Finanzas cuantitativas

Apuntes-esquema

Autor:
Asier Merino Herrán

30 de junio de 2025

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Conceptos financieros básicos

En esta sección se explican ciertos conceptos financieros básicos en inglés.

1.1.1. Terminología básica

- **Equity, stock, share**: acción de una empresa.
- **Shareholders**: accionistas.
- **Dividens**: dividendos. Pagas generalmente cada 6 meses. **Cum** cuando se va a pagar el siguiente dividendo o **Es** cuando no. Suele haber bajadas del precio de acción cuando se paga dividendo. Si en cierto momento t_d se paga un dividendo $q \cdot S$, justo después de pagar el dividendo la acción en ausencia de arbitraje vale
$$S(1-q)$$
- **Stock split**: De vez en cuando empresas pueden hacer división de acciones, i.e, cada acción pasa a ser N acciones y el precio se divide entre N.
- **Commodities**: producto en bruto como oro, petróleo, ... Se suelen usar en mercados a futuro.
- **Foreign exchange, Forex, FX**: Cambio de divisas. Debe haber cambio consistente entre divisas para evitar arbitraje.
- **Índice**: Medida de cómo va un mercado/economía. Se calcula como la suma de un **basket** o conjunto selecto de acciones.
- **Interest**:
  - **Simple interest**: se aplica interés r al valor inicial.
  $$(1+r)P$$
  - **Compound interest**: se aplica interés r al valor inicial y al interés ganado:
    - **Discretely compounded interest**:
    $$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} P$$
    - **Continuously compounded interest**:
    $$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} P = e^{nr}P$$
  - **Fixed**: interés fijo.
  - **Floating**: interés variable.
- **Present value**: actualización de un valor futuro.
- **Coupon-bearing bonds**: bonos con cupón cada X tiempo que finalmente paga un **principal**.

- **Interest rate swaps**: dos partes se intercambian los intereses, por ejemplo, uno paga un r fijo y el otro el del Euribor 6M, o Euribor 3M vs Euribor 6M. Hay un capítulo entero a continuación.
- **Index-linked bond**: bonos asociados a un índice para evitar la inflación.
- **Retail Price Index (RPI)**: índice que mide la inflación en el Reino Unido.
- **Consumer Price Index (CPI)**: índice que mide la inflación en EE.UU.
- **Short position**: vender un activo (esperando que baje de precio).
- **Long position**: comprar un activo (esperando que suba de precio).
- **Derivatives**: instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otro activo.
- **Close position**: terminar una inversión o apuesta que se había abierto anteriormente, p.e. vender/comprar algo, dejar que algo expire, ejercer un contrato, ...
- **Fundamental analysis**: determinar el valor intrínseco o correcto de una empresa estudiando sus balances contables, estados financieros, equipo de gestión, patentes, competencias, proyecciones de beneficios, flujos de caja, ... Es muy complejo y hay veces en las que el mercado se comporta de manera irracional.
- **Technical analysis**: no importa lo que hace la empresa, se analiza cómo se comporta la acción usando gráficos de precios, tendencias, patrones técnicos, ... Se considera una pseudo-ciencia.
- **Quantitative analysis**: enfoque matemático y estadístico de los mercados financieros. Se usa para valorar derivados, gestión de riesgos, teoría de carteras, ...
- **Return**: porcentaje de crecimiento.

1.1.2. Contratos forward y futures

- **Forward contract**: una parte se compromete (y se **obliga**) a comprarle un activo a otra parte en la **delivery date** o **maturity** del contrato por un **delivery price**. EL **forward price** es el precio actualizado del subyacente (teniendo en cuenta interés, cupones, etc para que el contrato tenga valor inicial del contrato sea 0). El forward price cambia en cada momento, pero el delivery price se fija al firmar el contrato.
- **Future cotract**: como el forward, pero más público, estandarizado, con un ajuste diario y menor flexibilidad. Por ejemplo, un trader especulando con el SP500.
- **Spot price**: el valor de activo subyacente en tiempo t, i.e., S_t.
- **Going short**: vender un activo que no tienes, con la promesa de recomprarlo más adelante para devolverlo.

Para que uno de estos contratos no tenga arbitraje se debe cumplir que

$$S(t)e^{r(T-t)} - F = 0 \Rightarrow F = S(t)e^{r(T-t)}$$

1.1.3. Contratos future

Siempre hay un **delivery and Settlement** en el que se debe entregar el subyacente, pero muchas veces el contrato se cierra antes o se liquida en efectivo la diferencia entre lo pactado y el valor actual. Al entrar en futuros, debe haber un depósito de dinero (**Margin**) como garantía de que vas a pagar. Según va cambiando día a día el precio del contrato, se va añadiendo o retirando dinero de tu **margin account**. Como se da esta compensación diaria (cada dia me pagan/pago lo que haya ganado/perdido segun lo que firmé), el valor del contrato de resetea a 0 todos los días.

- **Initial Margin**: fianza inicial al abrir posición.
- **Maintenance Margin**: mínimo que debe haber en la cuenta.

Commodity futures

Futuros sobre materias primas, entra en juego costo de almacenamiento y rendimiento de conveniencia.

$$F = S(t)e^{(r+s-c)(T-t)}$$

donde s es el **storage cost** y c es el **convenience yield**, que es el beneficio de tener el bien físicamente.

- **Backwardation**: cuando el storage cost domina sobre el convenience yield

$$F = S(t)e^{(r+s-c)(T-t)} < S(t)e^{r(T-t)}$$

- **Contango**: cuando el convenience yield domina sobre el storage cost. SObre todo cuando el bien es escaso

$$F = S(t)e^{(r+s-c)(T-t)} > S(t)e^{r(T-t)}$$

FX futures

Contrato para comprar o vender divisas. No hay costes de almacenamiento, pero la divisa extranjera genera intereses si se invierte en banco extranjero.

$$F = S(t)e^{(r-r_f)(T-t)}$$

donde r es interés doméstico y r_f es interés extranjero.

Index futures

Futuros sobre índices de acciones. Similar a los FX, los dividendos bajan el valor del futuro.

$$F = S(t)e^{(r-q)(T-t)}$$

donde q es el porcentaje anual de dividendo.

1.2. Opciones

Una **Call** option es el derecho a comprar un **underlying asset** por un **exercise/strike price** hasta o el **expiry/expiration date**. Una **put option** es lo mismo, pero te da derecho a vender. Muchas veces las opciones se agrupan en **series**, i.e. diferentes combinaciones de strike y vencimiento disponibles para un mismo activo. Su **payoff function** es:

- **Call option**: Apuestas a que el mercado sube

$$\max(S-K,0)$$

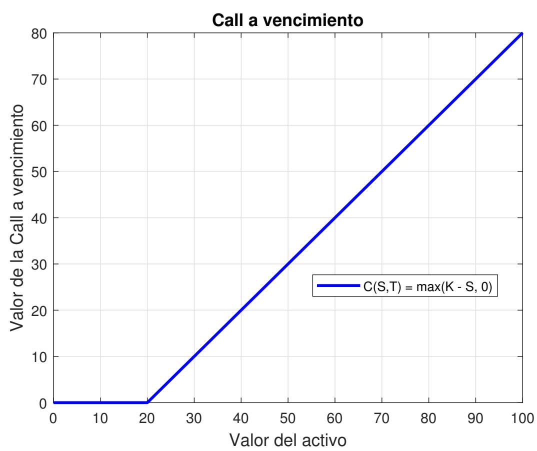


Figura 1.1: Payoff de opción Call a vencimiento

- **Put option**: Apuestas a que el mercado baje

$$\max(K - S, 0)$$

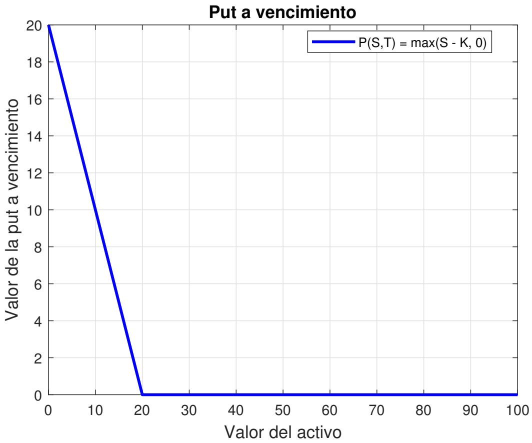
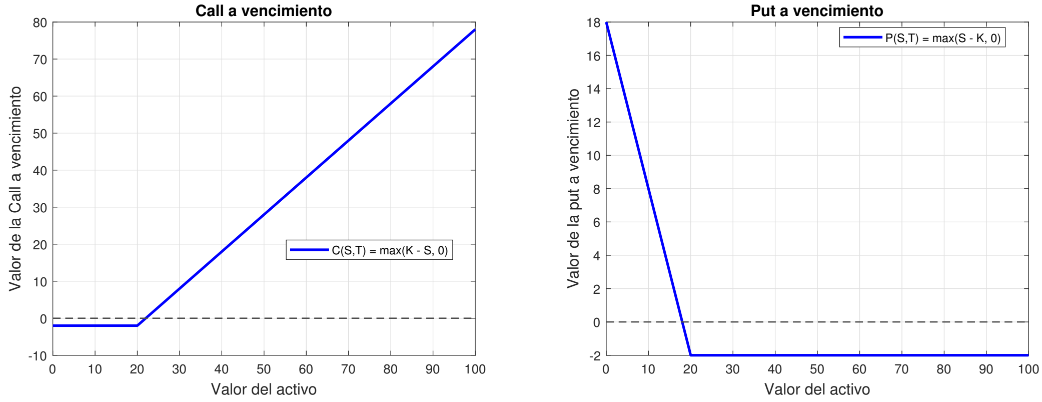


Figura 1.2: Payoff de opción Put a vencimiento

A veces el strike K se representa con una E. Las opciones **vainilla** son aquellas más simples; la función de pago solo depende del valor del subyacente en el momento del pago. Los **derivatives or contingent claims** son contratos que tienen dependencias más complejas.

1.2.1. Terminología

- **Premium**: lo que se paga inicialmente por el contrato (prima).
- **Underlying (asset)**: subyacente sobre el que depende el contrato.
- **Strike (price)/exercise price**: precio al que se compra o vende el subyacente. Se define con E o con K.
- **Expiration (date) o expiry (date)**: fecha en la que se puede ejercer o cuando se caduca la opción. Se denota por T.
- **Intrinsic value**: Valor del beneficio si la opción se ejerce en ese momento.
- **Time value**: Valor extra que tiene la opción por la incertidumbre futura.
- **In the money**: Opción con valor intrínseco positivo. Call: precio activo $>$ strike. Put: precio activo $<$ strike.
- **Out of the money**: Opción sin valor intrínseco. Call: precio activo $<$ strike. Put: precio activo $>$ strike.
- **At the money**: Precio del activo $\approx$ strike.
- **Long position**: Posición positiva en una cantidad o exposición.
- **Short position**: Posición negativa o venta en corto de un activo. “Vender sin tener activo para adelantar dinero”.
- **Profit diagram**: Como el payoff, pero restandole la prima.



(a) Call option (b) Put option

Figura 1.3: Profit diagram de opción a vencimiento

- **Over the counter/OTC**: opciones que se realizan fuera de la bolsa y que no tienen que seguir las convenciones estándar. Los términos se especifican en una **term sheet**.

- **Gearing/leverage**: relación entre la posible ganancia y la inversión. Las opciones tienen una gran gearing, pero el punto negativo es que si no hay ganancias, la pérdida es del 100 % (se pierde la prima). Aquí el writer es el que tiene mucho riesgo.

- **Hedging**: tomar posiciones contrarias, por ejemplo ser el writer de una opción y comprar/vender acciones del subyacente para reducir riesgos. También se usa para describir la reducción de la aleatoriedad en general.

1.2.2. Tipos de opciones

- **European options**: solo se puede ejercer en vencimiento.

- **American options**: se puede ejercer en cualquier momento hasta el vencimiento.

- **Bermudan options**: se puede ejercer en ciertas fechas específicas.

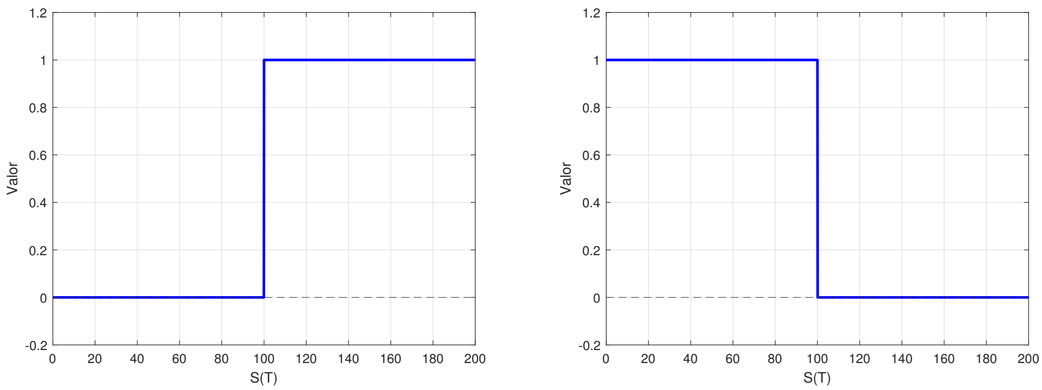
1.2.3. Call-Put Parity

La relación en cualquier tiempo t entre una Call y una Put con los mismos parámetros es:

$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$$

1.2.4. Opciones binarias/ digitales

A fecha de ejercicio son discontinuas. Pagan una cierta cantidad fija (como un \$1) si el subyacente está por encima/debajo de cierto precio de ejercicio E (o K). Las vainilla tienen un potencial de ganancia ilimitado, mientras que las binarias están acotadas, porque las compras cuando crees que el crecimiento/bajada es limitado.



(a) Call option (b) Put option

Figura 1.4: Binary option payoff

Su relación de paridad se obtiene considerando que tienes una opción binary de cada tipo, porque a precio de ejercicio se obtiene el \$1 que se paga (o la cantidad que se haya firmado) actualizado:

$$\text{Binary call} + \text{Binary put} = e^{-r(T-t)}$$

1.2.5. Portfolio of options/Option strategy

Conjunto de opciones combinadas de manera estratégica para un objetivo concreto (maximizar ganancias, minimizar riesgos,...). Para saber su payoff se suman los payoff de las opciones que compras y se restan los payoff de las opciones que vendes. De forma genérica, las estrategias se pueden clasificar en **spread** que son estrategias que involucran opciones del mismo tipo (calls o puts), y **combinations** que combinan opciones de distinto tipo (calls o puts); también existen las **calendar spread**, que combinan opciones con distintas fechas de vencimiento. Algunos ejemplos son:

- **Bull Spread (Spread Alcista)**: consiste en comprar una opción **call** con un strike más bajo E_1 y veneder otra opción call con strike más alto E_2 ($E_1 < E_2$). Hay beneficio si subyacente **sube**, pero está limitado a diferencia $E_2 - E_1$. Su payoff es:

$$\text{máx}(S - E_1, 0) - \text{máx}(S - E_2, 0)$$

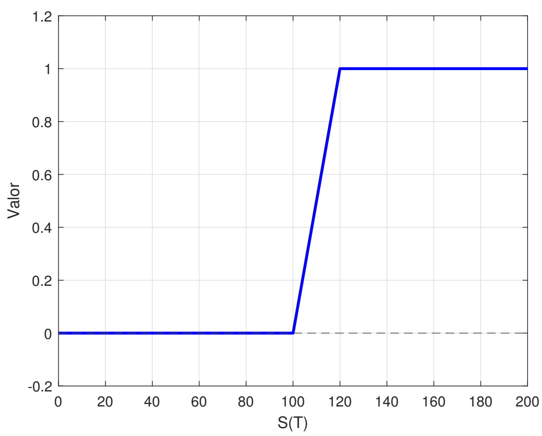


Figura 1.5: Payoff de Bull Spread a vencimiento (normalizado)

Para normalizarlo se divide por $E_2 - E_1$

- **Bear Spread (Spread Bajista)**: consiste consiste en comprar opción **put** con strike más alto E_2 y vender otra con strike más bajo E_1 ($E_1 < E_2$). Hay beneficio si el subyacente **baja**, pero está limitado a diferencia $E_2 - E_1$. Su payoff es:

$$\text{máx}(E_2 - S, 0) - \text{máx}(E_1 - S, 0)$$

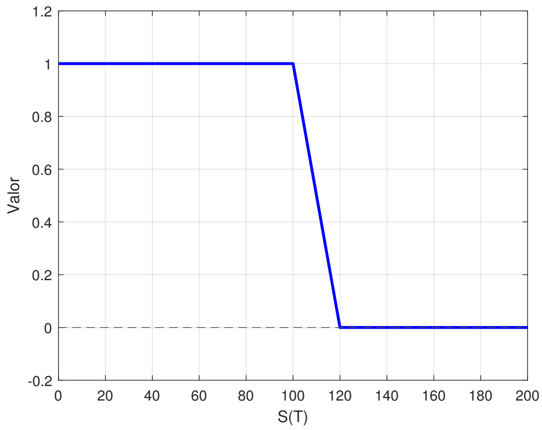


Figura 1.6: Payoff de Bear Spread a vencimiento (normalizado)

Para normalizarlo se divide por $E_2 - E_1$

- **Straddles**: comprar una call y una put con mismo strike y mismo expirity. Beneficio depende de la magnitud del movimiento del subyacente, pero costo alto por primas de dos opciones. Se suele hacer cuando hay un anuncio importante. Su payoff es:

$$\text{máx}(S - E, 0) + \text{máx}(E - S, 0)$$

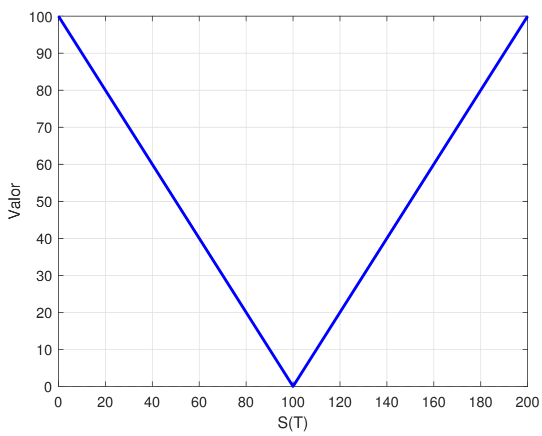


Figura 1.7: Payoff de Straddle

- **Strangle**: similar a straddles, pero con strikes distintos. Es más barato pero precisa de mayores cambios en el subyacente para que haya beneficios. Su payoff es:

$$\text{máx}(S - E_C, 0) + \text{máx}(E_P - S, 0)$$

Según los strikes pueden ser:

  - **Out-of-the-Money Strangle (OTM)**: se compra call con strike por encima de precio actual y put con strike por debajo de actual. Es más barato (primas bajas) pero se necesita un movimiento grande del subyacente.

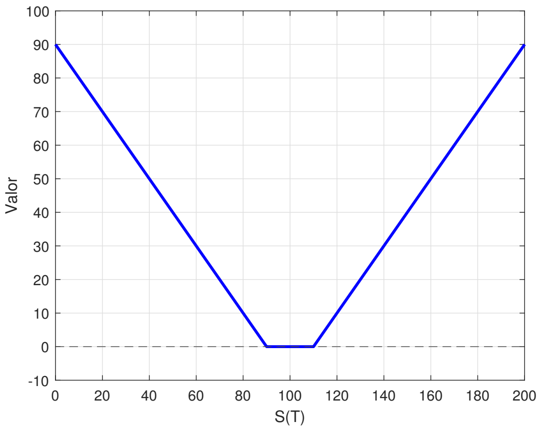


Figura 1.8: Payoff de Strangle OTM

- **In-the-Money Strangle (ITM)**: se compra call con strike por debajo de precio actual y put con strike por encima de actual. Algo más caro (por primas) que OTM, pero un poco más seguro.

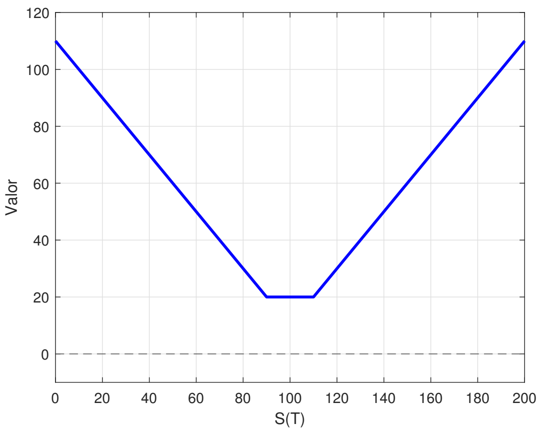


Figura 1.9: Payoff de Strangle ITM

- **Risk Reversal**: comprar una call con strike mayor que el precio actual y vender una put con un strike inferior al precio actual. Se apuesta a que el subyacente va a subir (y que como mucho no va a bajar demasiado). Si el activo baja se pierde dinero, pero las primas son más baratas. Su payoff sería:

$$\max(S - E_C, 0) - \max(E_P - S, 0)$$

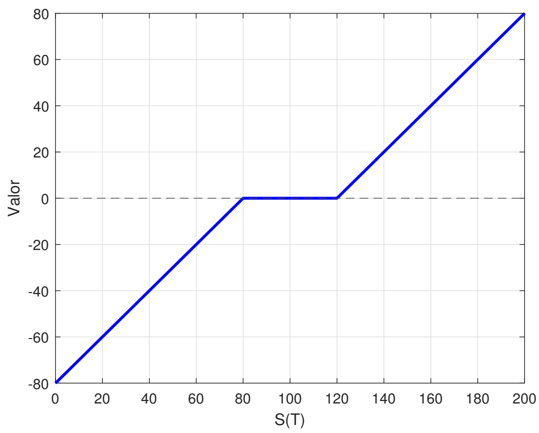


Figura 1.10: Payoff de Risk Reversal a vencimiento

- **Butterflies**: se compra una call ITM ($E_{C_{ITM}}$), se venden dos calls ATM (at-the-money) ($E_{C_{ATM}}$) y se compra una call OTM ($E_{C_{OTM}}$). Es decir, $E_{C_{ITM}} < E_{C_{ATM}} < E_{C_{OTM}}$. Además, generalmente se cumple que $E_{C_{OTM}} - E_{C_{ATM}} = E_{C_{ATM}} - E_{C_{ITM}}$. Se usa cuando se espera que el subyacente esté cerca de cierto precio central y haya poca volatilidad. Su payoff es:

$$\max(S - E_{C_{ITM}}, 0) - 2\max(S - E_{C_{ATM}}, 0) + \max(S - E_{C_{OTM}}, 0)$$

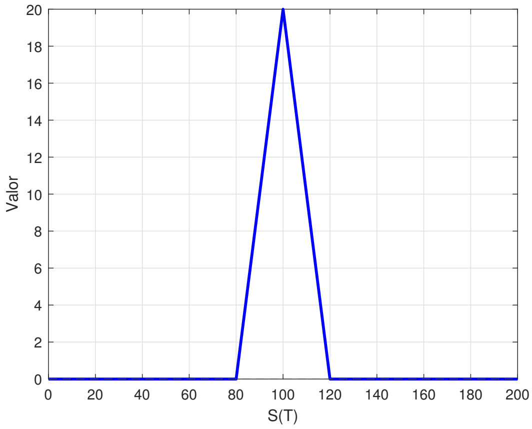


Figura 1.11: Payoff de Butterfly a vencimiento

- **Condors**: parecido a butterflies, se compra call con strike E_1, se vende call con strike E_2, se vende call con strike E_3, y se compra call con strike E_4 tal que $E_1 < E_2 < E_3 < E_4$. Además, generalmente se cumple que $E_2 - E_1 = E_4 - E_3$. Se obtienen ganancias máximas si el subyacente se mantiene entre E_2 y E_3. Su payoff es:

$$\max(S - E_1), 0) - \max(S - E_2, 0) - \max(S - E_3, 0) + \max(S - E_4, 0)$$

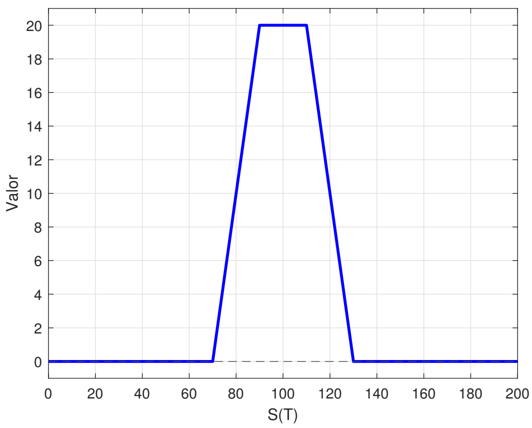


Figura 1.12: Payoff de Condors a vencimiento

1.2.6. Opciones a largo plazo

- **LEAPS/ long-term equity anticipation securities**: opciones con hasta 3 años de fecha de vencimiento. Usualmente vencen en enero. Se suelen emitir a 3 precios de ejercicio: ATM (precio actual), 20 % ITM (más favorable para el comprador) o 20 % OTM (más especulativo).

- **FLEX/ FLexible EXchange-traded options**: permiten más personalización de la opcion de la fecha de vencimiento (hasta 5 años), el strike o el tipo de ejercicio (europeo o americano).

1.2.7. Otros derivados

- **Warrants**: parecido a opciones call, pero emitido por la propia empresa del subyacente que da derecho a comprar acciones *nuevas* (frente a acciones ya existentes en las opciones) emitidas por la empresa. Tiene plazos largos, de hasta 5 años.

- **Convertible bonds/ CBs**: bono normal que paga cupones y un capital a vencimiento, pero que tiene la opción de convertirse en acciones antes de vencimiento (perderías los cupones siguientes). Se comporta como una opción americana.

1.3. Aleatoriedad y procesos estocásticos

1.3.1. Desigualdad de Jensen

Sea la función convexa $f(S)$ (que se curva hacia arriba, con forma de cuenco) de la variable aleatoria S, entonces

$$\mathbb{E}[f(S)] \geq f(\mathbb{E}[S])$$

De hecho, la diferencia es de

$$\frac{1}{2}f''(\mathbb{E}[S])\mathbb{E}[\epsilon]$$

donde ϵ es la desviación de S de la media, i.e $S = \mathbb{E}[S] + \epsilon$.

1.3.2. Propiedad de Markov

El futuro depende solo del presente, no del pasado. Se usa en los caminos aleatorios para decir que el valor $S_t + 1$ solo depende de S_t, es decir,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in A \mid X_t = x, X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in A \mid X_t = x)$$

1.3.3. Propiedad de martingala

Lo que esperas tener en el futuro, sabiendo todo hasta ahora, es exactamente lo que tienes ahora. Es decir, el valor esperado de algo en un juego justo es exactamente lo que tienes ahora:

$$\mathbb{E}[S_i|S_j, j < i] = S_j$$

1.3.4. Lema de Itô

Sea

$$dS = a(S,t)dt + b(S,t)dX$$

entonces

$$dV = \left(\frac{dV}{dt} + a\frac{dV}{dS} + \frac{1}{2}b^2\frac{d^2V}{dS^2}\right)dt + b\frac{dV}{dS}dX$$

En el apéndice **??** se encuentra la fórmula para dimensiones mayores.

1.3.5. Algunos ejemplos de caminos aleatorios

- **Brownian Motion with Drift**: $dS = \mu dt + \sigma dX$

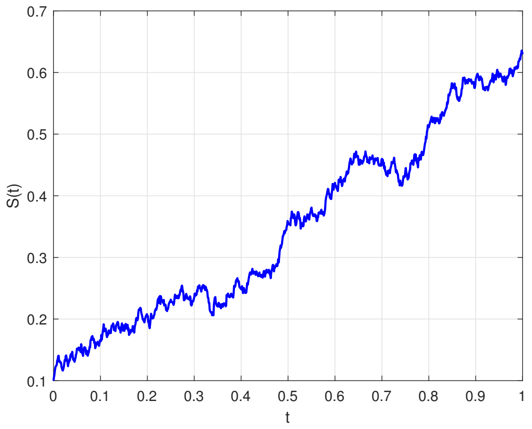


Figura 1.13: Brownian Motion with Drift

- **The Lognormal Random Walk**: $dS = S\mu dt + S\sigma dX$

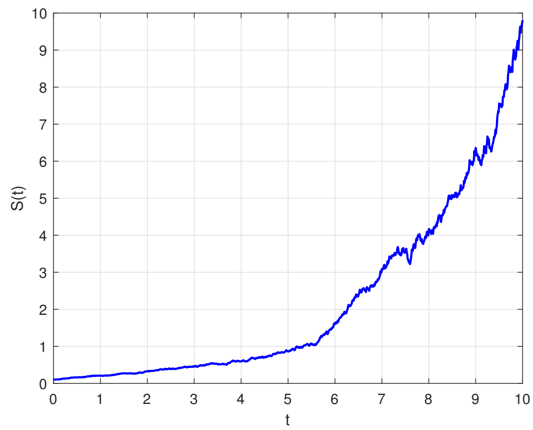


Figura 1.14: The Lognormal Random Walk

- **A Mean-reverting Random Walk**: reversion a la media, cuando se esta fuera del crecimiento normal el camino tiende a corregirse.
  Su EDE es $dS = \kappa(\theta + S)dt + \sigma dX$, donde κ es la velocidad de reversión a la media, θ es la tasa de interés a largo plazo y σ es la volatilidad. Un ejemplo común es el modelo Vasicek para el ratio de interés, $dr = \kappa(\theta + r)dt + \sigma dX$

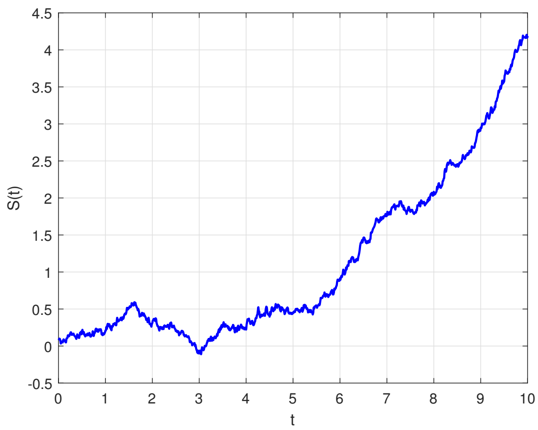


Figura 1.15: Mean-reverting Random Walk

Capítulo 2

Modelos básicos de valoración

2.1. Modelos Black-Scholes

2.1.1. Modelo opciones básico

Se construye cartera

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S$$

sabiendo que

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

entonces, por el lema de Itô 1.3.4 se tiene que

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS$$

que, haciendo un **delta hedging** $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ se obtiene que, sin arbitraje:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt$$

que debe ser igual que

$$d\Pi = r\Pi dt = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right) dt$$

por lo que

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

2.1.2. Opciones de activos con dividendos continuos

Tener comprado da un dividendo continuo de $DSdt$, luego la variación de la cartera es

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS - D\Delta dS$$

que usando igualmente que $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, se tiene que

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-D)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

2.1.3. Currency options

En vez de acciones como subyacente, se usa una moneda extranjera con un interés r_f que se comporta como un dividendo continuo, por lo que queda

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-r_f)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

2.1.4. Commodity options

EL subyacente es un commodity, que tiene un coste de almacenamiento. En este caso se asume continuo q (i.e. $qSdt$). Como es un coste se puede ver como un dividendo negativo, por lo que

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r+q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

2.1.5. Forwards contracts

Construyendo una cartera igual que BS clásico, se llega a la misma EDP.

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

pero se debe añadir como condición final

$$\boxed{V(S,T) = S - \bar{S}}$$

donde $\bar{S}$ es el precio fijado (delivery price). Su solución es

$$\boxed{S - \bar{S}e^{-r(T-t_0)}}$$

Su delivery price es el que da valor 0 al contrato en un primer momento, luego

$$\bar{S} = S_0 e^{r(T-t_0)}$$

Su forward price, por otro lado, es

$$\text{Forward price} = Se^{r(T-t_0)}$$

2.1.6. Future contracts

Como el valor del contrato se resetea a 0 todos los días (hay compensación diaria), el valor del contrato durante su vida es 0. Denotando por $F(S,t)$ al valor del contrato:

$$\begin{aligned}
\Pi &= F(S,T) - \Delta S = -\Delta S \\
d\Pi &= dF(S,T) - d\Delta S \\
&= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial S}dS + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}dt - \Delta dS
\end{aligned}$$

luego tomando $\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}$ y $d\Pi = r\Pi dt$ se obtiene

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}dt + rS\frac{\partial F}{\partial S} = 0}$$

con la condición final de que

$$\boxed{F(S,T) = S}$$

Su solución es

$$\boxed{F(S,t) = Se^{r(T-t)}}$$

por lo que para el caso de interés constante, los futures y los forwards valen lo mismo.

2.1.7. Opciones sobre futuros

Son opciones en las que el subyacente es un contrato de futuro. Se sabe que

$$F = Se^{r(T-t)}$$

por lo que, haciendo un cambio de variable $V(S,t) = W(F,t)$ se obtiene la EDP

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t}dt + \frac{\sigma^2}{2}F^2\frac{\partial^2 W}{\partial F^2}dt - rW = 0}$$

2.1.8. Condiciones de frontera y finales

En una opción europea, se tienen las siguientes condiciones:

- Condiciones temporales:
  - Call:
$$\boxed{C(S,T) = \text{máx}(S-E,0)}$$
  - Put:
$$\boxed{C(S,T) = \text{máx}(E-S,0)}$$
- Condiciones de frontera: (se justificarán más adelante)
  - Call:
$$\boxed{C(0,t) = 0}$$
$$\boxed{C(S,t) \xrightarrow{S\to\infty} S - Ee^{-r(T-t)}}$$
  - Put:
$$\boxed{P(0,t) = Ee^{-r(T-t)}}$$
$$\boxed{P(S,t) \xrightarrow{S\to\infty} 0}$$

2.1.9. Algunas propiedades de las opciones europeas

Observación. *Si el payoff de una cartera es mayor o igual a M, entonces, en ausencia de arbitraje, el valor actual de la cartera es mayor o igual que el valor actualizado:*

$$\boxed{\Pi(T) \geq M \Rightarrow \Pi(t) \geq Me^{-r(T-t)}}$$

Si no fuese el caso, se podría pedir al banco una cantidad $Me^{-r(T-t)}$ en tiempo t y comprar la cartera. Entonces, en tiempo T se pagaría el préstamo con el payoff y se generaría beneficio.

Proposición. *Sea $C(S,t)$ una opción Call europea con fecha de ejercicio T y subyacente S sin dividendos; entonces, en ausencia de arbitraje:*

1. $\boxed{C \leq S}$
2. $\boxed{C \geq \text{máx}(S - Ee^{-r(T-t)}, 0)}$
3. $\boxed{0 \leq C_1 - C_2 \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)} \text{ con } E_1 < E_2}$.

Demostración. Utilizando la observación 2.1.9:

1. Sea la cartea $\Pi = S - C$, entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= S - \text{máx}(S-E,0)\\ &= \left\{\begin{array}{ll} S, & 0 \leq S \leq E \\ E, & S \geq E \end{array}\right\} \geq 0 \xrightarrow{2,1,9}\\ \xrightarrow{2,1,9} \Pi(t) &= S - C \geq 0 \Rightarrow\\ &\Rightarrow S \geq 0\end{aligned}$$

2. Sea la cartea $\Pi = S - C$, entonces

$$\begin{aligned}\Pi(T) &= S - \text{máx}(S-E,0)\\ &= \left\{\begin{array}{ll} S, & 0 \leq S \leq E \\ E, & S \geq E \end{array}\right\} \leq E \xrightarrow{2,1,9}\\ \xrightarrow{2,1,9} \Pi(t) &= S - C \leq Ee^{-r(T-t)}\\ &\Rightarrow C \geq S - Ee^{-r(T-t)} \xrightarrow{C\geq 0}\\ &\xrightarrow{C\geq 0} C \geq \text{máx}(S - Ee^{-r(T-t)}, 0)\end{aligned}$$

3. Sea la cartea $\Pi = C_1 - C_2$, entonces

$$\Pi(T) = \text{máx}(S - E_1, 0) - \text{máx}(S - E_2, 0)$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ S - E_1, & E_1 \leq S < E_2 \\ E_2 - E_1, & S \geq E_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$0 \leq \Pi(T) \leq E_2 - E_1 \xrightarrow{2,1,9}$$
$$\xrightarrow{2,1,9} 0 \leq \Pi(t) \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 \leq C_1 - C_2 \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)}$$

□

Proposición. *Sea $P(S,t)$ una opción Put europea con fecha de ejercicio T y subyacente S sin dividendos; entonces, en ausencia de arbitraje:*

1. $\boxed{P \leq Ee^{-r(T-t)}}$

2. $\boxed{P \geq Ee^{-r(T-t)} - S}$

3. $\boxed{0 \leq P_2 - P_1 \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)} \text{ con } E_1 < E_2}$.

Demostración. Utilizando la observación 2.1.9:

1. Sea la cartea $\Pi = P - E$, entonces

$$\Pi(T) = \text{máx}(E - S, 0) - E$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} -S, & 0 \leq S < E \\ -E, & S \geq E \end{array} \right\} \leq 0 \xrightarrow{2,1,9}$$
$$\xrightarrow{2,1,9} \Pi(t) = P - Ee^{-r(T-t)} \leq 0$$
$$\Rightarrow P \leq Ee^{-r(T-t)}$$

2. Sea la cartea $\Pi = S + P$, entonces

$$\Pi(T) = S + \text{máx}(E - S, 0)$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} E, & 0 \leq S < E \\ S, & S \geq E \end{array} \right\} \geq E \xrightarrow{2,1,9}$$
$$\xrightarrow{2,1,9} \Pi(t) = S + P \geq Ee^{-r(T-t)}$$
$$\Rightarrow P \geq Ee^{-r(T-t)} - S$$

3. Sea la cartea $\Pi = P_2 - P_1$, entonces

$$\Pi(T) = \text{máx}(E_2 - S, 0) - \text{máx}(E_1 - S, 0)$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} E_2 - E_1, & 0 \leq S < E_1 \\ E_2 - S, & E_1 \leq S < E_2 \\ 0, & S \geq E_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$0 \leq \Pi(T) \leq E_2 - E_1 \xrightarrow{2,1,9}$$
$$\xrightarrow{2,1,9} 0 \leq \Pi(t) \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 \leq P_2 - P_1 \leq (E_2 - E_1)e^{-r(T-t)}$$

□

Proposición. *Sea $P(S,t)$ una opción Put europea con fecha de ejercicio T y subyacente S sin dividendos; entonces, en ausencia de arbitraje:*

1. $\boxed{C_A \geq C_B}$ *donde* C_a, C_B *son Calls europeas con precio de ejercicio* E *y fechas de ejercicio* T_A, T_B *tal que* $T_A > T_B$.

2. $\boxed{C_2 \leq \dfrac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1} C_1 + \dfrac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1} C_3}$ *donde* C_1, C_2, C_3 *son Calls europeas con fecha de ejercicio* T *y strikes* E_1, E_2, E_3 *donde* $E_1 < E_2 < E_3$.

Demostración. Utilizando la observación 2.1.9:

1. Sea la cartera $\Pi = C_A - C_B$, entonces

$$\begin{aligned}
\Pi(T_B) = C_A(S, T_B) - \text{máx}(S - E, 0) &\overset{2,1,9}{\geq} \\
&\overset{2,1,9}{\geq} \text{máx}(S - Ee^{-r(T-t)}) - \text{máx}(S - E, 0) \geq \\
&\geq \text{máx}(S - E) - \text{máx}(S - E, 0) = 0 \\
&\Rightarrow \Pi(T_B) \geq 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \Pi(t) = C_A - C_B \geq 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow C_A \geq C_B
\end{aligned}$$

2. Sea la cartera $\Pi = -C_2 + \lambda C_1 + (1 - \lambda) C_3$ y se considera

$$\begin{aligned}
&E_2 = \lambda E_1 + (1 - \lambda) E_3 = \lambda E_1 + E_3 - \lambda E_3 = E_3 + \lambda(E_1 - E_3) \Rightarrow \\
\Rightarrow &\lambda = \frac{E_2 - E_3}{E_1 - E_3} = \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1} \Rightarrow \\
\Rightarrow &(1 - \lambda) = \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Pi(T) &= -\text{máx}(S - E_2, 0) + \lambda\,\text{máx}(S - E_1, 0) + (1 + \lambda)\,\text{máx}(S - E_3, 0) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \lambda(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ -(S - E_2) + \lambda(S - E_1), & E_2 \leq S < E_3 \\ -(S - E_2) + \lambda(S - E_1) + (1 - \lambda)(S - E_3), & S \geq E_3 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1}(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ (1 - \lambda)(E_3 + S), & E_2 \leq S < E_3 \\ (1 - \lambda)(E_3 + S) + (1 - \lambda)(S - E_3), & S \geq E_3 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \lambda(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ (1 - \lambda)(E_3 + S), & E_2 \leq S < E_3 \\ (1 - \lambda)2S, & S \geq E_3 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq S < E_1 \\ \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1}(S - E_1), & E_1 \leq S < E_2 \\ \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1}(E_3 + S), & E_2 \leq S < E_3 \\ \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1}2S, & S \geq E_3 \end{array} \right\} \geq 0 \overset{2,1,9}{\Longrightarrow} \\
\overset{2,1,9}{\Longrightarrow} \Pi(t) &= -C_2 + \lambda C_1 + (1 - \lambda) C_3 \geq 0 \\
C_2 &\geq \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1} C_1 + \frac{E_2 - E_1}{E_3 - E_1} C_3
\end{aligned}$$

□

2.2. Comportamiento de las EDPs

2.2.1. Significado de los términos de una EDP

Sea una EDP de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u)\frac{\partial u}{\partial x} = D(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R(u)$$

entonces se tienen los siguientes términos:

- **Término de difusión** ($D(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$): es el responsable de disipar o concentrar la solución . Si $D(u) > 0$ entonces la solución se suaviza mientras que $D(u) < 0$ hace que la solución se concentre.

- **Término de convección** ($c(u)\frac{\partial u}{\partial x}$): representa el transporte con velocidad $c(u)$ hacia la derecha si $c(u) > 0$ o hacia la izquierda si $c(u) < 0$.

- **Término de reacción** ($R(u)$): representa la salida o entrada local de u. Se puede ver como crear/eliminar masa (fuentes o sumideros).

Sabiendo que la EDP de Black-Scholes clásica es

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

entonces:

- El término de **difusión** $\frac{\sigma^2}{2}S^2 > 0$ indica que la solución se suaviza y que los picos se homogeinizan.

- El término de **convección** $rS > 0$ indica que el resultado se mueve hacia los valores de S positivos (hacia la derecha).

- El término de **reacción** $rV > 0$ indica un decaimiento general del valor de la opción a medida que pasa el tiempo.

2.3. Soluciones y griegas

2.3.1. Griegas

Delta $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$	Lo que se tiene que comprar/vender en cada momento según el valor del subyacente para mantener la cartera libre de riesgo.
Gamma $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	Es una medida de cuánto y cuantas veces se tiene que *rehedged* para mantener la cartera libre de riesgo.
Theta $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$	Contribuye a que la cartera gane el interés correspondiente.
Speed $\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}$	Como gamma, pero para mayor precisión.
Vega $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	Variación con respecto a la volatilidad del subyacente.
Rho $\frac{\partial V}{\partial r}$	Sensibilidad de la opción a cambios en la tasa de interés. En la práctica se usa la estructura temporal completa de tasas.

Sabiendo la *call-put parity* $C(S,t) - P(S,t) = S - Ee^{-r(T-t)}$, las relaciones entre las griegas en opciones europeas Call y Put son:

- **Delta**: $\boxed{\Delta_{Call} = 1 + \Delta_{Put}}$

- **Gamma**: $\boxed{\Gamma_{Call} = \Gamma_{Put}}$

- **Theta**: $\boxed{\Theta_{Call} = \Theta_{Put} - rEe^{-r(T-t)}}$

- **Vega**: $\boxed{\nu_{Call} = \nu_{Put}}$

- **Rho**: $\boxed{\rho_{Call} = \rho_{Put} + E(T-t)e^{-r(T-t)}}$

2.3.2. Tablas de soluciones

	Call	**Put**
Value (Black-Scholes value)	$Se^{-D(T-t)}N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-Se^{-D(T-t)}N(-d_1) + Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Delta $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)$	$e^{-D(T-t)}N(d_1)$	$e^{-D(T-t)}(N(d_1)-1)$
Gamma $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)$	$\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$	
Theta $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$	$-\frac{\sigma Se^{-D(T-t)}N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + DSN(d_1)e^{-D(T-t)} - rEe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{\sigma Se^{-D(T-t)}N'(-d_1)}{2\sqrt{T-t}} - DSN(-d_1)e^{-D(T-t)} + rEe^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Speed $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}\right)$	$-\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma^2 S^2(T-t)}(d_1+\sigma\sqrt{T-t})$	
Vega $\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)$	$S\sqrt{T-t}e^{-D(T-t)}N'(d_1)$	
Rho $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)$	$E(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-E(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Rho $\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)$	$-(T-t)Se^{-D(T-t)}N(d_1)$	$(T-t)Se^{-D(T-t)}N(-d_1)$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \qquad N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

	Binary Call	**Binary Put**
Value (Black-Scholes value)	$e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$e^{-r(T-t)}(1-N(d_2))$
Delta	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$	$-\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$
Gamma $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)$	$-\frac{e^{-r(T-t)}d_1N'(d_2)}{\sigma^2 S(T-t)}$	$\frac{e^{-r(T-t)}d_1N'(d_2)}{\sigma^2 S(T-t)}$
Theta $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$	$re^{-r(T-t)}N(d_2)\left(\frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{r-D}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$	$re^{-r(T-t)}(1 - N(d_2))\left(\frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{r-D}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$
Speed $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}\right)$	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma^3 S^3(T-t)}\left(-2d_1 + \frac{1-d_1d_2}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$	
Vega $\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)$	$-\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)d_1}{\sigma\sqrt{T-t}}$	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)d_1}{\sigma\sqrt{T-t}}$
Rho $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)$	$-(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2) + \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$	$-(T-t)e^{-r(T-t)}(1-N(d_2)) - \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$
Rho $\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)$	$\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$	$-\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$

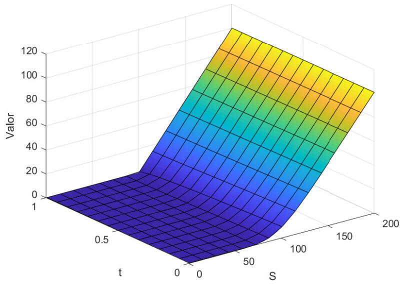
$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \qquad N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

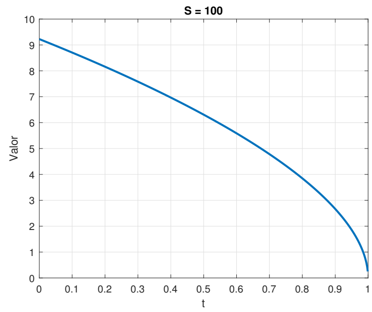
2.3.3. Representación gráfica de soluciones

En este apartado se va a graficar cada una de las soluciones

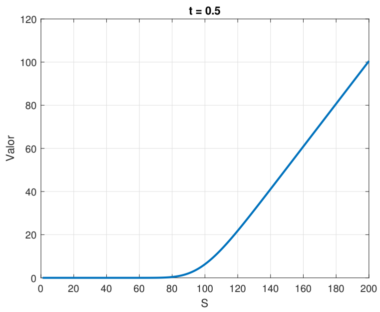
Call option



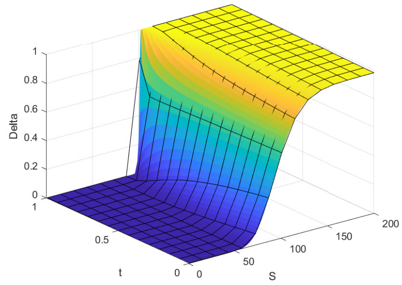
(a) Solución



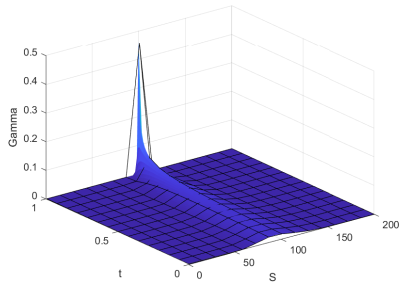
(b) Solución con S fijo



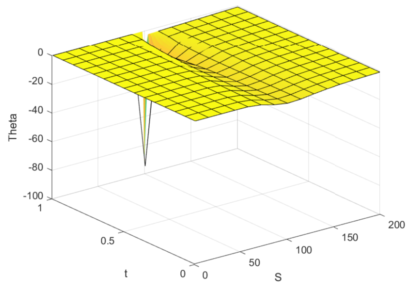
(c) Solución con t fijo



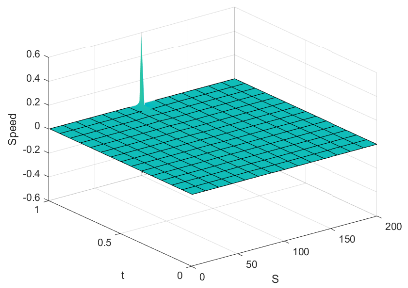
(d) Delta



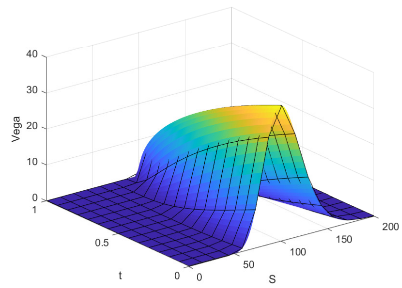
(e) Gamma



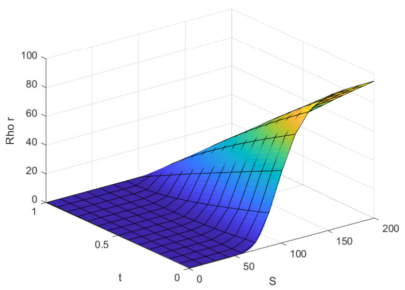
(f) Theta



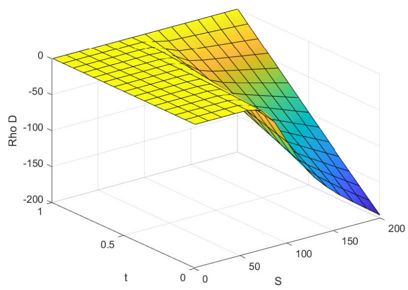
(g) Speed



(h) Vega

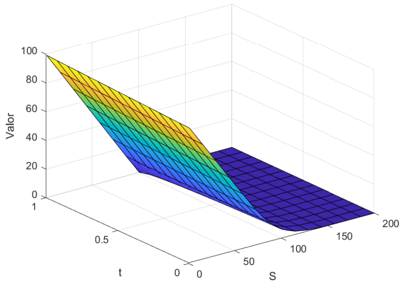


(i) Rho (r)

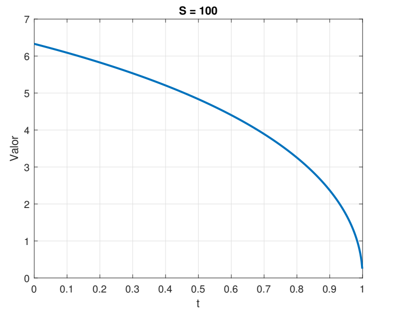


(j) Rho (D)

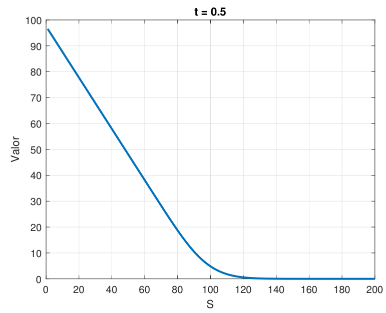
Put option



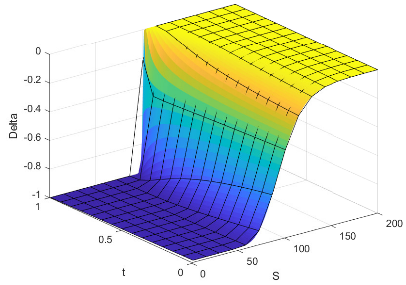
(a) Solución



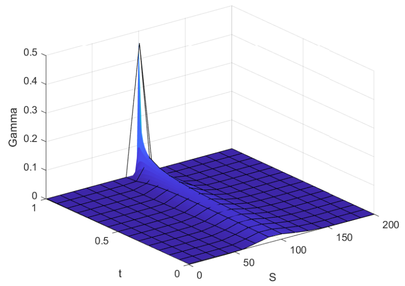
(b) Solución con S fijo



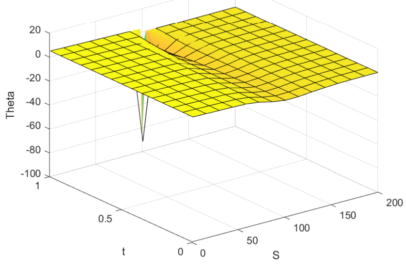
(c) Solución con t fijo



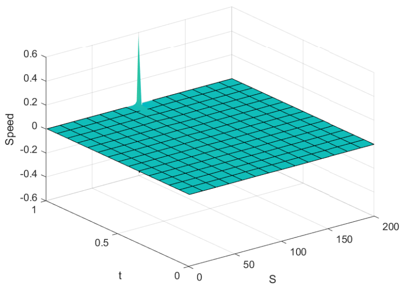
(d) Delta



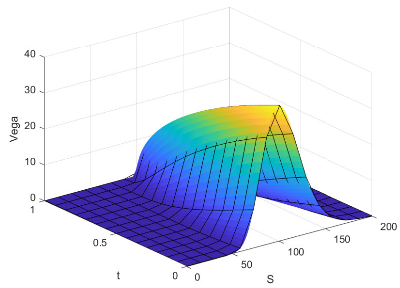
(e) Gamma



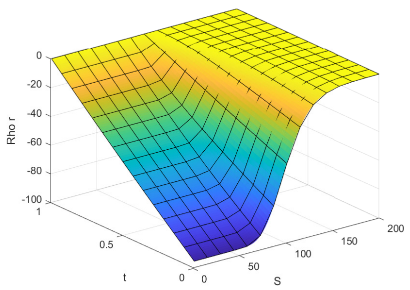
(f) Theta



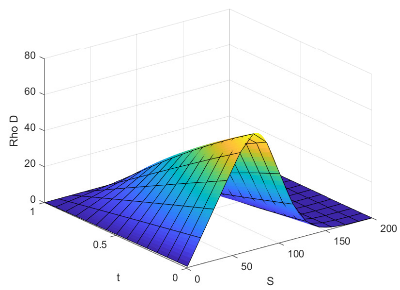
(g) Speed



(h) Vega

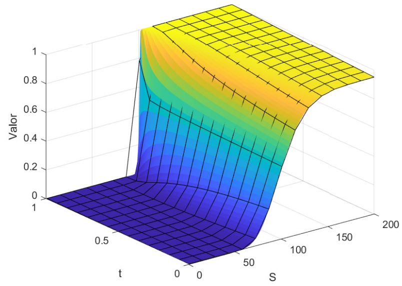


(i) Rho (r)

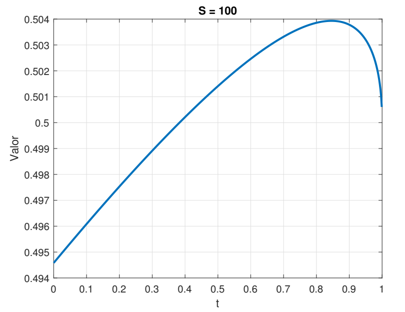


(j) Rho (D)

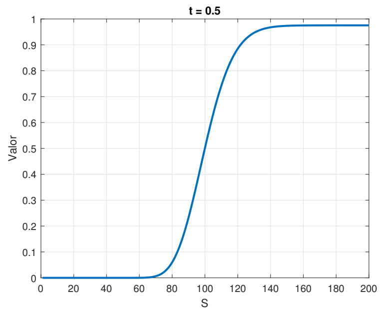
Binary Call option



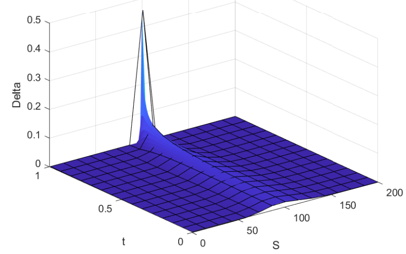
(a) Solución



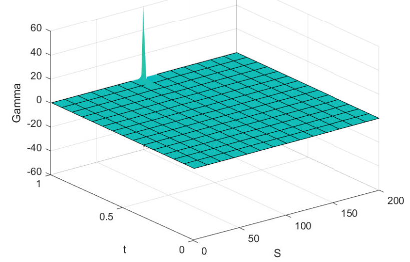
(b) Solución con S fijo



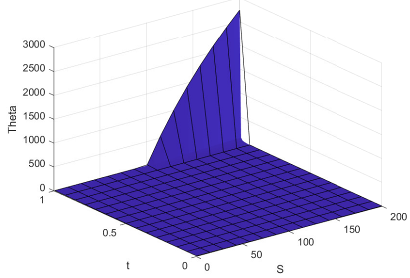
(c) Solución con t fijo



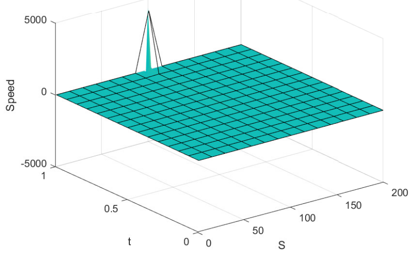
(d) Delta



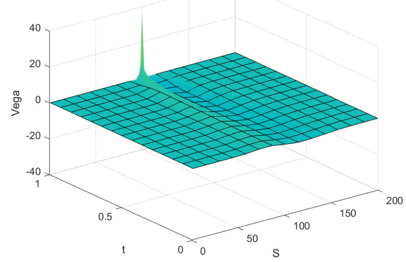
(e) Gamma



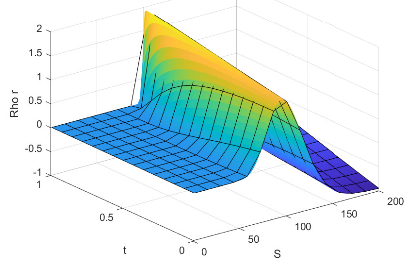
(f) Theta



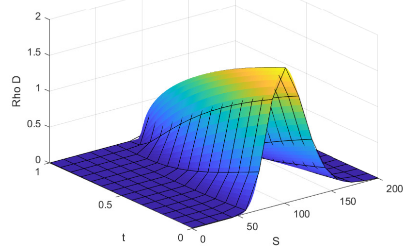
(g) Speed



(h) Vega

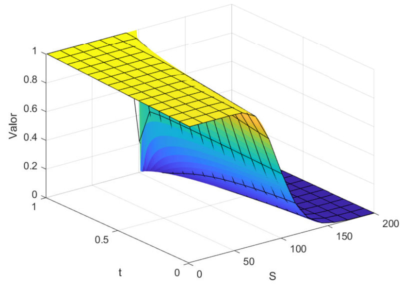


(i) Rho (r)

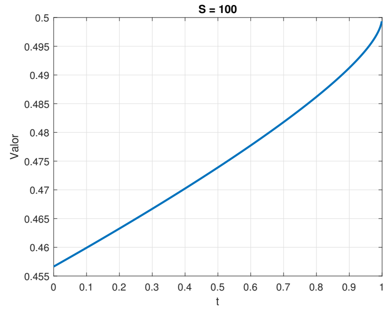


(j) Rho (D)

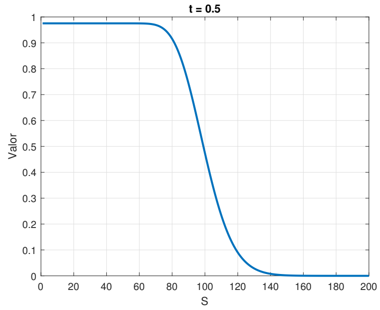
Binary Put option



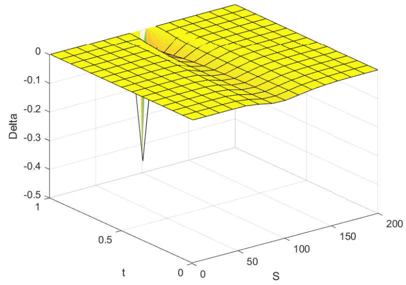
(a) Solución



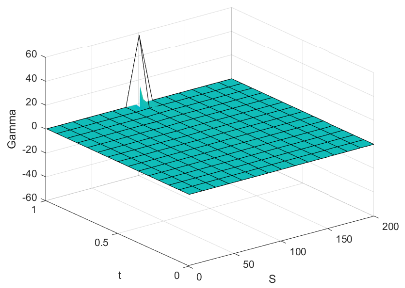
(b) Solución con S fijo



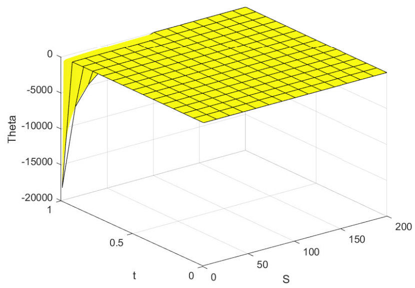
(c) Solución con t fijo



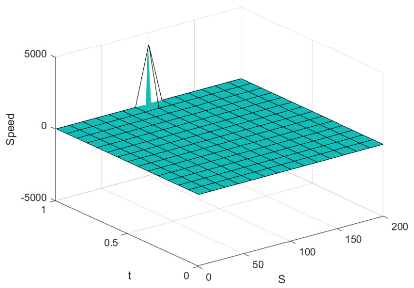
(d) Delta



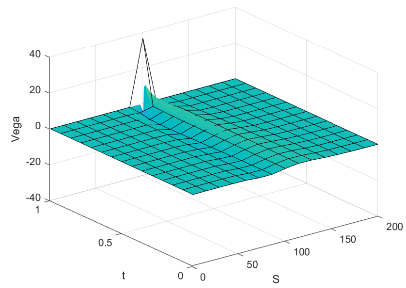
(e) Gamma



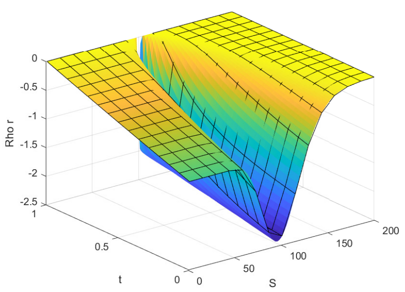
(f) Theta



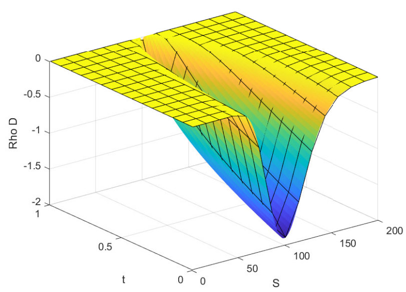
(g) Speed



(h) Vega



(i) Rho (r)



(j) Rho (D)

2.3.4. Volatilidad implícita

Valor de σ que iguala precio teórico (Black-Scholes) al precio de mercado. Para su cálculo se utilizan métodos numéricos como Newton-Raphson usando vega.
No es consistente si se calcula para diferentes strikes y vencimientos, lo que genera distintas curvas de volatilidad implícita:

- **Smile:** Volatilidad más alta para opciones ITM y OTM, mínima en ATM.
- **Skew:** Inclinación de la curva; típicamente negativa en mercados de acciones (mayor IV en puts OTM).
- **Frown:** Forma invertida del smile; menos común.

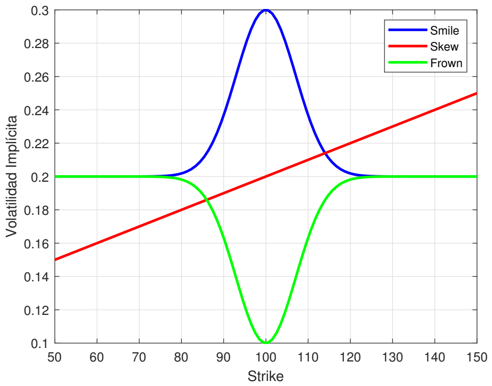


Figura 2.5: Algunas curvas de volatilidad implícita

2.3.5. Tipos de coberturas

Según la independiencia con el modelo:

- **Model-independent hedging:** Son pocos. No dependen de la dinámica del subyacente ni de la volatilidad. Por ejemplo la relación put-call parity.
- **Model-dependent hedging:** Son muchos más. Ejemplo más tipico es la cobertura usada en el análisis de Black-Scholes. Al valorar el derivado se necesita al menos la volatilidad.

Otros tipos de coberturas son:

- **Delta hedging**: es la perfecta eliminación teórica del riesgo usando cobertura entre la opción y el subyacente. Es un ejemplo de cobertura **dinámica**: la cobertura se debe monitorizar y ajustar todo el rato, por lo que en la vida real va a dar lugar a pérdidas por los costes de transacción.
- **Gamma hedging**: usada para disminuir el tamaño de cada cobertura o para incrementar el tiempo entre coberturas (y así disminuir coste de transacción). Una cartera de este tipo es insensible a cambios del subyacente mientras sean movimientos pequeños.
- **Vega hedging**: usada para eliminar el riesgo de volatilidad. En realidad esto en ocasiones da lugar a inconsistencias y no se debe usar una volatilidad constante.
- **Static hedging**: usada para reducir el riesgo de opciones exóticas mediante contratos más líquidos que se mantienen hasta el vencimiento, eliminando la necesidad de ajustes dinámicos.
- **Margin hedging**: usada para equilibrar las llamadas de margen (depósitos obligatorios) en una parte del portafolio con los reembolsos de otras partes, evitando así grandes llamadas de margen que puedan ser difíciles de cumplir.
- **Crash (Platinum) hedging**: diseñada para minimizar el peor resultado posible en mercados extremos (p.e. caídas), donde los movimientos son tan grandes que no se puede seguir el ritmo con las coberturas, y además las correlaciones normales se vuelven irrelevantes. Incluye dos tipos: cobertura del valor nominal del portafolio y cobertura de llamadas de margen.

2.4. Modelizar la volatilidad

Tipos de volatilidad:

- **Actual volatility**: Es la medida de la cantidad de aleatoriedad en el retorno de un activo en un instante dado, variando de momento a momento sin asociarse a una escala temporal.
- **Historical or realized volatility**: Es una medida de la aleatoriedad en un periodo pasado específico, calculada con métodos matemáticos y utilizada como estimación para la volatilidad futura.
- **Implied volatility**: Es la volatilidad que, al ser introducida en el modelo de Black-Scholes, iguala el precio de mercado de la opción, reflejando la expectativa del mercado sobre la volatilidad futura.
- **Forward volatility**: Es la volatilidad asociada a un periodo de tiempo futuro o a un instante futuro, ya sea actual o implícita.

2.4.1. Volatilidad por media estadística

Volatilidad constante

Para el caso de volatilidad constante o variaciones lentas, entonces se puede considerar:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_i^2$$

donde $R_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$ representa el retorno del día i. Este método tiene limitaciones, como el efecto espurio que hace que por picos instantáneos muy altos o muy bajos, la volatilidad se mantendrá muy alta durante unos días.

Volatilidad con regresión a la media

Considerando una volatilidad dependiente del tiempo y para modelar que la volatilidad tiende a una media a largo plazo $\overline{\sigma}$, se usa el modelo **ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)** asigna un peso a cada estimación de volatilidad a largo plazo y a la estimación actual basada en los últimos n retornos:

$$\sigma_n^2 = \alpha\overline{\sigma}^2 + (1-\alpha)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i^2$$

Donde α es el parámetro que controla la importancia relativa entre la volatilidad a largo plazo y la volatilidad basada en los retornos recientes.

Volatilidad con media móvil exponencialmente ponderada (EWMA)

Se utiliza el modelo:

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{n-i+1}^2$$

donde λ es un parámetro entre 0 y 1 que controla el peso de los retornos pasados. Este modelo asigna mayor peso a los retornos más recientes. La expresión puede simplificarse como:

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)R_n^2$$

Esto utiliza el retorno más reciente y la estimación previa de la volatilidad, siendo conocido como la medida de volatilidad de RiskMetrics.

Modelo GARCH

El modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) combina la volatilidad a largo plazo, la volatilidad previa y los retornos recientes para estimar la volatilidad actual:

$$\sigma_n^2 = \alpha\overline{\sigma}^2 + (1-\alpha)\left(\lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)R_n^2\right)$$

Este modelo es útil para capturar la dinámica de la volatilidad en el tiempo, considerando tanto la persistencia como la regresión hacia una media a largo plazo.

Volatilidad futura esperada

Estando a día n se quiere estimar la volatilidad en k días, i.e. en el día $n+k$. Dos maneras de hacerlo son:

- Modelo **EWMA**:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+k}^2 &= \lambda\sigma_{n+k-1}^2 + (1-\lambda)R_{n+k}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \lambda\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2] + (1-\lambda)\mathbb{E}[R_{n+k}^2] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \lambda\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2] + (1-\lambda)\mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2]\end{aligned}$$

  luego

$$\boxed{\mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] = \mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2]}$$

  Esto implica que la volatilidad futura esperada es igual a la estimación de volatilidad del día anterior.

- Modelo **GARCH**:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+k}^2 &= \alpha\overline{\sigma}^2 + (1-\alpha)\left(\lambda\sigma_{n+k-1}^2 + (1-\lambda)R_{n+k}^2\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \alpha\overline{\sigma}^2 + (1-\alpha)\left(\lambda\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2] + (1-\lambda)\mathbb{E}[R_{n+k}^2]\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] &= \frac{\alpha\overline{\sigma}^2}{1-(1-\alpha)(1-\lambda)} + \frac{\lambda(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)(1-\lambda)}\mathbb{E}[\sigma_{n+k-1}^2]\end{aligned}$$

  Mirando más hacia el futuro:

$$\boxed{\mathbb{E}[\sigma_{n+k}^2] = \overline{\sigma}^2 + \left(\mathbb{E}[\sigma_n^2] - \overline{\sigma}^2\right)(1-\nu)^k}\,, \qquad \nu = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\lambda)}$$

Apéndice A

Ampliación del lema de Itô

Lema de Ito para función de dos procesos de Ito (I)

Si tenemos dos procesos de Ito Y^1 e Y^2 de modo que

$$Y_t^i - Y_s^i = \int_s^t \alpha_u^i \, du + \int_s^t \beta_u^i \, dX_u, \quad i = 1, 2.$$

y una función $f = f(t, x^1, x^2)$ con las derivadas parciales segundas continuas, entonces

$$f(t, Y_t^1, Y_t^2) - f(s, Y_s^1, Y_s^2) = \int_s^t f_t(u, Y_u^1, Y_u^2) \, du +$$

$$\int_s^t \left(\frac{1}{2} (\beta_u^1)^2 f_{x^1 x^1}(u, Y_u^1, Y_u^2) + \frac{1}{2} (\beta_u^2)^2 f_{x^2 x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) + \beta_u^1 \beta_u^2 f_{x^1 x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) \right) du +$$

$$\int_s^t f_{x^1}(u, Y_u^1, Y_u^2) \, dY_u^1 + \int_s^t f_{x^2}(u, Y_u^1, Y_u^2) \, dY_u^2 \,,$$

donde se sigue la notación de subíndices para las derivadas parciales respecto t, x^1 y x^2. La fórmula se generaliza de manera natural para $f(t, Y_t^1, \ldots, Y_t^p)$, con $p \geq 2$.

Lema de Ito para función de dos procesos de Ito (II)

Veamos la versión diferencial del resultado anterior. Si tenemos dos procesos de Ito Y^1 e Y^2 de modo que

$$dY_t^i = \alpha_t^i \, dt + \beta_t^i \, dX_t, \quad i = 1, 2. \qquad (*)$$

y $F_t = f(t, Y_t^1, Y_t^2)$, entonces

$$dF_t = f_t(t, Y_t^1, Y_t^2) \, dt +$$

$$\left(\frac{1}{2} (\beta_t^1)^2 f_{x^1 x^1}(t, Y_t^1, Y_t^2) + \frac{1}{2} (\beta_t^2)^2 f_{x^2 x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) + \beta_t^1 \beta_t^2 f_{x^1 x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) \right) dt +$$

$$f_{x^1}(t, Y_t^1, Y_t^2) \, dY_t^1 + f_{x^2}(t, Y_t^1, Y_t^2) \, dY_t^2 \,.$$

Se pueden sustituir las expresiones de dY_t^1 y dY_t^2 en función de dX_t utilizando $(*)$ y claramente el proceso $F = (F_t, \, t \geq 0)$ es un proceso de Ito.

Lema de Ito más general (I)

Sean los brownianos X^j, $j = 1, \dots, m$ incorrelados y los procesos de Ito generales:

$$Y_t^i - Y_s^i = \int_s^t \alpha_u^i \, du + \int_s^t \sum_{j=1}^m \beta_u^{ij} \, dX_u^j, \quad i = 1, \dots, n,$$

o en forma diferencial para el proceso de Ito n-dimensional Y:

$$dY_t \;=\; \alpha_t \, dt \;+\; \beta_t \, dX_t.$$

Ejemplo con $n = 2$: Consideramos $Y = (Y^1, Y^2)$ definidos por:

$$dY_t^1 = \alpha_t^1 \, dt + \beta_t^{11} dX_t^1 + \beta_t^{12} dX_t^2, \; dY_t^2 = \alpha_t^2 \, dt + \beta_t^{21} dX_t^1 + \beta_t^{22} dX_t^2,$$

Aplicando $dt^2 = dt dX_t^1 = dt dX_t^2 = 0, dX_t^i dX_t^j = \delta_{ij} dt$ se obtiene:

$$dY_t^i dY_t^i = ((\beta_t^{11})^2 + (\beta_t^{22})^2) dt, \quad dY_t^1 dY_t^2 = (\beta_t^{11} \beta_t^{22} + \beta_t^{12} \beta_t^{21}) \, dt$$

Lema de Ito más general (II)

Sea $f = (f_1(t, x), \dots, f_p(t, x))$ con derivadas parciales segundas continuas, entonces el proceso de Ito p-dimensional $F_t = (f_1(t, Y_t), \dots, f_p(t, Y_t))$ verifica para $k = 1, \dots, p$:

$$dF_t^k = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, Y_t) \, dt \;+\; \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t, Y_t) \, dY_t^i \;+\; \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^i \partial x^j}(t, Y_t) \, dY_t^i dY_t^j$$

donde aplicando $dX_t^i dX_t^j = \delta_{ij} dt, \; dX_t^i dt = dt dX_t^i = 0$, se obtiene:

$$dF_t^k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^i \partial x^j} \left[\sum_{l,q=1}^m \beta_t^{il} \beta_t^{jq} \delta_{lq} \right] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \alpha_t^i \right) (t, Y_t) dt$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \left[\sum_{l=1}^m \beta_t^{il} \right] \right) (t, Y_t) \, dX_t^l$$

Ejercicio: Escribir el resultado cuando $dX_t^i dX_t^j = \rho_t^{ij} dt$, $j = 1, \dots, m$, correspondiente al caso de brownianos correlados