M6 E2 : Probabilité et Statistique (Cours magistral)

Pr. Youness El Ansari

Higher school of technology
Ibn Zohr University
Agadir, Morocco
Email : y.elansari@uiz.ac.ma

15 mai 2023

Introduction

Le dénombrement (l'analyse combinatoire) permet :

- d'apprendre à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini ;
- d'étudier des différentes manières de ranger et d'ordonner des objets (les éléments d'un ensemble).
    - Opérations ensemblistes ;
    - Notion de disposition (ordonnée et non ordonnée) ;
    - Permutations, Arrangements et Combinaisons.

Opérations ensemblistes

Intersection de deux ensembles :

Soient A, B deux sous ensemble de Ω.

- **L'intersection** de "A et B", noté $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B.
  On écrit : $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ et } x \in B\}$
- Deux ensembles sont dits **incompatibles** (ou disjoints) si et seulement si $A \cap B = \emptyset$

Exemple :

Soit Ω un ensemble tel que : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
On considère A, B et C des sous-ensembles de Ω, tels que : $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ et $C = \{1, 6\}$

1. Déterminer $A \cap B$
2. Vérifier les propriétés suivantes :
   (i) $A \cap B = B \cap A$
   (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Opérations ensemblistes

Réunion de deux ensembles :

Soient A, B deux sous ensemble de Ω.

- **La réunion** de "A et B", noté $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B.
  On écrit : $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Exemple :

Soit Ω un ensemble tel que : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
On considère A, B et C des sous-ensembles de Ω, tels que : $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ et $C = \{1, 6\}$

1. Déterminer $A \cup B$
2. Vérifier les propriétés suivantes :
   (i) $A \cup B = B \cup A$
   (ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Opérations ensemblistes

Complémentaire d'un ensemble :

Soient A un ensemble de Ω.

- **Le complémentaire** de A, noté $\overline{A}$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à Ω qui n'appartiennent pas à A.
  On écrit : $\overline{A} = \{x \in \Omega / x \notin A\}$

Exemple :

Soit Ω un ensemble tel que : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
On considère A un sous-ensemble de Ω, tel que : $A = \{1, 3, 5\}$

1. Déterminer $\overline{A}$
2. Vérifier les propriétés suivantes :
   (i) $A \cap \overline{A} = \emptyset$
   (ii) $A \cup \overline{A} = \Omega$
   (iii) $\overline{\overline{A}} = A$

Opérations ensemblistes

Propriétés

Soient A et B deux ensembles de Ω.

- $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \quad$ (c.-à-d., $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$)
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad$ (**Lois de MORGAN**)
- $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in \Omega; x \in A \text{ et } x \in B)$
  $\Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$

Disposition

Disposition sans répétition :

C'est une disposition dont chaque élément **ne peut apparaitre plus qu'une fois**.

Exemple :

Soit un ensemble qui contient deux éléments (1 et 2), $\Omega = \{1, 2\}$
Combien de couples (**sans répétition**) peut-on former avec les chiffres (1 et 2) ?
Alors les résultats possibles sont : (1,2) et (2,1).
Donc les couples (1,2) et (2,1) sont des **dispositions sans répétition**.

Disposition

Disposition avec répétition :

C'est une disposition dont chaque élément **peut apparaitre plus qu'une fois**.

Exemple :

Soit un ensemble qui contient deux éléments (1 et 2), $\Omega = \{1, 2\}$
Combien de couples (**avec répétition**) peut-on former avec les chiffres (1 et 2) ?
Alors les résultats possibles sont : (1,1) ; (1,2) ; (2,1) et (2,2).
Donc les couples (1,1) ; (1,2) ; (2,1) et (2,2) sont des **dispositions avec répétition**.

Disposition

Disposition ordonnée :

C'est une disposition dont **l'emplacement des éléments joue un rôle** dans la composition de celle-ci.

Disposition non ordonnée :

C'est une disposition dont **l'emplacement des éléments ne joue aucune rôle** dans la composition de celle-ci.

Remarque :

Soient deux éléments a et b :

- Si $(a, b) \neq (b, a)$ alors on parle de **disposition ordonnée**.
- Si $(a, b) = (b, a)$ alors on parle de **disposition non ordonnée**.

Disposition

Exemple 1 :

Soit un ensemble qui contient deux éléments (1 et 2), $\Omega = \{1, 2\}$

1. Combien de couples (avec répétition et non ordonnée) peut-on former avec les chiffres (1 et 2) ?
   Alors les résultats possibles sont : (1,1) ; (1,2) et (2,2).
   Dans ce cas on a : $(1, 2) = (2, 1)$.

2. Combien de couples (sans répétition et non ordonnée) peut-on former avec les chiffres (1 et 2) ?
   Alors le résultat possible est : (1,2).
   Dans ce cas on a $(1, 2) = (2, 1)$.

Disposition

Exemple 2 :

Soit Ω un ensemble tel que : $\Omega = \{1, 2\}$

1. Combien de couples (avec répétition et ordonnée) peut-on former avec les chiffres (1 et 2) ?
   Alors les résultats possibles sont : (1,1) ; (1,2) ; (2,1) et (2,2).
   Dans ce cas on a : $(1, 2) \neq (2, 1)$.

2. Combien de couples (sans répétition et ordonnée) peut-on former avec les chiffres (1 et 2) ?
   Alors les résultats possibles sont : (1,2) ; (2,1).
   Dans ce cas on a $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Permutation

- **Une permutation** d'un ensemble de n éléments distincts est **une disposition ordonnée sans répétition** de ces éléments.
- Le nombre de permutation qu' on peut former à partir d'un ensemble de n éléments est égal à $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ (la valeur factorielle de n).

Exemple :

Les permutations qu'on peut construire à partir de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ sont :
(a,b,c) ; (a,c,b) ; (b,a,c) ; (b,c,a) ; (c,a,b) ; (c,b,a).
Le nombre de permutation est égal à $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Arrangements

Définition :

Un **arrangement** de p éléments choisis parmi n éléments est **une disposition ordonnée** de p de ces n éléments $(p < n)$.

On distingue **les arrangements avec répétitions** et **les arrangements sans répétitions**.

Arrangements

- Un **arrangement sans répétition** de p éléments choisis parmi n est une **disposition ordonnée sans répétition** de p éléments choisis parmi n d'un ensemble E.
- Le **nombre d'arrangements sans répétitions** est : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple :

Soit $E = \{a, b, c\}$, les **arrangements sans répétition** de 2 éléments qu'on peut former à partir des éléments de E sont : $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{b, a\}$; $\{b, c\}$; $\{c, a\}$; $\{c, b\}$.
Le nombre d'arrangements sans répétitions que l'on peut faire avec 2 éléments choisis parmi 3 éléments a, b, c est : $A_3^2 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{3!}{1!} = \dfrac{3 \times 2 \times 1}{1} = 6$

Arrangements

- Un **arrangement avec répétition** de p éléments choisis parmi n est une **disposition ordonnée avec répétition** de p d'entre les n éléments.
- Le **nombre d'arrangements avec répétitions** de p éléments qu'on peut former à partir de n éléments est égal à $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$.

Exemple :

Soit $E = \{a, b, c\}$, les **arrangements avec répétition** de 2 éléments qu'on peut former à partir des éléments de E sont : $\{a, a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, a\}$, $\{b, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, $\{c, b\}$, $\{c, c\}$.
Le nombre d'**arrangement avec répétition** de 2 éléments qu'on peut former à partir de 3 éléments est égal à $3^2 = 9$

Combinaisons

Définition :

Une **combinaison** de p éléments choisis parmi n éléments est une **disposition non ordonnée** de p de ces n éléments.

On distingue les **combinaisons avec répétitions** et les **combinaisons sans répétitions**.

Combinaisons

- Une **combinaisons sans répétitions** de p éléments choisis parmi n est une **disposition sans répétitions** et **non ordonnée** de p de ces n éléments.
- Le nombre de **combinaisons sans répétitions** est : $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Exemple :

Les combinaisons de 2 éléments pris dans $\{1, 2, 3, 4\}$ sont : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$.

$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = \frac{24}{4} = 6$$

Combinaisons

- Une **combinaisons avec répétitions** de p éléments choisis parmi n est une **disposition avec répétitions** et **non ordonnée** de p de ces n éléments.
- Le nombre de **combinaisons avec répétitions** est : $C_{n+p-1}^{p} = \dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}$.

Exemple :

Les combinaisons de 2 éléments pris dans $\{1,2,3,4\}$ sont : $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,2\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,4\}$.

$$C_{4+2-1}^{2} = \frac{(4+2-1)!}{(4-1)!2!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 10$$

Résumé :

Pour trouver le nombre de possibilités dans une expérience aléatoire, il suffit de répondre aux questions suivantes depuis les données d'exercices :

1. L'**effectif** : combien on a d'éléments « n » ? Combien on prend « p » ?
2. L'**ordre** : est-ce que l'expérience et **ordonné** ou **non** ?
3. La **répétition** : est-ce que l'expérience se fait **avec remise** ou bien **sans remise** ?

		n parmi n	**p parmi n**
Ordonné	Avec remise	n^n	n^p
	Sans remise	$n!$	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Non ordonné	Avec remise	$C_{2^{n-1}}^{n}$	$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$
	Sans remise	1	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Quelques rappels

Lors d'une expérience aléatoire, c'est-à-dire soumise au hasard, on définit :

- **L'univers** Ω qui est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire.
- **Un événement** E qui est un ensemble de résultats possibles à l'intérieur de l'univers.
- **Le dénombrement d'un événement** qui est le calcul du nombre de cas où l'événement considéré peut se produire.
- **La probabilité d'un évènement** $\mathbb{P}$ qui correspond à la fréquence d'un événement par rapport à l'ensemble des cas possibles. (nombre de cas où l'évènement considéré peut se produire sur le nombre total de cas)

Probabilités sur un ensemble fini

Définition :

Si l'univers Ω est constitué de n événements élémentaires ω_i, une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω consiste à se donner n nombres $\mathbb{P}(\omega_i) = p_i$, avec $p_i \in [0,1]$ la probabilité de l'événement ω_i, tels que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Si l'événement A est la réunion disjointe de k événements élémentaires ω_i avec $0 < k < n$, la probabilité de A vaut, par définition :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{k} \omega_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\omega_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

Probabilité uniforme

Définition :

Il y a une probabilité uniforme ou équiprobabilité lorsque toutes les probabilité p_i des événements élémentaires ω_i valent $\dfrac{1}{n}$.

La probabilité d'un sous-ensemble $A \subset \Omega$ de k éléments vaut alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire suivante : ≪ **Lancement d'un dé** ≫ , alors :
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Soit A_i l'événement d'obtenir un numéro i, $A_i = \{\{i\}\}$ où $i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec A_i est un évènement élémentaire de Ω et $\text{card}\,(A_i) = 1$
  Tous les événements élémentaires ont la même probabilité, car il y a un **équiprobabilité**.

  La probabilité d'obtenir un numéro i est : $\mathbb{P}\,(A_i) = \dfrac{\text{card}\,(A_i)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$
- Si $A = \{1, 2, 4\}$ alors sous l'hypothèse d'équiprobabilité on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriétés des probabilités d'un événement aléatoire

Propriété 1 :

On appelle $\emptyset$ l'événement impossible, puisqu'il n'est jamais réalisé. Sa probabilité $\mathbb{P}(\emptyset)$ vaut 0.

Propriété 2 :

On note $\bar{A}$ l'événement contraire de A. C'est le **complémentaire** de A dans Ω. Sa probabilité vaut $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Propriété 3 :

Si $B \subset A$ (i.e. $B \subseteq A$: tout élément de B appartient à A), on a $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.

Exemple :

Soit une urne qui contient des boules rouges et des boules blanches. Je prélève une boule au hasard. Soit les événements suivants :
R : " la boule soit rouge"
B : "la boule soit blanche"

L'événement B est l'événement contraire de $\mathrm{R}, (B = \bar{R})$

Si la probabilité de l'événement R est égale $0,7$ (i.e., $\mathbb{P}(R) = 0,7$) alors la probabilité de la boule soit blanche est :

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(R) = 1 - 0,7 = 0.30$$

Propriétés des probabilités d'un événement aléatoire

Propriété 4 (Théorème des probabilités totales) :

- Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Si A et B sont disjoints (i.e., si $A \cap B = \emptyset$) alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Événements indépendants

Définition :

Deux événements A et B sont indépendants si la probabilité sur l'événement A n'est pas affectée par la probabilité de B.

Propriété :

- Si deux événements sont **indépendants**, la probabilité qu'ils se réalisent tous les deux est égale au produit de leurs probabilités respectives. On peut donc écrire :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

- Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ n événements (parties de Ω). On dit que les événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendants deux à deux, si et seulement si :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

Événements indépendants

Exemple 1 : Les tirages avec remise sont des événements indépendants.

Exemple 2 :
Soient A, B, et C trois événements indépendants deux à deux tel que :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$$

Alors

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

Evènements dépendants, probabilités conditionnelles

Définition 1 :

Deux événements A et B sont **dépendants** si la probabilité sur l'événement A est affectée par la probabilité de B.

Définition 2 :

Soient A et B deux événements, A étant supposé de probabilité non nulle. On appelle **probabilité conditionnelle** de B par rapport à A, la probabilité de réalisation de l'événement B sachant que A est réalisé. On la note $\mathbb{P}(B \mid A)$ ou $\mathbb{P}_A(B)$.

Théorème (probabilité composées ou règle de la multiplication) :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$$

Exemple 1 : Les tirages sans remise sont des événements dépendants.

Probabilités conditionnelles

Exemple 2 :

Dans une classe de 36 élèves, 23 élèves ont 18 ans, 29 élèves sont des filles et 17 filles ont 18 ans. On choisit au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux évènements suivants A : "l'élève est une fille", B : "l'élève a 18 ans" et $A \cap B$: "l'élève est une fille de 18 ans".

Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{29}{36}; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{23}{36};$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{17}{36}$$

Quelle est la probabilité que l'élève ait 18 ans, sachant que c'est une fille ?

On remarque alors que

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{17/36}{29/36} = \frac{17}{29}$$

Probabilités conditionnelles

Théorème de Bayes :

Soient $(A_i)_{1\leq i\leq k}$ k évènements (parties de Ω) tel que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0, \forall i = \{1, 2, \ldots, k\}$

- Soit un événement B indépendant de A_i avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors :

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B \mid A_i)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Si B dont la réalisation dépend de l'une des causes A_i alors :

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B \mid A_i)}{\sum_i \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B \mid A_i)} \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}(B \mid A_i) \neq 0.$$

Probabilités conditionnelles

Exemple (Théorème de Bayes) :

Dans un laboratoire, on a l'expérience suivant : Si une souris porte l'anticorps A, alors 2 fois sur 5 elle porte aussi l'anticorps B ; et si une souris ne porte pas l'anticorps A, alors 4 fois sur 5 elle ne porte pas l'anticorps B. La moitié de la population porte l'anticorps A et 3 sur dix de la population porte l'anticorps B.

▶ Calculez la probabilité que, si une souris porte l'anticorps B, alors elle porte aussi l'anticorps A : $\mathbb{P}(A \mid B)$.

Soient les évènements suivants : A : "La souris porte l'anticorps A"
$\overline{A}$: "La souris ne porte pas l'anticorps A"
B : "La souris porte l'anticorps B"
$\overline{B}$: "La souris ne porte pas l'anticorps B"
On a : • $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, • $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{1}{2}$, • $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10}$, • $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{2}{5}$,
• $\mathbb{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{5}$

Probabilités conditionnelles

Exemple (Théorème de Bayes) :

Calculez la probabilité que, si une souris porte l'anticorps **B**, alors elle porte aussi l'anticorps A : $\mathbb{P}(A \mid B)$.

On a : • $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, • $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{1}{2}$, • $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10}$, • $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{2}{5}$,

• $\mathbb{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{5}$

Pour la partition $(A_i)_{i=1,2} = (A_1, A_2) = (A, \overline{A})$, on applique la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}\left(A_i \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A_i\right)\mathbb{P}\left(B \mid A_i\right)}{\sum_i \mathbb{P}\left(A_i\right)\mathbb{P}\left(B \mid A_i\right)} \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned}\text{On a : } \sum_i \mathbb{P}\left(A_i\right)\mathbb{P}\left(B \mid A_i\right) &= \mathbb{P}\left(A_1\right)\mathbb{P}\left(B \mid A_1\right) + \mathbb{P}\left(A_2\right)\mathbb{P}\left(B \mid A_2\right) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B \mid \overline{A}) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

Probabilités conditionnelles

Exemple (Théorème de Bayes) :

Calculez la probabilité que, si une souris porte l'anticorps **B**, alors elle porte aussi l'anticorps A : $\mathbb{P}(A \mid B)$.

On a : • $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, • $\mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{1}{2}$, • $\mathbb{P}(B) = \dfrac{3}{10}$, • $\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{2}{5}$,

• $\mathbb{P}(B \mid \overline{A}) = \dfrac{1}{5}$

On applique la formule de Bayes :

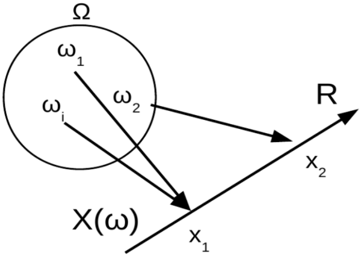
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B \mid \overline{A})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

Variables aléatoires

Définition :

Soit un univers Ω, une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ et des évènements E. Une **variable aléatoire** X est l'application :

$$
\begin{aligned}
X : (\Omega, E, \mathbb{P}) &\rightarrow \mathbb{R} \\
\omega &\mapsto X(\omega)
\end{aligned}
$$

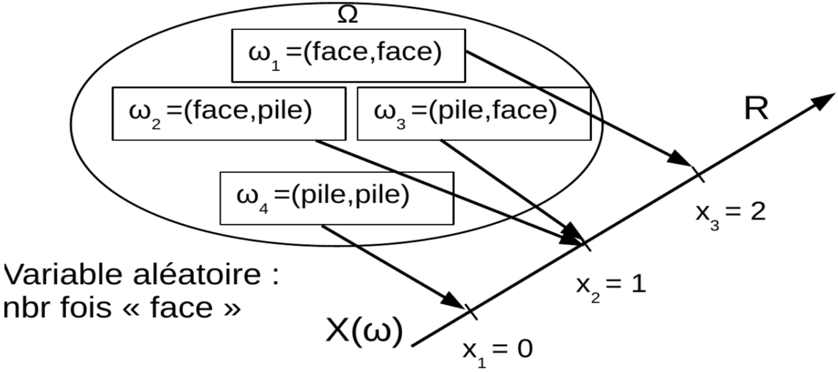


Variable aléatoire

La valeur x correspond à la réalisation de la variable X pour l'évènement élémentaire ω.

Variables aléatoires : Exemple

- On jette deux fois une pièce de monnaie non truquée, et on s'intéresse au nombre de fois que le côté "face" a été obtenu.
- Pour calculer les probabilités des divers résultats, on introduira une variable aléatoire X qui désignera le nombre de fois où le côté "face" est obtenu. Ici, X peut prendre les valeurs 0 ; 1 ; 2.



Variables aléatoires discrètes

Définition :

Une **variable aléatoire discrète** est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs entières, en nombre fini ou dénombrable :

$$\begin{array}{rcl} (\Omega, E, \mathbb{P}) & \to & \mathbb{N} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ l'ensemble des valeurs ordonnées prises par X.

En règle générale, toutes les variables qui résultent d'un dénombrement ou d'une numération sont de type discrètes.

Variables aléatoires discrètes : Exemple

On jette deux dés distincts et on s'intéresse à la somme des points. On note X cette variable aléatoire, elle est définie par : $\begin{array}{rcl} X:\Omega & \to & \mathbb{N} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto & \omega_1 + \omega_2 \end{array}$ où
$\Omega = \{(1,1); (1,2); \ldots (6,5); (6,6)\}$
Donc :

$$\begin{aligned} X(1,1) =& 1+1=2 \\ X(1,2) =& 1+2=3 \\ X(2,1) =& 2+1=3 \\ X(2,2) =& 2+2=4 \\ & \vdots \\ X(6,5) =& 6+5=11 \\ X(6,6) =& 6+6=12 \end{aligned}$$

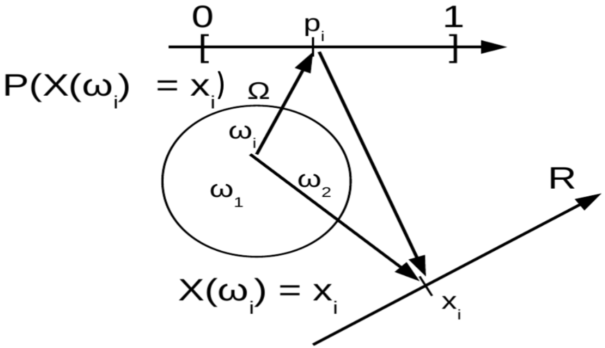
L'ensemble des valeurs possibles de X est $\{2, 3, \ldots, 12\}$

Fonction de densité discrète

Pour calculer la probabilité que la variable X soit égale a x_i, on cherche tous les événements élémentaires ω_j pour lesquels $X(\omega_j) = x_i$.

Définition :

La loi de probabilité ou fonction de densité discrète f d'une v.a. discrète est :
$f(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\omega_j)$ si $X(\omega_j) = x_i$ sur les évts $\omega_1, \ldots, \omega_k$



Exemple

Exemple (rappel) : On jette deux fois une pièce de monnaie non truquée, et on s'intéresse au nombre de fois que le côté "face" a été obtenu. Pour calculer les probabilités des divers résultats, on introduira une variable X qui désignera le nombre de "face" obtenu. X peut prendre les valeurs $0, 1, 2$.

La variable $X =$ nombre de côtés "face" peut prendre les valeurs $0, 1, 2$.

- $f(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}((\text{ pile, pile })) = \frac{1}{4}$
- $f(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}((\text{ pile, face })) + \mathbb{P}((\text{ face, pile })) = \frac{1}{2}$
- $f(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}((\text{ face, face })) = \frac{1}{4}$
- $f(x) = 0$ si $x \notin \{0, 1, 2\}$

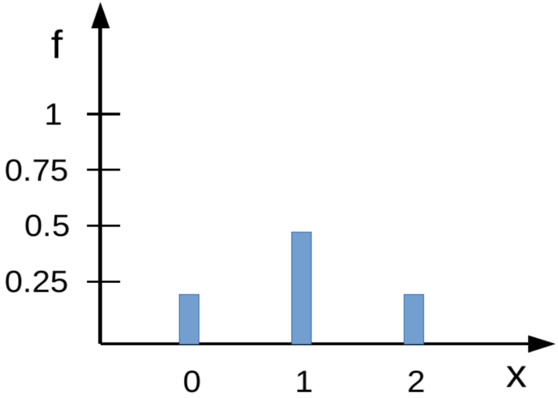
Fonction de densité discrète :

x	0	1	2	total
$f(x) = \mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Exemple

Fonction de densité discrète :

x	0	1	2	total
$f(x) = \mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



Fonction de densité discrète

Variables aléatoires discrètes : Fonction de répartition

Définition :

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X indique pour chaque valeur réelle x la probabilité que X prenne une valeur au plus égale à x. C'est la somme des probabilités des valeurs de X jusqu'à x. On la note F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}\left(X = x_i\right)$$

La fonction de répartition correspond à la distribution des probabilités cumulées, elle est toujours croissante et comprise entre 0 et 1.

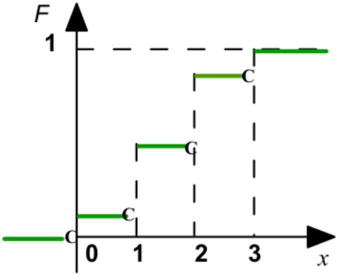
La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier.

Exemple

Fonction de répartition :

On considère l'évènement ω : ≪ lancer de 3 pièces ≫. On introduit une variable aléatoire X définie par $X(\omega)$: ≪ nombre de piles de l'évènement ω≫.

x	0	1	2	3
$f(x) = \mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1



Fonction de répartition

Espérance mathématique d'une distribution de probabilité

Idée générale : Si l'on s'imagine que le nombre d'observations croît indéfiniment, les fréquences observées vont tendre vers les probabilités théoriques et on admet que la moyenne calculée sur un échantillon de taille n variable aléatoire tendre vers une valeur limite qui sera la moyenne de l'ensemble des valeurs de la population entière.

On appelle cette moyenne **espérance mathématique de la variable aléatoire** X. C'est intuitivement la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire.

Espérance mathématique

L'espérance de X est la somme de toutes les réalisations possibles de X pondérées par leur probabilité.

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est $f : f(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$:

- Si X prend un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

- Si X prend un nombre dénombrable de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) \ \text{(à condition que la série converge)}$$

Variable aléatoire discrète

Espérance mathématique

L'espérance de X est la somme de toutes les réalisations possibles de X pondérées par leur probabilité.

Propriétés :

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, admettant une espérance $\mathbb{E}$, alors :

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$
- Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$
- Si la variable aléatoire est constante : $\forall \omega, X(\omega) = k$, alors $\mathbb{E}(X) = k$
- Si X et Y indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Variance et écart-type d'une distribution de probabilité

Idée générale : ce sont deux mesures servant à caractériser la dispersion d'une distribution. Elles indiquent de quelle manière la variable aléatoire se disperse autour de sa moyenne (son espérance).

La variance est l'espérance des carrés des écarts à la moyenne. L'écart type est la moyenne quadratique des écarts par rapport à la moyenne : la racine carrée de la variance.

Interprétation : Une variance de zéro signale que toutes les valeurs sont identiques. Une petite variance est signe que les valeurs sont proches les unes des autres alors qu'une variance élevée est signe que celles-ci sont très écartées.

Variable aléatoire discrète

Variance d'une distribution de probabilité

- Son calcul peut s'effectuer en utilisant l'expression : **Variance** d'une variable aléaroire (**formule de Koenig**) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\left(X^2\right)}_{Esperance\ de\ la\ v.a.\ X^2} - \underbrace{\mathbb{E}(X)^2}_{Carre\ de\ l'esperance\ de\ la\ v.a.\ X}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)]^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mathbb{E}(X))^2 f(x_i) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) f(x_i) - \mathbb{E}(X)^2
\end{aligned}$$

Variable aléatoire discrète

Variance et l'écart type d'une distribution de probabilité

Propriétés :

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, alors :

- $\forall a \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$
- Si X et Y ind., alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$
- Si X et Y ind., alors $\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$

Définition :

On appelle **écart-type** de la variable aléatoire X la racine carrée de sa variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Espérance, variance et écart-type - Exemple :

Considérons deux joueurs A et B à pile ou face.
Si le résultat de lancement est pile , le joueur A paye 2 Dh au joueur B, sinon, le joueur B paye 4 Dh au joueur A.

Calculer la variance de gain du joueur A.

Espérance, variance et écart-type - Exemple : Solution

Soit X une variable aléatoire qui désigne le gain du joueur A.
La loi de probabilité de cette variable aléatoire est comme suit :

Résultat de l'expérience (espace fondamental Ω)	Pile	Face
Les valeurs associées aux résultats possibles x_i	-2	4
Les probabilités associées aux résultats possibles $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	0.5	0.5

Expérience aléatoire : lancement d'une pièce de monnaie

Donc l'espérance mathématique est égale à :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = -2 \times 0.5 + 4 \times 0.5 = 1$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) = 4 \times 0.5 + 16 \times 0.5 = 2 + 8 = 10$$

Par suite : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 10 - 1 = 9$

Variable aléatoire discrète

Moments d'ordre supérieur

- Le moment d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k, i.e :

$$m_k = \mathbb{E}\left(X^k\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \times \mathbb{P}\left(X = x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \times p_i$$

- Le moment centré d'ordre k de X est

$$m'_k = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^k\right) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - \mathbb{E}(X)]^k \times p_i$$

- $$\mathbb{V}(X) = m_2 - m_1^2$$

Variable aléatoire discrète : Moments d'ordre supérieur

La **fonction génératrice des moments** d'une variable aléatoire X est la fonction : $M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}\mathbb{P}\left(X = x_i\right)$

Sachant que : $e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!} + \ldots$

$$\Rightarrow \quad e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Xt)^k}{k!} = \frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \ldots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \ldots$$

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = E\left(\frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \ldots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \ldots\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left(X^k\right) = \frac{t}{1!}E(X) + \frac{t^2}{2!}E\left(X^2\right) + \ldots + \frac{t^n}{n!}E\left(X^n\right) + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} m_k = \frac{t}{1!}m_1 + \frac{t^2}{2!}m_2 + \ldots + \frac{t^n}{n!}m_n + \ldots \end{aligned}$$

Variable aléatoire discrète

Covariance de deux variables aléatoires

Lorsque deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, il existe une caractéristique qui permet de déterminer l'intensité de leur dépendance. C'est la **covariance**.

Définition :

La **covariance** de deux variables aléatoires X et Y est définie par :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) \\
&= \mathbb{E}(XY - X\mathbb{E}(Y) - Y\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}
$$

Variable aléatoire discrète

Covariance de deux variables aléatoires

Proposition 1 :

Si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance est nulle.
Attention : La réciproque n'est pas vraie. Deux variables de covariance nulle ne sont pas obligatoirement indépendantes.

Proposition 2 :

Si deux variables aléatoires sont dépendantes :

- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathrm{Cov}(X, Y)$
- $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$

Variables aléatoires continues

Définition :

Une variable aléatoire est dite **continue** si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (borné ou non borné). En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une mesure sont de type continu.

Exemples :

- la masse corporelle des individus pour une espèce animale donnée,
- le taux de glucose dans le sang, ...

Variables aléatoires continues - Densité de probabilité

Définition :

Une variable aléatoire est dite **continue** si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (borné ou non borné). En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une mesure sont de type continu.

Exemples :

- la masse corporelle des individus pour une espèce animale donnée,
- le taux de glucose dans le sang, ...

Variables aléatoires continues - Densité de probabilité

Pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'évènement $\{X = a\}$ est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur. On considère alors la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises dans un intervalle $[a, b]$ tel que $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$

Définition :

On appelle **fonction densité de probabilité**, toute application continue par morceaux :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

telle que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (en supposant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe).

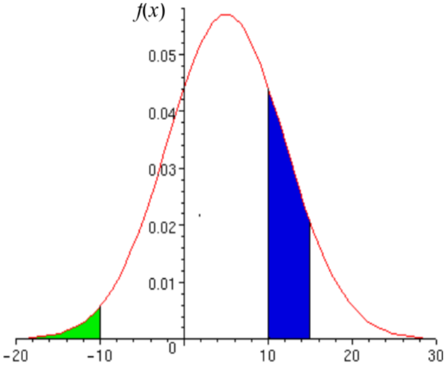
Variables aléatoires absolument continues

Définition :

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est dite **absolument continue**, s'il existe une fonction densité de probabilité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R};\ \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Densité de probabilité - Exemple



1. l'aire hachurée en vert correspond à la probabilité $\mathbb{P}(X < -10)$
2. l'aire hachurée en bleu correspond à la probabilité $\mathbb{P}(+10 < X < +15)$

La fonction f est une loi de probabilité car l'aire sous la courbe est égale à 1 pour toutes les valeurs de x définies.

Variables aléatoires continues - Fonction de répartition

Définition :

La **fonction de répartition** F d'une variable aléatoire X indique pour chaque valeur réelle x la probabilité que X prenne une valeur strictement inférieure à x : .

$$\forall x \in \mathbb{R};\ F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

F est une fonction positive, croissante, telle que : $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

La fonction de répartition F correspond à la distribution des probabilités cumulées, elle est toujours croissante et comprise entre 0 et 1.

Variables aléatoires continues - Fonction de répartition

Propriétés :

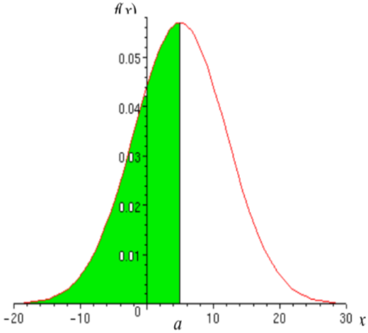
La fonction de répartition permet d'obtenir les probabilités associées à la variable aléatoire X. Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f et de fonction de répartition F, alors :

1. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ avec $a < b$
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = a) = 0$, si f est continue à droite du point a (ce qui implique que $\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a)$)

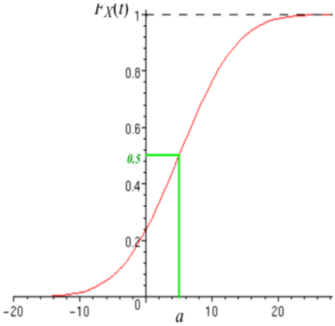
1. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a) = F(b) - F(a) =$ $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
2. Si f continue sur $[a, a+h]$, avec $h \to 0$, par le théo accroiss. finis : $\exists c = a + \theta h \in [a, a+h]$, si $0 < \theta < 1$ tel que : $\mathbb{P}(a \leq X \leq a+h) = \int_a^{a+h} f(x)dx = F(a+h) - F(a) = hf(a+\theta h)$ De plus, si $h \to 0$: $f(a+\theta h) \to f(a)$ et $hf(a+\theta h) \to 0$, d'où $\mathbb{P}(a \leq X \leq a+h) \to 0 = \mathbb{P}(X = a)$.

Densité de probabilité - Exemple

La fonction de répartition F correspond aux probabilités cumulées associées à la variable aléatoire continue sur l'intervalle d'étude



Fonction densité de probabilité $f(x)$

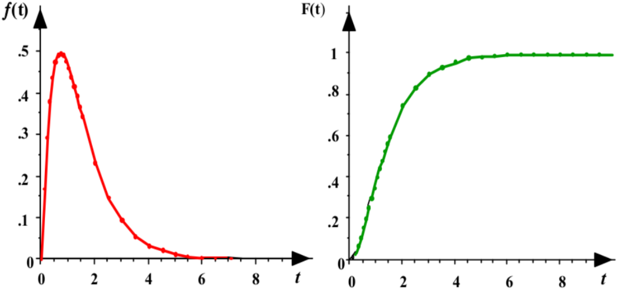


Fonction de répartition F_X

L'aire hachurée en vert sous la courbe de la fonction densité de probabilité f correspond à la probabilité $\mathbb{P}(X < a)$

Densité de probabilité - Exemple 1

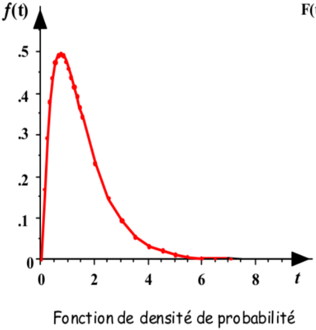
- Soit une population de canards colverts,
- lors d'une alerte, l'ensemble des individus quittent leur lieu de repos pour aller sur un étang.
- A $t = 0$, la surface de l'étang est déserte
- la probabilité qu'un canard regagne l'étang entre les temps t_1 et t_2 (en min) est : $F(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$, avec $f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$ la densité de probabilité

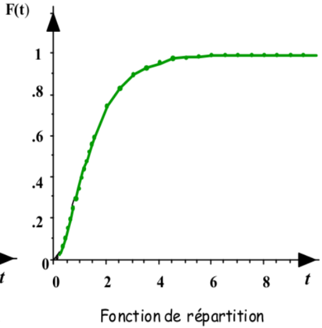


Fonction de densité de probabilité

Fonction de répartition

Densité de probabilité - Exemple 1





- $f(t)$: évolution de la recolonisation de l'étang par les canards en fonction du temps.
  $\Rightarrow$ Après 7 minutes, tous les canards ont regagné l'étang.
- $F(t)$: distribution des probabilités cumulées.
  $\Rightarrow$ plus de 50% des canards se posent sur l'étang au cours des 2 premières minutes qui suivent l'alerte.

Densité de probabilité - Exemple 2

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f une fonction densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition F.
3. Représenter le graphique de f et de F.
4. Calculer $\mathbb{P}(0,5 \leq X \leq 0,7)$.
5. Retrouver $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de $M_X(t)$.

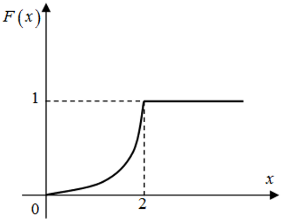
Densité de probabilité - Exemple 2

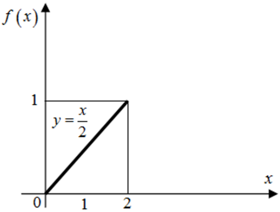
Solution :

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} \frac{x}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = \int_{0}^{2} \frac{x}{2}dx$$
$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{2} - 0\right] = 1$$

2. $$F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$$
$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x = \frac{x^2}{4}$$

3.





Variables aléatoires continues - Fonction de répartition

Espérance mathématique :

Si la variable aléatoire X est continue et a pour fonction de densité de probabilité f, son espérance mathématique est :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx \text{ (si la fonction } x \to xf(x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}).$$

Variance :

La variance d'une variable aléatoire continue X, notée $\mathbb{V}(X)$, est définie par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

où : $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx$

Densité de probabilité - Exemple 2

La suite de la Solution :

4. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$$\text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \int_0^2 x^2 f(x)dx - \left(\frac{16}{9}\right)$$
$$= \int_0^2 \frac{x^3}{2}dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9}$$
$$= \frac{18-16}{9} = \frac{2}{9}.$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{\tfrac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Variables aléatoires continues

L'espérance mathématique et la variance :

Propriétés :

Soient a et b deux constantes ; X et Y deux variables aléatoires continues

- $\mathbb{E}(a) = a \quad$ et $\quad \mathbb{V}(a) = 0$
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

Variables aléatoires continues

Moments d'ordre supérieur :

- Le moment d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k, i.e :

$$m_k = \mathbb{E}\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

- Le moment centré d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k, i.e :

$$m'_k = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^k = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mathbb{E}(X)]^k f(x)dx$$

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Le moment d'ordre 1 :} \quad m_1 = \mathbb{E}\left(X\right) \\ \text{Le moment d'ordre 2 :} \quad m_2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) \end{array}\right\} \implies V(X) = m_2 - m_1^2$$

Variables aléatoires continues

Moments d'ordre supérieur :

La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X est la fonction

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Sachant que : $e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!} + \ldots$

Donc : $e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Xt)^k}{k!} = \frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \ldots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \ldots$

Par suite :

$$\begin{aligned} M_X(t) =& \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \ldots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \ldots\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}\left(X^k\right) = \frac{t}{1!}\mathbb{E}(X) + \frac{t^2}{2!}\mathbb{E}\left(X^2\right) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\mathbb{E}\left(X^n\right) + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} m_k = \frac{t}{1!} m_1 + \frac{t^2}{2!} m_2 + \ldots + \frac{t^n}{n!} m_n + \ldots \end{aligned}$$

Lois Discrètes de probabilités - Loi Uniforme

- Soit E une expérience aléatoire dont le cardinal de l'espace fondamental Ω est égal à n.
- Soit X une variable aléatoire tel que $X(w_i)$ où w_i $(i = 1, \ldots, n) \in \Omega$ telles que x_i : les valeurs associées aux résultats possibles $w_i(i = 1, \ldots, n) \in \Omega$

X suit la **loi Uniforme** si et seulement si :

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

Les propriétés de X sont :

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$
- $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$

Lois Discrètes de probabilités - Loi Uniforme

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire suivante : ≪ **Lancement d'un dé** ≫
Soit X le numéro obtenu par cette expérience.
La valeur de X est l'élément de l'événement $A = \{i\}$ où $i = 1, 2, \ldots, 6$
Alors :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

L'espérance et la variance :

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{6+1}{2} = 3.5$
- $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12} = \dfrac{6^2-1}{12} = 2.91$

Lois Discrètes de probabilités - Loi de Bernoulli

- Soit un univers $\Omega = \{S, E\}$, avec S pour "succès" et E pour "échec".
- On construit une variable aléatoire discrète, X correspondant au nombre de succès telle que au cours d'une épreuve :
  - si S est réalisé, $X = 1$
  - si E est réalisé, $X = 0$

On appelle **variable de Bernoulli**, la variable aléatoire X telle que :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \{0, 1\} \end{aligned}$$

La loi de probabilité associée à la variable de Bernoulli X telle que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \{0,1\} &\to [0,1] \\ X &\mapsto \mathbb{P}(X) \end{aligned} \text{ avec } \begin{cases} \mathbb{P}(X=0) = q \\ \mathbb{P}(X=1) = p \text{ où } p+q=1 \end{cases}$$

est appelée **loi de Bernoulli** et est notée $\mathcal{B}(1, p)$

Loi de Bernouilli : Espérance et variance

Espérance de la variable de Bernoulli :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i) = (0 \times q) + (1 \times p) = \mathbf{p}$$

Variance de la variable de Bernoulli :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\right) f(x_i) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= [(0 \times q) + (1 \times p)] - p^2 \\ &= p - p^2 = \mathbf{p(1\text{-}p)} = \mathbf{pq} \end{aligned}$$

Lois Discrètes de probabilités - Loi de Bernoulli

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire suivante : « Lancement d'un dé »
On s'intéresse dans cette expérience au numéro de la face inférieure ou égale à 4.
Alors on a :

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ est l'événement concerné
- $p = \mathbb{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

La variable aléatoire définie par :

$$X = \begin{cases} 1 & , \text{ Si le numéro obtenu est inférieur à 4} \\ 0 & , \text{ Sinon} \end{cases}$$

Suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, 2/3)$.
La moyenne et la variance de X sont :

$$\mathbb{E}(X) = p = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p(1-p) = \frac{2}{9}$$

Lois Discrètes de probabilités - Loi Binomiale

- Soit n variables de Bernouilli X_i et l'application

$$S_n : \Omega^n \to \mathbb{R} \text{ avec } S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

- La **variable binomiale** S_n représente le nombre de succès obtenus lors de la répétition de n épreuves identiques et indépendantes.

On appelle **loi binomiale**, la loi de probabilité suivie par la somme de n variables de Bernouilli, où la probabilité associée au succès est p :

$$\begin{array}{rcl} S_n : \Omega^n & \to & \mathbb{R} \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i & \mapsto & \mathcal{B}(n,p) \end{array}$$

La probabilité que $S_n = k$, i.e. obtenir k succès en n épreuves ind. est :

$$\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

On a : $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$ (car $p + q = 1$)

Lois Discrètes de probabilités - Loi Binomiale

Proposition :

- L'espérance et la variance de la loi de binomiale sont égales respectivement : $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$
- La fonction génératrice des moments d'une loi de binomiale est :

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \left(q - pe^t\right)^n$$

Théorème :

Stabilité additive de la loi binomiale :
Si $X \to \mathcal{B}(m;p)$ et $Y \to \mathcal{B}(n;p)$ alors $X + Y \to \mathcal{B}(n+m;p)$

Lois Discrètes de probabilités - Loi Binomiale

Exemple :

On lance un dé 5 fois. On s'intéresse au nombre 3 obtenu en total, i.e : Compter le nombre de fois d'obtention le (numéros 3).
Soit X une variable aléatoire qui désigne la somme des résultats obtenus.
Donc X suit la loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 1/6$. C'est-à-dire :

$$X \sim \mathcal{B}(5; 1/6)$$

$$\begin{aligned} p = \mathbb{P}(X = 3) =& C_5^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ =& \frac{250}{7776} = 0,032 \end{aligned}$$

Lois Discrètes de probabilités - Loi de Poisson

- La **loi de Poisson** est utilisée lorsque il s'agit d'étude d'un phénomène durant un laps infiniment petit. Elle est utilisée aussi dans les phénomènes d'attentes , les contrôles de qualité et en assurance.
- Une variable aléatoire discrète X suit une **loi de Poisson** si :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

où $\lambda > 0$ le nombre moyen d'évènements dans un intervalle de temps fixé. On écrit $X \sim P(\lambda)$.

Les propriétés de X sont :

1. $\mathbb{E}(X) = \lambda$
2. $\mathbb{V}(X) = \lambda$

Lois Discrètes de probabilités - Loi de Poisson

Exemple :

Soit X le nombre des arrivées des clients à un guichet bancaire.
Supposons que X suit la loi de Poisson de paramètre 4
Calculer les probabilités suivantes :

1. aucun client n'arrive au guichet,
2. plus de 2 clients arrivent au guichet,
3. entre 3 et 7 clients arrivent au guichet.

Lois Discrètes de probabilités - Loi de Poisson

Solution :

1. $\mathbb{P}(X=0) = \dfrac{e^{-4}4^0}{0!} = e^{-4} = 0,018$
2. $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) \\ &= 1 - [\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)] \\ &= 0,762\end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}\mathbb{P}(3 \leq X \leq 7) =& \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5) + \mathbb{P}(X=6) \\ &+ \mathbb{P}(X=7) \\ =& 0,711\end{aligned}$$

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Lorsque n devient grand, le calcul des probabilités d'une loi binomiale $\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ devient très fastidieux. Sous certaines conditions, on peut trouver une approximation de $\mathbb{P}(S_n = k)$ par la loi de Poisson.

Théorème :

Soit l'application S_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On suppose que $np \to \lambda > 0$. Alors S_n converge en loi vers une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $\mathbb{P}(S_n = k) \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

En pratique, si $n \geq 30, p \leq 0.1$ et $np \leq 15$, on peut approximer la loi de S_n par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. C'est ce théorème qui justifie le fait que la loi

de Poisson est utilisée comme modèle de certaines expériences aléatoires (nombre de clients entrant dans un magasin, nombre de coquilles dans une page de journal,...).

Lois Continues de probabilités - Loi Uniforme

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur un intervalle $[a, b]$ si sa fonction de densité est donnée par la formule suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit : $X \sim U(a, b)$

Les propriétés de X sont :

1. $\mathbb{E}(X) = \dfrac{(a+b)}{2}$
2. $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Lois Continues de probabilités - Loi Uniforme

Exemple :

Soit une personne qui arrive à la gare de bus en sachant que ce dernier arrive à chaque 60 min. Cette personne n'a aucune information ni sur l'heure du denier bus ni sur l'heure du prochain bus. Il demande aux gents de la gare le temps qu'il doit rester en attente pour l'arrivée du prochain bus.
Calculer la probabilité pour que cette personne reste en attente entre 15 et 30 min.
Soit X le temps d'attente en min de cette personne. On admet que $X \sim U(0,60)$.
On a :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{60}, & \text{si } 0 \leq x \leq 60 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$\mathbb{P}(15 \leq X \leq 30) = \int_{15}^{30} f(x)dx = \frac{1}{60}\,[x]_{15}^{30} = \frac{15}{60} = 0.25$$

Lois Continues de probabilités - Loi normale

La **loi normale** est la loi de probabilité absolument continue qui dépend de deux paramètres : son espérance, un nombre réel noté μ, et son écart type, un nombre réel positif noté σ. Notée : $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

La densité de probabilité est donnée par la fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

Fonction de répartition : $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\mu)^2} du$

1. L'espérance et la variance de X sont données respectivement par :

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad \sigma^2(X) = \sigma^2$$

2. La fonction génératrice des moments

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Lois Continues de probabilités - Loi normale

Loi normale centrée réduite :

Si $X \sim N(m, \sigma^2)$ Alors

$$\begin{aligned} F(x) =& \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}\right) \\ =& \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{x-m}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

avec $Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$

La valeur de ϕ est déterminée à partir de la table normale

Si $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ alors Y est appelée la **loi normale centrée réduite**.

On écrit $\quad Y \sim N(0,1)$

On a $\mathbb{E}(Y) = 0 \quad , \quad \mathbb{V}(Y) = 1 \quad$ et $\phi(-y) = 1 - \phi(y)$

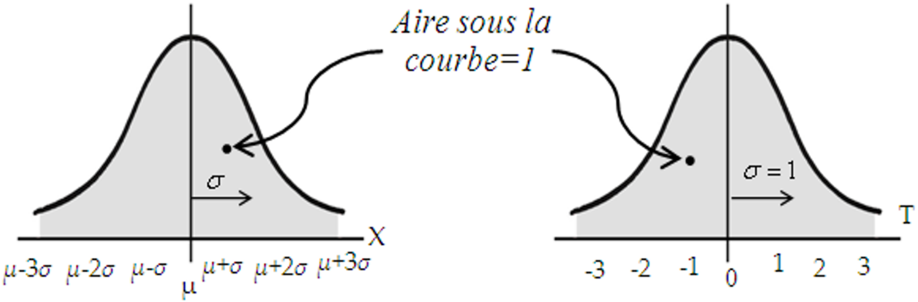
Lois Continues de probabilités - Loi normale

Paramètres : $E(X) = \mu$

$Var(X) = \sigma^2$

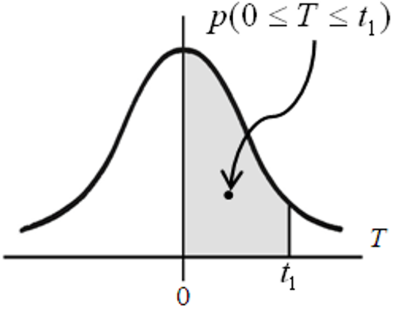
Paramètres : $E(T) = 0$

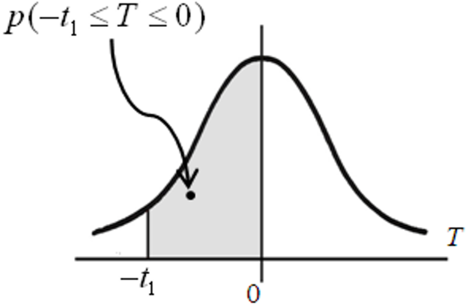
$Var(T) = 1$



Lois Continues de probabilités - Loi normale

Calcul des probabilités avec la **loi normale centrée réduite**



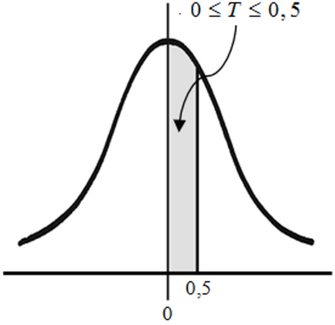


On a : $\mathbb{P}(0 \leq T \leq t_1) = \mathbb{P}(0 < T < t_1)$

Lois Continues de probabilités - Loi normale

Exemple :

Calcul de $\mathbb{P}(0 \leq T \leq 0,5)$ par l'utilisation de la table de la loi Normale



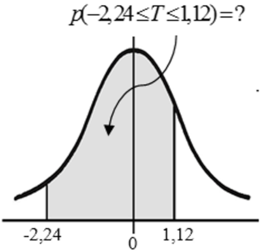
t	0,00	0,01	0,02
0	0.0000	0,0040	0,0080
0,1	0,0398	0,0438	0,0478
0,2	0,0793	0,0832	0,0871
0,3	0,1179	0,1217	0,1255
0,4	0,1554	0,1591	0,1628
0,5	0,1915	0,195	0,1985
0,6	0,2257	0,2291	0,2324
0,7	0,258	0,2611	0,2642
0,8	0,2881	0,291	0,2939
0,9	0,3159	0,3186	0,3212

- pour $T = 0,50$ on lit directement de la table, $0,1915$
- pour $T = 0,51$ on lit directement de la table, $0,195$

$$\mathbb{P}(0 \leq T \leq 0,5) = \mathbb{P}(0,5) - \mathbb{P}(0) = 0,1915 - 0,0000 = 0,1915$$

Lois Continues de probabilités - Loi normale

Exemple de Calcul : <u>Entre</u>
<u>T= -2,24 et T= 1,12</u>



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264
1.0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4773
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838
2,2	0,4866	0,4864	0,4868	0,487	0,4875

à T=1,12 correspond 0,3686

$$\Rightarrow \quad P(0 \leq T \leq 1,12) = 0,3686$$

à T=2,24 correspond 0,4875

$$\Rightarrow \quad P(-2,24 \leq T \leq 0) = P(0 \leq T \leq 2,24) = 0,4875$$

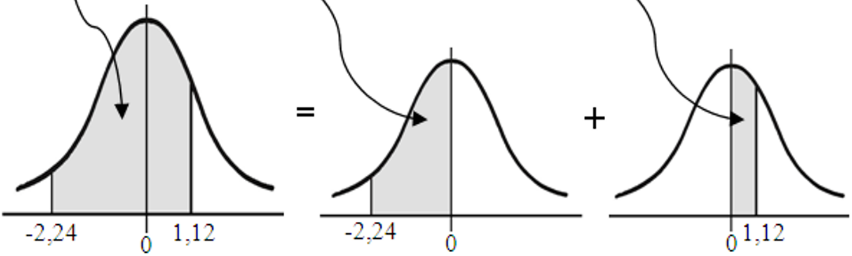
Lois Continues de probabilités - Loi normale

Exemple de Calcul : <u>Entre T= -2,24 et T= 1,12</u>

Donc on aura :

$$p(-2,24 \le T \le 1,12) = p(-2,24 \le T \le 0) + p(0 \le T \le 1,12)$$

$$= \quad 0,4875 \quad + \quad 0,3686 \quad = \quad 0,8561$$



Lois Continues de probabilités - Loi normale

On peut aussi lire directement la valeur de $\phi(x)$ à partir du tableau de loi Normale centrée réduite (voir document attaché ci-dessous)

Exemple : Soit $X \sim N(2,5;3)$, calculer $P(1,2 \leq X \leq 2)$.

On a $P(1,2 \leq X \leq 2) = P(\frac{1,2-2,5}{\sqrt{3}}) \leq \frac{X-2,5}{\sqrt{3}} \leq \frac{2-2,5}{\sqrt{3}}) = P(-0,75 \leq Y \leq -0,29) = \phi(-0,29) - \phi(-0,75)$, avec $Y \sim N(0,1)$ et ϕ sa fonction de répartition. On pourra lire les valeurs de ϕ directement depuis la table de la loi normale centrée réduite, d'où $\phi(-0,29) = 1 - \phi(0,29) = 1 - 0,6141 = 0,3859$ et $\phi(-0,75) = 1 - \phi(0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$. Ainsi $P(1,2 \leq X \leq 2) = 0,1593$.

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

Lois Continues de probabilités - Loi log-normale

Une variable aléatoire continue Y suit une **loi de log-normale** de paramètres et $x_0, \mu \in \mathbb{R}$ si $\sigma \in \mathbb{R}^*$

Notée : $Y \sim \log N\left(x_0; \mu; \sigma^2\right) \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(X - x_0\right) \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

Elle admet alors pour densité de probabilité la fonction :

$$f_Y(t) = \frac{1}{\left(t - x_0\right)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln(t - x_0) - \mu\right)^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Fonction de répartition : $F_Y(x) = F_X(\ln x);$ si $x \geq 0$

où $F_X(x)$ est la fonction de répartition de la loi Normale.

Lois Continues de probabilités - Loi de log-normale

L'espérance et la variance de Y sont données respectivement par :

$$\mathbb{E}(Y) = x_0 + e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

et

$$\sigma^2[Y] = e^{2\mu + \sigma^2} \left(e^{\sigma^2} - 1 \right)$$

Remarque : la fonction génératrice de la loi log-normale est non définie pour les

réels strictement positifs.

Lois Continues de probabilités - Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Notée $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

La fonction de répartition et de survie sont respectivement données par

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{et} \quad S_X(x) = e^{-\delta x}$$

Proposition :

- L'espérance : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et la variance : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
- La fonction génératrice est donnée par :

$$\phi_\lambda(t) = \mathbb{E}\left[e^{tx}\right] = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

- La sommes de variables aléatoires **exponentielles** indépendantes est une variable aléatoire suit une **loi Gamma**.

Lois Continues de probabilités - Loi de Pareto

Une variable aléatoire X suit une loi de Pareto de paramètres $\alpha, x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_X(x, a, x_0) = \begin{cases} \dfrac{a x_0^a}{x^{a+1}} & \text{si} \quad x \geq x_0 \\ 0 & \text{si} \quad x_0 < x \end{cases}$$

Notée $X \sim \text{Pareto}(a, x_0)$
La fonction de répartition et de survie sont données respectivement par :

$$F_X(x, x_0, a) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^a \text{ et } S_X(x, x_0, a) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^a \text{ avec } x \geq x_0 > 0$$

Lois Continues de probabilités - Loi de Pareto

L'espérance et la variance de X sont données respectivement par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{x_0 a}{a-1}, \text{ si } a > 1 \quad \text{et} \quad \sigma^2(X) = \frac{x_0^2 a}{(a-2)(a-1)}, \text{ si } a > 2$$

Remarque : La fonction génératrice de la loi de Pareto est **non définie** pour les réels strictement positifs.

Lois Continues de probabilités - Loi de Weibull

Une variable aléatoire X suit une **loi de Weibull** de paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_X(x) = \begin{cases} \beta\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Notée $X \sim W(\alpha, \beta)$.

La fonction de répartition et de survie sont données respectivement par

$$F_X(x, \alpha, \beta) = 1 - e^{-\beta x^{\alpha}} \quad \text{et} \quad S_X(x, \alpha, \beta) = e^{-\beta x^{2}}$$

Lois Continues de probabilités - Loi de Weibull

- L'espérance et la variance de X sont données respectivement par :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \text{et} \quad \sigma^2[X] = \frac{1}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}}\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

- La Fonction génératrice des moments :

$$m_X(k) = \mathbb{E}\left(X^k\right) = \frac{1}{\beta^n}\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right)$$

Lois Continues de probabilités - Loi de Gamma

Une variable aléatoire X suit une **loi de Gamma** ou eulérienne de paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta t} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Notée $\quad X \sim \mathrm{GA}(\alpha, \beta)$.

- L'espérance et la variance de X sont données respectivement par :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad \sigma^2[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

- La fonction génératrice des moments

$$m_X(k) = \mathbb{E}\left(X^k\right) = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-k}, \quad \forall t \geq \beta$$

Remarque : La loi GA(1, β) = Exp(β) est la loi Exponentielle de paramètre

Lois Continues de probabilités - Loi de Khi-deux

- Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e :
  - $X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \ldots, n$
  - $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j (i, j = 1, \ldots, n)$
- La variable aléatoire X définie par : $X = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ Suit la **loi de Khi-deux** à n degré de liberté, on écrit $X \rightarrow \chi^2(n)$

Lois Continues de probabilités - Loi de Student

- Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e :

$$X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

- Soit Y une variable aléatoires normale centrée réduite et indépendante de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. i.e :

$$Y \sim N(0,1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Cov}\,(Y, X_i) = 0, \forall i = 1, \ldots, n$$

- La variable aléatoire T définie par : $T = \dfrac{Y}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \dfrac{Y}{\sqrt{\dfrac{Z}{n}}}$

  où $Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$ suit la **loi de Student** à n dégrées de liberté. On écrit $T \to t_n$

Lois Continues de probabilités - Loi de Fisher

- Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ deux suites de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e :
  - $X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \ldots, n$ et $Y_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \ldots, m$
  - $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = 0, \ \forall i \neq j \ (i,j = 1, \ldots, n)$
    et $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = 0, \ \forall i \neq j \ (i,j = 1, \ldots, m)$
- La variable aléatoire F définie par :

$$F = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2} = \frac{\frac{1}{n}X}{\frac{1}{m}Y}$$

où $X \sim \chi^2_n$ et $Y \sim \chi^2_m$ suit la **loi de Fisher** à n et m degrés de liberté. On écrit $F \to F_{n,m}$

Moments : Quelques inégalités classiques

- Inégalité de markov $\forall k > 0, \quad \mathbb{P}(|X| > k) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{k}$
- Inégalité de Bienaymé Tchebychev

$$\forall k > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > k) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{k^2}$$

- Inégalité de Jensen ; soit g convexe $\quad g(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(g(X))$
- Inégalité de Hölder $\quad \mathbb{E}(|XY|) \leq \mathbb{E}\left(|X|^p\right)^{1/p} \mathbb{E}\left(|Y|^q\right)^{1/q}$
  - Cas particulier : Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)}, \quad \mathbb{E}(|X|) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(X^2\right)}$$