

FINANZAS CUANTITATIVAS

APUNTES-ESQUEMA

Autor:
Asier Merino Herrán

Índice general

I Fundamentos básicos de derivados, riesgo y rentabilidad	3
1. Introducción	5
1.1. Conceptos financieros básicos	5
1.1.1. Terminología básica	5
1.1.2. Contratos forward y futures	6
1.1.3. Contratos future	6
1.1.3.1. Commodity futures	7
1.1.3.2. FX futures	7
1.1.3.3. Index futures	7
1.2. Opciones	8
1.2.1. Terminología	8
1.2.2. Tipos de opciones	9
1.2.3. Call-Put Parity	9
1.2.4. Opciones binarias/ digitales	10
1.2.5. Portfolio of options/Option strategy	10
1.2.6. Opciones a largo plazo	13
1.2.7. Otros derivados	14
1.3. Productos de renta fija	15
1.3.1. Contratos simples de renta fija	15
1.3.1.1. Bonos de cupón cero	15
1.3.1.2. Bonos con cupón (coupon-bearing bond)	15
1.3.1.3. Money Market Account	15
1.3.1.4. Floating Rate Bonds	15
1.3.1.5. Forward Rate Agreements (FRA)	15
1.3.1.6. Repos	15
1.3.1.7. Bonos separables (STRIPS)	15
1.3.1.8. Amortización	15
1.3.1.9. Cláusula de rescate anticipado (Call Provision)	15
1.3.2. Mercado internacional de bonos	16
1.3.3. Conteo de días	16
1.4. Aleatoriedad y procesos estocásticos	17
1.4.1. Desigualdad de Jensen	17
1.4.2. Propiedad de Markov	17
1.4.3. Propiedad de martingala	17
1.4.4. Lema de Itô	17
1.4.5. Algunos ejemplos de caminos aleatorios	17
1.4.6. Función de densidad de transición	18
1.4.6.1. Ecuación de Fokker-Planck o de Kolmogorov hacia delante	19
1.4.6.2. Ecuación de Kolmogorov hacia detrás	19
1.4.6.3. Distribución en estado estacionario (steady-state distribution)	19
1.4.7. tiempos de primer escape (First-exit times)	20
1.4.7.1. Funciones de distribución acumulada para first-exit times	20
1.4.7.2. Tiempos de primer escape esperados (Expected first-exit times)	20

ÍNDICE GENERAL

2. Modelación básica de derivados	23
2.1. Modelos Black-Scholes	23
2.1.1. Modelo opciones básicas	23
2.1.2. Opciones de activos con dividendos continuos	23
2.1.3. Currency options	24
2.1.4. Commodity options	24
2.1.5. Forwards contracts	24
2.1.6. Future contracts	24
2.1.7. Opciones sobre futuros	25
2.1.8. Condiciones de frontera y finales	25
2.1.9. Algunas propiedades de las opciones europeas	25
2.2. Comportamiento de las EDPs	29
2.2.1. Significado de los términos de una EDP	29
2.3. Soluciones y griegas	30
2.3.1. Griegas	30
2.3.2. Tablas de soluciones	30
2.3.3. Representación gráfica de soluciones	31
2.3.3.1. Call option	32
2.3.3.2. Put option	33
2.3.3.3. Binary Call option	34
2.3.3.4. Binary Put option	35
2.3.4. Volatilidad implícita	36
2.3.5. Tipos de coberturas	36
2.4. Generalizaciones sencillas del modelo	37
2.4.1. Dividendos discretos	37
2.4.2. Préstamo de acciones	37
2.4.3. Parámetros dependientes del tiempo	37
2.4.4. Power options y log contracts	37
2.5. Modelización la volatilidad	38
2.5.1. Volatilidad por media estadística	38
2.5.1.1. Volatilidad constante	38
2.5.1.2. Volatilidad con regresión a la media	38
2.5.1.3. Volatilidad con media móvil exponencialmente ponderada (EWMA)	38
2.5.1.4. Modelo GARCH	38
2.5.1.5. Volatilidad futura esperada	39
2.5.1.6. Estimación de volatilidad basada en rangos de tiempo	40
2.5.2. Estimar parámetros: maximum likelihood estimation (MLE)	40
2.6. Cobertura: volatilidad implícita vs real	42
2.6.1. Comportamiento de la volatilidad implícita	44
2.7. Opciones americanas	45
2.7.1. Dividendos discretos	45
2.7.2. Opciones one-touch	45
2.7.3. Otros tipos de opciones americanas	46
A. Apéndices	47
A.1. Cálculo de Itô	47
A.2. Generalizaciones sencillas de Black-Scholes	50
A.3. Opciones Make Your Mind Up	53
A.4. Media y varianza de cobertura con volatilidad implícita	59

Parte I

Fundamentos básicos de derivados, riesgo y rentabilidad

Capítulo 1

Introducción

1.1. Conceptos financieros básicos

En esta sección se explican ciertos conceptos financieros básicos en inglés.

1.1.1. Terminología básica

- **Equity, stock, share:** acción de una empresa.
- **Shareholders:** accionistas.
- **Dividends:** dividendos. Pagas generalmente cada 6 meses. **Cum** cuando se va a pagar el siguiente dividendo o **Ex** cuando no. Suele haber bajadas del precio de acción cuando se paga dividendo. Si en cierto momento t_d se paga un dividendo $q \cdot S$, justo después de pagar el dividendo la acción en ausencia de arbitraje vale

$$S(1 - q)$$

- **Stock split:** De vez en cuando empresas pueden hacer división de acciones, i.e, cada acción pasa a ser N acciones y el precio se divide entre N .
- **Commodities:** producto en bruto como oro, petróleo, ... Se suelen usar en mercados a futuro.
- **Foreign exchange, Forex, FX:** Cambio de divisas. Debe haber cambio consistente entre divisas para evitar arbitraje.
- **Índice:** Medida de cómo va un mercado/economía. Se calcula como la suma de un **basket** o conjunto selecto de acciones.
- **Interest:**

- **Simple interest:** se aplica interés r al valor inicial.

$$(1 + r)P$$

- **Compound interest:** se aplica interés r al valor inicial y al interés ganado:
 - **Discretely compounded interest:**

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} P$$

- **Continuously compounded interest:**

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} P = e^{nr} P$$

- **Fixed:** interés fijo.
- **Floating:** interés variable.
- **Present value:** actualización de un valor futuro.
- **Coupon-bearing bonds:** bonos con cupón cada X tiempo que finalmente paga un **principal**.

- **Interest rate swaps:** dos partes se intercambian los intereses, por ejemplo, uno paga un r fijo y el otro el del Euribor 6M, o Euribor 3M vs Euribor 6M. Hay un capítulo entero a continuación.
- **Index-linked bond:** bonos asociados a un índice para evitar la inflación.
- **Retail Price Index (RPI):** índice que mide la inflación en el Reino Unido.
- **Consumer Price Index (CPI):** índice que mide la inflación en EE.UU.
- **Short position:** vender un activo (esperando que baje de precio).
- **Long position:** comprar un activo (esperando que suba de precio).
- **Derivatives:** instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otro activo.
- **Close position:** terminar una inversión o apuesta que se había abierto anteriormente, p.e. vender/comprar algo, dejar que algo expire, ejercer un contrato, ...
- **Fundamental analysis:** determinar el valor intrínseco o correcto de una empresa estudiando sus balances contables, estados financieros, equipo de gestión, patentes, competencias, proyecciones de beneficios, flujos de caja, ... Es muy complejo y hay veces en las que el mercado se comporta de manera irracional.
- **Technical analysis:** no importa lo que hace la empresa, se analiza cómo se comporta la acción usando gráficos de precios, tendencias, patrones técnicos, ... Se considera una pseudo-ciencia.
- **Quantitative analysis:** enfoque matemático y estadístico de los mercados financieros. Se usa para valorar derivados, gestión de riesgos, teoría de carteras, ...
- **Return:** porcentaje de crecimiento.

1.1.2. Contratos forward y futures

- **Forward contract:** una parte se compromete (y se **obliga**) a comprarle un activo a otra parte en la **delivery date** o **maturity** del contrato por un **delivery price**. El **forward price** es el precio actualizado del subyacente (teniendo en cuenta interés, cupones, etc para que el contrato tenga valor inicial del contrato sea 0). El forward price cambia en cada momento, pero el delivery price se fija al firmar el contrato.
- **Future contract:** como el forward, pero más público, estandarizado, con un ajuste diario y menor flexibilidad. Por ejemplo, un trader especulando con el SP500.
- **Spot price:** el valor de activo subyacente en tiempo t , i.e., S_t .
- **Going short:** vender un activo que no tienes, con la promesa de recomprarlo más adelante para devolverlo.

Para que uno de estos contratos no tenga arbitraje se debe cumplir que

$$S(t)e^{r(T-t)} - F = 0 \Rightarrow F = S(t)e^{r(T-t)}$$

1.1.3. Contratos future

Siempre hay un **delivery and Settlement** en el que se debe entregar el subyacente, pero muchas veces el contrato se cierra antes o se liquida en efectivo la diferencia entre lo pactado y el valor actual. Al entrar en futuros, debe haber un depósito de dinero (**Margin**) como garantía de que vas a pagar. Según va cambiando día a día el precio del contrato, se va añadiendo o retirando dinero de tu **margin account**. Como se da esta compensación diaria (cada dia me pagan/pago lo que haya ganado/perdido segun lo que firmé), el valor del contrato de resetea a 0 todos los días.

- **Initial Margin:** fianza inicial al abrir posición.
- **Maintenance Margin:** mínimo que debe haber en la cuenta.

1.1.3.1. Commodity futures

Futuros sobre materias primas, entra en juego costo de almacenamiento y rendimiento de conveniencia.

$$F = S(t)e^{(r+s-c)(T-t)}$$

donde s es el **storage cost** y c es el **convenience yield**, que es el beneficio de tener el bien físicamente.

- **Backwardation:** cuando el storage cost domina sobre el convenience yield

$$F = S(t)e^{(r+s-c)(T-t)} < S(t)e^{r(T-t)}$$

- **Contango:** cuando el convenience yield domina sobre el storage cost. SObre todo cuando el bien es escaso

$$F = S(t)e^{(r+s-c)(T-t)} > S(t)e^{r(T-t)}$$

1.1.3.2. FX futures

Contrato para comprar o vender divisas. No hay costes de almacenamiento, pero la divisa extranjera genera intereses si se invierte en banco extranjero.

$$F = S(t)e^{(r-r_f)(T-t)}$$

donde r es interés doméstico y r_f es interés extranjero.

1.1.3.3. Index futures

Futuros sobre índices de acciones. Similar a los FX, los dividendos bajan el valor del futuro.

$$F = S(t)e^{(r-q)(T-t)}$$

donde q es el porcentaje anual de dividendo.

1.2. Opciones

Una **Call option** es el derecho a comprar un **underlying asset** por un **exercise/strike price** hasta o el **expiry/expiration date**. Una **put option** es lo mismo, pero te da derecho a vender. Muchas veces las opciones se agrupan en **series**, i.e. diferentes combinaciones de strike y vencimiento disponibles para un mismo activo. Su **payoff function** es:

- **Call option:** Apuestas a que el mercado sube

$$\max(S - K, 0)$$

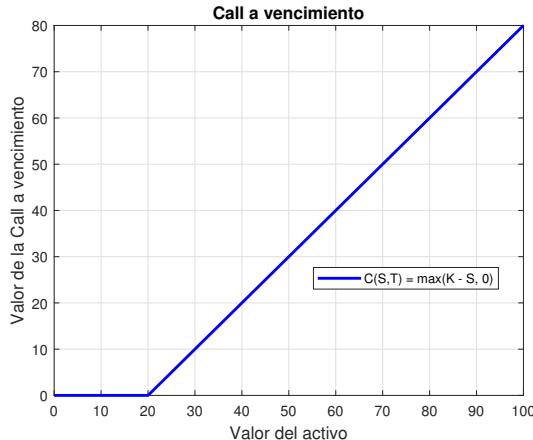


Figura 1.1: Payoff de opción Call a vencimiento

- **Put option:** Apuestas a que el mercado baje

$$\max(K - S, 0)$$

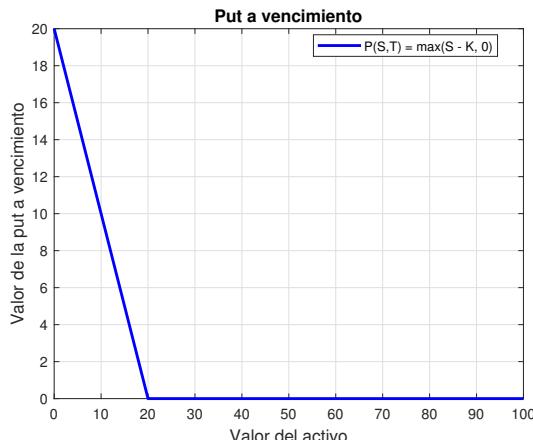


Figura 1.2: Payoff de opción Put a vencimiento

A veces el strike K se representa con una E . Las opciones **vainilla** son aquellas más simples; la función de pago solo depende del valor del subyacente en el momento del pago. Los **derivatives or contingent claims** son contratos que tienen dependencias más complejas.

1.2.1. Terminología

- **Premium:** lo que se paga inicialmente por el contrato (prima).
- **Underlying (asset):** subyacente sobre el que depende el contrato.

- **Strike (price)/exercise price:** precio al que se compra o vende el subyacente. Se define con E o con K .
- **Expiration (date) o expiry (date):** fecha en la que se puede ejercer o cuando se caduca la opción. Se denota por T .
- **Intrinsic value:** Valor del beneficio si la opción se ejerce en ese momento.
- **Time value:** Valor extra que tiene la opción por la incertidumbre futura.
- **In the money:** Opción con valor intrínseco positivo. Call: precio activo > strike. Put: precio activo < strike.
- **Out of the money:** Opción sin valor intrínseco. Call: precio activo < strike. Put: precio activo > strike.
- **At the money:** Precio del activo \approx strike.
- **Long position:** Posición positiva en una cantidad o exposición.
- **Short position:** Posición negativa o venta en corto de un activo. “Vender sin tener activo para adelantar dinero”.
- **Profit diagram:** Como el payoff, pero restandole la prima.

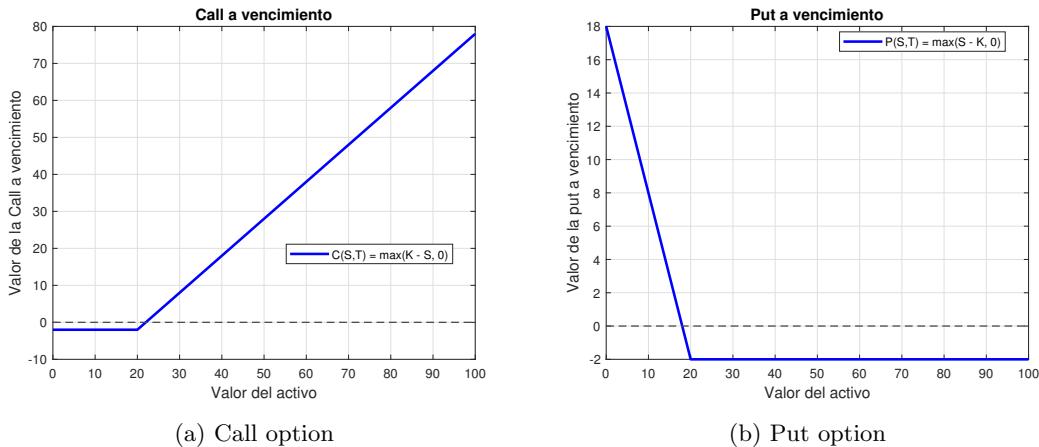


Figura 1.3: Profit diagram de opción a vencimiento

- **Over the counter/OTC:** opciones que se realizan fuera de la bolsa y que no tienen que seguir las convenciones estándar. Los términos se especifican en una **term sheet**.
- **Gearing/leverage:** relación entre la posible ganancia y la inversión. Las opciones tienen una gran gearing, pero el punto negativo es que si no hay ganancias, la pérdida es del 100% (se pierde la prima). Aquí el writer es el que tiene mucho riesgo.
- **Hedging:** tomar posiciones contrarias, por ejemplo ser el writer de una opción y comprar/vender acciones del subyacente para reducir riesgos. También se usa para describir la reducción de la aleatoriedad en general.

1.2.2. Tipos de opciones

- **European options:** solo se puede ejercer en vencimiento.
- **American options:** se puede ejercer en cualquier momento hasta el vencimiento.
- **Bermudan options:** se puede ejercer en ciertas fechas específicas.

1.2.3. Call-Put Parity

La relación en cualquier tiempo t entre una Call y una Put con los mismos parámetros es:

$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$$

1.2.4. Opciones binarias/ digitales

A fecha de ejercicio son discontinuas. Pagan una cierta cantidad fija (como un \$1) si el subyacente está por encima/debajo de cierto precio de ejercicio E (o K). Las vainilla tienen un potencial de ganancia ilimitado, mientras que las binarias están acotadas, porque las compras cuando crees que el crecimiento/bajada es limitado.

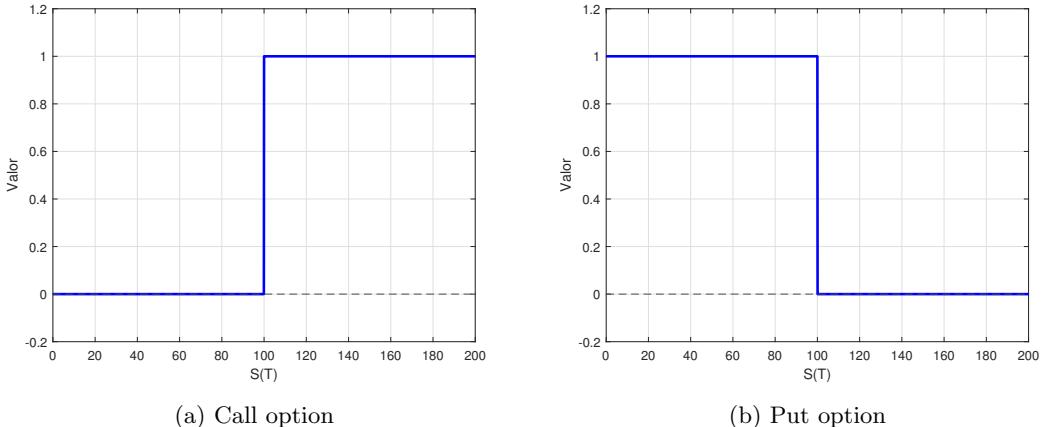


Figura 1.4: Binary option payoff

Su relación de paridad se obtiene considerando que tienes una opción binary de cada tipo, porque a precio de ejercicio se obtiene el \$1 que se paga (o la cantidad que se haya firmado) actualizado:

$$\text{Binary call} + \text{Binary put} = e^{-r(T-t)}$$

1.2.5. Portfolio of options/Option strategy

Conjunto de opciones combinadas de manera estratégica para un objetivo concreto (maximizar ganancias, minimizar riesgos,...). Para saber su payoff se suman los payoff de las opciones que compras y se restan los payoff de las opciones que vendes. De forma genérica, las estrategias se pueden clasificar en **spread** que son estrategias que involucran opciones del mismo tipo (calls o puts), y **combinations** que combinan opciones de distinto tipo (calls o puts); también existen las **calendar spread**, que combinan opciones con distintas fechas de vencimiento. Algunos ejemplos son:

- **Bull Spread (Spread Alcista)**: consiste en comprar una opción **call** con un strike más bajo E_1 y vender otra opción call con strike más alto E_2 ($E_1 < E_2$). Hay beneficio si subyacente **sube**, pero está limitado a diferencia $E_2 - E_1$. Su payoff es:

$$\boxed{\max(S - E_1, 0) - \max(S - E_2, 0)}$$

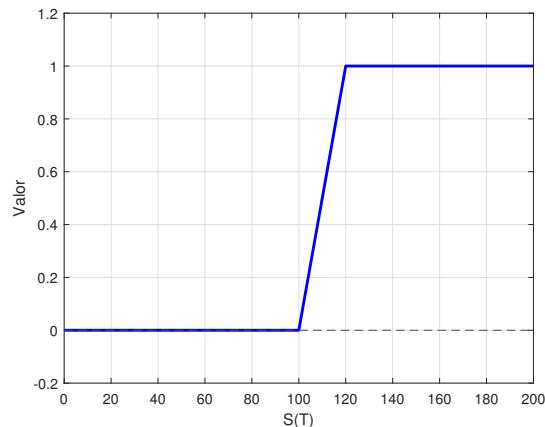


Figura 1.5: Payoff de Bull Spread a vencimiento (normalizado)

Para normalizarlo se divide por $E_2 - E_1$

- **Bear Spread (Spread Bajista):** consiste en comprar opción **put** con strike más alto E_2 y vender otra con strike más bajo E_1 ($E_1 < E_2$). Hay beneficio si el subyacente **baja**, pero está limitado a diferencia $E_2 - E_1$. Su payoff es:

$$\boxed{\max(E_2 - S, 0) - \max(E_1 - S, 0)}$$

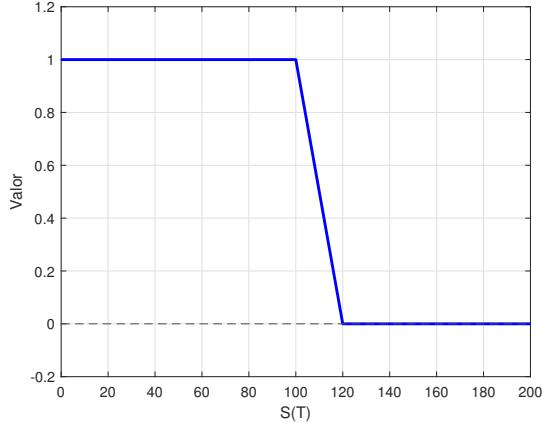


Figura 1.6: Payoff de Bear Spread a vencimiento (normalizado)

Para normalizarlo se divide por $E_2 - E_1$

- **Straddles:** comprar una call y una put con mismo strike y mismo expiry. Beneficio depende de la magnitud del movimiento del subyacente, pero costo alto por primas de dos opciones. Se suele hacer cuando hay un anuncio importante. Su payoff es:

$$\boxed{\max(S - E, 0) + \max(E - S, 0)}$$

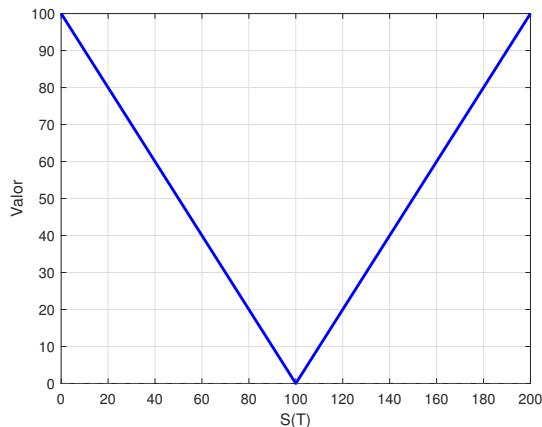


Figura 1.7: Payoff de Straddle

- **Strangle:** similar a straddles, pero con strikes distintos. Es más barato pero precisa de mayores cambios en el subyacente para que haya beneficios. Su payoff es:

$$\boxed{\max(S - E_C, 0) + \max(E_P - S, 0)}$$

Según los strikes pueden ser:

- **Out-of-the-Money Strangle (OTM):** se compra call con strike por encima de precio actual y put con strike por debajo de actual. Es más barato (primas bajas) pero se necesita un movimiento grande del subyacente.

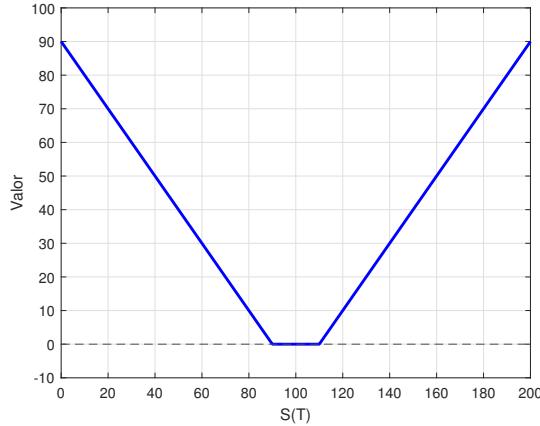


Figura 1.8: Payoff de Strangle OTM

- **In-the-Money Strangle (ITM):** se compra call con strike por debajo de precio actual y put con strike por encima de actual. Algo más caro (por primas) que OTM, pero un poco más seguro.

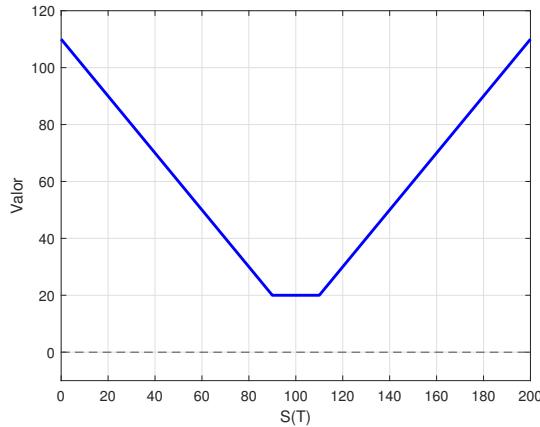


Figura 1.9: Payoff de Strangle ITM

- **Risk Reversal:** comprar una call con strike mayor que el precio actual y vender una put con un strike inferior al precio actual. Se apuesta a que el subyacente va a subir (y que como mucho no va a bajar demasiado). Si el activo baja se pierde dinero, pero las primas son más baratas. Su payoff sería:

$$\max(S - E_C, 0) - \max(E_P - S, 0)$$

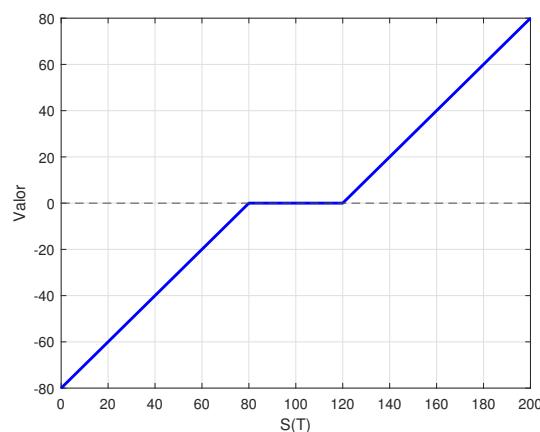


Figura 1.10: Payoff de Risk Reversal a vencimiento

- **Butterflies:** se compra una call ITM ($E_{C_{ITM}}$), se venden dos calls ATM (at-the-money) ($E_{C_{ATM}}$) y se compra una call OTM ($E_{C_{OTM}}$). Es decir, $E_{C_{ITM}} < E_{C_{ATM}} < E_{C_{OTM}}$. Además, generalmente se cumple que $E_{C_{OTM}} - E_{C_{ATM}} = E_{C_{ATM}} - E_{C_{ITM}}$. Se usa cuando se espera que el subyacente esté cerca de cierto precio central y haya poca volatilidad. Su payoff es:

$$\max(S - E_{C_{ITM}}, 0) - 2 \max(S - E_{C_{ATM}}, 0) + \max(S - E_{C_{OTM}}, 0)$$

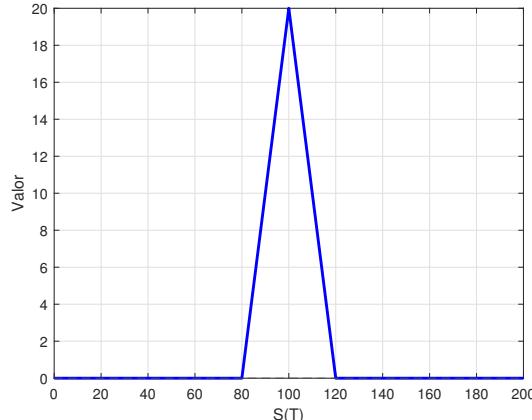


Figura 1.11: Payoff de Butterfly a vencimiento

- **Condors:** parecido a butterflies, se compra call con strike E_1 , se vende call con strike E_2 , se vende call con strike E_3 , y se compra call con strike E_4 tal que $E_1 < E_2 < E_3 < E_4$. Además, generalmente se cumple que $E_2 - E_1 = E_4 - E_3$. Se obtienen ganancias máximas si el subyacente se mantiene entre E_2 y E_3 . Su payoff es:

$$\max(S - E_1, 0) - \max(S - E_2, 0) - \max(S - E_3, 0) + \max(S - E_4, 0)$$

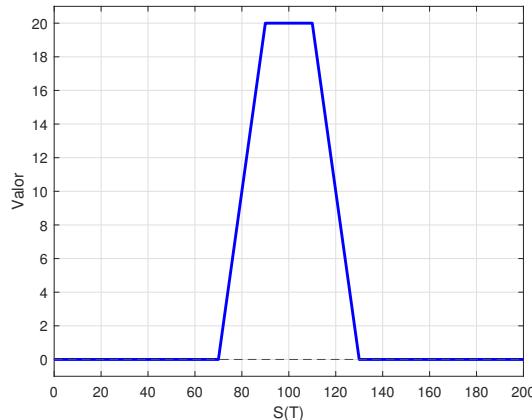


Figura 1.12: Payoff de Condors a vencimiento

1.2.6. Opciones a largo plazo

- **LEAPS/ long-term equity anticipation securities:** opciones con hasta 3 años de fecha de vencimiento. Usualmente vencen en enero. Se suelen emitir a 3 precios de ejercicio: ATM (precio actual), 20 % ITM (más favorable para el comprador) o 20 % OTM (más especulativo).
- **FLEPS/ FFlexible EXchange-traded options:** permiten más personalización de la opción de la fecha de vencimiento (hasta 5 años), el strike o el tipo de ejercicio (europeo o americano).

1.2.7. Otros derivados

- **Warrants:** parecido a opciones call, pero emitido por la propia empresa del subyacente que da derecho a comprar acciones *nuevas* (frente a acciones ya existentes en las opciones) emitidas por la empresa. Tiene plazos largos, de hasta 5 años.
- **Convertible bonds/ CBs:** bono normal que paga cupones y un capital a vencimiento, pero que tiene la opción de convertirse en acciones antes de vencimiento (perderías los cupones siguientes). Se comporta como una opción americana.

1.3. Productos de renta fija

1.3.1. Contratos simples de renta fija

1.3.1.1. Bonos de cupón cero

Es un contrato que paga una cantidad fija conocida (**principal**) en una fecha determinada (**maturity date**) T . Dicho valor se debe actualizar para calcular su precio.

1.3.1.2. Bonos con cupón (coupon-bearing bond)

Además de pagar el principal a fecha de vencimiento, paga **cupones** en ciertas fechas preestablecidas. Los cupones suelen ser un porcentaje del principal y se suelen pagar en períodos regulares.

1.3.1.3. Money Market Account

Cuentas de dinero (p.e. en el banco) que acumulan intereses compuestos de vez en cuando. El interés suele ser a corto plazo e impredecible, por lo que es “arriesgado”. Tiene la ventaja de ser flexible (lo puedes mover cuando quieras).

1.3.1.4. Floating Rate Bonds

Los bonos de tasa flotante son bonos cuya tasa de interés está ligada a un índice de referencia como el LIBOR (p.e. se puede recibir LIBOR+1%). Protegen al inversor contra subidas de interés pero tiene poca flexibilidad (hay que esperar a vencimiento) y hay incertidumbre de lo que se va a recibir.

1.3.1.5. Forward Rate Agreements (FRA)

Se fija una tasa de interés fija sobre un principal. Una parte paga el principal en T_1 y la otra parte lo devuelve con los intereses acordados en $T_2 > T_1$. El valor del contrato al inicio suele no ser cero, por lo que puede haber un pago inicial entre las partes.

1.3.1.6. Repos

Es un acuerdo de recompra. Consiste en vender un activo financiero a otra parte y acordar recomprarlo en una fecha y cantidad fijada. El precio de recompra suele ser mayor que el de venta, y la diferencia implica un tipo de interés llamado **repo rate**. El más común es el *overnight repo*, que se renegocia diariamente. Si el acuerdo dura más de 30 días se denomina *term repo*. Un **reverse repo** es la operación inversa: la compra de un valor con el compromiso de venderlo posteriormente.

1.3.1.7. Bonos separables (STRIPS)

‘Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities’. Consisten en separar los cupones y el principal de los bonos tradicionales, creando así bonos artificiales de cupón cero con vencimientos más largos de los que normalmente estarían disponibles.

Por ejemplo se ha comprado un bono con cupones que dan 5€ al año. Se pueden vender cada uno de esos cupones como bonos de cupón cero, y valdrían los 5€ actualizados.

1.3.1.8. Amortización

El principal va disminuyendo poco a poco durante la vida del contrato y los intereses se calculan sobre el principal pendiente.

La amortización puede ser fija (con un calendario conocido de antemano) o depender de algún índice (por ejemplo, si el índice sube, el principal se amortiza más rápido).

1.3.1.9. Cláusula de rescate anticipado (Call Provision)

Es una cláusula que se pone a contratos de renta fija que permite al emisor recomprar el contrato en ciertas fechas o períodos por un importe preestablecido. Esto reduce el valor del contrato para el inversor.

1.3.2. Mercado internacional de bonos

- **USA:**

- **Bill:** maturity menor que un año y normalmente sin cupón.
 - **Note:** maturity entre 2 y 10 años, con cupón cada 6 meses.
 - **Bond:** maturity mayor que 10 años, con cupón cada 6 meses.
 - **Yankees:** comerciados en USA por instituciones extranjeras.
- **UK:** los emitidos por el gobierno se llaman **gilts**. Incluyen bonos *callable*, *irredeemable*, *convertible* o *index-linked* ligados a Retail Price Index (RPI). Más adelante se explicará que es cada cosa.
 - **Japón:** **Japanese Government Bonds (JGBs)** pueden ser a corto plazo (letras del tesoro, sin cupones), plazo medio (con o sin cupones), largo plazo (maturity de 10 años, cupones cada 6 meses) o plazo muy largo (maturity de 20 años, cupones cada 6 meses). Los emitidos en yenes por instituciones extranjeras son bonos **Samurai**.

1.3.3. Conteo de días

Algunas maneras de contar los días entre dos fechas:

- **Actual/Actual:** número de días normal que hay en el calendario.
- **30/360:** cada mes tiene 30 días y el año tiene 360 días
- **Actual/360:** cada mes tiene los días que toca, pero el año tiene 360 días.

1.4. Aleatoriedad y procesos estocásticos

1.4.1. Desigualdad de Jensen

Sea la función convexa $f(S)$ (que se curva hacia arriba, con forma de cuenco) de la variable aleatoria S , entonces

$$\mathbb{E}[f(S)] \geq f(\mathbb{E}[S])$$

De hecho, la diferencia es de

$$\frac{1}{2}f''(\mathbb{E}[S])\mathbb{E}[\epsilon]$$

donde ϵ es la desviación de S de la media, i.e $S = \mathbb{E}[S] + \epsilon$.

1.4.2. Propiedad de Markov

El futuro depende solo del presente, no del pasado. Se usa en los caminos aleatorios para decir que el valor S_{t+1} solo depende de S_t , es decir,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in A \mid X_t = x, X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in A \mid X_t = x)$$

1.4.3. Propiedad de martingala

Lo que esperas tener en el futuro, sabiendo todo hasta ahora, es exactamente lo que tienes ahora. Es decir, el valor esperado de algo en un juego justo es exactamente lo que tienes ahora:

$$\mathbb{E}[S_i | S_j, j < i] = S_j$$

1.4.4. Lema de Itô

Sea

$$dS = a(S, t)dt + b(S, t)dX$$

entonces

$$dV = \left(\frac{dV}{dt} + a \frac{dV}{dS} + \frac{1}{2}b^2 \frac{d^2V}{dS^2} \right) dt + b \frac{dV}{dS} dX \quad (1.1)$$

En el apéndice A.1 se encuentra la fórmula para dimensiones mayores.

1.4.5. Algunos ejemplos de caminos aleatorios

- Brownian Motion with Drift: $dS = \mu dt + \sigma dX$

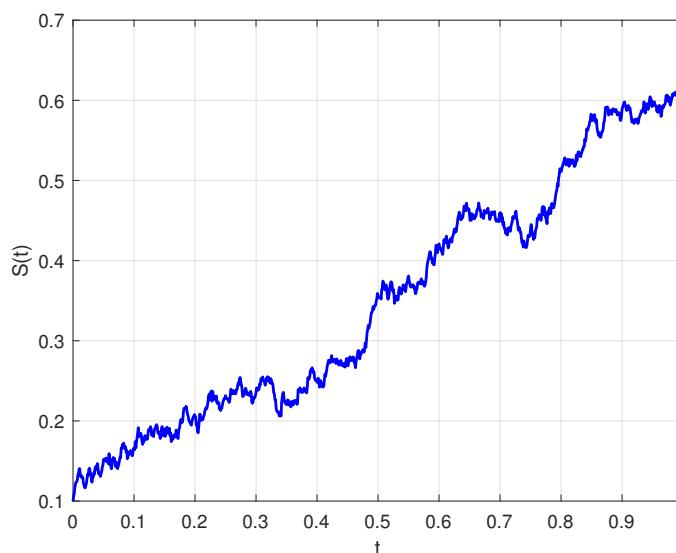


Figura 1.13: Brownian Motion with Drift

- The Lognormal Random Walk: $dS = S\mu dt + S\sigma dX$

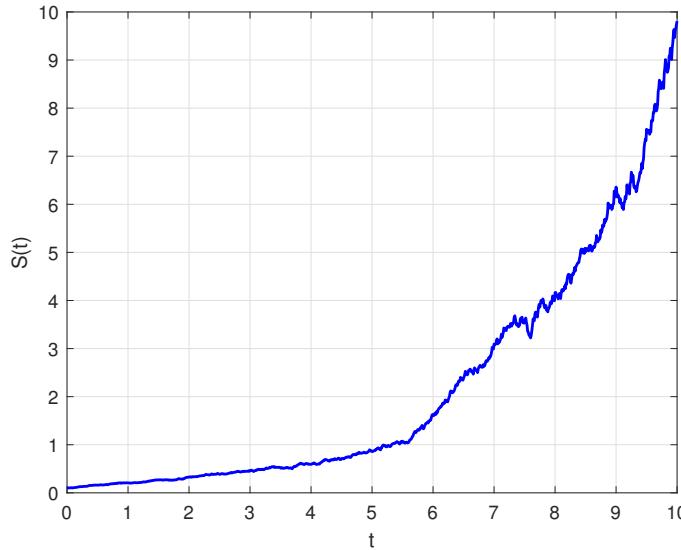


Figura 1.14: The Lognormal Random Walk

- A Mean-reverting Random Walk: reversion a la media, cuando se esta fuera del crecimiento normal el camino tiende a corregirse.

Su EDE es

$$dS = \kappa(\theta + S)dt + \sigma dX$$

donde κ es la velocidad de reversión a la media, θ es la tasa de interés a largo plazo y σ es la volatilidad. Un ejemplo común es el modelo Vasicek para el ratio de interés, $dr = \kappa(\theta + r)dt + \sigma dX$

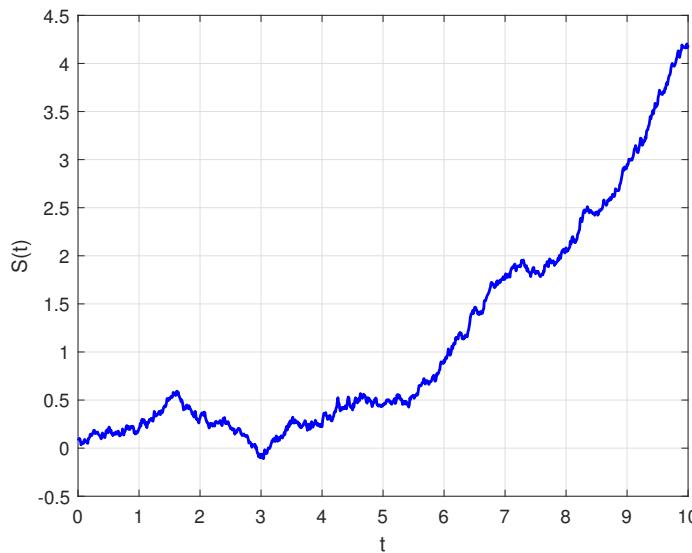


Figura 1.15: Mean-reverting Random Walk

1.4.6. Función de densidad de transición

Es la ‘probabilidad de que una variable aleatoria y esté entre a y b en el instante futuro t' , sabiendo que ha empezado con un valor y en el instante t ’. En concreto la función de densidad de transición $p(y, t; y', t')$ es:

$$\text{Prob}(a < y' < b \text{ en } t' | y \text{ en } t) = \int_a^b p(y, t; y', t') dy'$$

1.4.6.1. Ecuación de Fokker-Planck o de Kolmogorov hacia delante

Se centra en cómo evoluciona la transición con respecto al tiempo futuro t' . Se enfoca en el destino del proceso y cómo cambia la probabilidad de estar en distintos valores futuros y' a medida que avanza el tiempo t' . Sabiendo que la variable aleatoria cumple la EDE

$$dy = A(y, t)dt + B(y, t)dX$$

entonces la función de densidad de transición es la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y'^2} (B(y', t')^2 p) - \frac{\partial}{\partial y'} (A(y', t') p)}$$

por ejemplo para la EDE

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

se tiene que resolver la EDP

$$\frac{\partial p}{\partial t'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S'^2} (\sigma^2 S'^2 p) - \frac{\partial}{\partial S'} (\mu S' p)$$

que da como solución

$$p(S, t; S', t') = \frac{1}{\sigma S' \sqrt{2\pi(t' - t)}} \exp \left(-\frac{(\log(S/S') + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t' - t))^2}{2\sigma^2(t' - t)} \right)$$

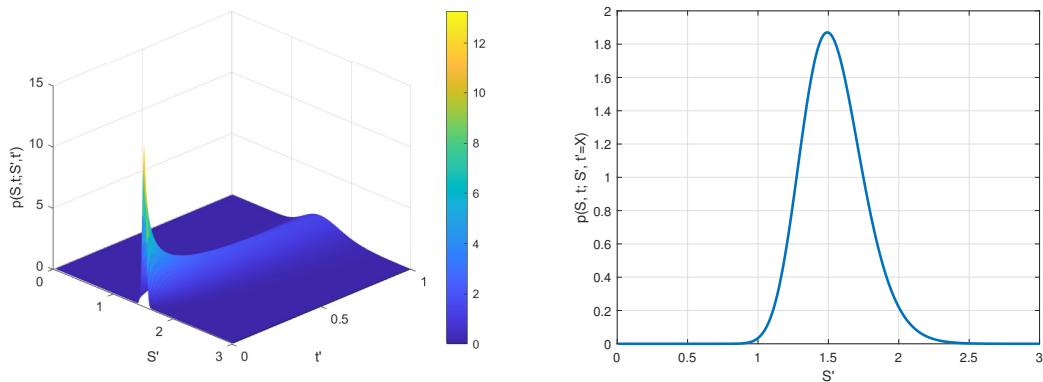


Figura 1.16: Función de densidad de transición

1.4.6.2. Ecuación de Kolmogorov hacia detrás

Se centra en cómo evoluciona la densidad de transición con respecto al tiempo actual t . Se enfoca más en el origen y cómo cambian las probabilidades de llegar al punto y' , t' dependiendo de donde se está en el momento. La EDP es

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} B(y, t)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + A(y, t) \frac{\partial p}{\partial y} = 0}$$

1.4.6.3. Distribución en estado estacionario (steady-state distribution)

Son aquellas cuya función de densidad de transición $p(y, t; y', t')$ tiende, cuando $t' \rightarrow \infty$, a una distribución que ya no depende del estado inicial y ni del tiempo t . Para eso se debe cumplir que el proceso sea homogéneo en el tiempo, i.e. A y B sean independientes de t en el límite asintótico. Cuando se cumple la función de densidad de transición converge a $p_\infty(y')$ que satisface:

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy'^2} (B_\infty^2 p_\infty) - \frac{d}{dy'} (A_\infty p_\infty) = 0}$$

donde A_∞ y B_∞ son los valores de los coeficientes en el límite $t \rightarrow \infty$.

1.4.7. tiempos de primer escape (First-exit times)

El *first-exit time* es el tiempo en el cual un camino aleatorio alcanza un cierto límite por primera vez. El objetivo de esta sección es calcular la probabilidad de que un camino aleatorio alcance cierto límite antes de cierto tiempo.

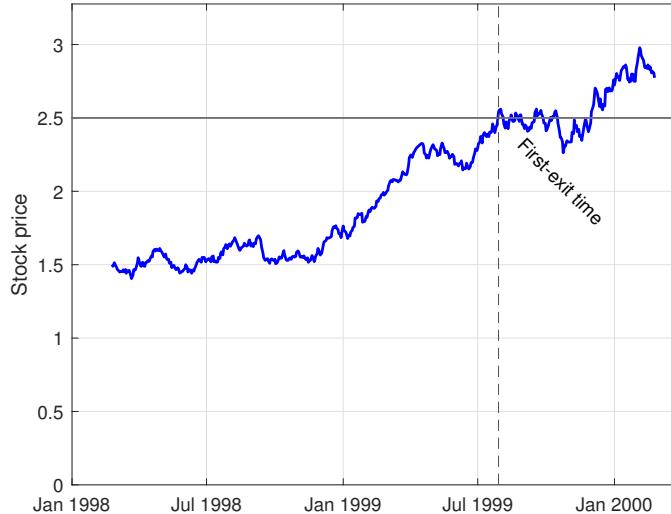


Figura 1.17: First-exit Time

1.4.7.1. Funciones de distribución acumulada para first-exit times

Se define la función $C(y, t; t')$ como la probabilidad de que la variable y salga de la región Ω antes del tiempo t' , habiendo empezado en y en el tiempo t . Esta función puede interpretarse como una función de distribución acumulada para first-exit time.

El objetivo es calcular la probabilidad de que un camino aleatorio abandone una región Ω antes de un tiempo dado t' . Para ello, se tiene que satisfacer el problema de la EDP hacia atrás:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} B(y, t)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + A(y, t) \frac{\partial C}{\partial y} = 0 & (y, t) \in \Omega \times (0, t') \\ C(y, t; t') = 1 & (y, t) \in \partial\Omega \times (0, t') \\ C(y, t'; t') = 0 & y \in \Omega \end{array} \right. \quad (1.2)$$

1.4.7.2. Tiempos de primer escape esperados (Expected first-exit times)

Una vez calculado (1.2) es posible calcular el tiempo esperado de primer escape:

$$u(y, t) = \int_t^\infty (t' - t) \frac{\partial C}{\partial t'} dt' \stackrel{\text{partes}}{=} \int_t^\infty 1 - C(y, t; t') dt'$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_t^\infty 1 - C(y, t; t') dt' \right) \stackrel{\text{Leibniz}}{=} -(1 - C(y, t, t)) + \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} (1 - C(y, t; t')) dt' \\ &\stackrel{(1.2)}{=} -1 - \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} C(y, t; t') dt' \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial y} (1 - C(y, t; t')) dt' = - \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial y} C(y, t; t') dt' \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= - \int_t^\infty \frac{\partial^2}{\partial y^2} C(y, t; t') dt' \end{aligned}$$

que volviendo a la EDP (1.2):

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}B(y,t)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + A(y,t) \frac{\partial C}{\partial y} dt' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_t^\infty \frac{\partial C}{\partial t} dt' + \frac{1}{2}B(y,t)^2 \int_t^\infty \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} dt' + A(y,t) \int_t^\infty \frac{\partial C}{\partial y} dt' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}B(y,t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - A(y,t) \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

por lo que el tiempo esperado de primer escape $u(y,t)$ satisface la EDP:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}B(y,t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A(y,t) \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \\ u(y,t) = 0 \quad y \in \partial\Omega \end{array} \right\}$$

Por ejemplo, si se tiene una EDE independiente del tiempo $A = \mu S, B = \sigma S$, se puede buscar una solución en estado estacionario, es decir, $u(y,t) = u(y)$, que satisface la EDP:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 u}{dS^2} + \mu S \frac{du}{dS} = -1$$

con condiciones de contorno $u(S_0) = u(S_1) = 0$. La solución en este caso sería.

$$u(S) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu} \left(\log(S/S_0) - \frac{1 - (S/S_0)^{1-2\mu/\sigma^2}}{1 - (S_1/S_0)^{1-2\mu/\sigma^2}} \log(S_1/S_0) \right)$$

Capítulo 2

Modelación básica de derivados

2.1. Modelos Black-Scholes

2.1.1. Modelo opciones básico

Se construye cartera

$$\Pi = V(S, t) - \Delta S$$

sabiendo que

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

entonces, por el lema de Itô 1.4.4 se tiene que

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS$$

que, haciendo un **delta hedging** $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ se obtiene que, sin arbitraje:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

que debe ser igual que

$$d\Pi = r\Pi dt = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt$$

por lo que

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

Se debe de tener en cuenta que esto calcula el valor justo de la opción, que es el valor actualizado de su payoff bajo una **risk-neutral random walk** para el subyacente. Este camino aleatorio es

$$dS = rS dt + \sigma S dX$$

Por lo tanto no es lo mismo que la probabilidad de que la opción quede ITM calculada con lo expuesto en el apartado 1.4.7.2.

2.1.2. Opciones de activos con dividendos continuos

Tener comprado da un dividendo continuo de $DSdt$, luego la variación de la cartera es

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS - D\Delta dS$$

que usando igualmente que $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, se tiene que

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

2.1.3. Currency options

En vez de acciones como subyacente, se usa una moneda extranjera con un interés r_f que se comporta como un dividendo continuo, por lo que queda

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - r_f)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

2.1.4. Commodity options

EL subyacente es un commodity, que tiene un coste de almacenamiento. En este caso se asume continuo q (i.e. $qSdt$). Como es un coste se puede ver como un dividendo negativo, por lo que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r + q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

2.1.5. Forwards contracts

Construyendo una cartera igual que BS clásico, se llega a la misma EDP.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

pero se debe añadir como condición final

$$V(S, T) = S - \bar{S}$$

donde \bar{S} es el precio fijado (delivery price). Su solución es

$$S - \bar{S}e^{-r(T-t_0)}$$

Su delivery price es el que da valor 0 al contrato en un primer momento, luego

$$\bar{S} = S_0 e^{r(T-t_0)}$$

Su forward price, por otro lado, es

$$\text{Forward price} = S e^{r(T-t_0)}$$

2.1.6. Future contracts

Como el valor del contrato se resetea a 0 todos los días (hay compensación diaria), el valor del contrato durante su vida es 0. Denotando por $F(S, t)$ al valor del contrato:

$$\begin{aligned} \Pi &= F(S, T) - \Delta S = -\Delta S \\ d\Pi &= dF(S, T) - d\Delta S \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dt - \Delta dS \end{aligned}$$

luego tomando $\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}$ y $d\Pi = r\Pi dt$ se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dt + rS \frac{\partial F}{\partial S} = 0$$

con la condición final de que

$$F(S, T) = S$$

Su solución es

$$F(S, t) = S e^{r(T-t)}$$

por lo que para el caso de interés constante, los futures y los forwards valen lo mismo.

2.1.7. Opciones sobre futuros

Son opciones en las que el subyacente es un contrato de futuro. Se sabe que

$$F = S e^{r(T-t)}$$

por lo que, haciendo un cambio de variable $V(S, t) = W(F, t)$ se obtiene la EDP

$$\frac{\partial W}{\partial t} dt + \frac{\sigma^2}{2} F^2 \frac{\partial^2 W}{\partial F^2} dt - rW = 0$$

2.1.8. Condiciones de frontera y finales

En una opción europea, se tienen las siguientes condiciones:

- Condiciones temporales:

- Call:

$$C(S, T) = \max(S - E, 0)$$

- Put:

$$C(S, T) = \max(E - S, 0)$$

- Condiciones de frontera: (se justificarán más adelante)

- Call:

$$C(0, t) = 0$$

$$C(S, t) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} S - E e^{-r(T-t)}$$

- Put:

$$P(0, t) = E e^{-r(T-t)}$$

$$P(S, t) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} 0$$

2.1.9. Algunas propiedades de las opciones europeas

Observación 1. Si el payoff de una cartera es mayor o igual a M , entonces, en ausencia de arbitraje, el valor actual de la cartera es mayor o igual que el valor actualizado:

$$\Pi(T) \geq M \Rightarrow \Pi(t) \geq M e^{-r(T-t)}$$

Si no fuese el caso, se podría pedir al banco una cantidad $M e^{-r(T-t)}$ en tiempo t y comprar la cartera. Entonces, en tiempo T se pagaría el préstamo con el payoff y se generaría beneficio.

Proposición 1. Sea $C(S, t)$ una opción Call europea con fecha de ejercicio T y subyacente S sin dividendos; entonces, en ausencia de arbitraje:

1. $C \leq S$
2. $C \geq \max(S - E e^{-r(T-t)}, 0)$
3. $0 \leq C_1 - C_2 \leq (E_2 - E_1) e^{-r(T-t)}$ con $E_1 < E_2$.

Demostración. Utilizando la observación 1:

1. Sea la cartera $\Pi = S - C$, entonces

$$\begin{aligned} \Pi(T) &= S - \max(S - E, 0) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} S, & 0 \leq S \leq E \\ E, & S \geq E \end{array} \right\} \geq 0 \stackrel{1}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{1}{\Rightarrow} \Pi(t) = S - C \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow S \geq 0 \end{aligned}$$

2. Sea la cartea $\Pi = S - C$, entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= S - \max(S - E, 0) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} S, & 0 \leq S \leq E \\ E, & S \geq E \end{array} \right\} \leq E \xrightarrow{1} \\ &\xrightarrow{1} \Pi(t) = S - C \leq Ee^{-r(T-t)} \\ &\Rightarrow C \geq S - Ee^{-r(T-t)} \xrightarrow{C \geq 0} \\ &\xrightarrow{C \geq 0} C \geq \max(S - Ee^{-r(T-t)}, 0)\end{aligned}$$

3. Sea la cartea $\Pi = C_1 - C_2$, entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= \max(S - E_1, 0) - \max(S - E_2, 0) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ S - E_1, & E_1 \leq S < E_2 \\ E_2 - E_1, & S \geq E_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &0 \leq \Pi(T) \leq E_2 - E_1 \xrightarrow{1} \\ &\xrightarrow{1} 0 \leq \Pi(t) \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq C_1 - C_2 \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)}\end{aligned}$$

□

Proposición 2. *Sea $P(S, t)$ una opción Put europea con fecha de ejercicio T y subyacente S sin dividendos; entonces, en ausencia de arbitraje:*

1.
$$P \leq Ee^{-r(T-t)}$$
2.
$$P \geq Ee^{-r(T-t)} - S$$
3.
$$0 \leq P_2 - P_1 \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)} \text{ con } E_1 < E_2.$$

Demostración. Utilizando la observación 1:

1. Sea la cartea $\Pi = P - E$, entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= \max(E - S, 0) - E \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} -S, & 0 \leq S < E \\ -E, & S \geq E \end{array} \right\} \leq 0 \xrightarrow{1} \\ &\xrightarrow{1} \Pi(t) = P - Ee^{-r(T-t)} \leq 0 \\ &\Rightarrow P \leq Ee^{-r(T-t)}\end{aligned}$$

2. Sea la cartea $\Pi = S + P$, entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= S + \max(E - S, 0) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} E, & 0 \leq S < E \\ S, & S \geq E \end{array} \right\} \geq E \xrightarrow{1} \\ &\xrightarrow{1} \Pi(t) = S + P \geq Ee^{-r(T-t)} \\ &\Rightarrow P \geq Ee^{-r(T-t)} - S\end{aligned}$$

3. Sea la cartera $\Pi = P_2 - P_1$, entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= \max(E_2 - S, 0) - \max(E_1 - S, 0) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} E_2 - E_1, & 0 \leq S < E_1 \\ E_2 - S, & E_1 \leq S < E_2 \\ 0, & S \geq E_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ 0 \leq \Pi(T) &\leq E_2 - E_1 \stackrel{1}{\Rightarrow} \\ \stackrel{1}{\Rightarrow} 0 \leq \Pi(t) &\leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)} \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leq P_2 - P_1 &\leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)}\end{aligned}$$

□

Proposición 3. Sea $P(S, t)$ una opción Put europea con fecha de ejercicio T y subyacente S sin dividendos; entonces, en ausencia de arbitraje:

1. $C_A \geq C_B$ donde C_A, C_B son Calls europeas con precio de ejercicio E y fechas de ejercicio T_A, T_B tal que $T_A > T_B$.
2. $C_2 \leq \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1} C_1 + \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1} C_3$ donde C_1, C_2, C_3 son Calls europeas con fecha de ejercicio T y strikes E_1, E_2, E_3 donde $E_1 < E_2 < E_3$.

Demostración. Utilizando la observación 1:

1. Sea la cartera $\Pi = C_A - C_B$, entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T_B) &= C_A(S, T_B) - \max(S - E, 0) \stackrel{1}{\geq} \\ \stackrel{1}{\geq} \max(S - E e^{-r(T-t)}) - \max(S - E, 0) &\geq \\ \geq \max(S - E) - \max(S - E, 0) &= 0 \\ \Rightarrow \Pi(T_B) \geq 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \Pi(t) = C_A - C_B &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow C_A \geq C_B &\end{aligned}$$

2. Sea la cartera $\Pi = -C_2 + \lambda C_1 + (1 - \lambda) C_3$ y se considera

$$\begin{aligned}E_2 &= \lambda E_1 + (1 - \lambda) E_3 = \lambda E_1 + E_3 - \lambda E_3 = E_3 + \lambda(E_1 - E_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{E_2 - E_3}{E_1 - E_3} = \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - \lambda) &= \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1}\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \Pi(T) &= -\max(S - E_2, 0) + \lambda \max(S - E_1, 0) + (1 + \lambda) \max(S - E_3, 0) = \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \lambda(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ -(S - E_2) + \lambda(S - E_1), & E_2 \leq S < E_3 \\ -(S - E_2) + \lambda(S - E_1) + (1 - \lambda)(S - E_3), & S \geq E_3 \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1}(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ (1 - \lambda)(E_3 + S), & E_2 \leq S < E_3 \\ (1 - \lambda)(E_3 + S) + (1 - \lambda)(S - E_3), & S \geq E_3 \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \lambda(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ (1 - \lambda)(E_3 + S), & E_2 \leq S < E_3 \\ (1 - \lambda)2S, & S \geq E_3 \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1}(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1}(E_3 + S), & E_2 \leq S < E_3 \\ \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1}2S, & S \geq E_3 \end{array} \right\} \geq 0 \xrightarrow{1} \\
 \xrightarrow{1} \Pi(t) &= -C_2 + \lambda C_1 + (1 - \lambda)C_3 \geq 0 \\
 C_2 &\geq \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1}C_1 + \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1}C_3
 \end{aligned}$$

□

2.2. Comportamiento de las EDPs

2.2.1. Significado de los términos de una EDP

Sea una EDP de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = D(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R(u)$$

entonces se tienen los siguientes términos:

- **Término de difusión** ($D(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$): es el responsable de disipar o concentrar la solución . Si $D(u) > 0$ entonces la solución se suaviza mientras que $D(u) < 0$ hace que la solución se concentre.
- **Término de convección** ($c(u) \frac{\partial u}{\partial x}$): representa el transporte con velocidad $c(u)$ hacia la derecha si $c(u) > 0$ o hacia la izquierda si $c(u) < 0$.
- **Término de reacción** ($R(u)$): representa la salida o entrada local de u . Se puede ver como crear/eliminar masa (fuentes o sumideros).

Sabiendo que la EDP de Black-Scholes clásica es

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

entonces:

- El término de **difusión** $\frac{\sigma^2}{2} S^2 > 0$ indica que la solución se suaviza y que los picos se homogenizan.
- El término de **convección** $rS > 0$ indica que el resultado se mueve hacia los valores de S positivos (hacia la derecha).
- El término de **reacción** $rV > 0$ indica un decaimiento general del valor de la opción a medida que pasa el tiempo.

2.3. Soluciones y griegas

2.3.1. Griegas

Delta $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$	Lo que se tiene que comprar/vender en cada momento según el valor del subyacente para mantener la cartera libre de riesgo.
Gamma $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	Es una medida de cuánto y cuantas veces se tiene que <i>rehedged</i> para mantener la cartera libre de riesgo.
Theta $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$	Contribuye a que la cartera gane el interés correspondiente.
Speed $\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}$	Como gamma, pero para mayor precisión.
Vega $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	Variación con respecto a la volatilidad del subyacente.
Rho $\frac{\partial V}{\partial r}$	Sensibilidad de la opción a cambios en la tasa de interés. En la práctica se usa la estructura temporal completa de tasas.

Sabiendo la *call-put parity* $C(S, t) - P(S, t) = S - Ee^{-r(T-t)}$, las relaciones entre las griegas en opciones europeas Call y Put son:

- **Delta:** $\boxed{\Delta_{Call} = 1 + \Delta_{Put}}$

- **Gamma:** $\boxed{\Gamma_{Call} = \Gamma_{Put}}$

- **Theta:** $\boxed{\Theta_{Call} = \Theta_{Put} - rEe^{-r(T-t)}}$

- **Vega:** $\boxed{\nu_{Call} = \nu_{Put}}$

- **Rho:** $\boxed{\rho_{Call} = \rho_{Put} + E(T-t)e^{-r(T-t)}}$

2.3.2. Tablas de soluciones

	Call	Put
Value (Black-Scholes value)	$Se^{-D(T-t)}N(d_1)$ $Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-Se^{-D(T-t)}N(-d_1)$ $Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Delta $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)$	$e^{-D(T-t)}N(d_1)$	$e^{-D(T-t)}(N(d_1) - 1)$
Gamma $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)$		$\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S \sqrt{T-t}}$
Theta $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$	$-\frac{\sigma Se^{-D(T-t)}N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}}$ $DSN(d_1)e^{-D(T-t)}$ $rEe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{\sigma Se^{-D(T-t)}N'(-d_1)}{2\sqrt{T-t}}$ $DSN(-d_1)e^{-D(T-t)}$ $rEe^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Speed $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}\right)$		$-\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma^2 S^2 (T-t)}(d_1 + \sigma\sqrt{T-t})$
Vega $\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)$		$S\sqrt{T-t}e^{-D(T-t)}N'(d_1)$
Rho $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)$	$E(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-E(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Rho $\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)$	$-(T-t)Se^{-D(T-t)}N(d_1)$	$(T-t)Se^{-D(T-t)}N(-d_1)$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (2.1)$$

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (2.2)$$

	Binary Call	Binary Put
Value (Black-Scholes value)	$e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$e^{-r(T-t)}(1 - N(d_2))$
Delta	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S \sqrt{T-t}}$	$-\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S \sqrt{T-t}}$
Gamma $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)$	$-\frac{e^{-r(T-t)}d_1 N'(d_2)}{\sigma^2 S(T-t)}$	$\frac{e^{-r(T-t)}d_1 N'(d_2)}{\sigma^2 S(T-t)}$
Theta $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$	$re^{-r(T-t)}N(d_2) \left(\frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{r-D}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)$	$re^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) \left(\frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{r-D}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)$
Speed $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}\right)$	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma^3 S^3(T-t)} \left(-2d_1 + \frac{1-d_1 d_2}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)$	
Vega $\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)$	$-\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)d_1}{\sigma \sqrt{T-t}}$	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)d_1}{\sigma \sqrt{T-t}}$
Rho $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)$	$-(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2) + \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} e^{-r(T-t)}N'(d_2)$	$-(T-t)e^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) - \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} e^{-r(T-t)}N'(d_2)$
Rho $\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)$	$\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} e^{-r(T-t)}N'(d_2)$	$-\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} e^{-r(T-t)}N'(d_2)$

$$d_1 = \frac{\log \left(\frac{S}{E} \right) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

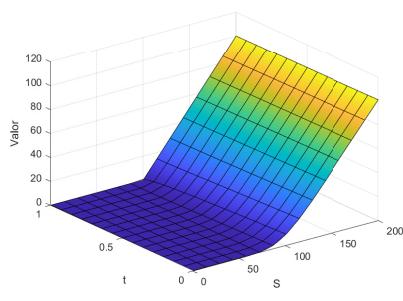
$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

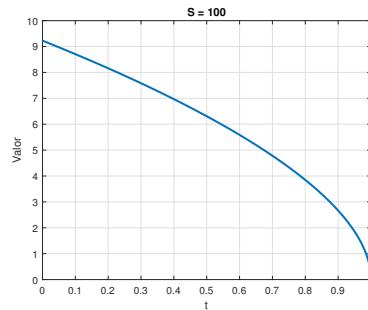
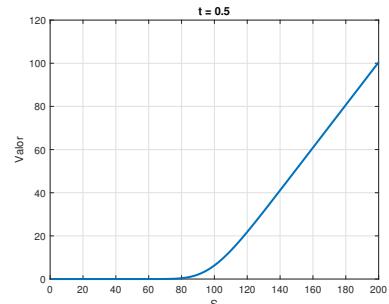
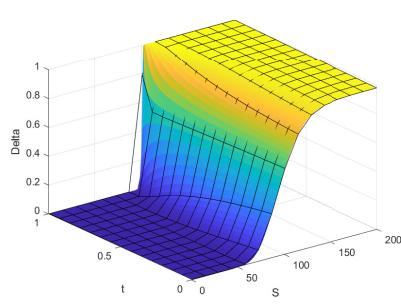
2.3.3. Representación gráfica de soluciones

En este apartado se va a graficar cada una de las soluciones

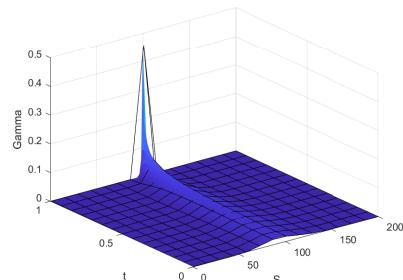
2.3.3.1. Call option



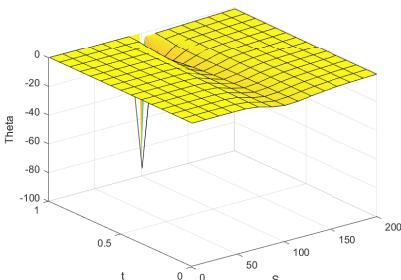
(a) Solución


 (b) Solución con S fijo

 (c) Solución con t fijo


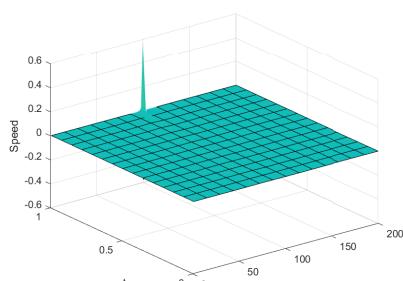
(d) Delta



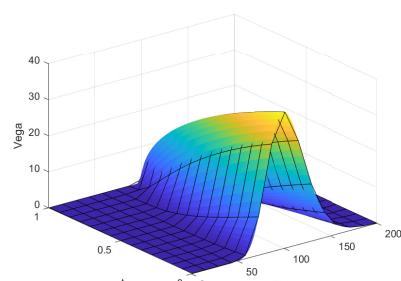
(e) Gamma



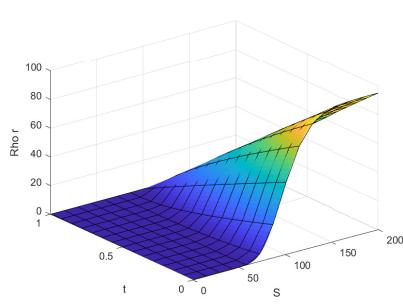
(f) Theta



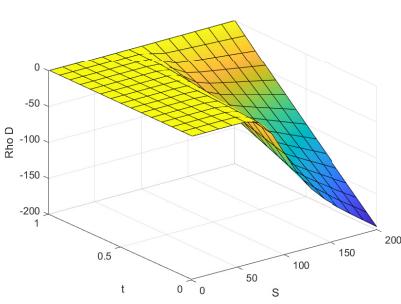
(g) Speed



(h) Vega

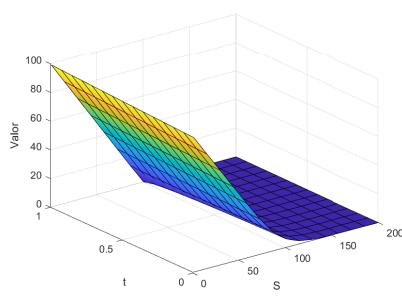


(i) Rho (r)

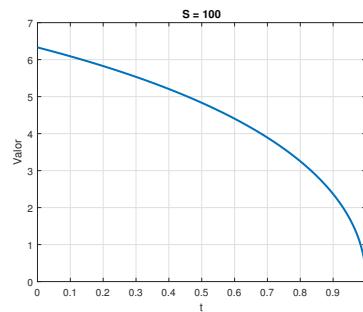


(j) Rho (D)

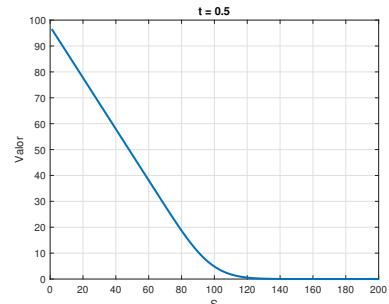
2.3.3.2. Put option



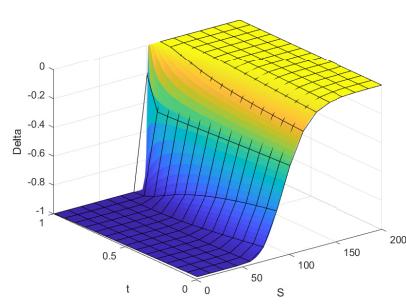
(a) Solución



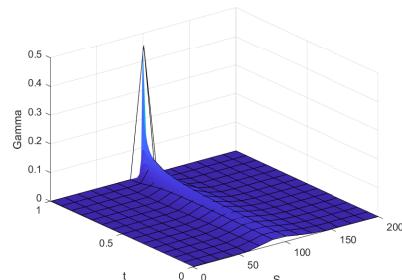
(b) Solución con S fijo



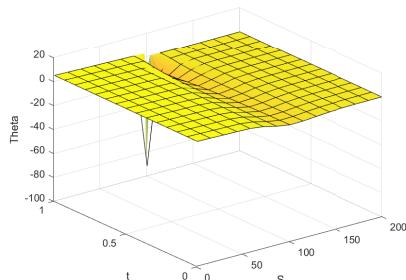
(c) Solución con t fijo



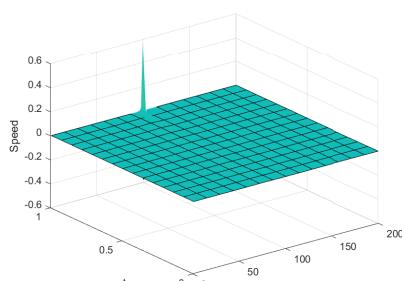
(d) Delta



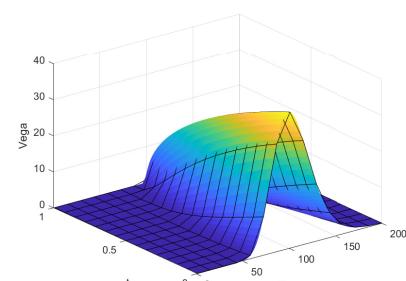
(e) Gamma



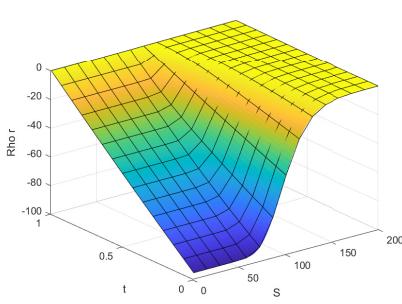
(f) Theta



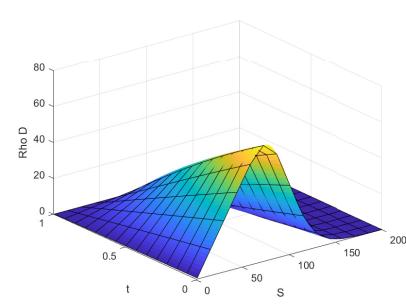
(g) Speed



(h) Vega

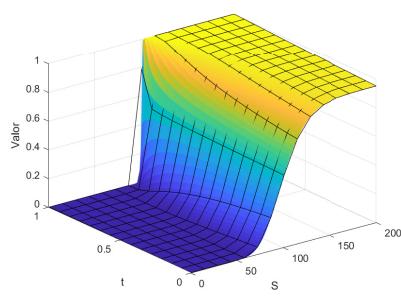


(i) Rho (r)

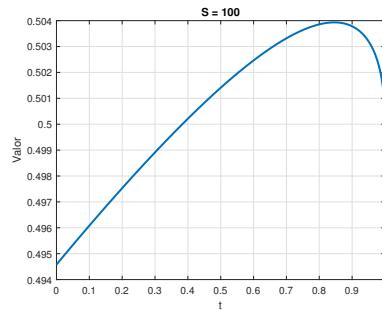


(j) Rho (D)

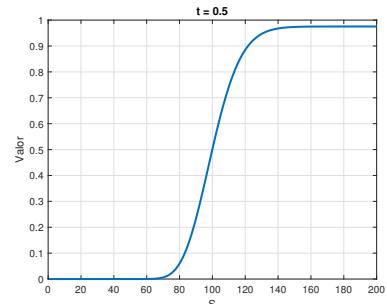
2.3.3.3. Binary Call option



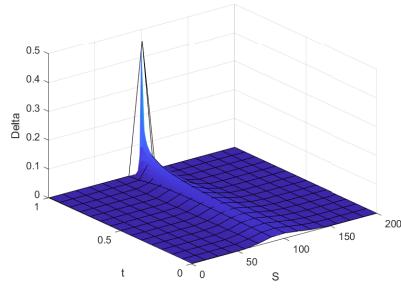
(a) Solución



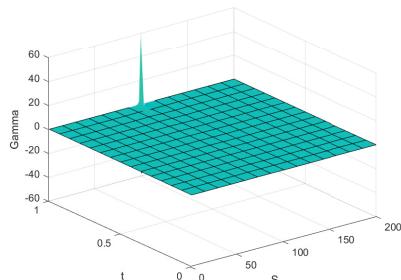
(b) Solución con S fijo



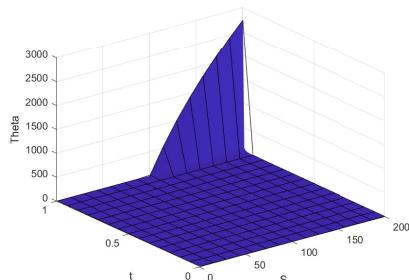
(c) Solución con t fijo



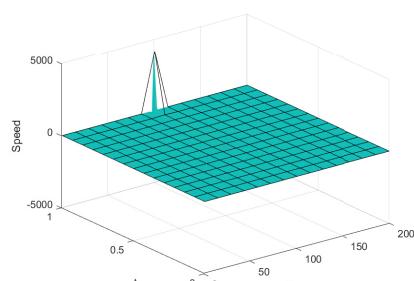
(d) Delta



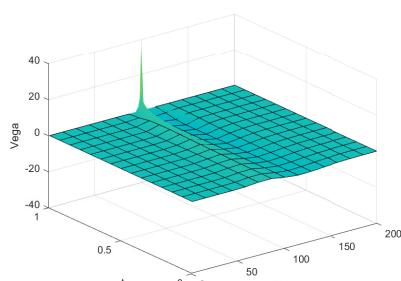
(e) Gamma



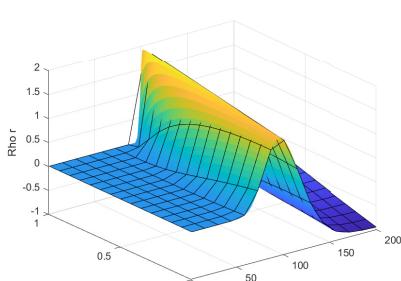
(f) Theta



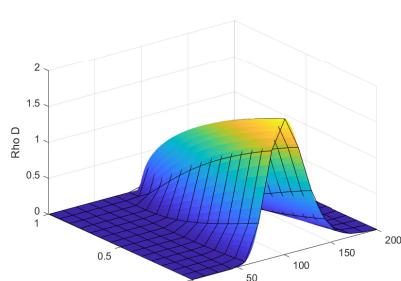
(g) Speed



(h) Vega

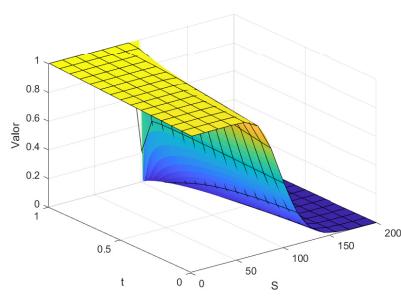


(i) Rho (r)

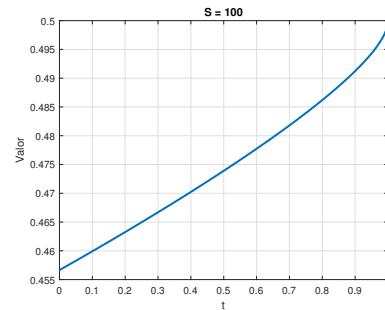


(j) Rho (D)

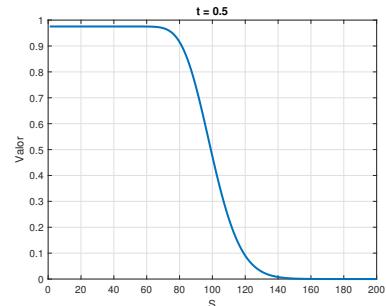
2.3.3.4. Binary Put option



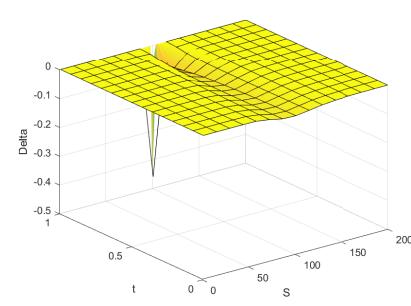
(a) Solución



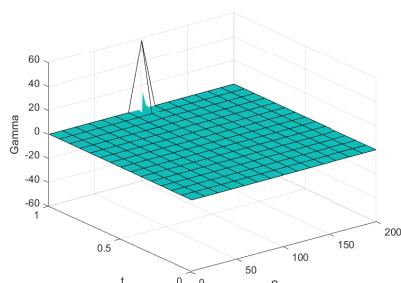
(b) Solución con S fijo



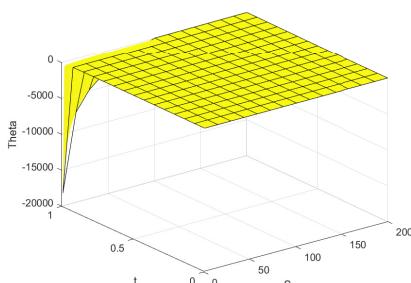
(c) Solución con t fijo



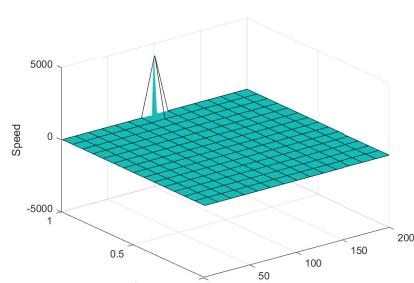
(d) Delta



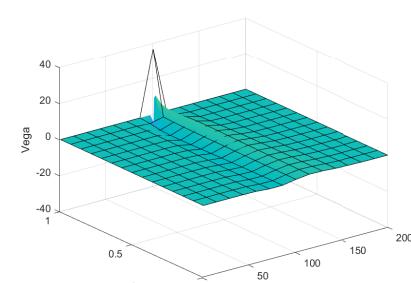
(e) Gamma



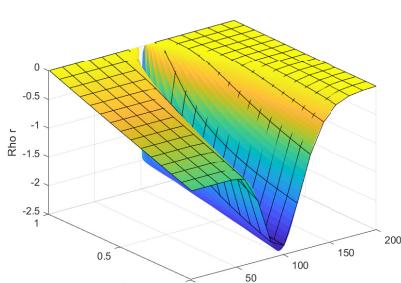
(f) Theta



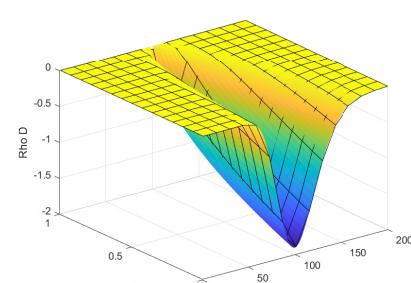
(g) Speed



(h) Vega



(i) Rho (r)



(j) Rho (D)

2.3.4. Volatilidad implícita

Valor de σ que iguala precio teórico (Black-Scholes) al precio de mercado. Para su cálculo se utilizan métodos numéricos como Newton-Raphson usando vega.

No es consistente si se calcula para diferentes strikes y vencimientos, lo que genera distintas curvas de volatilidad implícita:

- **Smile:** Volatilidad más alta para opciones ITM y OTM, mínima en ATM.
- **Skew:** Inclinación de la curva; típicamente negativa en mercados de acciones (mayor IV en puts OTM).
- **Frown:** Forma invertida del smile; menos común.

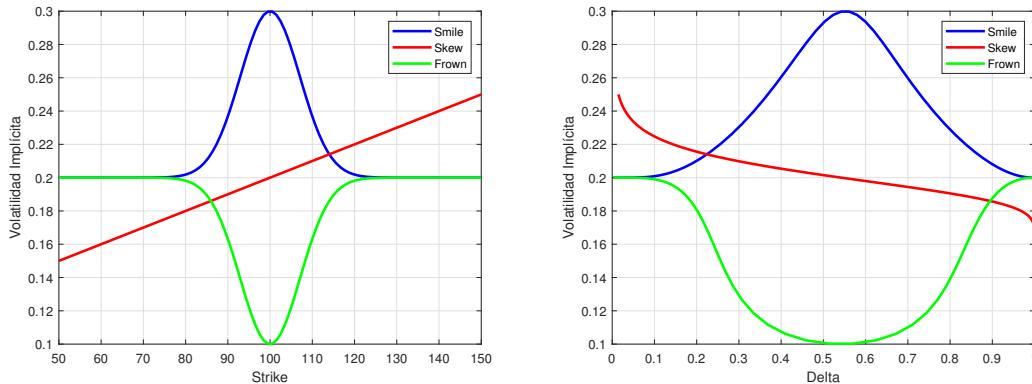


Figura 2.5: Algunas curvas de volatilidad implícita

2.3.5. Tipos de coberturas

Según la independencia con el modelo:

- **Model-independent hedging:** Son pocos. No dependen de la dinámica del subyacente ni de la volatilidad. Por ejemplo la relación put-call parity.
- **Model-dependent hedging:** Son muchos más. Ejemplo más típico es la cobertura usada en el análisis de Black-Scholes. Al valorar el derivado se necesita al menos la volatilidad.

Otros tipos de coberturas son:

- **Delta hedging:** es la perfecta eliminación teórica del riesgo usando cobertura entre la opción y el subyacente. Es un ejemplo de cobertura **dinámica**: la cobertura se debe monitorizar y ajustar todo el rato, por lo que en la vida real va a dar lugar a pérdidas por los costes de transacción.
- **Gamma hedging:** usada para disminuir el tamaño de cada cobertura o para incrementar el tiempo entre coberturas (y así disminuir coste de transacción). Una cartera de este tipo es insensible a cambios del subyacente mientras sean movimientos pequeños.
- **Vega hedging:** usada para eliminar el riesgo de volatilidad. En realidad esto en ocasiones da lugar a inconsistencias y no se debe usar una volatilidad constante.
- **Static hedging:** usada para reducir el riesgo de opciones exóticas mediante contratos más líquidos que se mantienen hasta el vencimiento, eliminando la necesidad de ajustes dinámicos.
- **Margin hedging:** usada para equilibrar las llamadas de margen (depósitos obligatorios) en una parte del portafolio con los reembolsos de otras partes, evitando así grandes llamadas de margen que puedan ser difíciles de cumplir.
- **Crash (Platinum) hedging:** diseñada para minimizar el peor resultado posible en mercados extremos (p.e. caídas), donde los movimientos son tan grandes que no se puede seguir el ritmo con las coberturas, y además las correlaciones normales se vuelven irrelevantes. Incluye dos tipos: cobertura del valor nominal del portafolio y cobertura de llamadas de margen.

2.4. Generalizaciones sencillas del modelo

2.4.1. Dividendos discretos

Para evitar arbitraje, el precio de una acción con dividendo D_i en el instante t_i debe cumplir la condición de salto:

$$S(t_i^+) = S(t_i^-) - D_i$$

luego la opción que tenga esa acción como suyacente debe cumplir que

$$V(S(t_i^-), t_i^-) = V(S(t_i^+), t_i^+) \Rightarrow V(S, t_i^-) = V(S - D_i, t_i^+)$$

El valor de la opción no pega un salto en el instante t_i y es continua.

2.4.2. Préstamo de acciones

Cuando se habla de ir *short* en una acción, muchas veces no se tiene por lo que se pide prestada. Pero este préstamo tiene un coste de interés R sobre el valor de la acción. Usando el mismo argumento que para el modelo básico de Black-Scholes:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} dS = \mu S dt + \sigma S dX \\ \Pi = V(S, t) - \Delta S \end{array} \Rightarrow d\Pi = dV - \Delta dS \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS \end{aligned}$$

Pero como ahora se tiene que pagar un interés por el préstamo de la acción:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS - R \max(\Delta, 0) S dt$$

que, haciendo un **delta hedging** $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ se obtiene que, sin arbitraje:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - RS \max\left(\frac{\partial V}{\partial S}, 0\right) \right) dt$$

Igualando a que $d\Pi = r\Pi dt$ se obtiene que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV - RS \max\left(\frac{\partial V}{\partial S}, 0\right) = 0$$

2.4.3. Parámetros dependientes del tiempo

Para el caso de una opción europea, resolver el problema con parámetros $r(t), D(t), \sigma(t)$ es lo mismo que reolverlo con los parámetros constantes

$$\boxed{\begin{aligned} r_c &= \frac{1}{T-t} \int_t^T r(\tau) d\tau \\ D_c &= \frac{1}{T-t} \int_t^T D(\tau) d\tau \\ \sigma_c^2 &= \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau \end{aligned}}$$

Para el caso de opciones americanas o exóticas se deben estudiar las condiciones de frontera.

2.4.4. Power options y log contracts

Se puede encontrar más información en el apéndice A.2.

2.5. Modelización la volatilidad

Tipos de volatilidad:

- **Actual volatility:** Es la medida de la cantidad de aleatoriedad en el retorno de un activo en un instante dado, variando de momento a momento sin asociarse a una escala temporal.
- **Historical or realized volatility:** Es una medida de la aleatoriedad en un periodo pasado específico, calculada con métodos matemáticos y utilizada como estimación para la volatilidad futura.
- **Implied volatility:** Es la volatilidad que, al ser introducida en el modelo de Black-Scholes, iguala el precio de mercado de la opción, reflejando la expectativa del mercado sobre la volatilidad futura. Se ha introducido en la sección 2.3.4.
- **Forward volatility:** Es la volatilidad asociada a un periodo de tiempo futuro o a un instante futuro, ya sea actual o implícita.

2.5.1. Volatilidad por media estadística

2.5.1.1. Volatilidad constante

Para el caso de volatilidad constante o variaciones lentas, entonces se puede considerar:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i^2$$

donde

$$R_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$$

representa el retorno del día i . Este método tiene limitaciones, como el efecto espurio que hace que por picos instantáneos muy altos o muy bajos, la volatilidad se mantendrá muy alta durante unos días.

2.5.1.2. Volatilidad con regresión a la media

Considerando una volatilidad dependiente del tiempo y para modelar que la volatilidad tiende a una media a largo plazo $\bar{\sigma}$, se usa el modelo **ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)** asigna un peso a cada estimación de volatilidad a largo plazo y a la estimación actual basada en los últimos n retornos:

$$\sigma_n^2 = \alpha \bar{\sigma}^2 + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i^2$$

Donde α es el parámetro que controla la importancia relativa entre la volatilidad a largo plazo y la volatilidad basada en los retornos recientes.

2.5.1.3. Volatilidad con media móvil exponencialmente ponderada (EWMA)

Se utiliza el modelo:

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{n-i+1}^2$$

donde λ es un parámetro entre 0 y 1 que controla el peso de los retornos pasados. Este modelo asigna mayor peso a los retornos más recientes. La expresión puede simplificarse como:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) R_n^2$$

Esto utiliza el retorno más reciente y la estimación previa de la volatilidad, siendo conocido como la medida de volatilidad de RiskMetrics.

2.5.1.4. Modelo GARCH

El modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) combina la volatilidad a largo plazo, la volatilidad previa y los retornos recientes para estimar la volatilidad actual:

$$\sigma_n^2 = \alpha \bar{\sigma}^2 + (1 - \alpha) (\lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) R_n^2)$$

Este modelo es útil para capturar la dinámica de la volatilidad en el tiempo, considerando tanto la persistencia como la regresión hacia una media a largo plazo.

2.5.1.5. Volatilidad futura esperada

Estando a día n se quiere estimar la volatilidad en k días, i.e. en el día $n+k$. Dos maneras de hacerlo son:

- **Modelo EWMA:**

$$\begin{aligned}\sigma_{n+k}^2 &= \lambda\sigma_{n+k-1}^2 + (1-\lambda)R_{n+k}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \lambda\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2] + (1-\lambda)\mathbb{E}[R_{n+k}^2] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \lambda\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2] + (1-\lambda)\mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2]\end{aligned}$$

luego

$$\boxed{\mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] = \mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2]}$$

Esto implica que la volatilidad futura esperada es igual a la estimación de volatilidad del día anterior.

- **Modelo GARCH:**

$$\begin{aligned}\sigma_{n+k}^2 &= \alpha\bar{\sigma}^2 + (1-\alpha)(\lambda\sigma_{n+k-1}^2 + (1-\lambda)R_{n+k}^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \alpha\bar{\sigma}^2 + (1-\alpha)(\lambda\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2] + (1-\lambda)\mathbb{E}[R_{n+k}^2]) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \frac{\alpha\bar{\sigma}^2}{1-(1-\alpha)(1-\lambda)} + \frac{\lambda(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)(1-\lambda)}\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2]\end{aligned}$$

Mirando más hacia el futuro:

$$\boxed{\mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\mathbb{E}[\sigma_n^2] - \bar{\sigma}^2)(1-\nu)^k}, \quad \nu = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\lambda)}$$

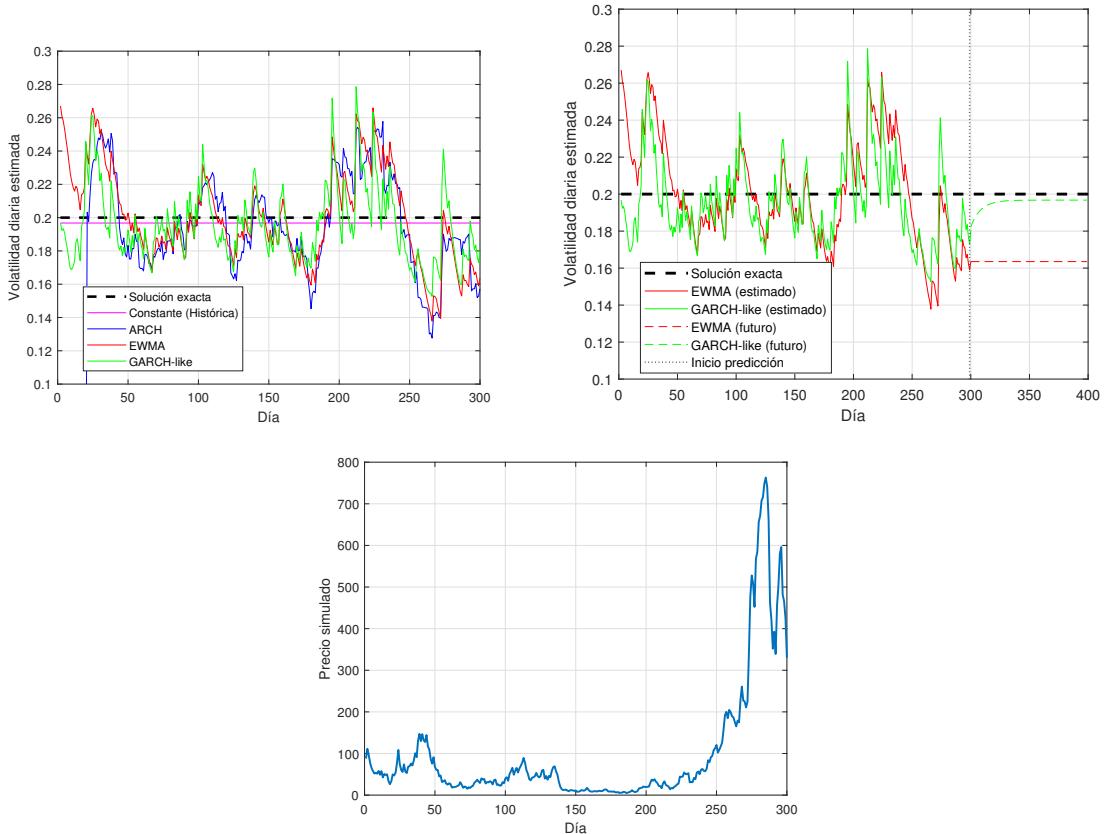


Figura 2.6: Comparación de estimadores de volatilidad

2.5.1.6. Estimación de volatilidad basada en rangos de tiempo

Usar demasiados datos puede capturar variaciones temporales del parámetro, mientras que usar pocos datos puede generar errores de muestreo. En primer lugar, sabiendo que $\text{Varianza_anual} = \text{Varianza_diaria} \times \text{Número_días_trading}$, entonces la volatilidad anualizada sería:

$$\sigma_{\text{anual}} = \sigma_{\text{diaria}} \times \sqrt{\text{Número_días_trading}}$$

Algunas maneras de estimar la volatilidad diaria según los rangos de tiempo son:

- **Medición tradicional close-to-close:** Sea C_i el precio de cierre del día i , entonces:

- Drift pequeño:

$$\sigma_{cc}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log \left(\frac{C_i}{C_{i-1}} \right) \right)^2$$

- Drift genérico:

$$\sigma_{acc}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\left(\log \left(\frac{C_i}{C_{i-1}} \right) \right)^2 - \frac{\left(\log \left(\frac{C_n}{C_0} \right) \right)^2}{n(n-1)} \right)$$

- **Medición basada en rangos extremos (Parkinson, 1980):** Utiliza los valores extremos del día, los máximos H_i y los mínimos L_i . Es 5 veces más efectiva que la medición close-to-close:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{4n \log(2)} \sum_{i=1}^n \left(\log \left(\frac{H_i}{L_i} \right) \right)^2$$

- **Medición basada en rangos extremos y apertura (Garman & Klass, 1980):** Utiliza los valores extremos del día y el precio de apertura O_i . Es 7.4 veces más efectiva que la medición close-to-close:

$$\sigma_{gk}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(0,511 \left(\log \left(\frac{H_i}{L_i} \right) \right)^2 - 0,019 \log \left(\frac{C_i}{O_i} \right) - 2 \log \left(\frac{H_i}{O_i} \right) \log \left(\frac{L_i}{O_i} \right) \right)$$

- **Medición basada en rangos extremos y cierre (Rogers & Satchell, 1991):** Es independiente del drift, no como Parkinson y Garman & Klass:

$$\sigma_{rs}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log \left(\frac{H_i}{C_i} \right) \log \left(\frac{H_i}{O_i} \right) + \log \left(\frac{L_i}{C_i} \right) \log \left(\frac{L_i}{O_i} \right) \right)$$

2.5.2. Estimar parámetros: maximum likelihood estimation (MLE)

Llegas a una ciudad y coges el taxi número 20922, ¿cuantos taxis hay en la ciudad? El concepto del MLE consiste en elegir los parámetros de manera que se maximice la probabilidad de que ocurra el evento observado. En este caso, la probabilidad de subirse en un taxi en específico es de $1/N$ y el N que maximiza la probabilidad de subirse en el taxi 20922 es $N = 20922$ (100 %).

La lógica es la siguiente: se tiene un modelo (p.e. una normal de media 0 y desviación a estimar) con 3 (o los que sean) parámetros (p.e. desviación). Obtengo varios datos, calculo su probabilidad de ocurrir para cada uno de los modelos, hago una probabilidad conjunta de todos los datos y se elige el modelo que maximice esa probabilidad conjunta.

Matemáticamente, el proceso es el siguiente, sabiendo que para una distribución normal con media cero y desviación estándar σ , la probabilidad de obtener un valor ϕ_i es:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\phi_i^2}{2\sigma^2}}$$

Luego la probabilidad conjunta de obtener N valores $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ es:

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\phi_i^2}{2\sigma^2}}$$

Para maximizar esta probabilidad conjunta, se deriva con respecto a σ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{\phi_i^2}{2\sigma^2} \right) \right) = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 \right) \right) = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\ln \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 \right) \right) \right) = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 \right) = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(-N \ln \left(\sqrt{2\pi} \right) - N \ln (\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 \right) = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i^2
 \end{aligned}$$

2.6. Cobertura: volatilidad implícita vs real

Esta sección se centra en el caso en el que la volatilidad implícita es diferente a la volatilidad que se ha calculado a partir de los datos históricos. Si se compra un ATM strangle, el beneficio esperado es aproximadamente de

$$\sqrt{\frac{2(T-t)}{\pi}} (\sigma - \tilde{\sigma}) S.$$

con una desviación típica de

$$\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}} \sigma S \sqrt{T-t}.$$

donde σ es la volatilidad real y $\tilde{\sigma}$ es la volatilidad implícita. La desviación depende de la volatilidad y tiene la misma magnitud que la media, por lo que el riesgo es muy alto, por lo que se debe seguir alguna estrategia para minimizar riesgos.

Notación 1. Se define la a superíndice para la volatilidad real y la i como superíndice para la volatilidad implícita. Por ejemplo, V^a es la delta usando la volatilidad real en la fórmula y V^i es la delta usando la volatilidad implícita en la fórmula.

Según sobre qué volatilidad se decida hacer la cobertura, se obtiene distintos resultados:

- **Cobertura sobre la volatilidad real:** Sea el modelo

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX.$$

se construye una cartera comprando la opción por V^i y cubriendo con Δ^a del subyacente, lo que da lugar a un efectivo de $-V^i + \Delta^a S$. Es decir las cartera es:

Componente	Valor
Opción	V^i
Acción	$-\Delta^a S$
Efectivo	$-V^i + \Delta^a S$

$$\Pi = V^i - \Delta^a S - V^i + \Delta^a S$$

Se supone además unos dividendos continuos de D y una tasa de interés r . Entonces, la variación de la cartera es

$$d\Pi = dV^i - \Delta^a dS - r(V^i - \Delta^a S)dt - \Delta^a D S dt$$

Asumiendo que la opción está correctamente valorada en V^a , se tiene que

$$\begin{aligned} dV^a - \Delta^a dS - r(V^a - \Delta^a S)dt - \Delta^a D S dt &= 0 \\ \Rightarrow -\Delta^a dS - \Delta^a D S dt &= -dV^a + r(V^a - \Delta^a S)dt \end{aligned}$$

por lo que sustituyendo en la variación de la cartera se obtiene

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV^i - r(V^i - \Delta^a S)dt - dV^a - r(V^a - \Delta^a S)dt \\ &= dV^i - dV^a - r(V^i - V^a)dt \end{aligned}$$

Se sabe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-rt}(V^i - V^a)) &= -re^{-rt}(V^i - V^a) + e^{-rt} \left(\frac{d}{dt} V^i - \frac{d}{dt} V^a \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow d(e^{-rt}(V^i - V^a)) &= e^{-rt} (-r(V^i - V^a)dt + dV^i - dV^a) \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{rt} d(e^{-rt}(V^i - V^a)) &= -r(V^i - V^a)dt + dV^i - dV^a \Rightarrow \end{aligned}$$

que sustituyendo en la variación de la cartera se obtiene

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV^i - dV^a + e^{rt} d(e^{-rt}(V^i - V^a)) + dV^a - dV^i \\ &= e^{rt} d(e^{-rt}(V^i - V^a)) \end{aligned}$$

que actualizada actualizada a tiempo t_0 es

$$\begin{aligned} d\Pi &= e^{-r(t-t_0)} e^{rt} d(e^{-rt}(V^i - V^a)) \\ &= e^{rt_0} d(e^{-rt}(V^i - V^a)) \end{aligned}$$

La ganacia total desde t_0 hasta el vencimiento es

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T d\Pi &= \int_{t_0}^T e^{-rt_0} d(e^{rt}(V^i - V^a)) \\ &= e^{-rt_0} [e^{rT}(V^i(T) - V^a(T)) - e^{rt_0}(V^i(t_0) - V^a(t_0))] = \\ &= e^{-rt_0} [-e^{rt_0}(V^i(t_0) - V^a(t_0))] \end{aligned}$$

Por lo tanto, el beneficio total garantizado al vencimiento es

$$V^a(t_0) - V^i(t_0)$$

Se debe de tener en cuenta que el beneficio final está garantizado, pero los beneficios en el camino son aleatorios.

Se puede desmostrar que la variación de la cartera tambien se puede escribir como

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)S^2\Gamma^i dt + (\Delta^i - \Delta^a)((\mu - r + D)Sdt + \sigma SdX)$$

- **Cobertura sobre la volatilidad implícita:** Se usa igualmente el modelo

$$dS = \mu Sdt + \sigma SdX$$

y se construye la cartera

$$\Pi = V^i - \Delta^i S - V^i + \Delta^i S$$

Sabiendo que hay un dividendos continuos, entonces su variación es

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV^i - \Delta^i dS - r(V^i - \Delta^i S)dt - \Delta^i DSdt \\ &= \Theta^i dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma^i dt - r(V^i - \Delta^i S)dt - \Delta^i DSdt \\ &= \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)S^2\Gamma^i dt \end{aligned}$$

que actualizada a tiempo t_0 es

$$d\Pi = e^{r(t-t_0)} \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)S^2\Gamma^i dt$$

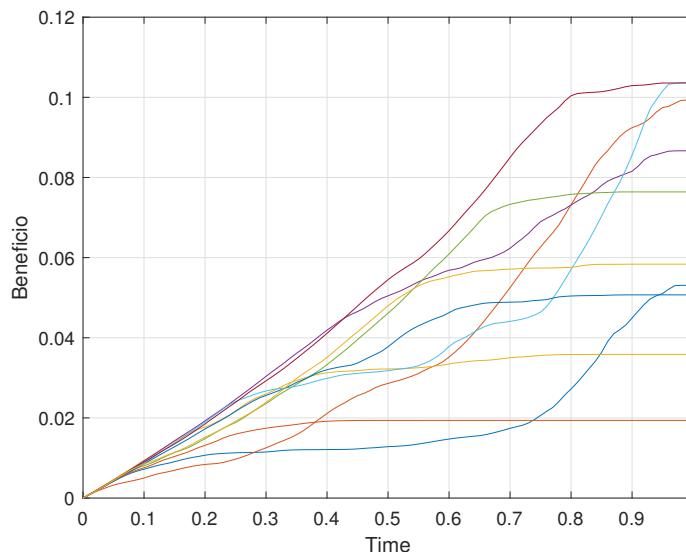


Figura 2.7: Beneficios de cobertura sobre la volatilidad implícita

por lo que en tiempo final hay un beneficio debe ser

$$\int_{t_0}^T d\Pi = \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) \int_{t_0}^T e^{r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i dt$$

que es siempre positivo si la volatilidad real es mayor que la implícita. Se puede calcular la media y varianza de este beneficio. Para mas información, ver el apéndice A.4.

Por lo tanto, el beneficio solo depende de gamma, por lo que las opciones put call tienen el mismo beneficio esperado. Si se construyen carteras con opciones con distintos strikes, se obtiene un beneficio de

$$\frac{1}{2} \sum_k (\sigma^2 - \tilde{\sigma}_k^2) \int_{t_0}^{T_k} e^{r(t-t_0)} S^2 \Gamma_k^i dt$$

cuya media y varianza se pueden calcular.

- **Cobertura cuando la volatilidad implícita es aleatoria:** Sean los modelos

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX_1$$

$$d\tilde{\sigma} = adt + bdX_2$$

y la correlación ρ entre dX_1 y dX_2 .

- **Cobertura sobre la volatilidad real:** Usando los mismo argumentos que antes, se llega a que el beneficio final está asegurado. Por otro lado, la variación de la cartera está

$$d\Pi = \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) S^2 \Gamma^i dt + (\Delta^i - \Delta^a) ((\mu - r + D) S dt + \sigma S dX_1) +$$

$$+ \frac{\partial V^i}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 V^i}{\partial \tilde{\sigma}^2} dt + \rho \sigma b S \frac{\partial^2 V^i}{\partial S \partial \tilde{\sigma}} dt.$$

- **Cobertura sobre la volatilidad implícita:** Usando los mismos argumentos que antes se llega a que la variación de la cartera está

$$d\Pi = dV^i - \Delta dS - r(V^i - \Delta S)dt - \Delta D S dt$$

$$= \Theta^i dt + \Delta^i dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma^i dt + \frac{\partial V^i}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 V^i}{\partial \tilde{\sigma}^2} dt$$

$$+ \rho \sigma b S \frac{\partial^2 V^i}{\partial S \partial \tilde{\sigma}} dt - \Delta dS - r(V^i - \Delta S)dt - \Delta D S dt.$$

se puede obtener su esperanza y varianza.

2.6.1. Comportamiento de la volatilidad implícita

Existen varios “modelos” de cómo se comporta la volatilidad implícita:

- **Sticky Strike:** es constante para cada opción (i.e. para cada strike y vencimiento). Es común en los mercados de renta variable. Si la volatilidad implícita difiere de la volatilidad real se pueden obtener beneficios como se ha explicado.
- **Sticky Delta:** depende de su moneyness ($\xi = S/E$). Es común en mercados como el FX, donde se cotizan precios y volatilidades para opciones con deltas específicas. Se modela como $\tilde{\sigma} = g(\xi, t)$ por lo que:

$$d\tilde{\sigma} = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mu \frac{S}{E} \frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{S^2}{E^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} \right) dt + \sigma \frac{S}{E} \frac{\partial g}{\partial \xi} dX_1,$$

La variación de la volatilidad implícita está perfectamente correlacionada con el subyacente, permitiendo una cobertura perfecta en términos de mark-to-market.

Hay una variantes donde la volatilidad implícita depende de la volatilidad ATM y de una función del moneyness, por ejemplo:

$$\tilde{\sigma} = \sigma_{ATM} g \left(\frac{\log(S/E)}{\sqrt{T-t}} \right).$$

2.7. Opciones americanas

Aquellas que pueden ejercerse en cualquier momento antes de su vencimiento. Sea $\Phi(S)$ el payoff de la opción, entonces se cumple que:

$$V \geq \Phi(S)$$

Si no fuese el caso, entonces $V < \Phi(S) \Rightarrow \Phi(S) - V > 0$, por lo que se podría comprar una opción y ejercer al momento obteniendo un beneficio sin riesgo, por lo que habría arbitraje.

En general, el punto óptimo de ejercicio es aquel que hace que la pendiente de la opción sea la misma que la pendiente del *payoff*.

Sea la cartera

$$\Pi = V - \Delta S$$

entonces la diferencia entre el cambio de valor de la cartera y su crecimiento por el interés es:

$$d\Pi - r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r(V - \Delta S) \right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS$$

y eligiendo $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, se obtiene:

$$d\Pi - r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \right) dt$$

Para evitar arbitraje solo se debe asegurar que esta resta sea no positiva, de manera que la cartera no gane mas que el interés:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \leq 0 \right]$$

El caso $\dots < 0$ no produce arbitraje porque al vender una opción y meterlo en el banco (para que crezca a ritmo r), se corre el riesgo de que el comprador ejerza en cualquier momento.

2.7.1. Dividendos discretos

Como se ha visto en la ecuación (2.4.1), si hay dividendo discreto se cumple que $V(S, t_i^-) = V(S - D_i, t_i^+)$, por lo que para evitar que el valor de la opción caiga por debajo del valor de ejercicio inmediato se impone

$$V(S, t_d^-) = \max(V(S - D, t_d^+), \Phi(S))$$

garantizando que el valor de la opción nunca sea menor que el payoff si se ejerciera justo antes del dividendo evitando así arbitraje.

2.7.2. Opciones one-touch

Es una versión americana de la opción binaria europea. Se paga una cantidad fija si el subyacente alcanza una cierta barrera antes de vencimiento. El pago realiza tan pronto como se alcanza la barrera, sin esperar al vencimiento.

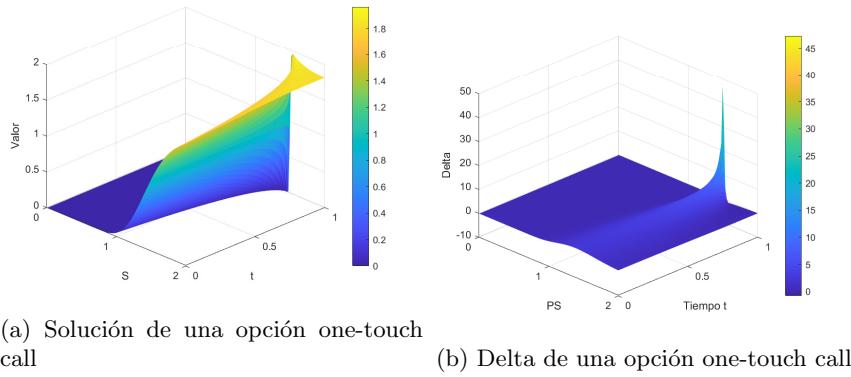
- **One-touch call:** paga si el subyacente S alcanza un nivel superior S_u .

$$V(S, t) = \left(\frac{S_u}{S} \right)^{2r/\sigma^2} N(d_6) + \frac{S}{S_u} N(d_1)$$

donde

$$d_6 = \frac{\log(S/S_u) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

y d_1 es el mismo que en Black-Scholes (2.3.2).



- **One-touch put:** paga si S cae hasta un nivel inferior S_l .

$$V(S, t) = \left(\frac{S_l}{S} \right)^{2r/\sigma^2} N(-d_6) + \frac{S}{S_l} N(-d_1)$$

con

$$d_6 = \frac{\log(S/S_l) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y d_1 es el mismo que en Black-Scholes (2.3.2).

- **Double one-touch:** paga si S alcanza cualquiera de dos barreras (superior S_u o inferior S_l) antes del vencimiento. El valor se puede calcular mediante series de Fourier y no es simplemente la suma de una call y una put one-touch.

2.7.3. Otros tipos de opciones americanas

- **Opciones israelíes:** opciones americanas en las que el escritor puede cancelar la opción más temprano pagando una penalización.
- **Opciones Bermuda:** opciones americanas que solo pueden ejercerse en fechas específicas, no en cualquier momento. Lo único que cambia con respecto a las americanas es que la condición (2.7) se aplica solo en los momentos de ejercicio permitido.
- **Opciones Make Your Mind Up:** opciones americanas en las que hay que avisar con cierta antelación si se va a ejercer. Hay más información en el apéndice A.3.
- **Opciones instalment:** no son exactamente americanas, pero son similares. Hay más información en el apéndice A.3.

Apéndice A

Apéndices

A.1. Cálculo de Itô

Lema de Ito para función de dos procesos de Ito (I)

Si tenemos dos procesos de Ito Y^1 e Y^2 de modo que

$$Y_t^i - Y_s^i = \int_s^t \alpha_u^i du + \int_s^t \beta_u^i dX_u, \quad i = 1, 2.$$

y una función $f = f(t, x^1, x^2)$ con las derivadas parciales segundas continuas, entonces

$$\begin{aligned} f(t, Y_t^1, Y_t^2) - f(s, Y_s^1, Y_s^2) &= \int_s^t f_t(u, Y_u^1, Y_u^2) du + \\ &\int_s^t \left(\frac{1}{2} (\beta_u^1)^2 f_{x^1 x^1}(u, Y_u^1, Y_u^2) + \frac{1}{2} (\beta_u^2)^2 f_{x^2 x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) + \beta_u^1 \beta_u^2 f_{x^1 x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) \right) du + \\ &\int_s^t f_{x^1}(u, Y_u^1, Y_u^2) dY_u^1 + \int_s^t f_{x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) dY_u^2, \end{aligned}$$

donde se sigue la notación de subíndices para las derivadas parciales respecto t , x^1 y x^2 . La fórmula se generaliza de manera natural para $f(t, Y_t^1, \dots, Y_t^p)$, con $p \geq 2$.

C.Vázquez (UDC), M2i 2024-25

Lema de Ito para función de dos procesos de Ito (II)

Veamos la versión diferencial del resultado anterior. Si tenemos dos procesos de Ito Y^1 e Y^2 de modo que

$$dY_t^i = \alpha_t^i dt + \beta_t^i dX_t, \quad i = 1, 2. \quad (*)$$

y $F_t = f(t, Y_t^1, Y_t^2)$, entonces

$$\begin{aligned} dF_t &= f_t(t, Y_t^1, Y_t^2) dt + \\ &\left(\frac{1}{2} (\beta_t^1)^2 f_{x^1 x^1}(t, Y_t^1, Y_t^2) + \frac{1}{2} (\beta_t^2)^2 f_{x^2 x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) + \beta_t^1 \beta_t^2 f_{x^1 x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) \right) dt + \\ &f_{x^1}(t, Y_t^1, Y_t^2) dY_t^1 + f_{x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) dY_t^2. \end{aligned}$$

Se pueden sustituir las expresiones de dY_t^1 y dY_t^2 en función de dX_t utilizando (*) y claramente el proceso $F = (F_t, t \geq 0)$ es un proceso de Ito.

C.Vázquez (UDC), M2i 2024-25

Lema de Ito más general (I)

Sean los brownianos X^j , $j = 1, \dots, m$ incorrelados y los procesos de Ito generales:

$$Y_t^i - Y_s^i = \int_s^t \alpha_u^i du + \int_s^t \sum_{j=1}^m \beta_u^{ij} dX_u^j, \quad i = 1, \dots, n,$$

o en forma diferencial para el proceso de Ito n -dimensional Y :

$$dY_t = \alpha_t dt + \beta_t dX_t.$$

Ejemplo con $n = 2$: Consideramos $Y = (Y^1, Y^2)$ definidos por:

$$dY_t^1 = \alpha_t^1 dt + \beta_t^{11} dX_t^1 + \beta_t^{12} dX_t^2, \quad dY_t^2 = \alpha_t^2 dt + \beta_t^{21} dX_t^1 + \beta_t^{22} dX_t^2,$$

Aplicando $dt^2 = dt dX_t^1 = dt dX_t^2 = 0$, $dX_t^i dX_t^j = \delta_{ij} dt$ se obtiene:

$$dY_t^i dY_t^i = ((\beta_t^{11})^2 + (\beta_t^{22})^2) dt, \quad dY_t^1 dY_t^2 = (\beta_t^{11} \beta_t^{22} + \beta_t^{12} \beta_t^{21}) dt$$

C.Vázquez (UDC), M2i 2024-25

Lema de Ito más general (II)

Sea $f = (f_1(t, x), \dots, f_p(t, x))$ con derivadas parciales segundas continuas, entonces el proceso de Ito p -dimensional $F_t = (f_1(t, Y_t), \dots, f_p(t, Y_t))$ verifica para $k = 1, \dots, p$:

$$dF_t^k = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, Y_t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t, Y_t) dY_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, Y_t) dY_t^i dY_t^j$$

donde aplicando $dX_t^i dX_t^j = \delta_{ij} dt$, $dX_t^i dt = dt dX_t^i = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} dF_t^k &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^i \partial x^j} \left[\sum_{l,q=1}^m \beta_t^{il} \beta_t^{jq} \delta_{lq} \right] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \alpha_t^i \right) (t, Y_t) dt \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \left[\sum_{l=1}^m \beta_t^{il} \right] \right) (t, Y_t) dX_t^l \end{aligned}$$

Ejercicio: Escribir el resultado cuando $dX_t^i dX_t^j = \rho_t^{ij} dt$, $j = 1, \dots, m$, correspondiente al caso de brownianos correlados

C.Vázquez (UDC), M2i 2024-25

A.2. Generalizaciones sencillas de Black-Scholes

8.9 FORMULAE FOR POWER OPTIONS

An option with a payoff that depends on the asset price at expiry raised to some power is called a **power option**. Suppose that it has a payoff

$$\text{Payoff}(S^\alpha)$$

we can find a simple formula for the value of the option if we have a simple formula for an option with payoff given by

$$\text{Payoff}(S). \quad (8.9)$$

This is because of the lognormality of the underlying asset.

Writing

$$\mathcal{S} = S^\alpha$$

the Black–Scholes equation becomes, in the new variable \mathcal{S} ,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2\mathcal{S}^2\frac{\partial^2 V}{\partial \mathcal{S}^2} + \alpha\left(\frac{1}{2}\sigma^2(\alpha - 1) + r\right)\mathcal{S}\frac{\partial V}{\partial \mathcal{S}} - rV = 0.$$

Thus whatever the formula for the option value with simple payoff (8.9), the formula for the power version has S^α instead of S and adjustment made to σ , r and D .

8.10 THE log CONTRACT

The **log contract** has the payoff

$$\log(S/E).$$

The theoretical fair value for this contract is of the form

$$a(t) + b(t)\log(S/E).$$

Substituting this expression into the Black–Scholes equation results in

$$\dot{a} + \dot{b}\log(S/E) - \frac{1}{2}\sigma^2b + (r - D)b - ra - rb\log(S/E) = 0,$$

where \cdot denotes d/dt . Equating terms in $\log(S/E)$ and those independent of S results in

$$b(t) = e^{-r(T-t)} \quad \text{and} \quad a(t) = (r - D - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)e^{-r(T-t)}.$$

The two arbitrary constants of integration have been chosen to match the solution with the payoff at expiry.

This value is rather special in that the dependence of the option price on the underlying asset, S , and the volatility, σ , uncouples. One term contains S and no σ and the other contains σ and no S . We briefly saw in Chapter 7 the concept of vega hedging to eliminate volatility risk. It is conceivable, even though not entirely justifiably, that the simplicity of the log contract value makes it a useful weapon for hedging other contracts against fluctuations in volatility. Having said that, it's not exactly a highly liquid contract.

The log contract payoff can be positive or negative depending on whether $S > E$ or $S < E$. If we modify the payoff to be

$$\max(\log(S/E), 0)$$

then we have a genuine ‘option’ which may or may not be exercised. The value of this option is

$$e^{-r(T-t)} \sigma \sqrt{T-t} N'(d_2) + e^{-r(T-t)} (\log(S/E) + (r - D - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)) N(d_2).$$

8.11 SUMMARY

In this chapter I made some very simple generalizations to the Black–Scholes world. I showed the effect of discretely paid dividends on the value of an option, deriving a jump condition by a no-arbitrage argument. Generally, this condition would be applied numerically and its implementation is discussed in Chapter 78. I also showed how time-dependent parameters can be incorporated into the pricing of simple vanilla options.

FURTHER READING

- See Merton (1973) for the original derivation of the Black–Scholes formulae with time-dependent parameters.
- For a model with stochastic dividends, see Geske (1978).
- The practical implications of discrete dividend payments are discussed by Gemmill (1992).
- See Neuberger (1994) for further info on the log contract.

A.3. Opciones Make Your Mind Up

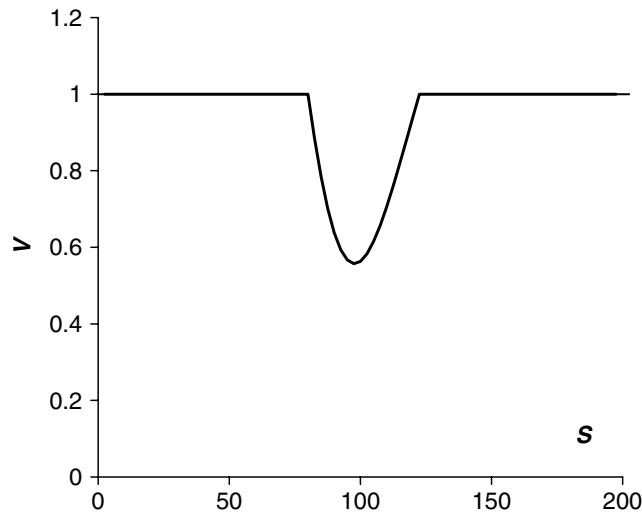


Figure 9.8 The value of a double one-touch option.

9.8.1 Bermudan Options

It is common for contracts that allow early exercise to permit the exercise only at certain specified times, and not at *all* times before expiry. For example, exercise may only be allowed on Thursdays between certain times. An option with such intermittent exercise opportunities is called a **Bermudan option**. All that this means mathematically is that the constraint (9.4) is only ‘switched on’ at these early exercise dates. The pricing of such a contract numerically is, as we shall see, no harder than the pricing of American options when exercise is permitted at all times.

This situation can be made more complicated by the dependence of the exercise dates on a second asset. For example, early exercise is permitted only when a second asset is above a certain level. This makes the contract a multi-asset contract, see Chapter 11.

9.8.2 Make Your Mind Up

In some contracts the decision to exercise must be made before exercise takes place. For example, we must give two weeks’ warning before we exercise, and we cannot change our mind. This contract is not hard to value theoretically. Suppose that we must give a warning of time τ . If at time t we decide to exercise at time $t + \tau$ then on exercise we receive a certain deterministic amount. To make the analysis easier to explain, assume that there is no time dependence in this payoff, so that on exercise we receive $P(S)$. The value of this payoff at a time τ earlier is $V^\tau(S, \tau)$ where $V^\tau(S, t)$ is the solution of

$$\frac{\partial V^\tau}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^\tau}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V^\tau}{\partial S} - rV^\tau = 0$$

with

$$V^\tau(S, 0) = P(S).$$

This would have to be modified if the problem were time-inhomogeneous.

Obviously, we have

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0.$$

Because $V^\tau(S, \tau)$ is the value of the contract at decision time if we have decided to exercise then our early-exercise constraint becomes

$$V(S, t) \geq V^\tau(S, \tau).$$

As an example, suppose that we get a payoff of $S - E$, this is $P(S)$. Note that there is no $\max(\cdot)$ function in this; we have said we will exercise and exercise we must, even if the asset is out of the money. The function $V^\tau(S, \tau)$ is clearly $S - Ee^{-r\tau}$ so that our **make-your-mind-up option** satisfies the constraint

$$V(S, t) \geq S - Ee^{-r\tau}.$$

A further complication is to allow one change of mind. That is, we say we will exercise in two weeks' time, but when that date comes we change our mind, and do not exercise. But the next time we say we will exercise, we must. This is also not too difficult to price theoretically.

The trick is to introduce two functions for the option value, $V_0(S, t)$ and $V_1(S, t)$. The former is the value before making the first decision to exercise, the latter is the value having made that decision but having changed your mind. We also need $V_0^\tau(S, t', t)$ and $V_1^\tau(S, t)$. The latter is simply the earlier V^τ . The former is slightly more complicated. In $V_0^\tau(S, t', t)$ the t' represents the time at which the option will be exercised or exercise is declined. The t represents the time before that date.

The problem for V_1 is exactly the same as for the basic make-your-mind-up option i.e.

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1 \leq 0$$

with

$$V_1(S, t) \geq V_1^\tau(S, \tau)$$

where

$$\frac{\partial V_0^\tau}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_0^\tau}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_0^\tau}{\partial S} - rV_0^\tau = 0$$

with

$$V_1^\tau(S, 0) = P(S).$$

The function $V_0^\tau(S, t', t)$ satisfies

$$\frac{\partial V_0^\tau}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_0^\tau}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_0^\tau}{\partial S} - rV_0^\tau = 0$$

(with time derivatives with respect to t and *not* t') with

$$V_0^\tau(S, t', 0) = \max(P(S), V_1(S, t')).$$

Then we have

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_0}{\partial S} - rV_0 \leq 0$$

with the optimality constraint

$$V_0(S, t) \geq V_0^\tau(S, t + \tau, \tau).$$

Obviously, we can introduce more levels if we are permitted to change our minds a specified number of times.

In Part Two we will see many problems where we must introduce more than one function to value a single contract.

9.9 OTHER ISSUES

The pricing of American options and all the issues that this raises are important for many reasons. Some of these we describe here, but we will come back to the ideas again and again.

9.9.1 Non-linearity

The pricing of American options is a non-linear problem because of the free boundary. There are other non-linear problems in finance, some are non-linear because of the free boundary and some because the governing differential equation is itself non-linear. Non-linearity can be important for several reasons. Most obviously, non-linear problems are harder to solve than linear problems, usually requiring numerical solution.

Non-linear governing equations are found in Chapter 48 for models of pricing with transaction costs, Chapter 52 for uncertain parameter models, Chapter 58 for models of market crashes, and Chapter 59 for models of options used for speculative purposes.

9.9.2 Free-boundary Problems

Free-boundary problems, in other contexts, will be found scattered throughout the book. Again, the solution must almost always be found numerically. As an example of a free-boundary problem that is not quite an American option (but is similar), consider the **instalment option**. In this contract the owner must keep paying a premium, on prescribed dates, to keep the contract alive. If the premium is not paid then the contract lapses. Consider two cases, the first is when the premium is paid out continuously day by day, and the second, more realistic case, is when the premium is paid at discrete intervals. Part of the valuation is to decide whether or not it is worth paying the premium, or whether the contract should be allowed to lapse.

First, consider the case of continuous payment of a premium. If we pay out a constant rate $L dt$ in a time step dt to keep the contract alive then we must solve

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV - L \leq 0.$$

The term L represents the continual input of cash. But we would only pay the premium if it is, in some sense, ‘worth it.’ As long as the contract value is positive, we should maintain the

payments. If the contract value ever goes negative, we should let the contract lapse. However, we can do better than this. If we impose the constraint

$$V(S, t) \geq 0,$$

with continuity of the delta, and let the contract lapse if ever $V = 0$ then we give our contract the *highest value possible*. This is very much like the American option problem, but now we must optimally cease to pay the premium (instead of optimally exercising).

Now let us consider the more realistic discrete payment case. Suppose that payments of L (not $L dt$) are made discretely at time t_i . The value of the contract must increase in value from before the premium is paid to just after it is paid. The reason for this is clear. Once we have paid the premium on date t_i we do not have to worry about handing over any more money until time t_{i+1} . The rise in value exactly balances the premium, L :

$$V(S, t_i^-) = V(S, t_i^+) - L,$$

where the superscripts + and – refer to times just after and just before the premium is paid. But we would only hand over L if the contract would be worth more than L at time t_i^+ . Thus we arrive at the jump condition

$$V(S, t_i^-) = \max(V(S, t_i^+) - L, 0).$$

If $V(S, t_i^+) \leq L$ then it is optimal to discontinue payment of the premiums.

Figure 9.9 Spreadsheet showing the value of an American call option on a stock paying dividends. Shaded area is where you should exercise.

In practice, the premium L is chosen so that the value of the contract at initiation is exactly equal to L . This means that the start date is just like any other payment date.

9.9.3 Numerical Solution

Although free-boundary problems must usually be solved numerically, this is not difficult as we shall see in later chapters. We solve the relevant equation by either a finite-difference method or the binomial method.

The other numerical method that I describe is the Monte Carlo simulation. If there is any early-exercise feature in a contract this makes solution by Monte Carlo more complicated. I discuss this issue in Chapter 80.

The next three figures, Figures 9.9, 9.10, and 9.11, show the output of an explicit finite-difference method for the value of American call and put and Bermudan put respectively. You can't read the numbers but you can see that Excel's conditional formatting has been used to show the regions where the option value and the payoff are the same. Here you should exercise the option. In these figures time is in the top row, long column on the left is the stock price. Time goes from right to left, so that the second column is the payoff. The second row down represents option value when stock price is so the further down the row the higher the stock price.



Figure 9.10 Spreadsheet showing the value of an American put option. Shaded area is where you should exercise.

A.4. Media y varianza de cobertura con volatilidad implícita

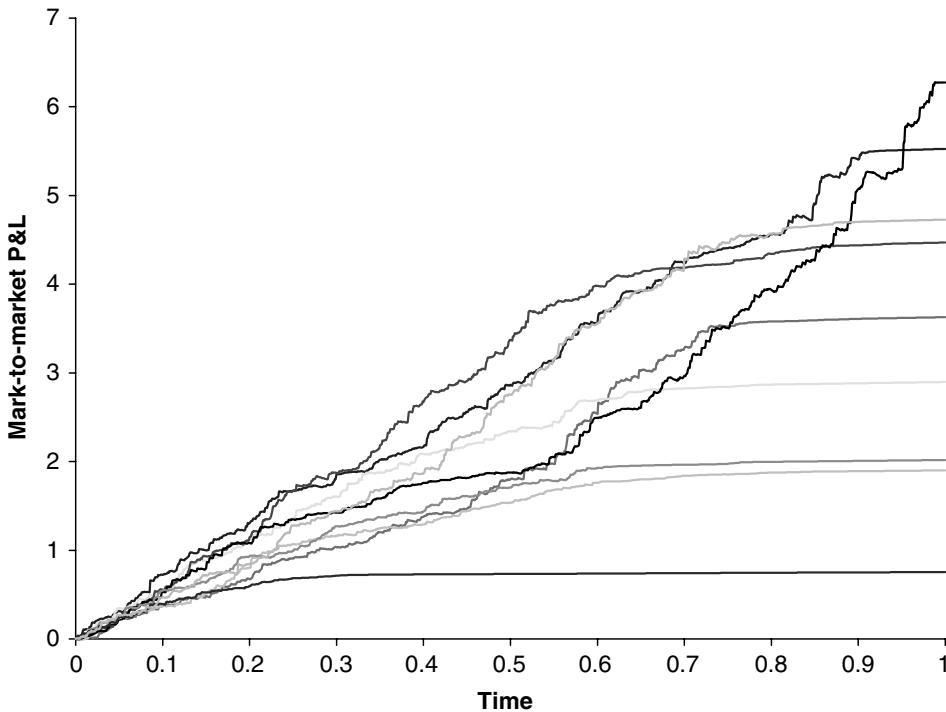


Figure 12.3 P&L for a delta-hedged option on a mark-to-market basis, hedged using implied volatility.

Peter Carr (2005) and Hennard (2001) show that if you hedge using a delta based on a volatility σ_h then the PV of the total profit is given by

$$V(S, t; \sigma_h) - V(S, t; \tilde{\sigma}) + \frac{1}{2} (\sigma^2 - \sigma_h^2) \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^h dt, \quad (12.2)$$

where the superscript on the gamma means that it uses the Black–Scholes formula with a volatility of σ_h .



12.5.1 The Expected Profit after Hedging using Implied Volatility

When you hedge using delta based on implied volatility the profit each ‘day’ is deterministic but the present value of total profit by expiration is path dependent, and given by

$$\frac{1}{2} (\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) \int_{t_0}^T e^{-r(s-t_0)} S^2 \Gamma^i ds.$$

Introduce

$$I = \frac{1}{2} (\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) \int_{t_0}^t e^{-r(s-t_0)} S^2 \Gamma^i ds.$$

Since therefore

$$dI = \frac{1}{2} (\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i dt$$

we can write down the following partial differential equation for the *real* expected value, $P(S, I, t)$, of I :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i \frac{\partial P}{\partial I} = 0,$$

with

$$P(S, I, T) = I.$$

Look for a solution of this equation of the form

$$P(S, I, t) = I + H(S, t)$$

so that

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial H}{\partial S} + \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i = 0.$$

The source term can be simplified to

$$\frac{E(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)e^{-r(T-t_0)}e^{-d_2^2/2}}{2\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi(T-t)}}.$$

Change variables to

$$x = \log(S/E) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau \quad \text{and} \quad \tau = T - t$$

and write

$$H = w(x, \tau).$$

The resulting partial differential equation is then a bit nicer. Details can be found in the appendix to this chapter

After some manipulations we end up with the expected profit initially ($t = t_0, I = 0$) being the single integral

$$\begin{aligned} & \frac{Ee^{-r(T-t_0)}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)}{2\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^T \frac{1}{\sqrt{\sigma^2(s-t_0) + \tilde{\sigma}^2(T-s)}} \\ & \times \exp\left(-\frac{\left(\log(S/E) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t_0) + (r - D - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)(T-s)\right)^2}{2(\sigma^2(s-t_0) + \tilde{\sigma}^2(T-s))}\right) ds. \end{aligned}$$

Results are shown in the following figures.

In Figure 12.4 is shown the expected profit versus the growth rate μ . Parameters are $S = 100$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $D = 0$, $E = 110$, $T = 1$, $\tilde{\sigma} = 0.2$. Observe that the expected profit has a maximum. This will be at the growth rate that ensures, roughly speaking, that the stock ends up close to at the money at expiration, where gamma is largest. In the figure is also shown the profit to be made when hedging with actual volatility. For most realistic parameters regimes the maximum expected profit hedging with implied is similar to the guaranteed profit hedging with actual.

In Figure 12.5 is shown expected profit versus E and μ . You can see how the higher the growth rate the larger the strike price at the maximum. The contour map is shown in Figure 12.6.

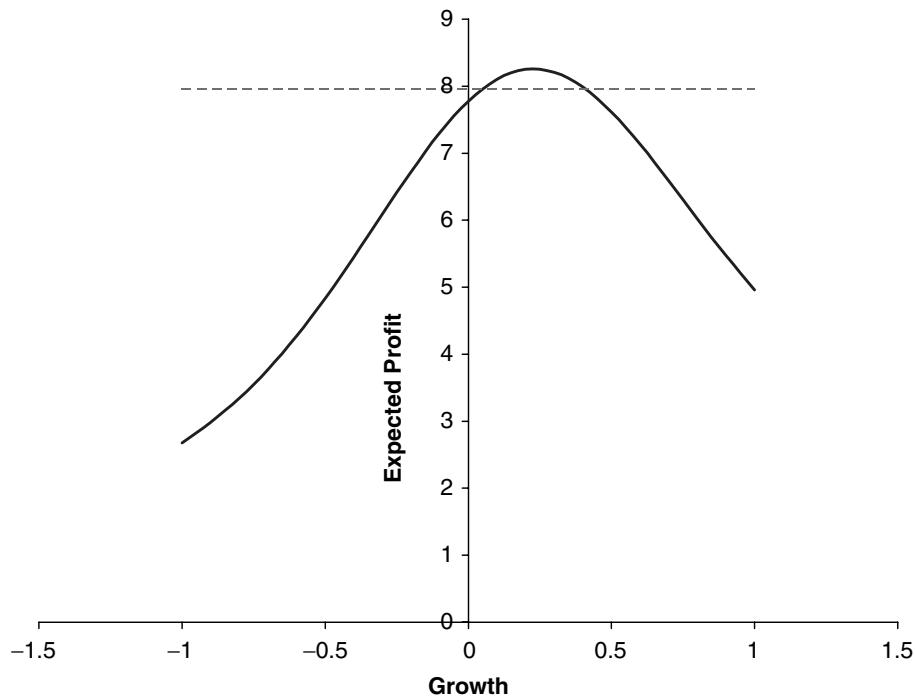


Figure 12.4 Expected profit, hedging using implied volatility, versus growth rate μ ; $S = 100$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $D = 0$, $E = 110$, $T = 1$, $\tilde{\sigma} = 0.2$. The dashed line is the profit to be made when hedging with actual volatility.

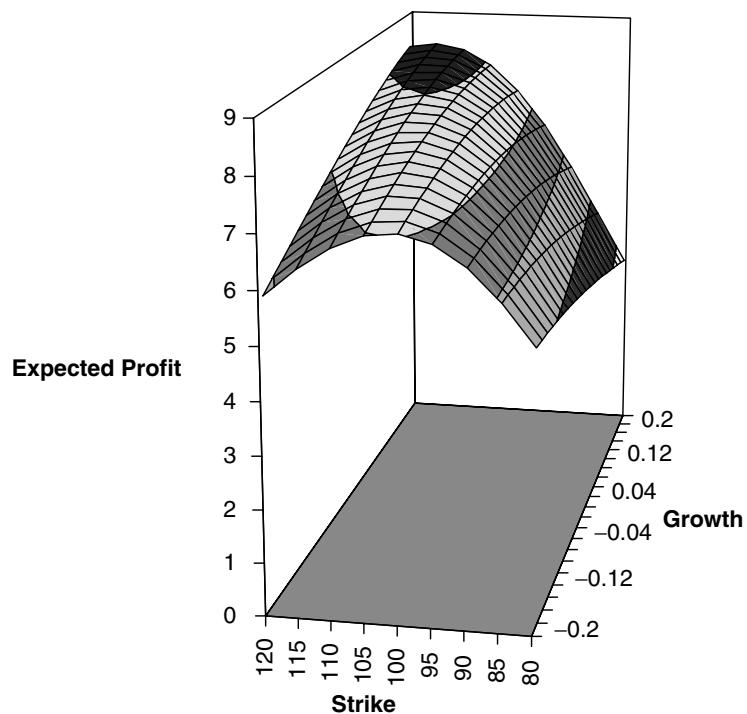


Figure 12.5 Expected profit, hedging using implied volatility, versus growth rate μ and strike E ; $S = 100$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $D = 0$, $T = 1$, $\tilde{\sigma} = 0.2$.

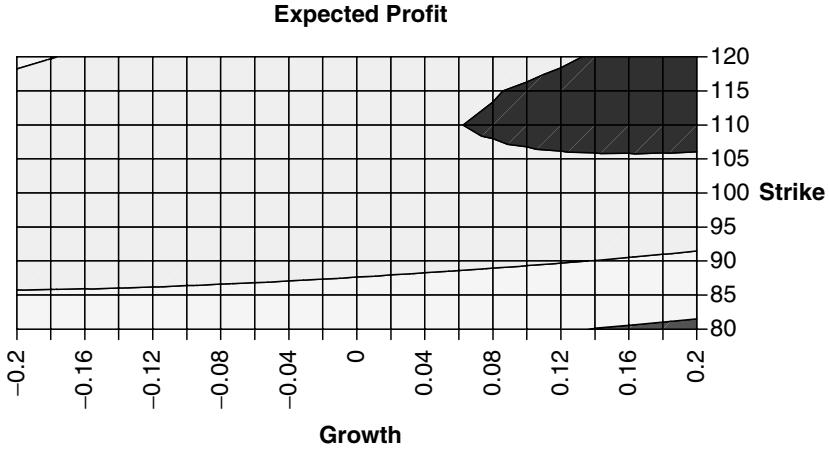


Figure 12.6 Contour map of expected profit, hedging using implied volatility, versus growth rate μ and strike E ; $S = 100$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $D = 0$, $T = 1$, $\tilde{\sigma} = 0.2$.



The effect of skew is shown in Figure 12.7. Here I have used a linear negative skew, from 22.5% at a strike of 75, falling to 17.5% at the 125 strike. The at-the-money implied volatility is 20% which in this case is the actual volatility. This picture changes when you divide the expected profit by the price of the option (puts for lower strikes, call for higher), see Figure 12.8. There is no maximum, profitability increases with distance away from the money. Of course, this doesn't take into account the risk, the standard deviation associated with such trades.

12.5.2 The Variance of Profit after Hedging using Implied Volatility

Once we have calculated the expected profit from hedging using implied volatility we can calculate the variance in the final profit. Using the above notation, the variance will be the expected value of I^2 less the square of the average of I . So we will need to calculate $v(S, I, t)$ where

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i \frac{\partial v}{\partial I} = 0,$$

with

$$v(S, I, T) = I^2.$$

The details of finding this function v are rather messy, but a solution can be found of the form

$$v(S, I, t) = I^2 + 2I H(S, t) + G(S, t).$$

The initial variance is $G(S_0, t_0) - F(S_0, t_0)^2$, where

$$G(S_0, t_0) = \frac{E^2(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)^2 e^{-2r(T-t_0)}}{4\pi\sigma\tilde{\sigma}} \int_{t_0}^T \int_s^T \frac{e^{p(u,s;S_0,t_0)}}{\sqrt{s-t_0}\sqrt{T-s}\sqrt{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}^2(T-u)}} \sqrt{\frac{1}{\sigma^2(s-t_0)} + \frac{1}{\tilde{\sigma}^2(T-s)} + \frac{1}{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}^2(T-u)}} du ds \quad (12.3)$$

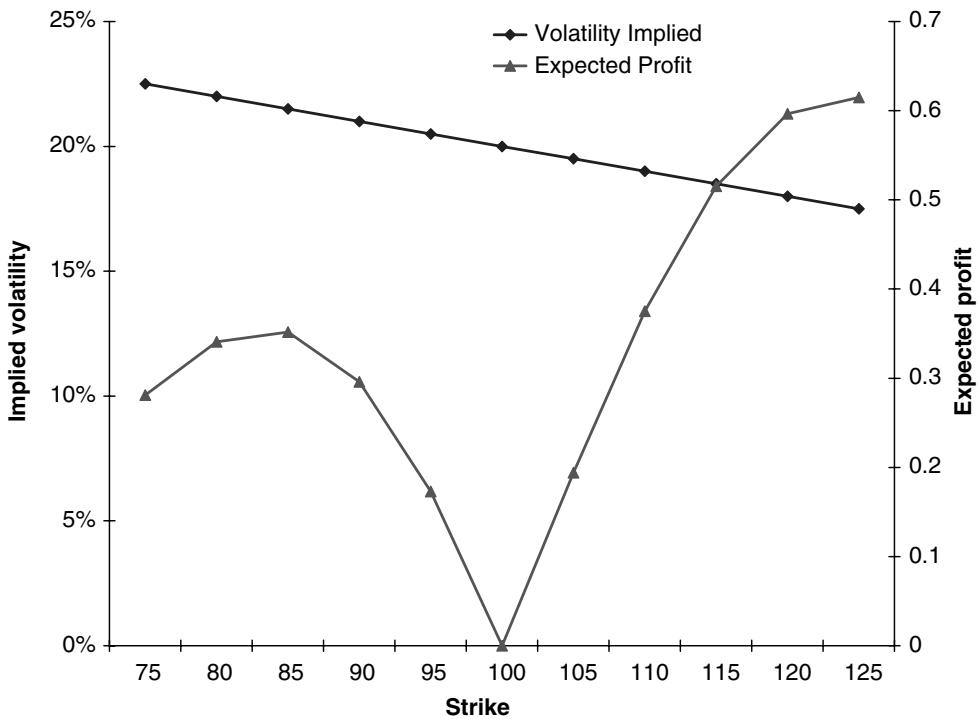


Figure 12.7 Effect of skew, expected profit, hedging using implied volatility, versus strike E ; $S = 100$, $\mu = 0$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.05$, $D = 0$, $T = 1$.

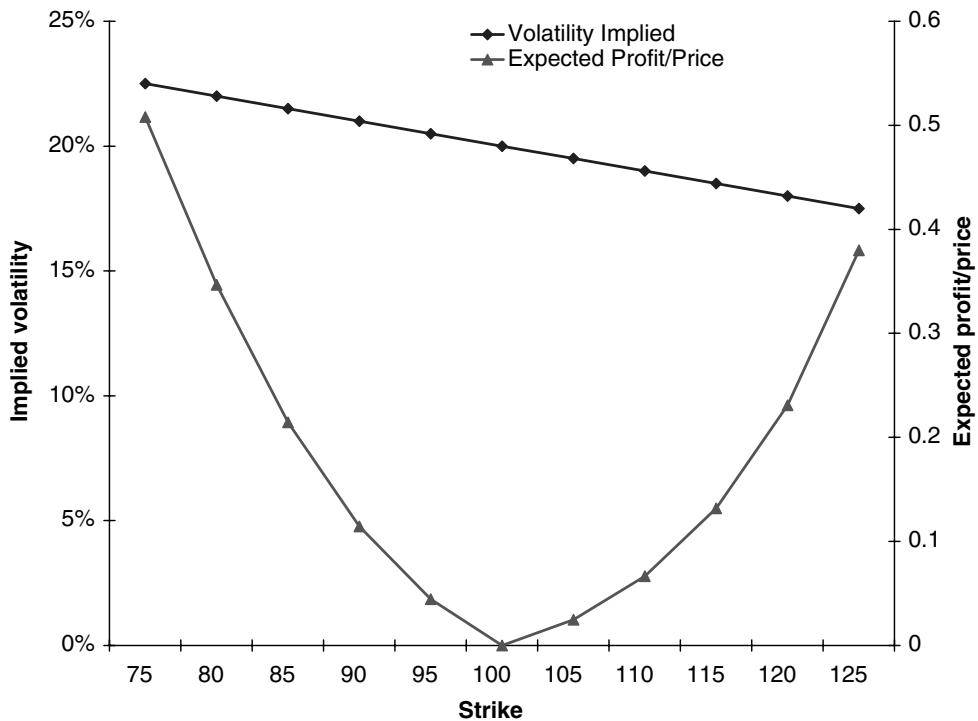


Figure 12.8 Effect of skew, ratio of expected profit to price, hedging using implied volatility, versus strike E ; $S = 100$, $\mu = 0$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.05$, $D = 0$, $T = 1$.

where

$$p(u, s; S_0, t_0) = -\frac{1}{2} \frac{(x + \alpha(T-s))^2}{\tilde{\sigma}^2(T-s)} - \frac{1}{2} \frac{(x + \alpha(T-u))^2}{\sigma^2(u-s) + \tilde{\sigma}^2(T-u)} \\ + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x + \alpha(T-s)}{\tilde{\sigma}^2(T-s)} + \frac{x + \alpha(T-u)}{\sigma^2(u-s) + \tilde{\sigma}^2(T-u)} \right)^2}{\frac{1}{\sigma^2(s-t_0)} + \frac{1}{\tilde{\sigma}^2(T-s)} + \frac{1}{\sigma^2(u-s) + \tilde{\sigma}^2(T-u)}}$$

and

$$x = \ln(S_0/E) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t_0), \quad \text{and} \quad \alpha = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - r + D + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2.$$

The derivation of this can be found in the appendix to this chapter.

In Figure 12.9 is shown the standard deviation of profit versus growth rate, $S = 100$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $D = 0$, $E = 110$, $T = 1$, $\tilde{\sigma} = 0.2$. Figure 12.10 shows the standard deviation of profit versus strike, $S = 100$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $D = 0$, $\mu = 0.1$, $T = 1$, $\tilde{\sigma} = 0.2$.

Note that in these plots the expectations and standard deviations have not been scaled with the cost of the options.

In Figure 12.11 is shown expected profit divided by cost versus standard deviation divided by cost, as both strike and expiration vary. In these plots $S = 100$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $D = 0$, $\mu = 0.1$, $\tilde{\sigma} = 0.2$. To some extent, although we emphasize only *some*, these diagrams can be interpreted in a classical mean-variance manner, see Chapter 18. The main criticism is, of course, that we are not working with Normal distributions, and, furthermore, there is no downside, no possibility of any losses.

Figure 12.12 completes the earlier picture for the skew, since it now contains the standard deviation.

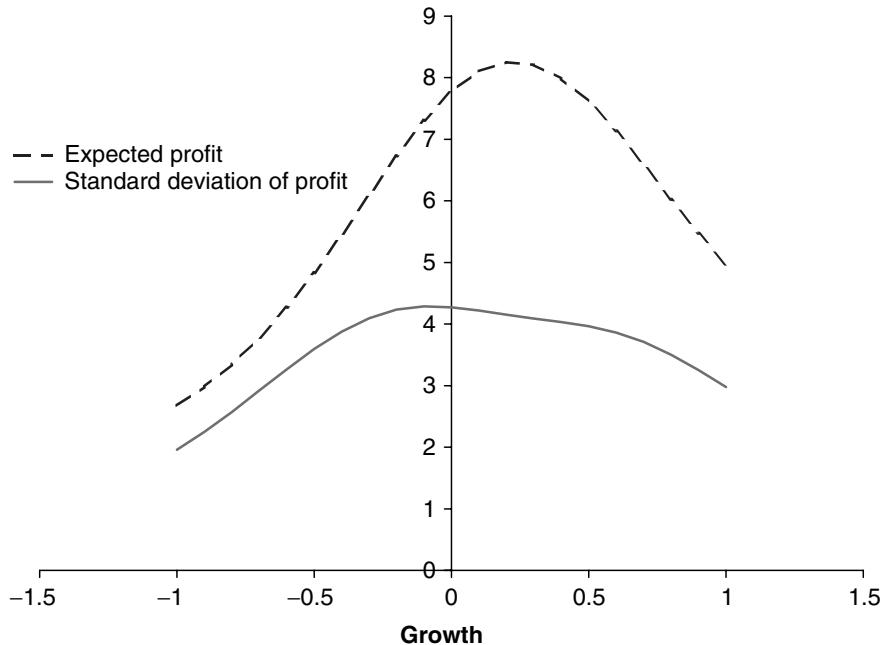


Figure 12.9 Standard deviation of profit, hedging using implied volatility, versus growth rate μ ; $S = 100$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $D = 0$, $E = 110$, $T = 1$, $\tilde{\sigma} = 0.2$. (The expected profit is also shown.)

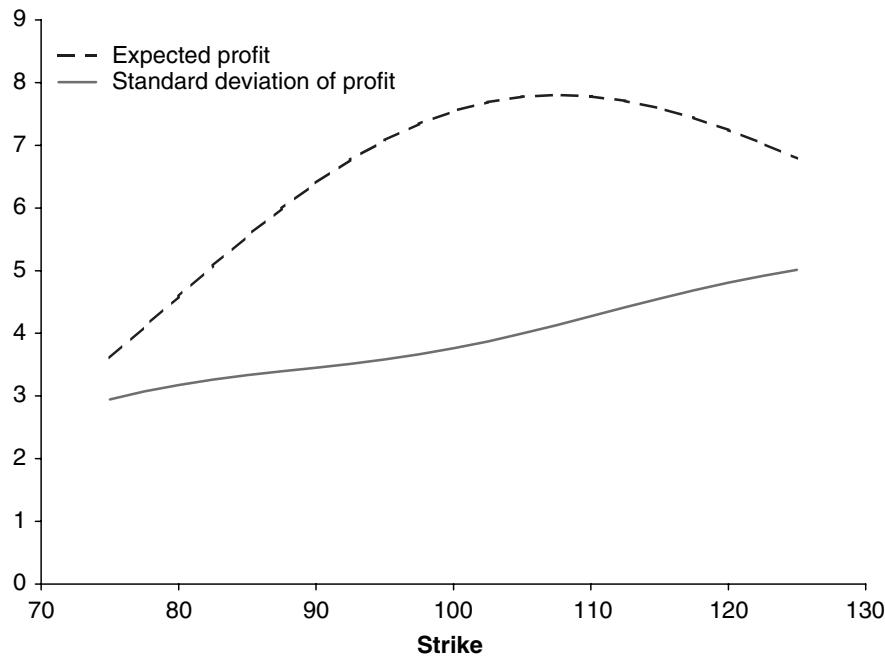


Figure 12.10 Standard deviation of profit, hedging using implied volatility, versus strike E ; $S = 100$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $D = 0$, $\mu = 0$, $T = 1$, $\tilde{\sigma} = 0.2$. (The expected profit is also shown.)

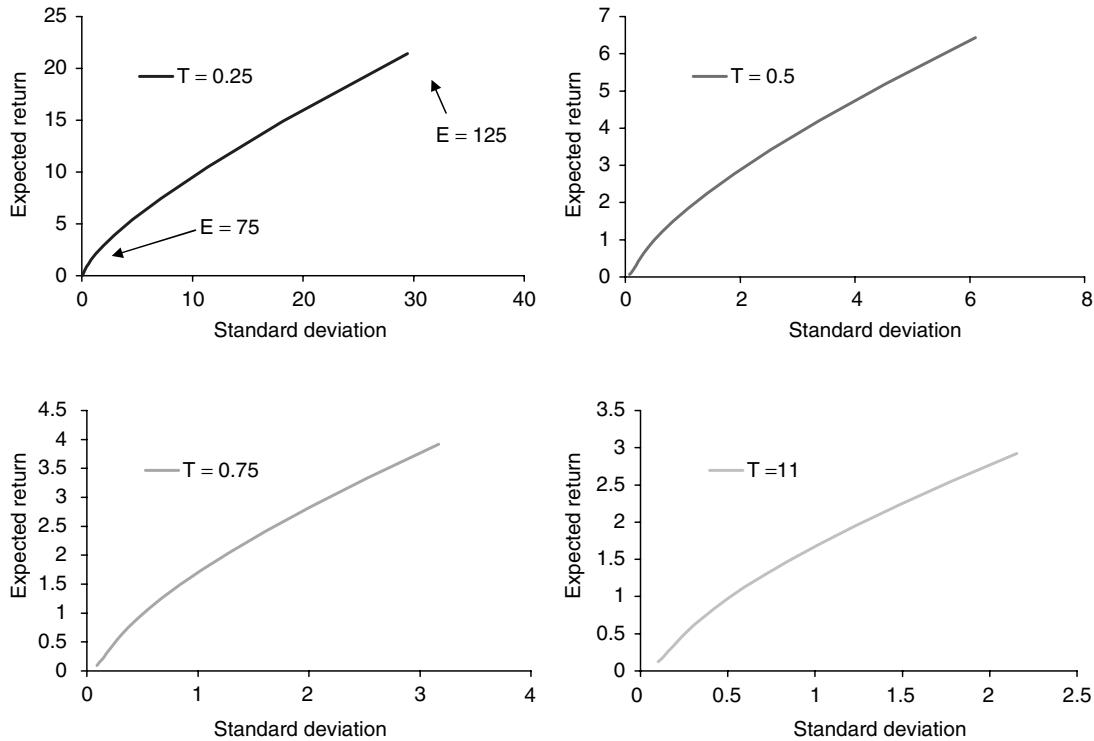


Figure 12.11 Scaled expected profit versus scaled standard deviation; $S = 100$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $D = 0$, $\mu = 0.1$, $\tilde{\sigma} = 0.2$. Four different expirations, varying strike.

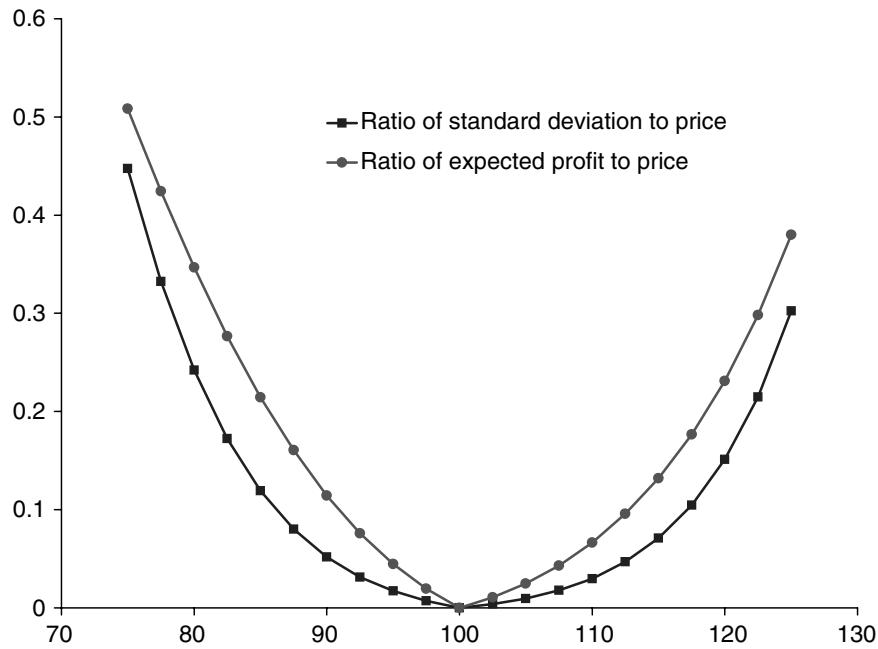


Figure 12.12 Effect of skew, ratio of expected profit to price, and ratio of standard deviation to price, versus strike E ; $S = 100$, $\mu = 0$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.05$, $D = 0$, $T = 1$.

12.5.3 Hedging with Different Volatilities

We will briefly examine hedging using volatilities other than actual or implied, using the general expression for profit given by (12.2).

The expressions for the expected profit and standard deviations now must allow for the $V(S, t; \sigma_h) - V(S, t; \tilde{\sigma})$, since the integral of gamma term can be treated as before if one replaces $\tilde{\sigma}$ with σ_h in this term. Results are presented in the next two figures.

In Figure 12.13 is shown the expected profit and standard deviation of profit when hedging with various volatilities. The thin, dotted lines, continuing on from the bold lines, represent hedging with volatilities outside the implied-actual range. The chart also shows standard deviation of profit, and minimum and maximum. Parameters are $E = 90$, $S = 100$, $\mu = -0.1$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.1$, $D = 0$, $T = 1$, and $\tilde{\sigma} = 0.2$. Note that it is possible to lose money if you hedge at below implied, but hedging with a higher volatility you will not be able to lose until hedging with a volatility of approximately 70%. In this example, the expected profit decreases with increasing hedging volatility.

Figure 12.14 shows the same quantities but now for an option with a strike price of 110. The upper hedging volatility, beyond which it is possible to make a loss, is now slightly higher. The expected profit now increases with increasing hedging volatility.

In practice which volatility one uses is often determined by whether one is constrained to mark to market or mark to model. If one is able to mark to model then one is not necessarily concerned with the day-to-day fluctuations in the mark-to-market profit and loss and so it is natural to hedge using actual volatility. This is usually not far from optimal in the sense of possible expected total profit, and it has no standard deviation of final profit. However, it is common to have to report profit and loss based on market values. This constraint may be imposed by a risk management department, by prime brokers, or by investors who may monitor