Lema de Ito para función de dos procesos de Ito (I)

Si tenemos dos procesos de Ito Y^1 e Y^2 de modo que

$$Y_t^i - Y_s^i = \int_s^t \alpha_u^i \, du + \int_s^t \beta_u^i \, dX_u, \quad i = 1, 2.$$

y una función $f = f(t, x^1, x^2)$ con las derivadas parciales segundas continuas, entonces

$$f(t, Y_t^1, Y_t^2) - f(s, Y_s^1, Y_s^2) = \int_s^t f_t(u, Y_u^1, Y_u^2) \, du +$$

$$\int_s^t \left(\frac{1}{2} (\beta_u^1)^2 f_{x^1 x^1}(u, Y_u^1, Y_u^2) + \frac{1}{2} (\beta_u^2)^2 f_{x^2 x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) + \beta_u^1 \beta_u^2 f_{x^1 x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) \right) du +$$

$$\int_s^t f_{x^1}(u, Y_u^1, Y_u^2) \, dY_u^1 + \int_s^t f_{x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) \, dY_u^2 \, ,$$

donde se sigue la notación de subíndices para las derivadas parciales respecto t, x^1 y x^2. La fórmula se generaliza de manera natural para $f(t, Y_t^1, \ldots, Y_t^p)$, con $p \geq 2$.

Lema de Ito para función de dos procesos de Ito (II)

Veamos la versión diferencial del resultado anterior. Si tenemos dos procesos de Ito Y^1 e Y^2 de modo que

$$dY_t^i = \alpha_t^i \, dt + \beta_t^i \, dX_t, \quad i = 1, 2. \qquad (*)$$

y $F_t = f(t, Y_t^1, Y_t^2)$, entonces

$$\begin{aligned} dF_t \; = \; & f_t(t, Y_t^1, Y_t^2) \, dt + \\ & \left(\frac{1}{2} (\beta_t^1)^2 f_{x^1 x^1}(t, Y_t^1, Y_t^2) + \frac{1}{2} (\beta_t^2)^2 f_{x^2 x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) + \beta_t^1 \beta_t^2 f_{x^1 x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) \right) dt + \\ & f_{x^1}(t, Y_t^1, Y_t^2) \, dY_t^1 + f_{x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) \, dY_t^2 \, . \end{aligned}$$

Se pueden sustituir las expresiones de dY_t^1 y dY_t^2 en función de dX_t utilizando $(*)$ y claramente el proceso $F = (F_t, \, t \geq 0)$ es un proceso de Ito.

Lema de Ito más general (I)

Sean los brownianos X^j, $j = 1, \ldots, m$ incorrelados y los procesos de Ito generales:

$$Y_t^i - Y_s^i = \int_s^t \alpha_u^i \, du + \int_s^t \sum_{j=1}^m \beta_u^{ij} \, dX_u^j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

o en forma diferencial para el proceso de Ito n-dimensional Y:

$$dY_t \;=\; \alpha_t \, dt \;+\; \beta_t \, dX_t.$$

Ejemplo con $n = 2$: Consideramos $Y = (Y^1, Y^2)$ definidos por:

$$dY_t^1 = \alpha_t^1 \, dt + \beta_t^{11} dX_t^1 + \beta_t^{12} dX_t^2, \; dY_t^2 = \alpha_t^2 \, dt + \beta_t^{21} dX_t^1 + \beta_t^{22} dX_t^2,$$

Aplicando $dt^2 = dt dX_t^1 = dt dX_t^2 = 0, dX_t^i dX_t^j = \delta_{ij} dt$ se obtiene:

$$dY_t^i dY_t^i = ((\beta_t^{11})^2 + (\beta_t^{22})^2) dt, \quad dY_t^1 dY_t^2 = (\beta_t^{11} \beta_t^{22} + \beta_t^{12} \beta_t^{21}) \, dt$$

Lema de Ito más general (II)

Sea $f = (f_1(t,x), \ldots, f_p(t,x))$ con derivadas parciales segundas continuas, entonces el proceso de Ito p-dimensional $F_t = (f_1(t,Y_t), \ldots, f_p(t,Y_t))$ verifica para $k = 1, \ldots, p$:

$$dF_t^k = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t,Y_t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t,Y_t)\, dY_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^i \partial x^j}(t,Y_t)\, dY_t^i dY_t^j$$

donde aplicando $dX_t^i dX_t^j = \delta_{ij} dt,\ dX_t^i dt = dt dX_t^i = 0$, se obtiene:

$$dF_t^k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^i \partial x^j} \left[\sum_{l,q=1}^{m} \beta_t^{il} \beta_t^{jq} \delta_{lq} \right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \alpha_t^i \right) (t,Y_t) dt$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \left[\sum_{l=1}^{m} \beta_t^{il} \right] \right) (t,Y_t)\, dX_t^l$$

Ejercicio: Escribir el resultado cuando $dX_t^i dX_t^j = \rho_t^{ij} dt$, $j = 1, \ldots, m$, correspondiente al caso de brownianos correlados