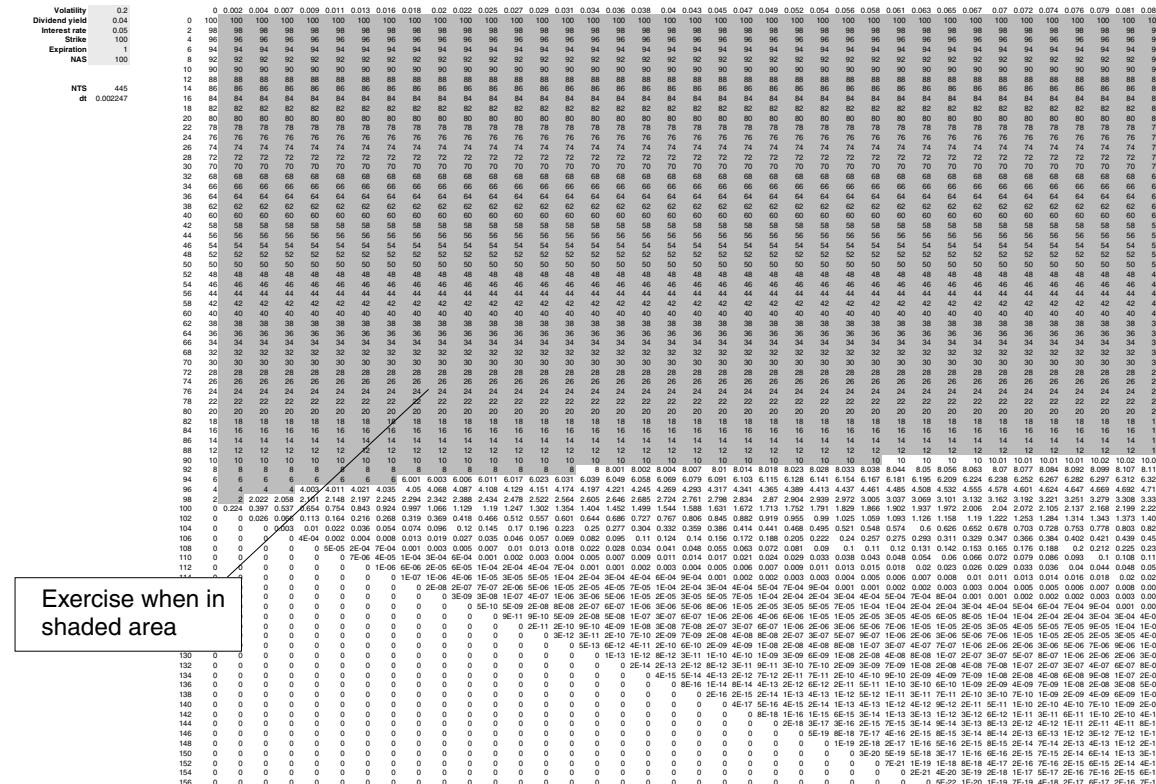
In practice, the premium  $L$  is chosen so that the value of the contract at initiation is exactly equal to  $L$ . This means that the start date is just like any other payment date.

### 9.9.3 Numerical Solution

Although free-boundary problems must usually be solved numerically, this is not difficult as we shall see in later chapters. We solve the relevant equation by either a finite-difference method or the binomial method.

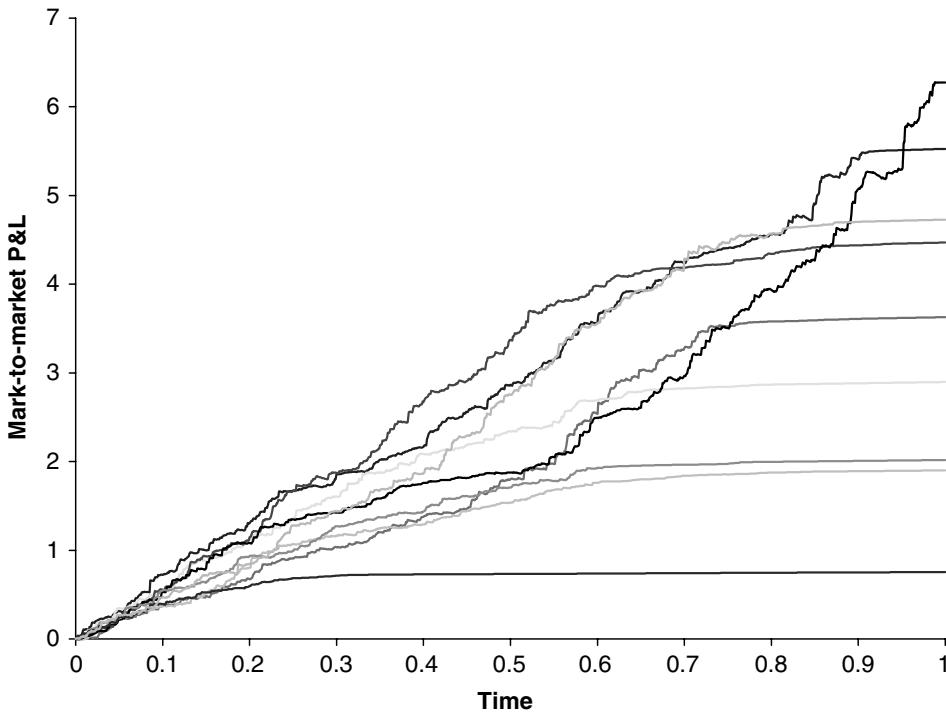
The other numerical method that I describe is the Monte Carlo simulation. If there is any early-exercise feature in a contract this makes solution by Monte Carlo more complicated. I discuss this issue in Chapter 80.

The next three figures, Figures 9.9, 9.10, and 9.11, show the output of an explicit finite-difference method for the value of American call and put and Bermudan put respectively. You can't read the numbers but you can see that Excel's conditional formatting has been used to show the regions where the option value and the payoff are the same. Here you should exercise the option. In these figures time is in the top row. The first long column on the left is the stock price. Time goes from right to left, so that the second long column is the payoff. The second row down represents option value when stock price is zero, so the further down the row the higher the stock price.



**Figure 9.10** Spreadsheet showing the value of an American put option. Shaded area is where you should exercise.

**B.4. Media y varianza de cobertura con volatilidad implícita**



**Figure 12.3** P&L for a delta-hedged option on a mark-to-market basis, hedged using implied volatility.

Peter Carr (2005) and Hennard (2001) show that if you hedge using a delta based on a volatility  $\sigma_h$  then the PV of the total profit is given by

$$V(S, t; \sigma_h) - V(S, t; \tilde{\sigma}) + \frac{1}{2} (\sigma^2 - \sigma_h^2) \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^h dt, \quad (12.2)$$

where the superscript on the gamma means that it uses the Black–Scholes formula with a volatility of  $\sigma_h$ .



### 12.5.1 The Expected Profit after Hedging using Implied Volatility

When you hedge using delta based on implied volatility the profit each ‘day’ is deterministic but the present value of total profit by expiration is path dependent, and given by

$$\frac{1}{2} (\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) \int_{t_0}^T e^{-r(s-t_0)} S^2 \Gamma^i ds.$$

Introduce

$$I = \frac{1}{2} (\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) \int_{t_0}^t e^{-r(s-t_0)} S^2 \Gamma^i ds.$$

Since therefore

$$dI = \frac{1}{2} (\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i dt$$

we can write down the following partial differential equation for the *real* expected value,  $P(S, I, t)$ , of  $I$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i \frac{\partial P}{\partial I} = 0,$$

with

$$P(S, I, T) = I.$$

Look for a solution of this equation of the form

$$P(S, I, t) = I + H(S, t)$$

so that

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial H}{\partial S} + \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i = 0.$$

The source term can be simplified to

$$\frac{E(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)e^{-r(T-t_0)}e^{-d_2^2/2}}{2\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi(T-t)}}.$$

Change variables to

$$x = \log(S/E) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau \quad \text{and} \quad \tau = T - t$$

and write

$$H = w(x, \tau).$$

The resulting partial differential equation is then a bit nicer. Details can be found in the appendix to this chapter

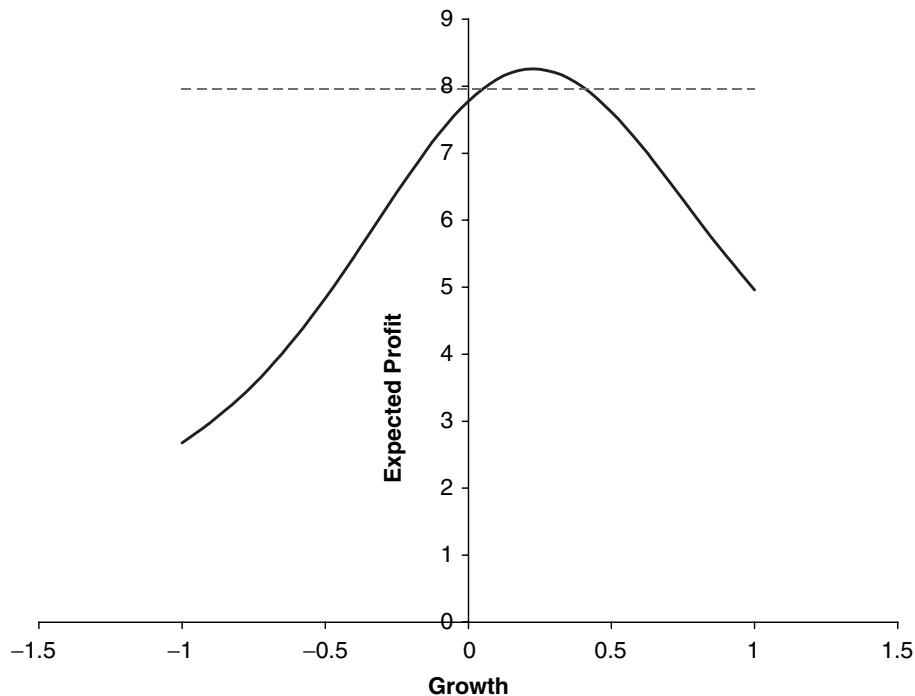
After some manipulations we end up with the expected profit initially ( $t = t_0, I = 0$ ) being the single integral

$$\begin{aligned} & \frac{Ee^{-r(T-t_0)}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)}{2\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^T \frac{1}{\sqrt{\sigma^2(s-t_0) + \tilde{\sigma}^2(T-s)}} \\ & \times \exp\left(-\frac{\left(\log(S/E) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t_0) + (r - D - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)(T-s)\right)^2}{2(\sigma^2(s-t_0) + \tilde{\sigma}^2(T-s))}\right) ds. \end{aligned}$$

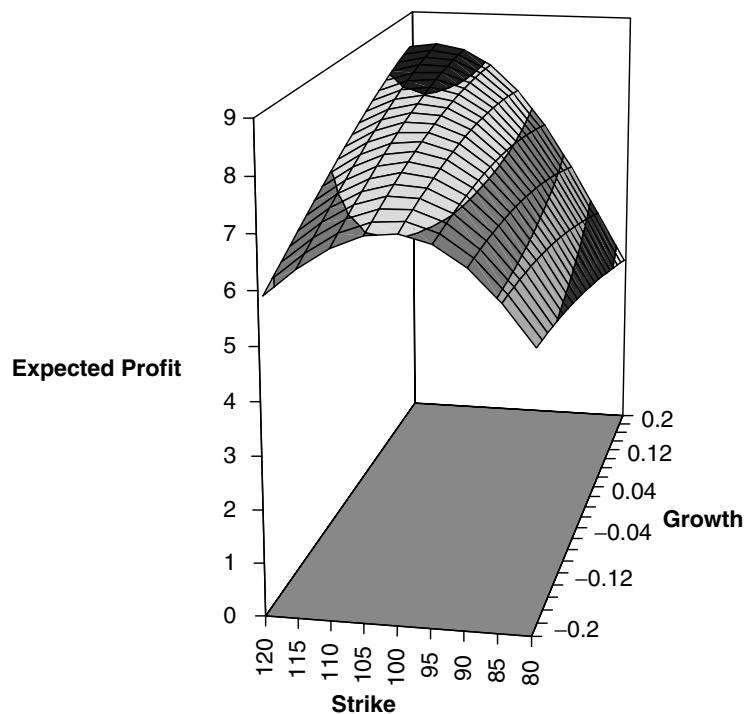
Results are shown in the following figures.

In Figure 12.4 is shown the expected profit versus the growth rate  $\mu$ . Parameters are  $S = 100$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $E = 110$ ,  $T = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.2$ . Observe that the expected profit has a maximum. This will be at the growth rate that ensures, roughly speaking, that the stock ends up close to at the money at expiration, where gamma is largest. In the figure is also shown the profit to be made when hedging with actual volatility. For most realistic parameters regimes the maximum expected profit hedging with implied is similar to the guaranteed profit hedging with actual.

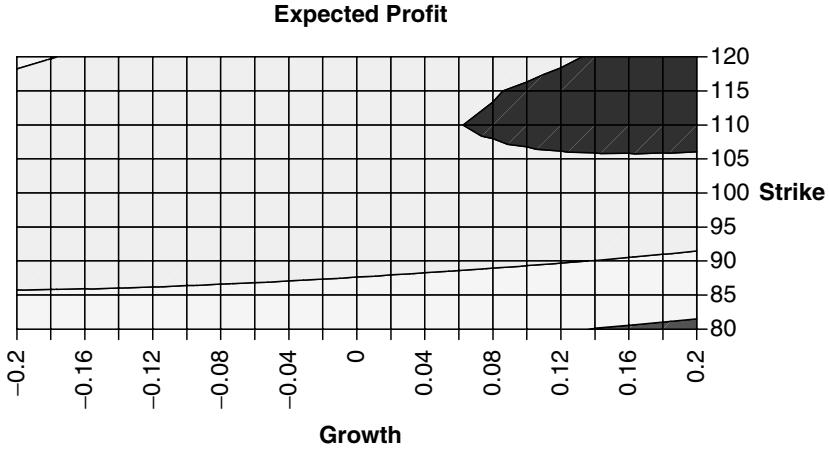
In Figure 12.5 is shown expected profit versus  $E$  and  $\mu$ . You can see how the higher the growth rate the larger the strike price at the maximum. The contour map is shown in Figure 12.6.



**Figure 12.4** Expected profit, hedging using implied volatility, versus growth rate  $\mu$ ;  $S = 100$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $E = 110$ ,  $T = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.2$ . The dashed line is the profit to be made when hedging with actual volatility.



**Figure 12.5** Expected profit, hedging using implied volatility, versus growth rate  $\mu$  and strike  $E$ ;  $S = 100$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $T = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.2$ .



**Figure 12.6** Contour map of expected profit, hedging using implied volatility, versus growth rate  $\mu$  and strike  $E$ ;  $S = 100$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $T = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.2$ .



The effect of skew is shown in Figure 12.7. Here I have used a linear negative skew, from 22.5% at a strike of 75, falling to 17.5% at the 125 strike. The at-the-money implied volatility is 20% which in this case is the actual volatility. This picture changes when you divide the expected profit by the price of the option (puts for lower strikes, call for higher), see Figure 12.8. There is no maximum, profitability increases with distance away from the money. Of course, this doesn't take into account the risk, the standard deviation associated with such trades.

### 12.5.2 The Variance of Profit after Hedging using Implied Volatility

Once we have calculated the expected profit from hedging using implied volatility we can calculate the variance in the final profit. Using the above notation, the variance will be the expected value of  $I^2$  less the square of the average of  $I$ . So we will need to calculate  $v(S, I, t)$  where

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i \frac{\partial v}{\partial I} = 0,$$

with

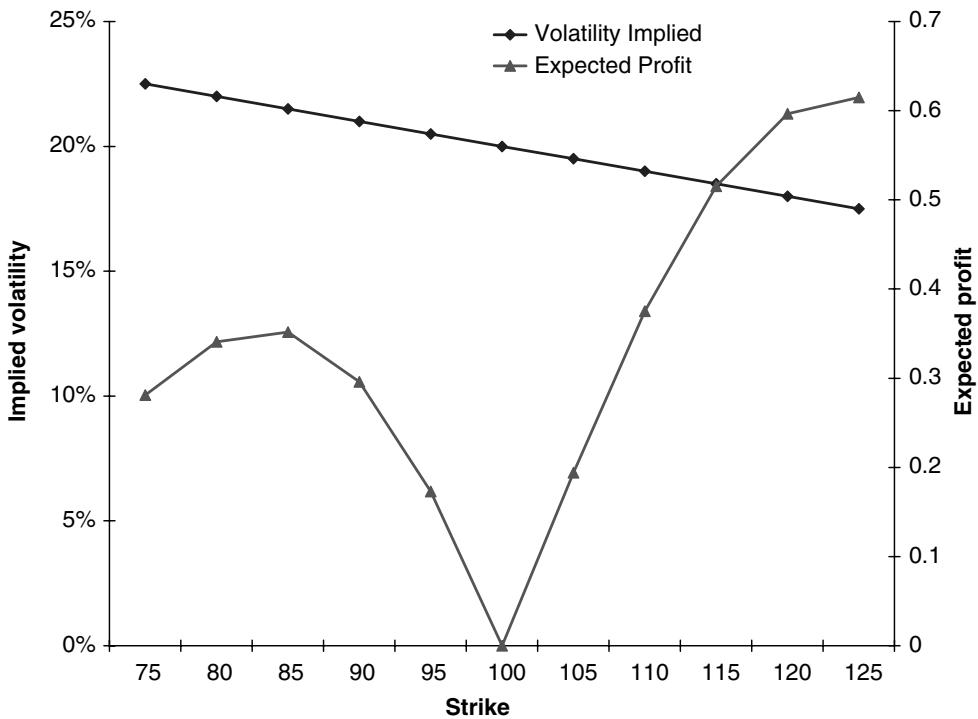
$$v(S, I, T) = I^2.$$

The details of finding this function  $v$  are rather messy, but a solution can be found of the form

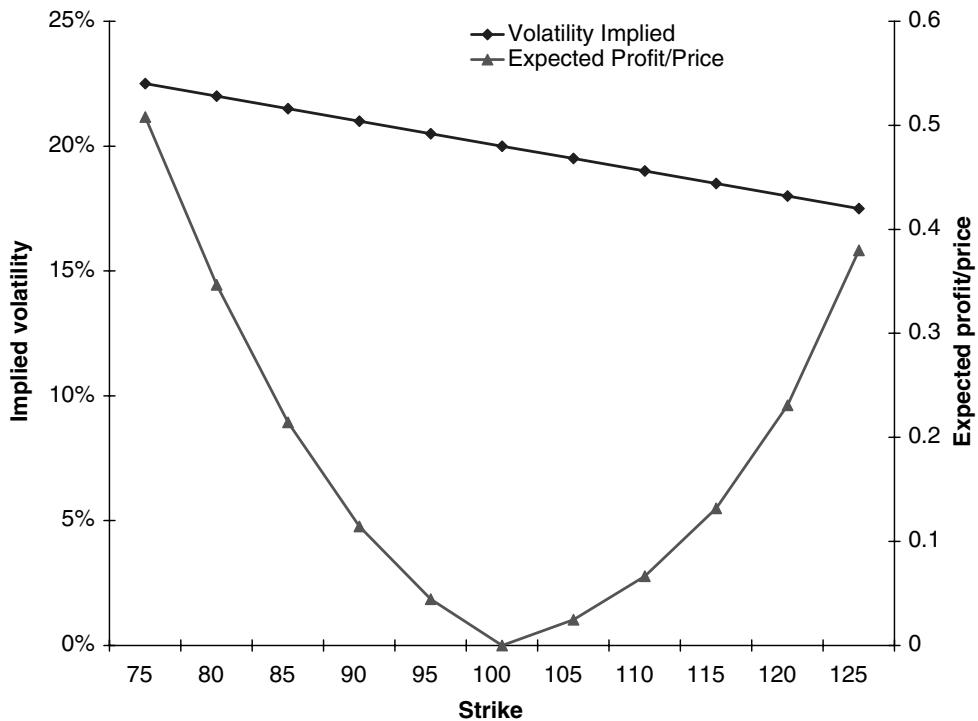
$$v(S, I, t) = I^2 + 2I H(S, t) + G(S, t).$$

The initial variance is  $G(S_0, t_0) - F(S_0, t_0)^2$ , where

$$G(S_0, t_0) = \frac{E^2(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)^2 e^{-2r(T-t_0)}}{4\pi\sigma\tilde{\sigma}} \int_{t_0}^T \int_s^T \frac{e^{p(u,s;S_0,t_0)}}{\sqrt{s-t_0}\sqrt{T-s}\sqrt{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}^2(T-u)}} \sqrt{\frac{1}{\sigma^2(s-t_0)} + \frac{1}{\tilde{\sigma}^2(T-s)} + \frac{1}{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}^2(T-u)}} du ds \quad (12.3)$$



**Figure 12.7** Effect of skew, expected profit, hedging using implied volatility, versus strike  $E$ ;  $S = 100$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $T = 1$ .



**Figure 12.8** Effect of skew, ratio of expected profit to price, hedging using implied volatility, versus strike  $E$ ;  $S = 100$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $T = 1$ .

where

$$p(u, s; S_0, t_0) = -\frac{1}{2} \frac{(x + \alpha(T-s))^2}{\tilde{\sigma}^2(T-s)} - \frac{1}{2} \frac{(x + \alpha(T-u))^2}{\sigma^2(u-s) + \tilde{\sigma}^2(T-u)} \\ + \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{x + \alpha(T-s)}{\tilde{\sigma}^2(T-s)} + \frac{x + \alpha(T-u)}{\sigma^2(u-s) + \tilde{\sigma}^2(T-u)} \right)^2}{\frac{1}{\sigma^2(s-t_0)} + \frac{1}{\tilde{\sigma}^2(T-s)} + \frac{1}{\sigma^2(u-s) + \tilde{\sigma}^2(T-u)}}$$

and

$$x = \ln(S_0/E) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t_0), \quad \text{and} \quad \alpha = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - r + D + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2.$$

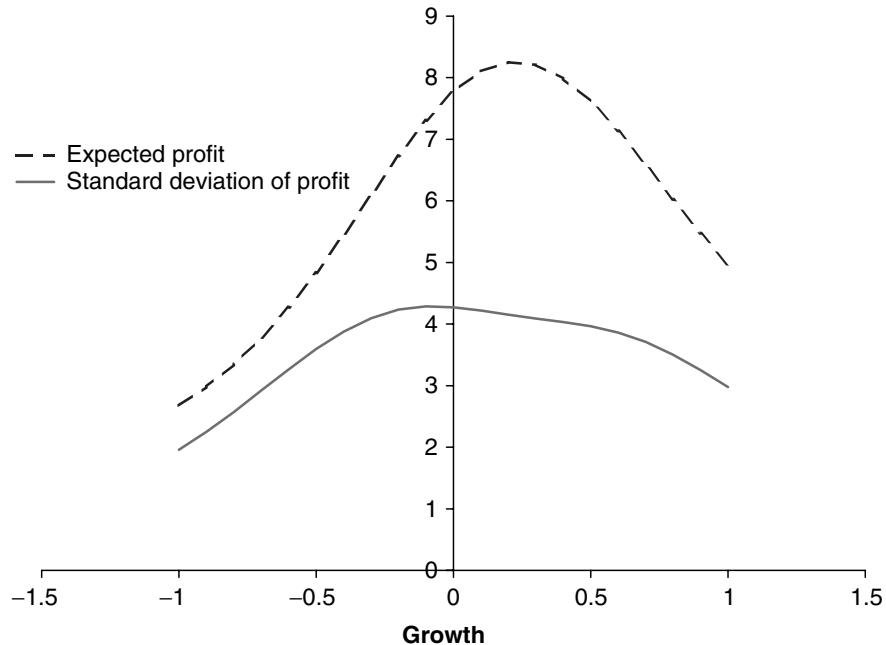
The derivation of this can be found in the appendix to this chapter.

In Figure 12.9 is shown the standard deviation of profit versus growth rate,  $S = 100$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $E = 110$ ,  $T = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.2$ . Figure 12.10 shows the standard deviation of profit versus strike,  $S = 100$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $T = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.2$ .

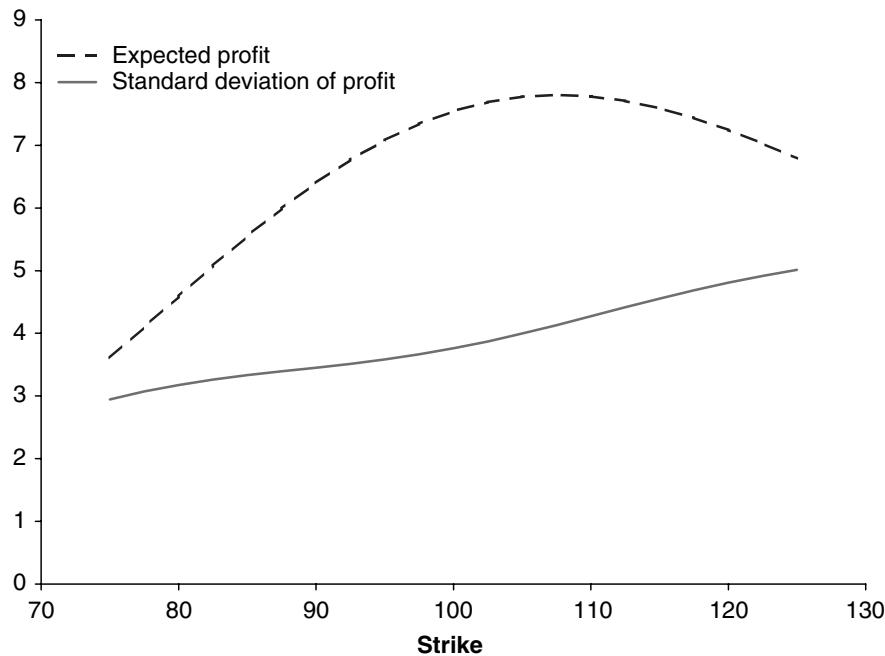
Note that in these plots the expectations and standard deviations have not been scaled with the cost of the options.

In Figure 12.11 is shown expected profit divided by cost versus standard deviation divided by cost, as both strike and expiration vary. In these plots  $S = 100$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.2$ . To some extent, although we emphasize only *some*, these diagrams can be interpreted in a classical mean-variance manner, see Chapter 18. The main criticism is, of course, that we are not working with Normal distributions, and, furthermore, there is no downside, no possibility of any losses.

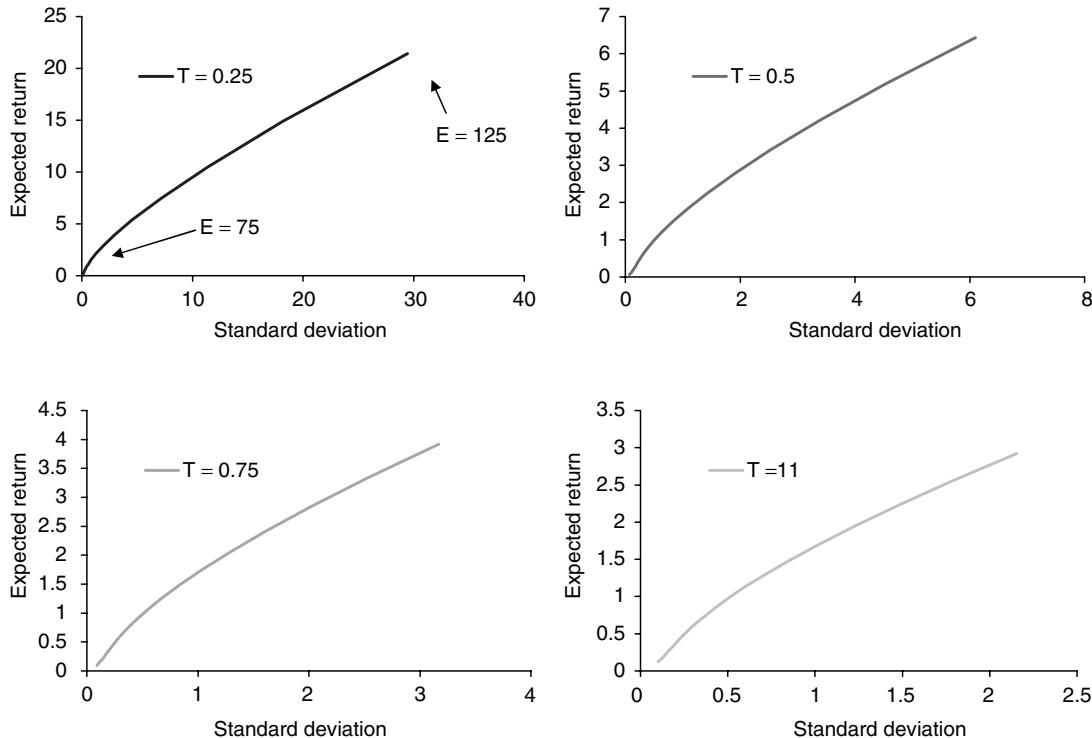
Figure 12.12 completes the earlier picture for the skew, since it now contains the standard deviation.



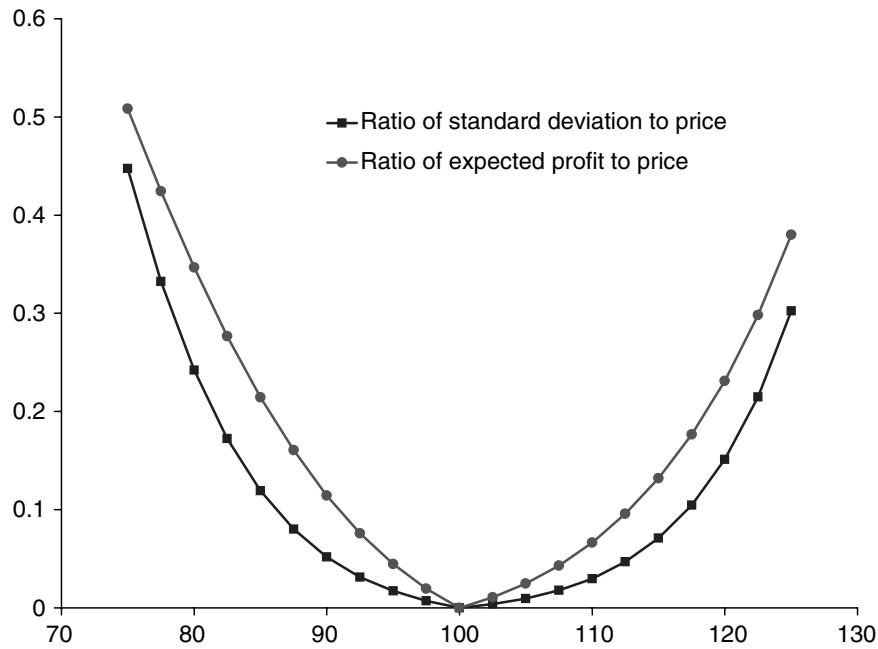
**Figure 12.9** Standard deviation of profit, hedging using implied volatility, versus growth rate  $\mu$ ;  $S = 100$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $E = 110$ ,  $T = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.2$ . (The expected profit is also shown.)



**Figure 12.10** Standard deviation of profit, hedging using implied volatility, versus strike  $E$ ;  $S = 100$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $T = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.2$ . (The expected profit is also shown.)



**Figure 12.11** Scaled expected profit versus scaled standard deviation;  $S = 100$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0.2$ . Four different expirations, varying strike.



**Figure 12.12** Effect of skew, ratio of expected profit to price, and ratio of standard deviation to price, versus strike  $E$ ;  $S = 100$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.05$ ,  $D = 0$ ,  $T = 1$ .

### 12.5.3 Hedging with Different Volatilities

We will briefly examine hedging using volatilities other than actual or implied, using the general expression for profit given by (12.2).

The expressions for the expected profit and standard deviations now must allow for the  $V(S, t; \sigma_h) - V(S, t; \tilde{\sigma})$ , since the integral of gamma term can be treated as before if one replaces  $\tilde{\sigma}$  with  $\sigma_h$  in this term. Results are presented in the next two figures.

In Figure 12.13 is shown the expected profit and standard deviation of profit when hedging with various volatilities. The thin, dotted lines, continuing on from the bold lines, represent hedging with volatilities outside the implied-actual range. The chart also shows standard deviation of profit, and minimum and maximum. Parameters are  $E = 90$ ,  $S = 100$ ,  $\mu = -0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.1$ ,  $D = 0$ ,  $T = 1$ , and  $\tilde{\sigma} = 0.2$ . Note that it is possible to lose money if you hedge at below implied, but hedging with a higher volatility you will not be able to lose until hedging with a volatility of approximately 70%. In this example, the expected profit decreases with increasing hedging volatility.

Figure 12.14 shows the same quantities but now for an option with a strike price of 110. The upper hedging volatility, beyond which it is possible to make a loss, is now slightly higher. The expected profit now increases with increasing hedging volatility.

In practice which volatility one uses is often determined by whether one is constrained to mark to market or mark to model. If one is able to mark to model then one is not necessarily concerned with the day-to-day fluctuations in the mark-to-market profit and loss and so it is natural to hedge using actual volatility. This is usually not far from optimal in the sense of possible expected total profit, and it has no standard deviation of final profit. However, it is common to have to report profit and loss based on market values. This constraint may be imposed by a risk management department, by prime brokers, or by investors who may monitor



## **Apéndice C**

## **Apéndices de la Parte 2**



# Apéndice D

## Apéndices extra

### D.1. Blackjack y apuestas

#### D.1.1. Reglas del blackjack

El objetivo es sumar 21 sin pasarse; los ases valen 1 o 11 (según quiera el jugador), las figuras valen 10 y el resto su valor nominal.

Antes de repartir se debe apostar algo. A continuación, se reparten dos cartas por persona (boca abajo) y el dealer se reparte dos cartas: una boca arriba y otra boca abajo. Un **blackjack** o **natural** es sacar un as y una figura con las dos primeras cartas y se gana automáticamente, a menos que el dealer también saque un natural, en cuyo caso se empata. Un natural ganador paga al jugador 3 a 2.

Una vez repartidas las cartas se reparte en sentido de las agujas del reloj, comenzando por el jugador a la izquierda del dealer. El jugador puede pedir carta (hit) o plantarse (stand). Si se pasa de 21, pierde automáticamente. El jugador también puede hacer otras acciones:

- **Double down:** consiste en duplicar la apuesta hecha antes de repartir las cartas y recibir una sola carta más.
- **Splitting pairs:** si las dos primeras cartas son del mismo valor, se puede dividir y jugar con dos manos, apostando el mismo valor en cada una. Los ases solo puede recibir una carta adicional. Tras dividir, el as más figura cuentan como 21, no como blackjack.
- Si la carta descubierta del dealer es un as, el jugador puede hacer **insurance** (seguro), apostando la mitad de la apuesta original. Si la carta oculta del dealer es un 10, el jugador gana 2 a 1.

En ocasiones, se permite **rendir** (surrender), lo que significa que el jugador puede abandonar la mano y perder solo la mitad de su apuesta.

El dealer no tiene decisiones que tomar: debe pedir carta hasta que tenga 16 y plantarse a partir de 17.

En un empate el dinero no cambia de sitio y se guarda para la siguiente partida.

Existen estrategias concretas para ganar en el blackjack, pero se resume en lo siguiente:

- Si vas sin estrategia pierdes el dinero rápidamente.
- Si copias al dealer, la casa tiene un 5% o 6% de ventaja.
- La mejor estrategia consiste en saber cuando hacer que acción, que te dará una ligera ventaja sobre la casa.



# Bibliografía

- [1] Paul Wilmott. *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. Wiley, 2nd edition, 2006.