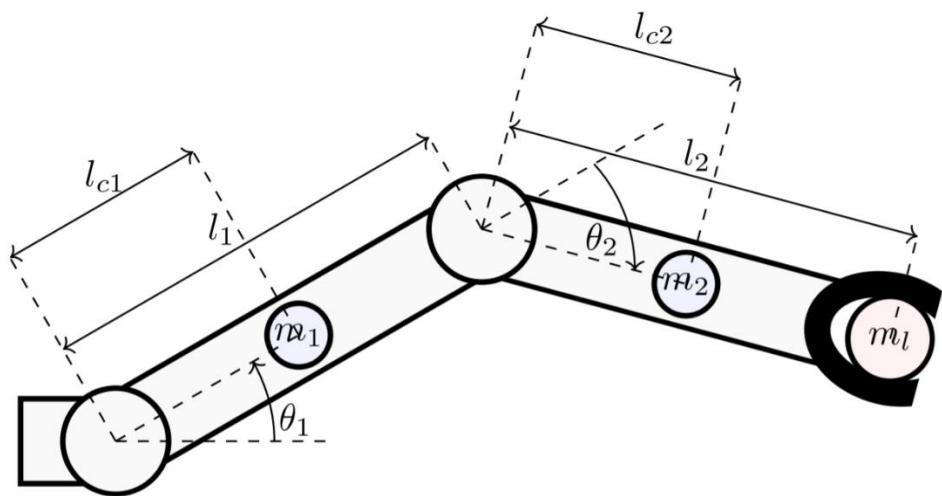


## ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΑΕ III

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΕΛΕΓΚΤΗ ΓΙΑ ΡΟΜΠΟΤΙΚΟ ΒΡΑΧΙΟΝΑ 2 ΒΑΘΜΩΝ  
ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ ΚΑΙ  
ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΒΑΣΙΣΜΕΝΟΥ ΣΤΗΝ  
ΠΑΘΗΤΙΚΟΤΗΤΑ



Ασημακίδης Σταμάτιος 9711

Email:asimakid@ece.auth.gr

## ΤΜΗΜΑ Α

Στο συγκεκριμένο τμήμα ζητείται η χρήση της μεθόδου του sliding, με στόχο α) την σταθεροποίηση της θέσης σε συγκεκριμένο σημείο και β) την ακολούθηση συγκεκριμένης τροχιάς. Και στις δύο περιπτώσεις ακολουθείται η ίδια μεθοδολογία για την σχεδίαση του ελεγκτή, που αφορά την ακολουθήση μια επιθυμητής τροχιάς  $qd \in R^{2x1}$ . Στην περίπτωση που επιθυμούμε την σταθεροποίηση σε συγκεκριμένη θέση τίθεται η τροχία ως η σταθερή με τις  $qd1, qd2$  ίσες με τις αντίστοιχες τελικές επιθυμητές τιμές.

Για ορισμένες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου δεν ορίζεται από την εκφάνηση συγκεκριμένη τιμή, αλλά ενα εύρος τιμών μέσα στις οποίες ανήκει η συγκεκριμένη τιμή. Σαν πρώτο βήμα της θεωρητικής ανάλυσης ειναι η εύρεση των αντίστοιχων διαστημάτων για τα στοιχεία των πινάκων που ορίζουν την δυναμική του συστήματος, η οποία δίνεται από την σχέση  $H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u$ , με  $q = [\theta_1 \theta_2] \in R^{2x1}$  να είναι το διάνυσμα των γωνίων της κάθε αρθρώσης.

### Υπολογισμός φραγμάτων για τα στοιχεία του πίνακα

Ακολουθούν οι αριθμητικές τιμές για το πρόβλημα:

$m1 = 6kg, m2 = 4kg, l1 = 0.5m, l2 = 0.4m, g = 9.81m/s^2$ , ενώ οι άγνωστες παράμετροι ορίζονται ως εξής:

$$0.1 \leq lc1 \leq 0.4, 0.05 \leq lc2 \leq 0.3, 0.02 \leq I1 \leq 0.5, 0.01 \leq I2 \leq 0.15, 0 \leq ml \leq 2$$

Ο πίνακας  $H$  είναι γνωστό οτι είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, επομένως ισχύει οτι  $H^T = H > 0$  και ονομάζουμε τα στοιχεία του οπως φαίνεται παρακάτω

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}$$

$$h_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_{c2}^2 + l_1^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + m_l (l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2) + I_1 + I_2$$

$$h_{12} = m_2 l_{c2} (l_{c2} + l_1 \cos q_2) + m_l l_2 (l_2 + l_1 \cos q_2) + I_2$$

$$h_{22} = l_{c2}^2 m_2 + l_2^2 m_l + I_2$$

Το  $h_{11}$  στοχείο περιέχει τοσο σταθερούς όρους, όσο και όρους που εξαρτώνται απο το  $\cos(q2)$ .

Επομένως μπορεί να γραφτεί στην μορφή  $h_{11} = h_{11c} + h_{11d} \cos(q2)$

Για τις δοσμένες τιμές υπολογίζεται οτι  $0.1 \leq h_{11c} \leq 3.79, 0.2 \leq h_{11d} \leq 2$ .

Το ίδιο ισχύει και για το  $h_{12}$  στοιχείο του πίνακα, επομένως και αυτό γράφεται ως

$$h_{12} = h_{12c} + h_{12d} \cos(q2), \text{ ενώ προκύπτει ότι } 0.02 \leq h_{12c} \leq 0.83, 0.1 \leq h_{12d} \leq 1.$$

Το  $h_{22}$  εξαρτάται μόνο απο σταθερούς όρους (δεν είναι χρονικά μεταβαλλόμενο), επομένως  $h_{22} = h_{22c}$  και ισχύει οτι  $0.02 \leq h_{22c} \leq 0.83$

Έπειτα ο πίνακας  $C$  ειναί της μορφής  $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix}$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -l_1(m_2 l_{c2} + m_l l_2) \sin q_2 \dot{q}_2 & -l_1(m_2 l_{c2} + m_l l_2) \sin q_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_1) \\ l_1(m_2 l_{c2} + m_l l_2) \sin q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας  $C$  μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$C = a * \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 \cdot \sin(q_2) & -(q_1 + \dot{q}_2) \cdot \sin(q_2) \\ q_1 \cdot \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix} \text{ οπου } a = l_1(m_2 \cdot l_{c2} + m_l \cdot l_2).$$

Από τις αριθμητικές τιμές του προβλήματος προκύπτει ότι  $0.1 \leq a \leq 1$ .

Τέλος, ο πίνακας στήλη,  $g$  ορίζεται ως  $g = \frac{g_1}{g_2}$

$$g(q) = \begin{bmatrix} (m_2 l_{c2} + m_l l_2) g \cos(q_1 + q_2) + (m_2 l_1 + m_l l_1 + m_1 l_{c1}) g \cos q_1 \\ (m_2 l_{c2} + m_l l_2) g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός μπορεί να γραφτεί στην μορφή  $g = \frac{\beta \cdot g \cdot \cos(q_1 + q_2) + \gamma \cdot g \cdot \cos(q_1)}{\beta \cdot g \cdot \cos(q_1 + q_2)}$ ,

όπου  $\beta = m_2 \cdot l_{c2} + m_l \cdot l_2$ ,  $\gamma = m_2 \cdot l_1 + m_l \cdot l_1 + m_1 \cdot l_{c1}$ , ενώ για τις αριθμητικές τιμές του προβλήματος υπολογίζεται ότι:  $0.2 \leq \beta \leq 2$ ,  $2.6 \leq \gamma \leq 5.4$ .

### Θεωρητική αναλυση Lyapunov για sliding

Αρχίκα ορίζουμε το σφάλμα  $e = q - qd$ , για το οποίο ισχύει  $e \in R^{2x1}$ , καθώς περιλαμβάνει τα σφάλματα και για τις δύο γωνιακές θέσεις. Έπειτα ορίζουμε την επιφάνεια ολίσθησης  $s = \dot{e} + Lamda \cdot e$ , για την οποία ισχύουν τα εξής  $s \in R^{2x1}$ , περιλαμβάνονται δηλαδή σε αυτήν οι επιμέρους επιφάνειες για την κάθε άρθρωση, ενώ ο  $Lamda \in R^{2x2}$  ειναι διαγώνιος πίνακας και θετικά οριμένος ( $l_1, l_2 > 0$ ). Αντι για τον  $Lamda = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix}$  θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και μια σταθερά λ, ωστοσό επιλέχθηκε ο διαγώνιος πίνακας καθώς με την χρήση αυτού επιτρέπεται η διαφοροποιήση της συμπέριφοράς του ελεγκτή για κάθε άρθρωση και επομένως της διαφορετικής απόκρισης για κάθε γωνιακή θέση, που εξυπηρετεί για παράδειγμα περιπτώσεις που υπάρχουν διαφορετικοί στόχοι για τα  $q_1, q_2$  (πχ για  $q_1$  σταθερή και  $q_2$  μεταβαλλόμενη αφήνεται περιθώριο για διαφοροποιήση των  $l_1, l_2$  ανάλογα με την επιθυμήτη αποκρίση, καθώς έτσι αφήνονται και μεγαλύτερα περιθώρια για τις απαταιτήσεις σε ροπή εισόδου στην κάθε άρθρωση).

Για την σχεδίαση του ελεγκτή που θα εξασφαλίζει την σύγκλιση της επιφάνεις ολίσθησης στο  $(0 | 0)$  επιλέγεται ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov η  $V: R^2 \rightarrow R$ :

$$V(s) = \frac{1}{2} \cdot s^T H s ,$$

Προφανώς η  $V$  είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση ως τετραγωνική μορφή του  $H$ , εφόσον όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως ο  $H$  είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Η παράγωγος της  $V$  προκύπτει ως εξής

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{s}^T H s + \frac{1}{2} s^T H \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{H} s => (\text{πίνακας } H \text{ συμμετρικός})$$

$$\dot{V} = \dot{s}^T H s + \frac{1}{2} s^T \dot{H} s => (\text{προσθαφείρεση } S^T C S)$$

$$\dot{V} = s^T H \dot{s} + \frac{1}{2} s^T (\dot{H} - 2C) s + s^T C s => (\dot{H} - 2C \text{ αντισυμμετρικός}, s^T (\dot{H} - 2C) s = 0)$$

$$\dot{V} = s^T H \dot{s} + s^T C s$$

Επόμενως εξάγουμε από την διαφορική εξίσωση την παράγωγο  $\dot{s}$ . Συγκεκριμένα

$$\dot{s} = \ddot{q} - \ddot{q}d + Lamda \cdot \dot{e}$$

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u => (\text{προσθαφαίρεση } -H \cdot \ddot{q}d + H \cdot Lamda \cdot \dot{e})$$

$$H(q)(\ddot{q} - \ddot{q}d) + H \cdot Lamda \cdot \dot{e} = u - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - H \cdot \ddot{q}d + H \cdot Lamda \cdot \dot{e} =>$$

$$H \cdot \dot{s} = u - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - H \cdot \ddot{q}d + H \cdot Lamda \cdot \dot{e}$$

Το οποίο με αντικατάσταση στην  $\dot{V}$  δίνει:

$$\dot{V} = s^T (u - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - H \cdot \ddot{q}d + H \cdot Lamda \cdot \dot{e}) + s^T C s =>$$

Η είσοδος επιλέγεται για να προκύψει αρνητικά ορισμένη  $\dot{V}$  και με βάση το γεγόνος ότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τις ακριβείς τιμές των πινάκων αλλα μόνο τις εκτιμήσεις τους. Αυτές συμβολίζονται ως  $\tilde{H}$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{g}$  αντίστοιχα, ενώ επιλέγεται

$$u = \tilde{C} \cdot \dot{q} + \tilde{g} - \tilde{H} \cdot \ddot{q}d - \tilde{H} \cdot Lamda \cdot \dot{e} - \tilde{C}s - \rho 1 \cdot \frac{s}{\|s\|} - \rho 2 \cdot s$$

Επομένως προκύπτει οτι:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s^T ((\tilde{C} - C)\dot{q} + (\tilde{g} - g) + (\tilde{H} - H) \cdot \ddot{q}d + (H - \tilde{H}) \cdot Lamda \cdot \dot{e}) + s^T (C - \tilde{C})s \\ & - \rho 1 \cdot \frac{s^T \cdot s}{\|s\|} - \rho 2 \cdot s^T \cdot s \end{aligned}$$

Και εν τέλη προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \|s\| \cdot (\|\tilde{C} - C\| \cdot \|\dot{q}\| + \|\tilde{g} - g\| + \|\tilde{H} - H\| \cdot \|\ddot{q}d\| + \|H - \tilde{H}\| \cdot \|Lamda\| \cdot \|\dot{e}\| - \rho 1) \\ & + \|s\|^2 \cdot (\|\tilde{C} - C\| - \rho 2) \end{aligned}$$

Επομένως θέλουμε για να εξασφαλίζεται αρνητικά ορισμένη  $\dot{V}$ :

$$\rho_1 \geq \|\tilde{C} - C\|_{max} \cdot \|\dot{q}\| + \|\tilde{g} - g\|_{max} + \|\tilde{H} - H\|_{max} \cdot \|\ddot{q}\| + \|H - \tilde{H}\|_{max} \cdot \|Lamda\| \cdot \|\dot{e}\|$$

Και

$$\rho_2 \geq \|\tilde{C} - C\|_{max}$$

Σε αυτό το σημείο επιλέγονται οι εκτιμήσεις των πινάκων με βάση τα αρχικά όρια που προέκυψαν, στο μέσο αυτών:

$$\widehat{h11c} = 1.945, \widehat{h11d} = 1.1, \widehat{h12c} = 0.425, \widehat{h12d} = 0.55, \widehat{h22c} = 0.55$$

$$\tilde{\alpha} = 0.55, \tilde{\beta} = 1.1, \tilde{\gamma} = 4$$

Επομένως οι εκτιμήσεις των πινάκων εχουν την μορφή:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \begin{bmatrix} 1.945 + 1.1\cos(q2) & 0.425 + 0.55\cos(q2) \\ 0.425 + 0.55\cos(q2) & 0.425 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= 0.55 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 \sin(q2) & (-\dot{q}_1 - q_2 \dot{q}_1) \sin(q2) \\ \dot{q}_1 \sin(q2) & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{g} &= \frac{1.1 \cdot g \cdot \cos(q1 + q2) + 4 \cdot g \cdot \cos(q1)}{1.1 \cdot g \cos(q1 + q2)} \end{aligned}$$

Στο επόμενο βήμα ζητείται ο υπολογισμός των  $\|\tilde{C} - C\|_{max}, \|\tilde{g} - g\|_{max}, \|H - \tilde{H}\|_{max}$ .

Σαν  $\|\chi\|$  συμβολίζεται η  $L2$  νόρμα του πίνακα  $\chi$ . Για τον υπολογισμό των φραγμάτων για τις  $L2$  νόρμες θα χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα  $\|\chi\|_2 \leq \|\chi\|_F$ , όπου με  $\|\chi\|_F$  συμβολίζεται η νόρμα Forbenius, η οποία ορίζεται ως  $\|\chi\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$ .

$$\begin{aligned} H - \tilde{H} &= \begin{bmatrix} 1.845 + 0.9\cos(q2) & 0.405 + 0.45\cos(q2) \\ 0.405 + 0.45\cos(q2) & 0.405 \end{bmatrix} \\ C - \tilde{C} &= 0.45 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 \sin(q2) & (-\dot{q}_1 - q_2 \dot{q}_1) \sin(q2) \\ \dot{q}_1 \sin(q2) & 0 \end{bmatrix} \\ g - \tilde{g} &= \frac{0.9 \cdot g \cdot \cos(q1 + q2) + 1.4 \cdot g \cdot \cos(q1)}{0.9 \cdot \cos(q1 + q2)} \end{aligned}$$

$$\|H - \tilde{H}\|_F = \sqrt{0.405^2 + (1.845 + 0.9 \cos(q2))^2 + 2 * (0.405 + 0.45 \cos(q2))^2} =>$$

Εσόσον ομως ισχύει  $\cos(q2) \leq 1$  =>

$$\|H - \tilde{H}\|_F \leq \sqrt{0.405^2 + 2.745^2 + 2 * 0.855^2} =>$$

$$\|H - \tilde{H}\|_{max} \leq 3.0267$$

Για τον  $C$  προκύπτει οτι

$$\|C - \tilde{C}\|_F = 0.45\sqrt{2}|\sin(q2)|\sqrt{\dot{q1}^2 + \dot{q2}^2} => \text{εφοσον ισχυει οτι } \sin(q2) \leq 1$$

$$\|C - \tilde{C}\|_F \leq 0.45\sqrt{2}\sqrt{\dot{q1}^2 + \dot{q2}^2} =>$$

$$\|C - \tilde{C}\|_{max} \leq 0.6364\sqrt{\dot{q1}^2 + \dot{q2}^2}$$

Για τον  $g$  δεν χρησιμοποιήθηκε η νορμα Forbenius καθώς η  $L2$  νορμα του πίνακα στήλη είναι ιση με το ευκλείδιο μέτρο αυτού. Επομένως

$$\|\tilde{g} - g\| = g\sqrt{(0.9^2 + 0.9^2)\cos(q1 + q2)^2 + 1.4^2\cos(q1)^2} =>$$

$$\|g - \tilde{g}\|_{max} \leq g \cdot 1.892$$

Με βάση τα παραπάνω και τις συνθήκες που αναφέρθηκαν προηγουμένως μπορούμε να προσδιορίσουμε την ελάχιστη τιμή των  $\rho1, \rho2$ .

$$\rho1 \geq 0.6364\sqrt{\dot{q1}^2 + \dot{q2}^2}\|\dot{q}\| + g \cdot 1.995 + 3.0927 \cdot \|\ddot{qd}\| + 3.0927 \cdot \|Lamda\| \cdot \|\dot{e}\|$$

$$\rho2 \geq 0.6364\sqrt{\dot{q1}^2 + \dot{q2}^2} .$$

όπου οι εκφράσεις ειναι αποτελούνται απο γνωστές ( $\|Lamda\|, \|\ddot{qd}\|, g$ ) και μετρήσιμες ποσότητες ( $\sqrt{\dot{q1}^2 + \dot{q2}^2} \|\dot{q}\|$ ),επομένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον ελεγκτή.

$$u = \tilde{C} \cdot \dot{q} + \tilde{g} - \tilde{H} \cdot \ddot{qd} - \tilde{H} \cdot Lamda \cdot \dot{e} - \tilde{C}s - \rho1 \cdot \frac{s}{\|s\|} - \rho2 \cdot s$$

Έτσι με την χρήση του παραπάνω ελεγκτη η  $\dot{V}$  ειναι της μορφής  $\dot{V} \leq -c1\|s\| - c2s^2$ . Για τα  $c1, c2$  γνωρίζουμε οτι είναι οτι ειναι μικρότερα ή ίσα του 0,επομένως όπως συνηθίζεται σε σχεδιάσεις ελεγκτών με χρήση της μέθοδου Sliding θα πρέπει να προστεθεί ενας επιπλέον όρος  $-\kappa1\|s\|$  και ενας  $-\kappa2s^2$   $\kappa1, \kappa2 > 0$  για να εξασφαλίσουμε ότι η  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ορισμένη.Οι όροι αυτοί εμφανίζονται εντός των  $\rho1, \rho2$  και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καθορίσουν επίσης την ταχύτητα συγκλισης της επιφάνειας στο  $s = 0$ .

Επομένως τελικά επίλγεται

$$\rho_1 = 0.6364\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2} \| \dot{q} \| + g \cdot 1.995 + 3.0927 \cdot \| \ddot{q}d \| + 3.0927 \cdot \| Lamda \| \cdot \| \dot{e} \| + \kappa_1$$

$$\rho_2 = 0.6364\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2} + \kappa_2$$

Προκύπτει ότι η τελική μορφή της  $\dot{V}$  είναι  $\dot{V} \leq -(c_1 + \kappa_1)\|s\| - (c_2 + \kappa_2)s^2 < 0$  που εξασφαλίζεται οτι είναι αρνητικά ορισμένη, επομένως έχουμε αποδείξει οτι το σύστημα θα τείνει ασυμπτωτικά πάνω στην  $s=0$  και θα παραμένει σε αυτή. Έφοσον το σύστημα βρίσκεται στην  $s=0$ , εξασφαλίζεται εκθετική σύγκλιση των σφαλμάτων στο 0 και επομένως ακολούθηση της επιθυμητής τροχίας. Στα πλαίσια των προσομοιώσεων επιλέχθηκε  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ , καθώς τα περιθώρια (για τις συνθήκες του προβλήματος) για να παραμένει αρνητικά ορισμένη η  $\dot{V}$ , είναι αρκέτα μεγάλα (σε δοκίμες που έγιναν χωρίς τα  $\kappa_1, \kappa_2$  εξασφαλίζόταν η επιθυμητή σύγκλιση).

## Προσομοίωση

Για την προοσομοιώση του συστήματος χρησιμοποιήθηκε το ode45 που επιλύει με την αριθμητική μέθοδο Runge-Kutta το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την συμπεριφορά του συστήματος. Σε αύτο πρέπει να δοθουν οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος επομένως δημιουργήθηκε μια συνάρτηση που τις υπολογίζει. Σε αυτήν ορίζονται οι πίνακες  $H, C, g$  με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης καθώς και οι εκτιμήσεις αυτών, η επιθυμητή τροχιά (που για την σταθεροποίηση σε τελικό σημείο ορίζεται ως  $qd1 = const$   $qd2 = const$  και ίσα με τις αντίστοιχες επιθυμητές γωνιακές θέσεις), ο ελεγκτής και επιστρέφεται το συστήμα των εξισώσεων κατάστασης του συστήματος. Για τον ελεγκτή χρησιμοποιήθηκε η συναρτηση «κορεσμού» του  $\frac{s}{\|s\|}$  και συγκριμένα, λόγω της πολυπλοκότητας του υπολογισμού  $\frac{s}{\|s\|}$  όσο το  $s$  πλησίαζε το 0, που προκαλού σημαντική καθυστέρηση στην εκτέλεση της προσωμόιωσης.

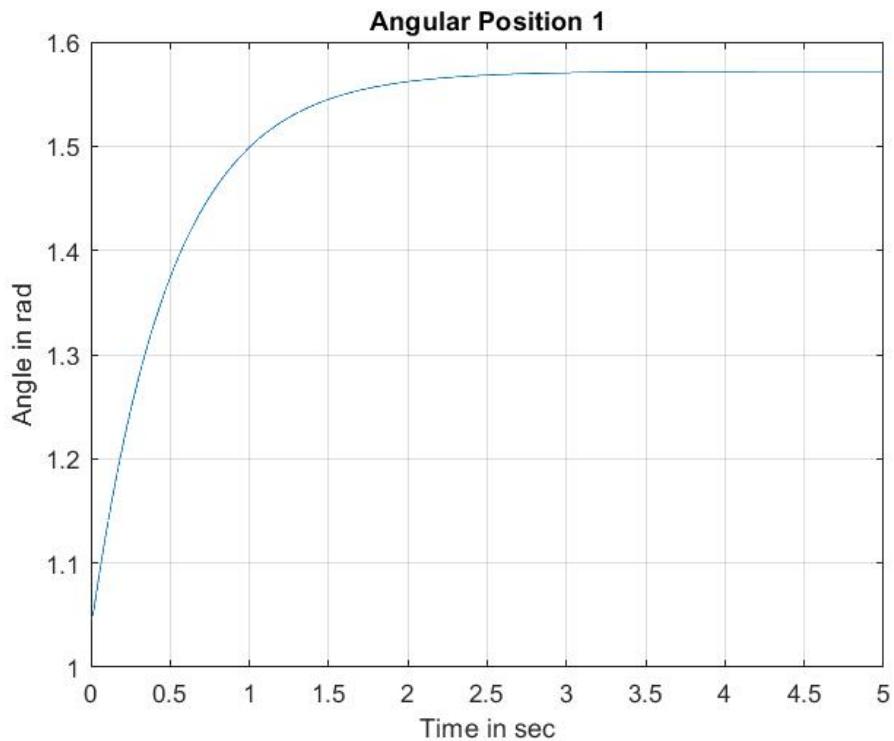
$$h(s) = \begin{cases} \frac{s}{\|s\|} \alpha v \|s\| > \varepsilon \\ \frac{s}{\varepsilon} \alpha v \|s\| < \varepsilon \end{cases}$$

Η αλλαγή αυτή καθιστά και πιο ρεαλιστική την προσωμοίωση καθώς σε πραγματικά συστήματα δεν είναι δυνατή η ακριβής υλοποίηση του  $\frac{s}{\|s\|}$ , ιδιαίτερα για την περιοχή γύρω από το 0. Για την προσομοίωση το  $\varepsilon$  επιλέχθηκε της τάξης του  $10^{-2}$ . Όσον αφορά τις τιμές του διαγώνιου πίνακα  $Lamda$ , επιλέχθηκάν διαφορετικές τιμές για την περίπτωση της σταθεροποίησης της θέσης σε συγκεκριμένο σημείο και για την ακολούθηση της ημιτονοειδούς τροχιάς. Συγκεριμένα, για την πρώτο στόχο ελέγχου επιλέγχθηκε  $lamda1 = lamda2 = 2$ , ενώ για το δεύτερο  $lamda1 = lamda2 = 10$ . Στην δεύτερη περίπτωση τα λάμδα είναι μεγαλύτερα καθώς απαίτεται γρήγορος ρυθμός σύγκλισης (όσο το σύστημα

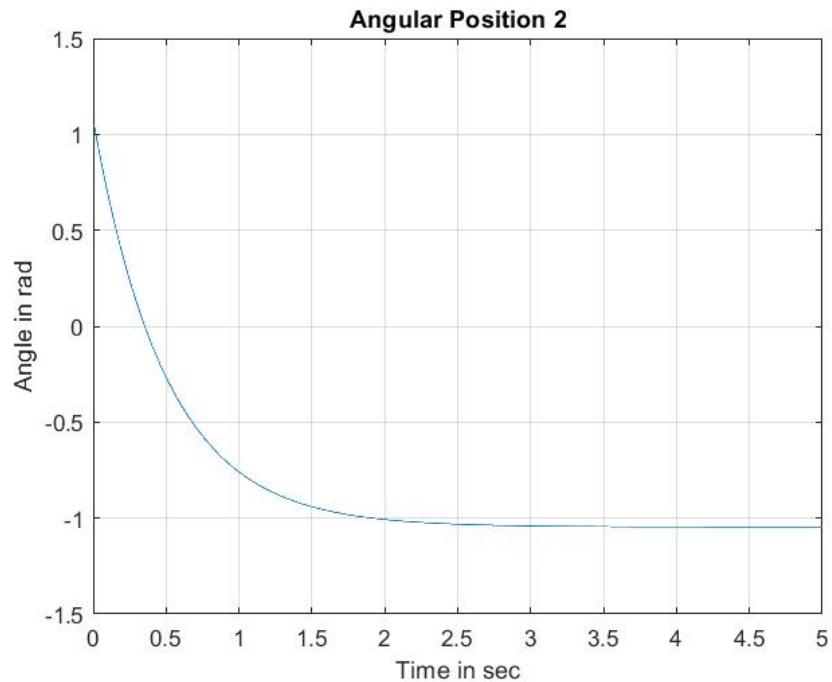
έχει οδηγηθεί στην επιφάνεια  $s = 0$ ) στο  $(e, \dot{e}) = (0,0)$ , που εξασφαλίζει την ικανοποιητική παρακολουθήση τροχίας, εφόσον σε αυτήν την περίπτωση η επιθυμητή τροχιά είναι χρονικά μεταβαλλόμενη. Η διαφορά στον στόχο παρακολούθησης ανάλογα με την επιλογή του *Lamda* παρουσιάζεται και στα αποτελέσματα των προσομοιώσεων

### **Αποτελέσματα προσομοιώσεων για σταθερή τελική θέση**

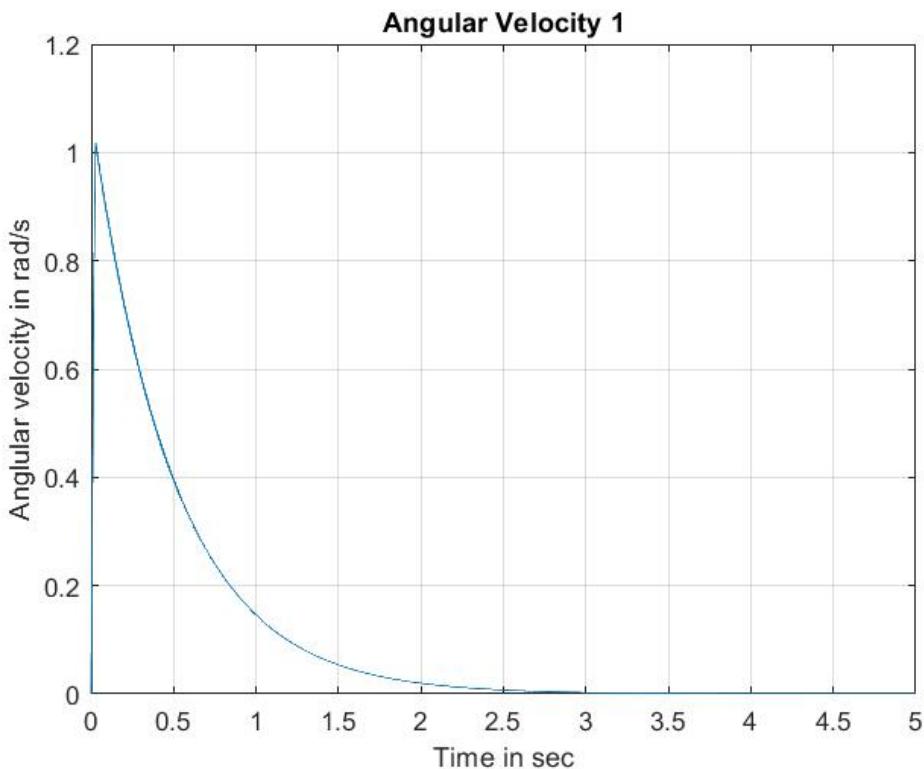
#### **Γωνιακή θέση 1( $\theta_1$ )**



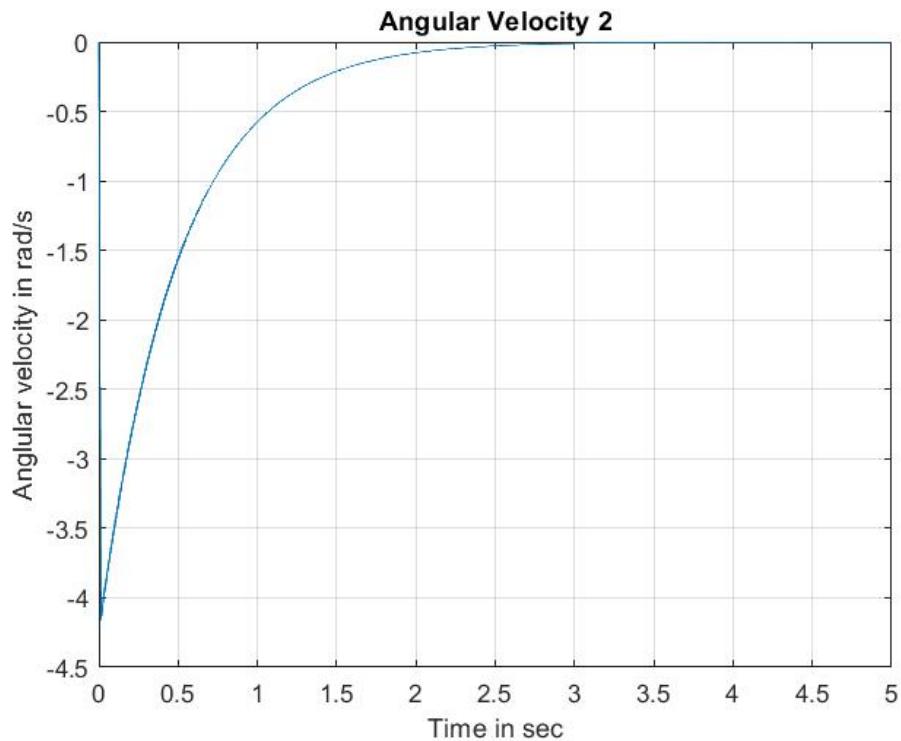
Γωνιακή Θέση 2 ( $\theta_2$ )



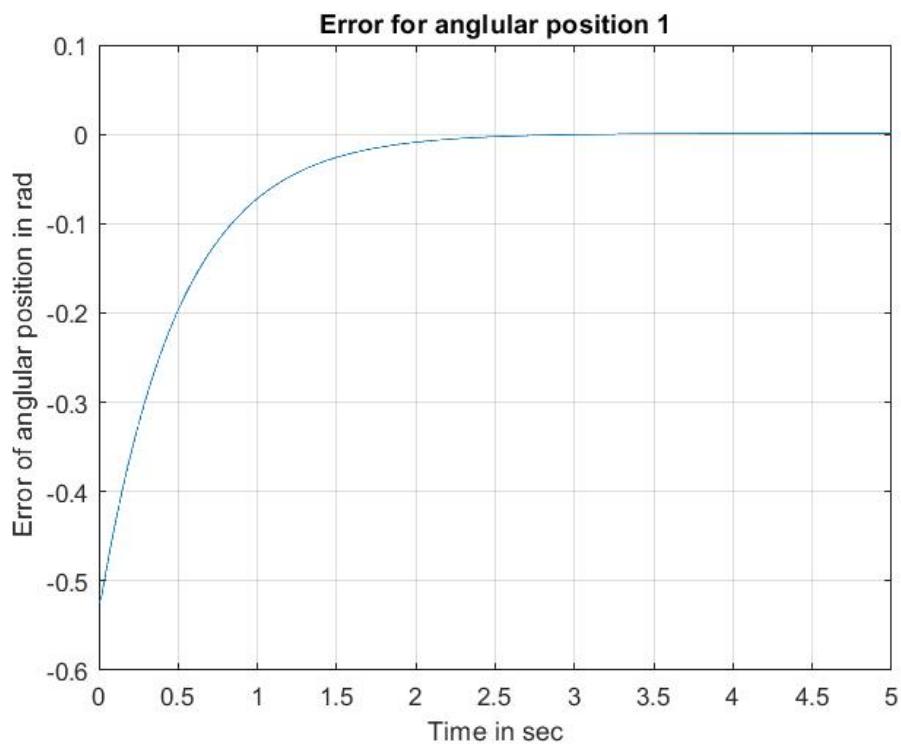
Γωνιακή ταχύτητα 1( $\dot{\theta}_1$ )



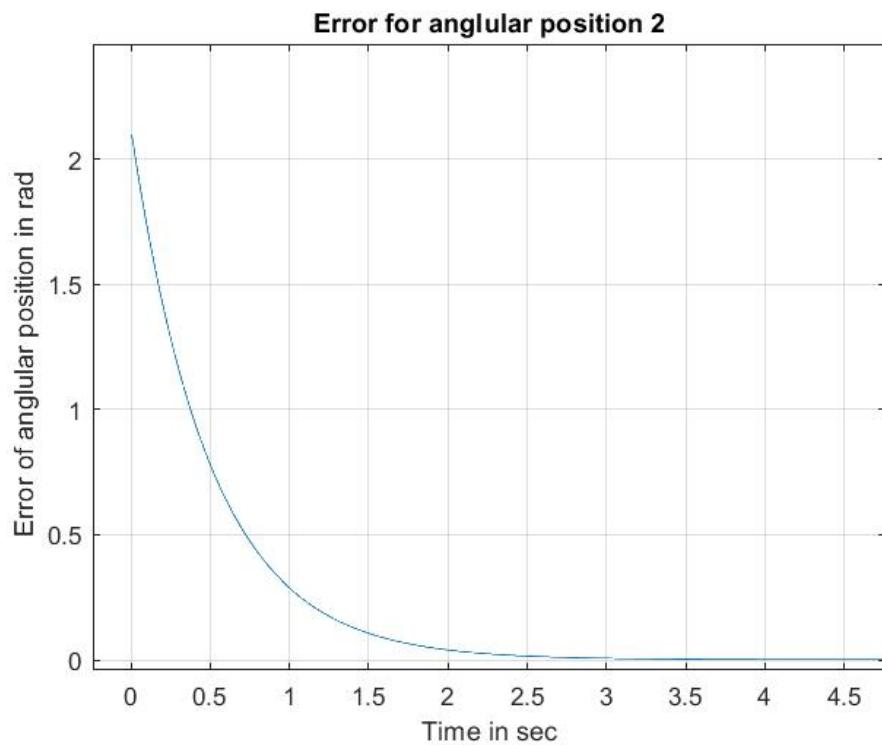
Γωνιακή ταχύτητα  $2(\dot{\theta}2)$



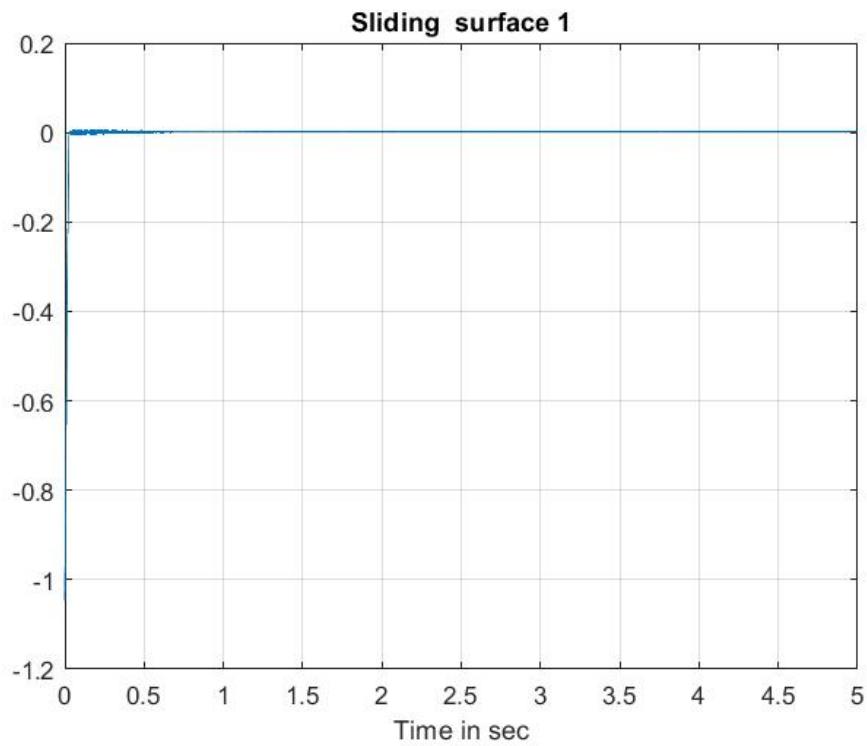
Σφάλμα γωνιακής θέσης 1 ( $e1$ )



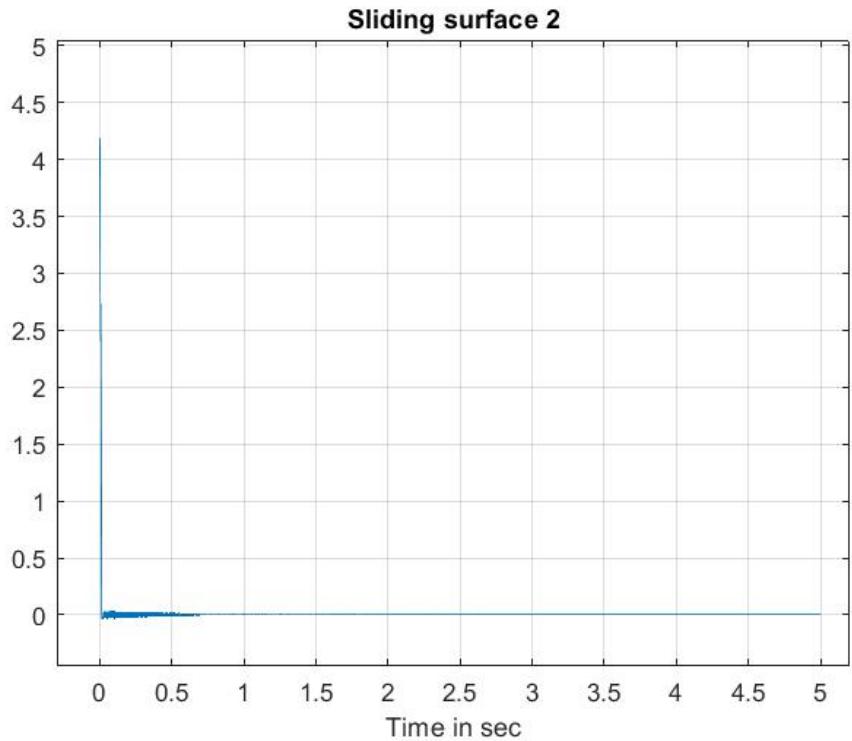
Σφάλμα γωνιακής θέσης 2(e2)



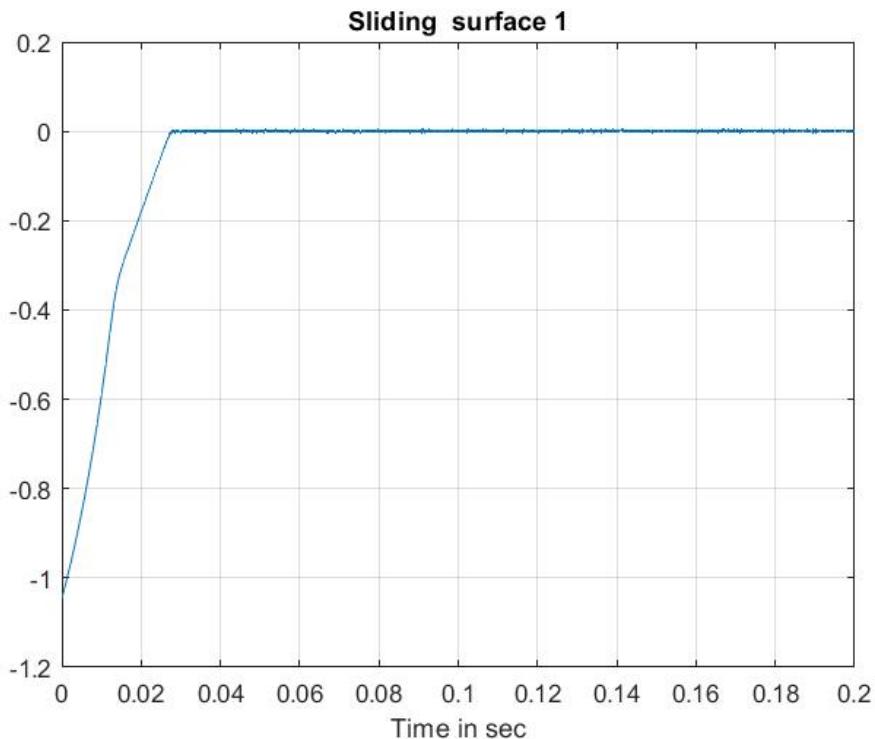
Επιφάνεια ολίσθησης 1 (s1)



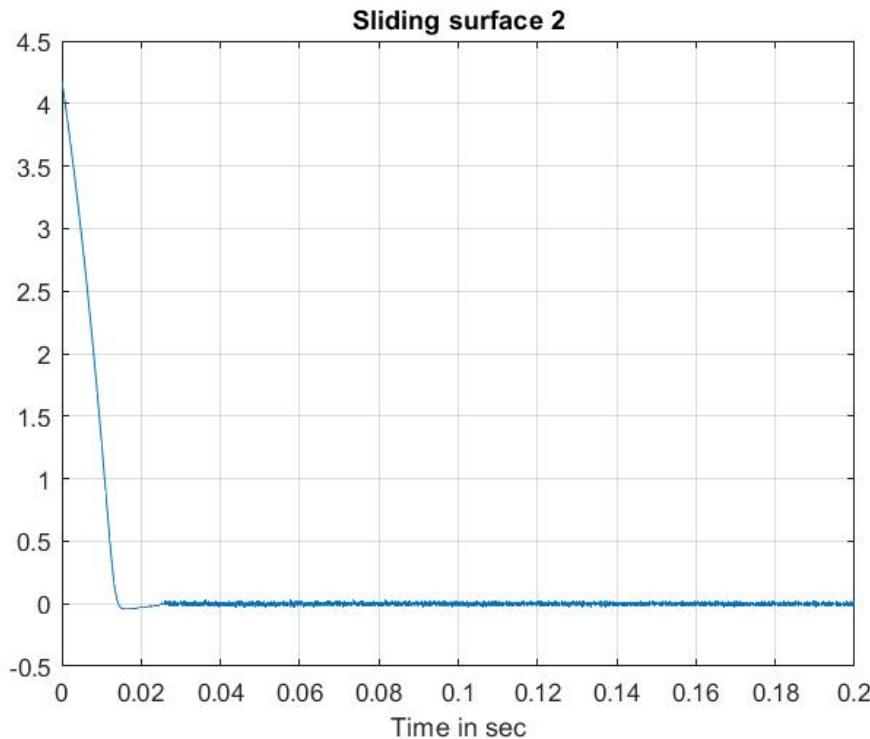
### Επιφάνεια ολίσθησης 2 (s2)



Επιφάνεια ολίσθησης 1 (s1)(σε μικρότερο χρονικό διάστημα για καλύτερη απεικόνιση σύγκλισης της s στο 0)



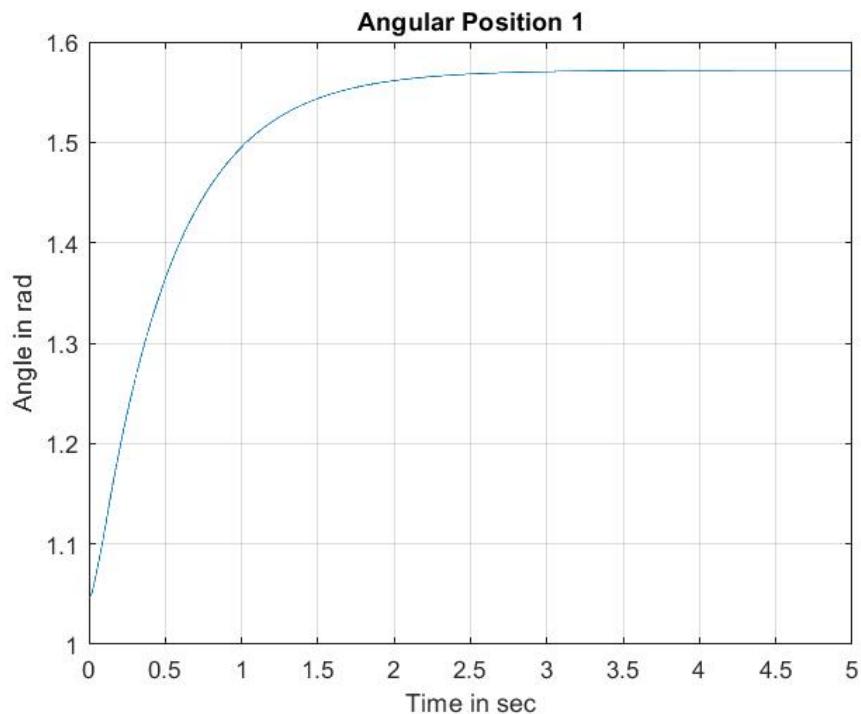
Επιφάνεια ολίσθησης 2 (s2)(σε μικρότερο χρονικό διάστημα για καλύτερη απεικόνιση σύγκλισης της s στο 0)



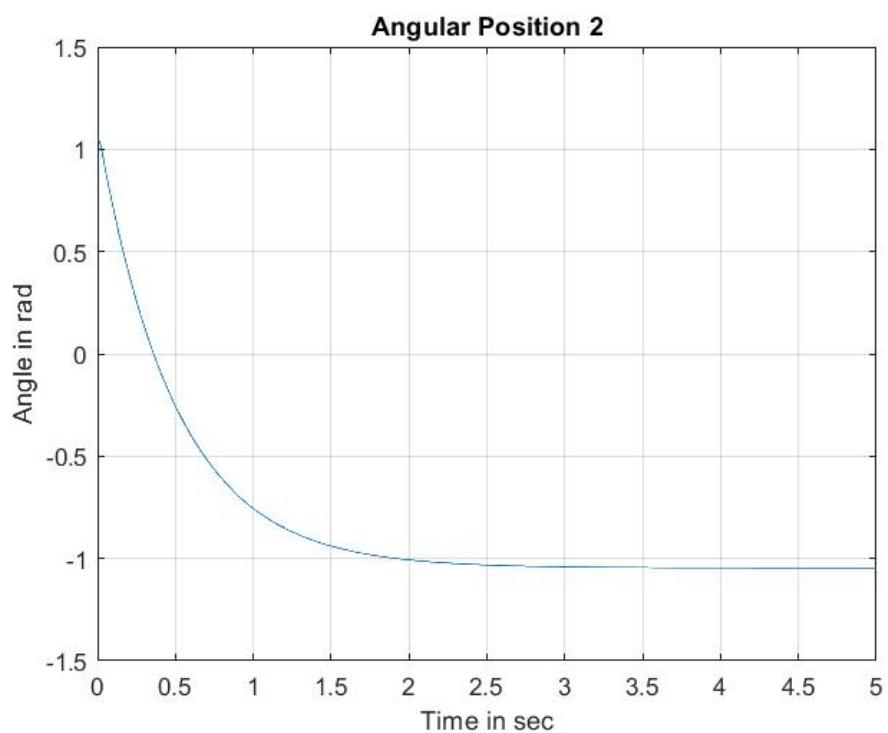
Για τα παραπάνω αποτελέσματα προσομοιώσης χρησιμοποιήθηκε ο ελεγκτής που προέκυψε από την θεωρητική ανάλυση, ωστόσο σε αυτόν δεν τίθεται περιορισμός ως πρός την μέγιστη ροπή (είσοδο στο σύστημα) που μπορεί να απαιτηθεί από τον ελεγκτή. Σαν αποτέλεσμα οι επιθυμητές τιμές εισόδου για τις συγκεκριμένες συνθηκές του προβλήματος φτάνουν τιμές της τάξης του  $10^2$ , ιδιαίτερα στην έναρξη της προσομοιώσης όπου το σύστημα δεν βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια  $s = 0$ . Τέτοιες τιμές είναι δύσκολες εώς ανέφικτες για πραγματικές υλοποιήσεις. Γιαυτό τον λόγο στα διαγράμματα που ακολουθούν προσομοιώνεται η σύγκλιση του συστήματος στο επιθυμητό σημείο, θέτωντας ενα άνω φράγμα στο μέτρο της ροπής που μπορεί να δώσει ο ελεγκτής (εδώ 20 Nm). Φυσικά οι απαιτήσεις ροπής από τον ελεγκτή διαφοροποιούνται ανάλογα με τον στόχο ελέγχου (πχ. Σταθεροποίηση θέσης, παρακολούθηση χρονικά μεταβαλόμενης τροχιάς) και από τις επιθυμητές ταχύτητες απόκρισης (όπως αυτές επηρεάζονται από την επιλογή των παραμέτρων  $\lambda$ ). Για ταχύτερη σύγκλιση των σφαλμάτων στο 0 (πάνω στην  $s$ ), απαίτουνται και μεγαλύτερες τιμές του  $\lambda$ , επομένως και μεγαλύτερες απαιτήσεις από την είσοδο ελέγχου.

*Αποτελέσματα σταθερή τελική θέση με κορεσμένη είσοδο ελέγχου.*

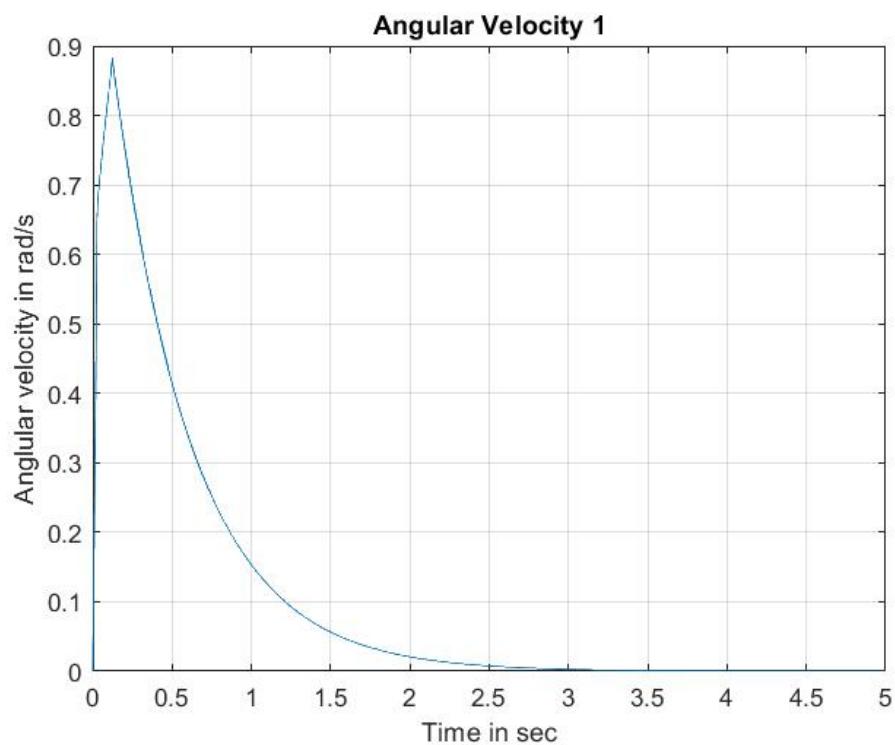
Γωνιακή Θέση 1( $\theta_1$ )



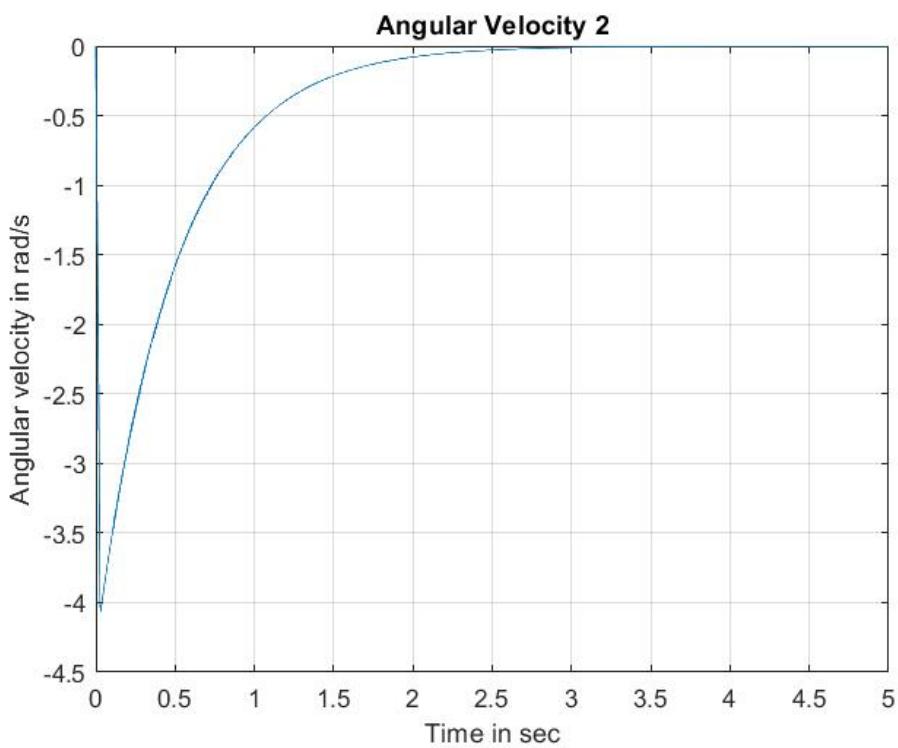
Γωνιακή Θέση 2 ( $\theta_2$ )



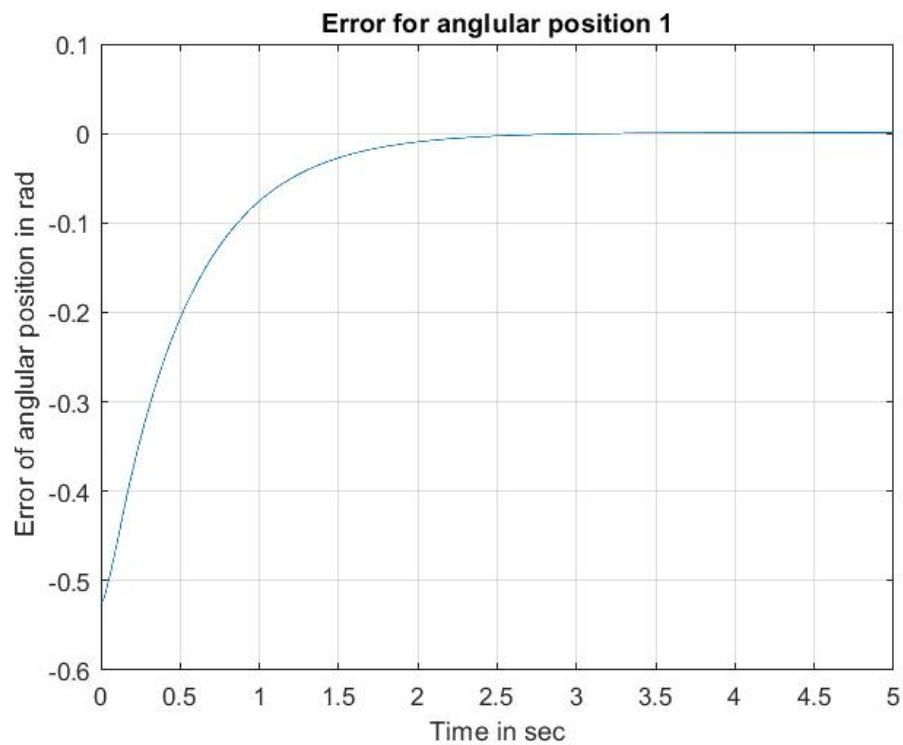
Γωνιακή ταχύτητα 1( $\dot{\theta}_1$ )



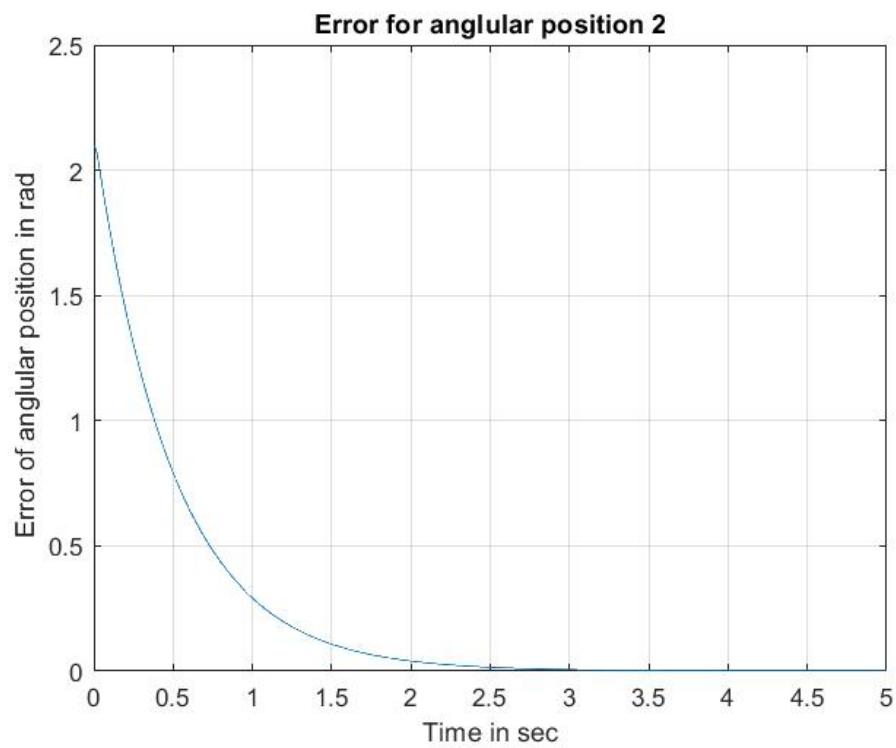
Γωνιακή ταχύτητα 2( $\dot{\theta}_2$ )



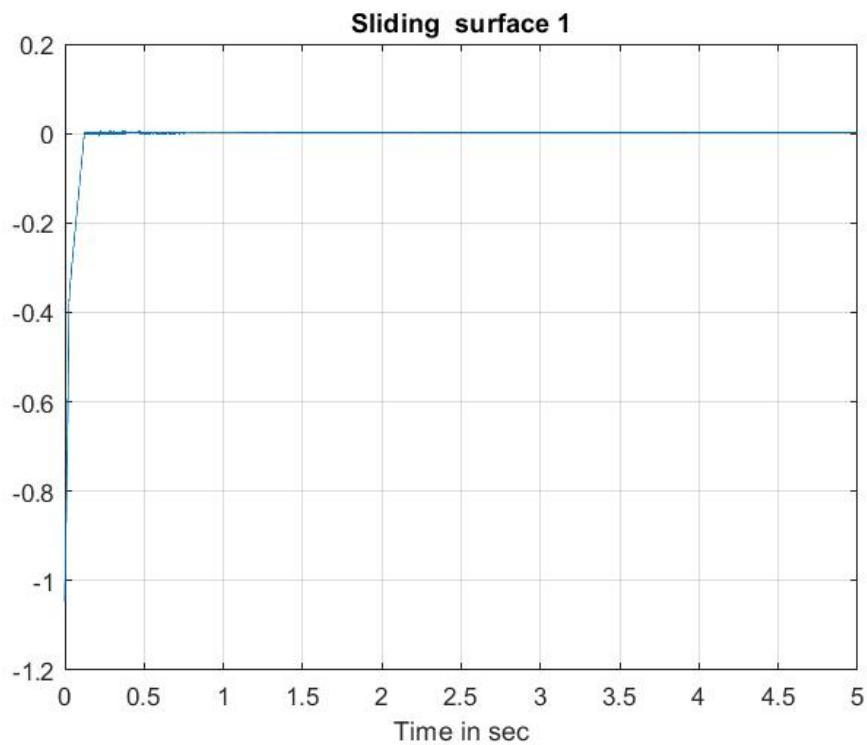
**Σφάλμα γωνιακής θέσης 1 (e1)**



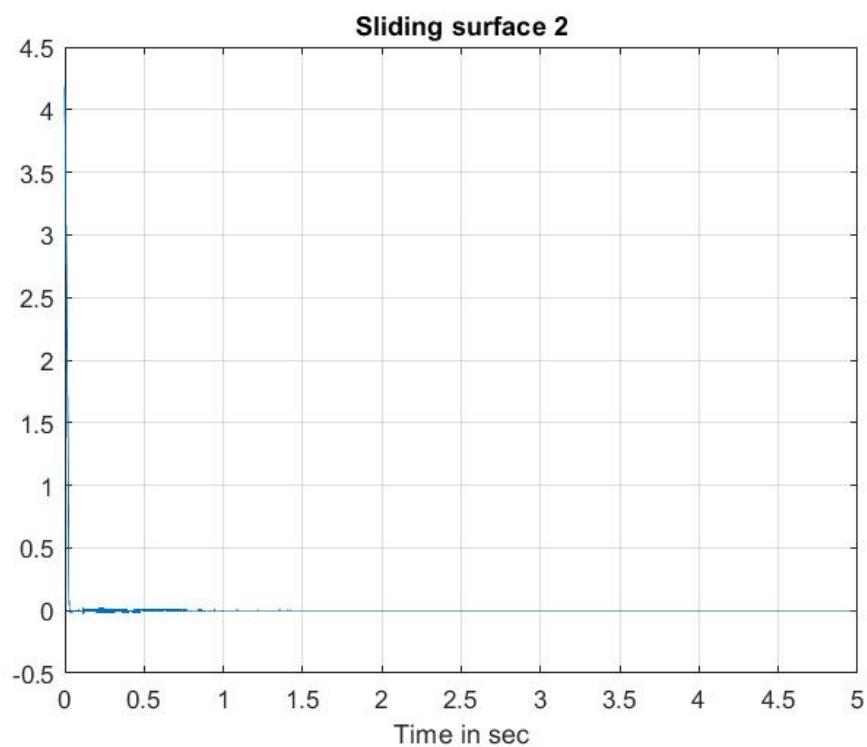
**Σφάλμα γωνιακής θέσης 2(e2)**



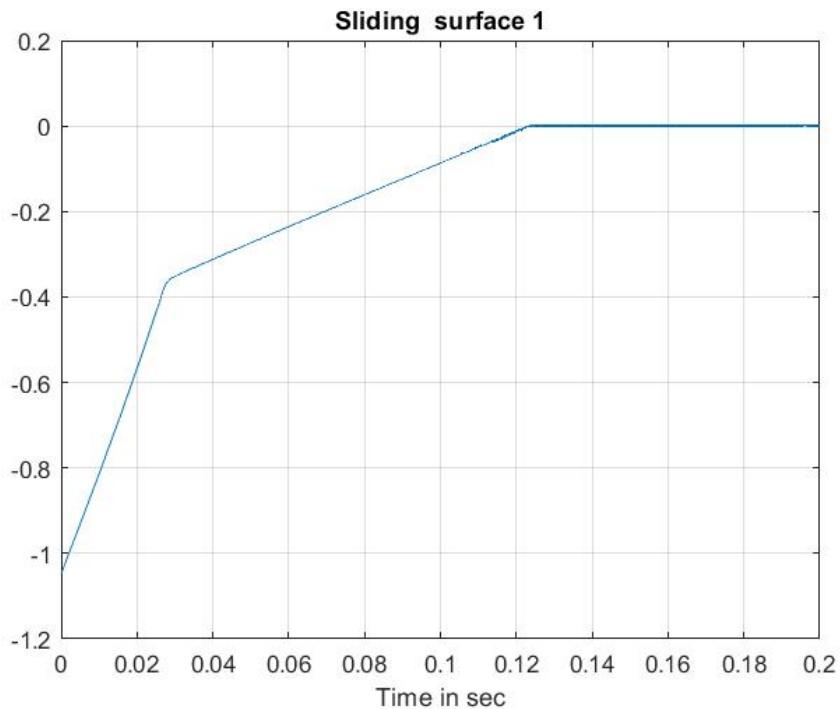
Επιφάνεια ολίσθησης 1 (s1)



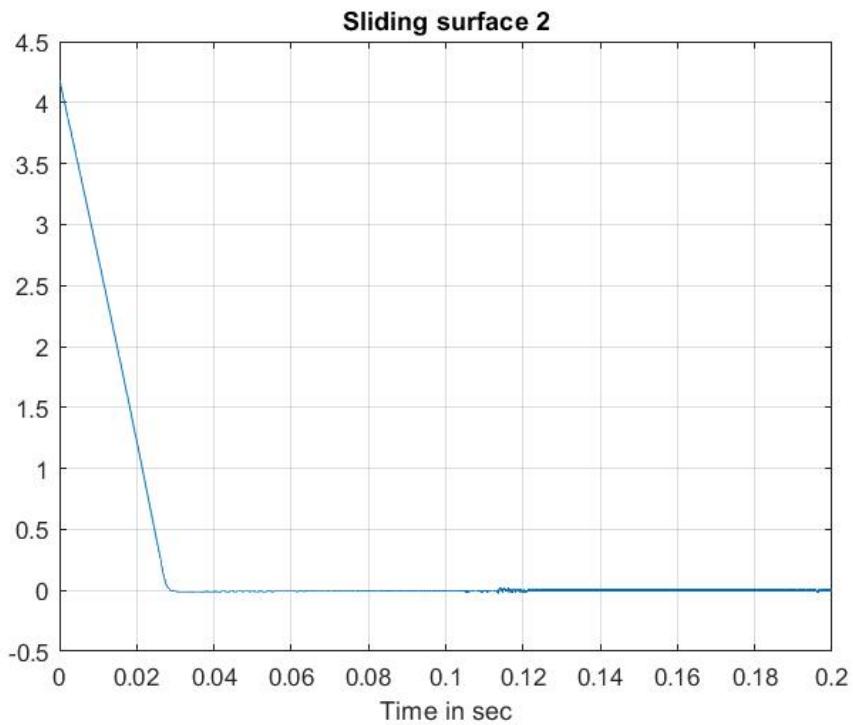
Επιφάνεια ολίσθησης 2 (s2)



Επιφάνεια ολίσθησης 1 (s1)(σε μικρότερο χρονικό διάστημα για καλύτερη απεικόνιση σύγκλισης της s στο 0)



Επιφάνεια ολίσθησης 2 (s2)(σε μικρότερο χρονικό διάστημα για καλύτερη απεικόνιση σύγκλισης της s στο 0)



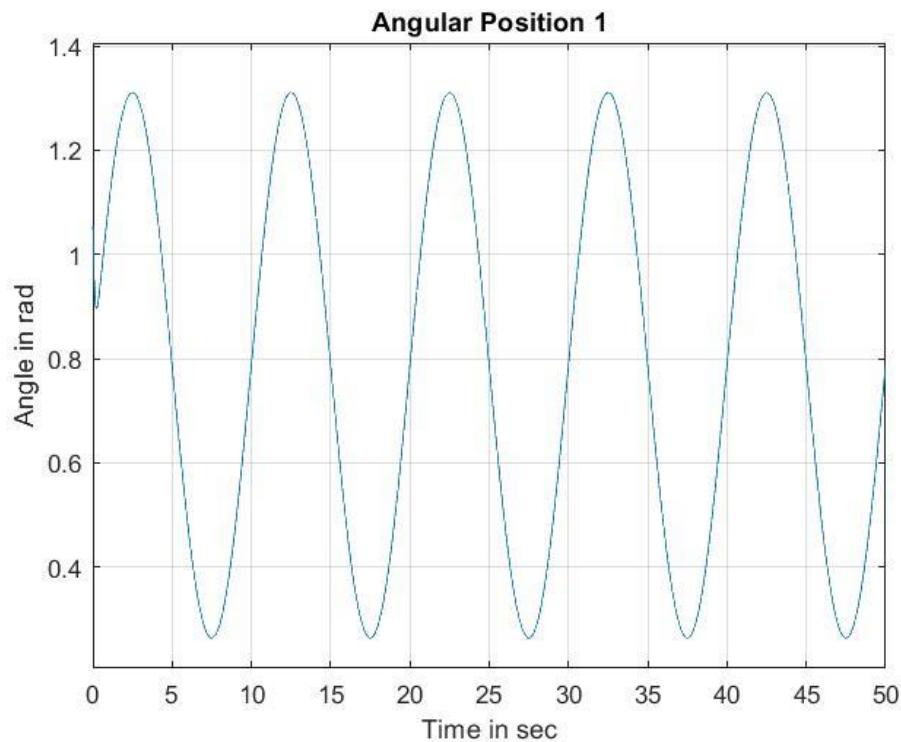
Από την παραπάνω προσομοίωση προκύπτει ότι για την εφαρμογή του περιορισμού για την μέγιστη δυνατή ροπή σε κάθε άρθρωση επηρεάζεται ο χρόνος συγκλίσης στην επιφάνεια ολίσθησης  $s = 0$ , καθώς και διαφοροποιούνται οι μέγιστες γωνιακές ταχύτητες που αποκτά το σύστημα, χωρίς ωστόσο να διατάρασεται η σύγκλιση στο ζητούμενο σημείο.

### **Αποτελέσματα προσομοιώσεων για ακολούθηση ημιτονοειδούς τροχιάς**

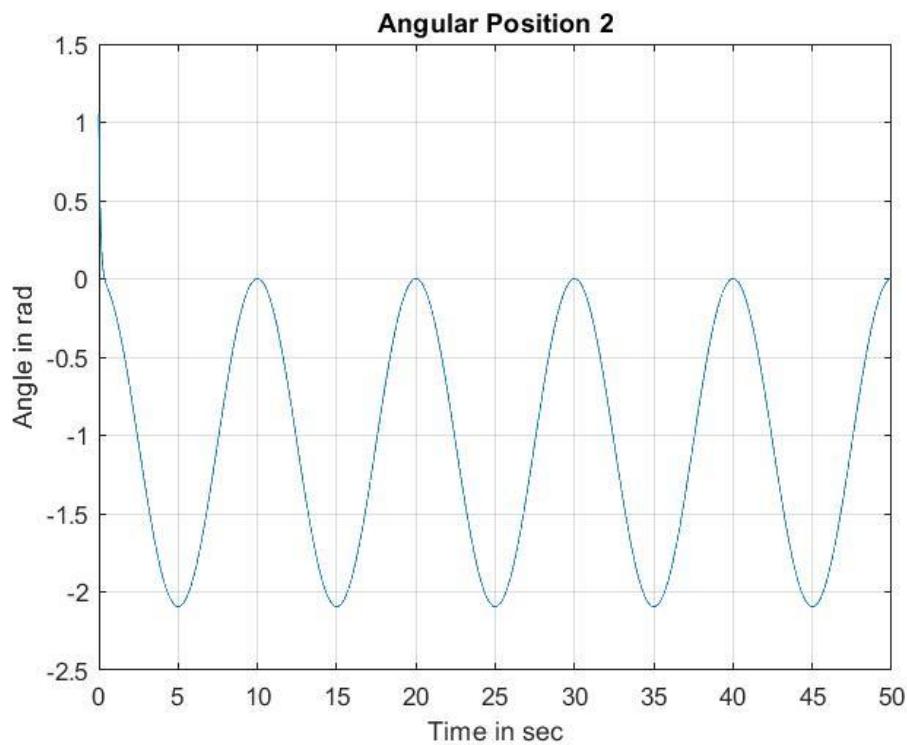
Για τα παρακάτω αποτελέσματα επιλέχθηκαν οι τιμές του διαγώνιου πίνακα lamda

Lamda1 = 10 και lamda2 = 10, ενώ στην συνέχεια γίνεται και σύγκριση για μικρότερες τιμές των συγκεκριμένων παραμέτρων.

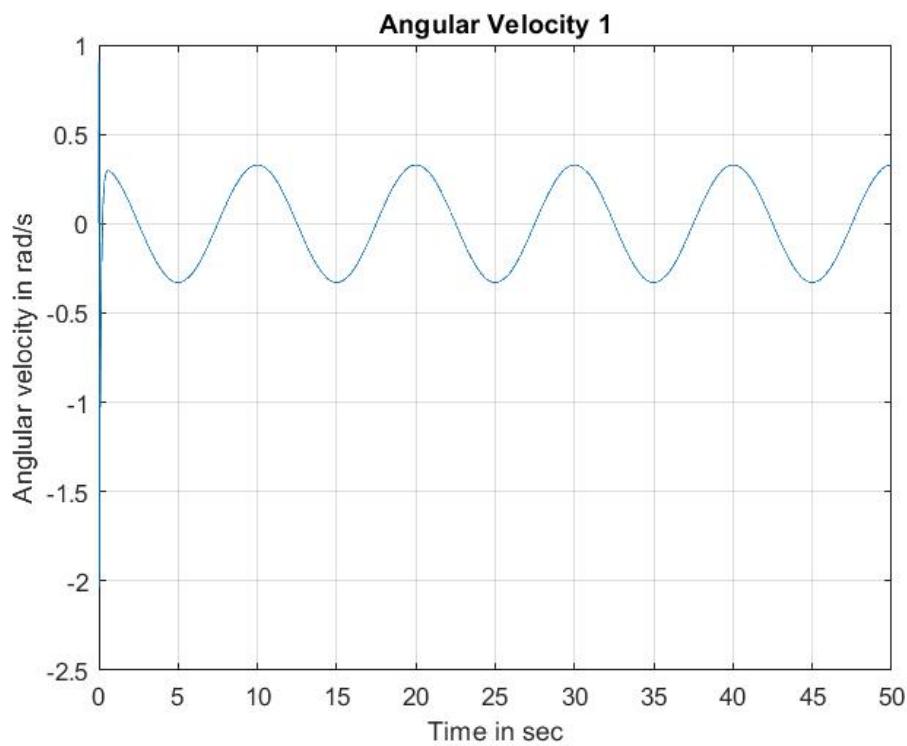
#### Γωνιακή θέση 1( $\theta_1$ )



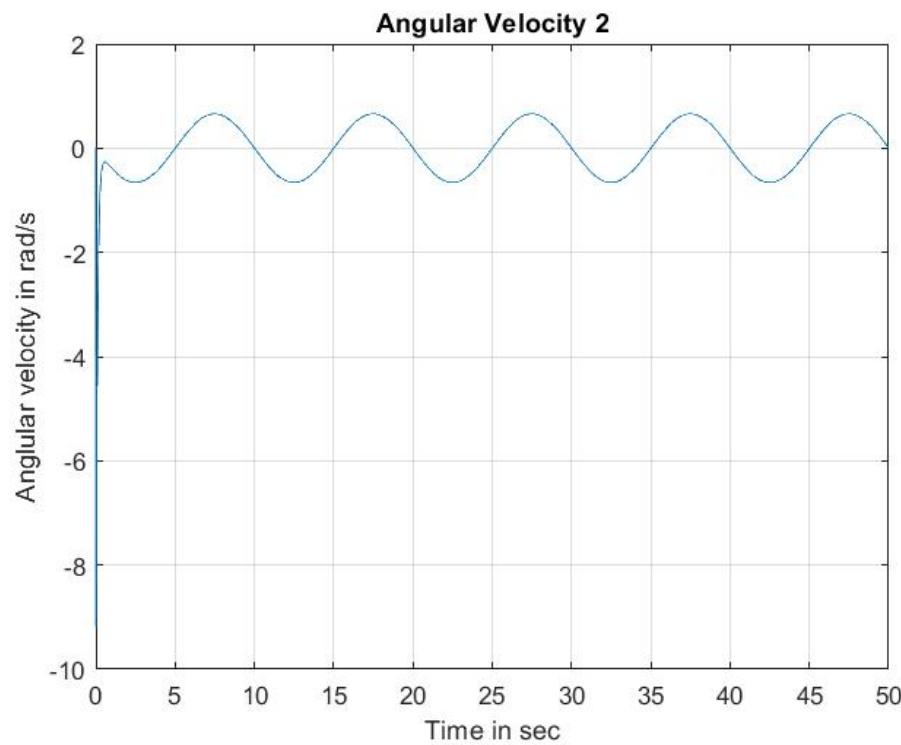
Γωνιακή Θέση 2 ( $\theta_2$ )



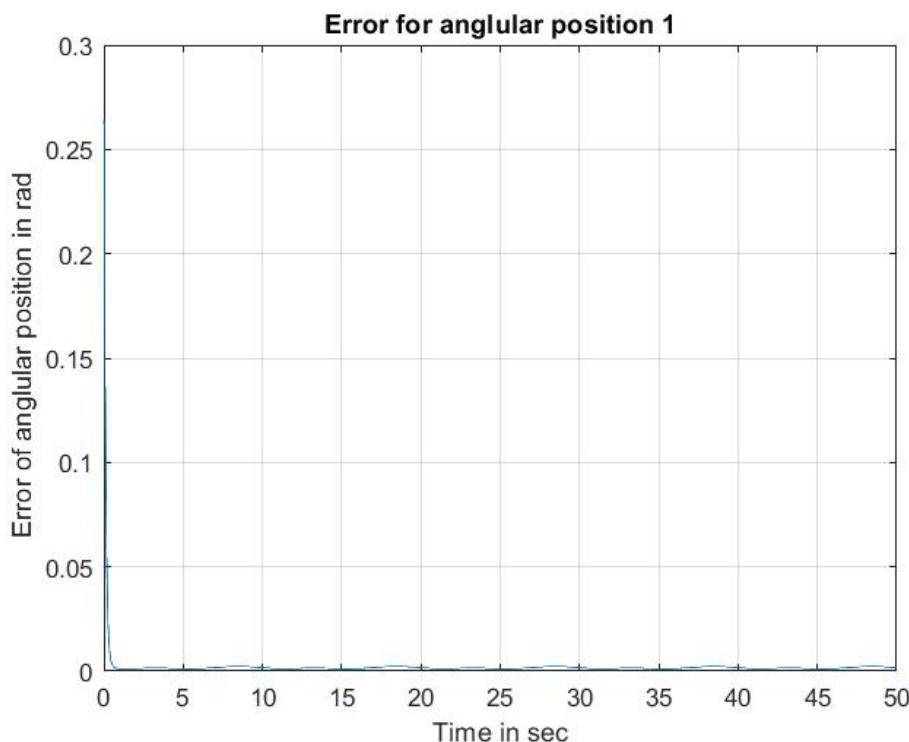
Γωνιακή ταχύτητα 1( $\dot{\theta}_1$ )



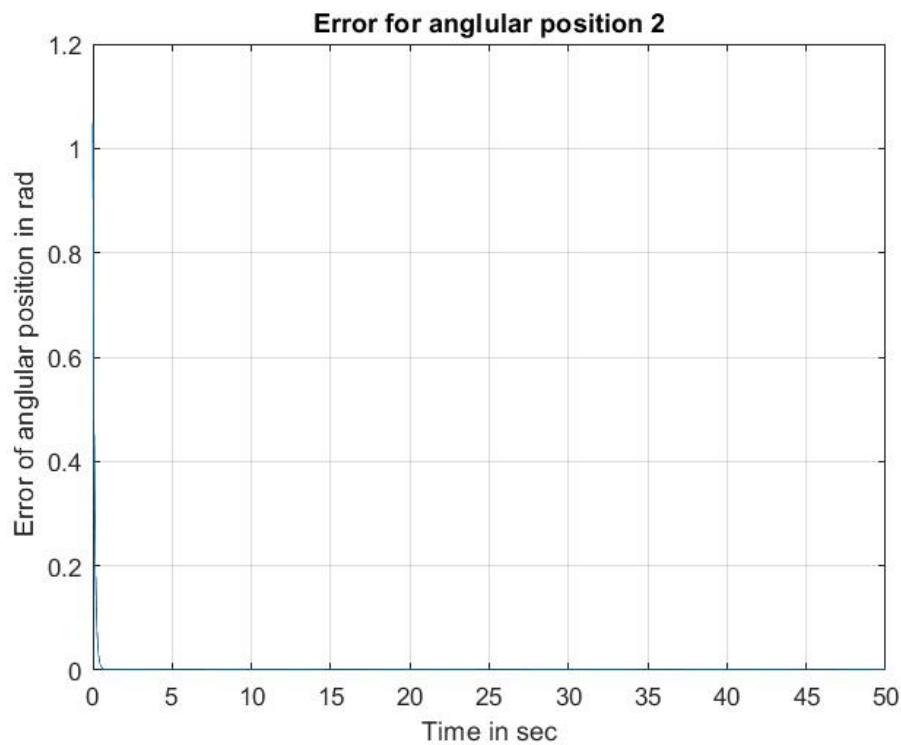
## Γωνιακή ταχύτητα 2( $\dot{\theta}_2$ )



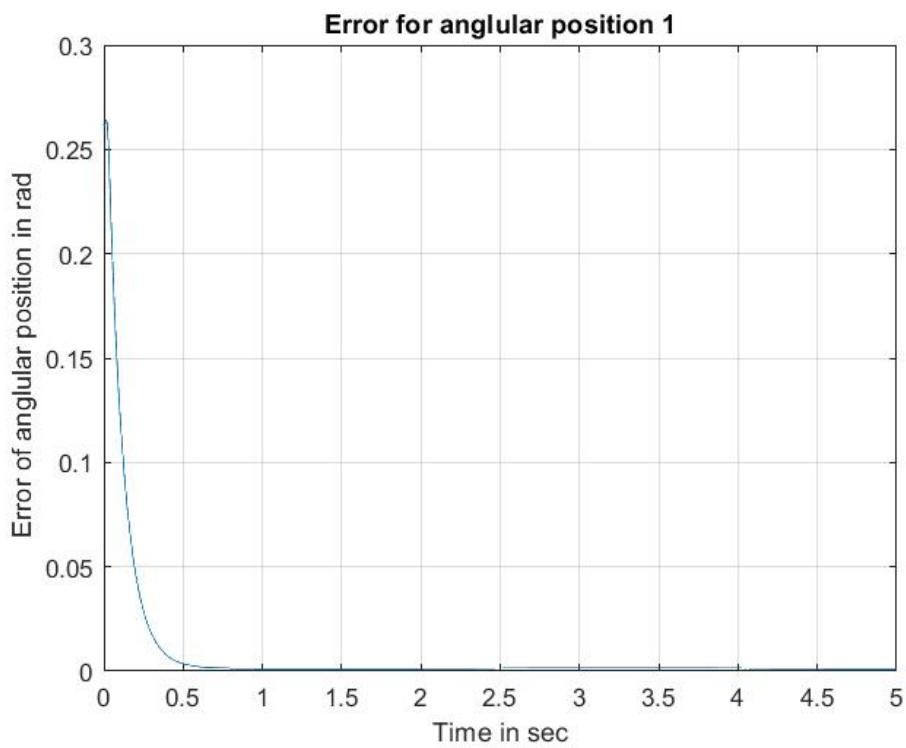
Σφάλμα γωνιακής θέσης 1 ( $e_1$ )(το σφάλμα προσεγγίζει σε μικρό χρονικό διάστημα το 0 και λόγω του μεγάλου χρονικού διαστήματος της προσομοίωσης έχει τη μορφή αυτή)



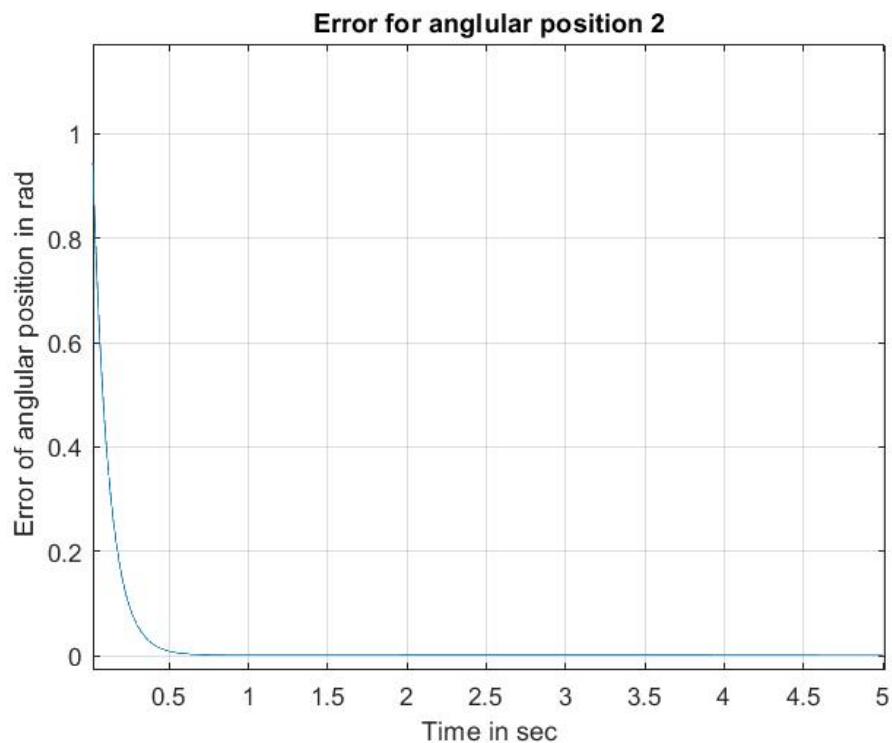
Σφάλμα γωνιακής θέσης 2(e2)



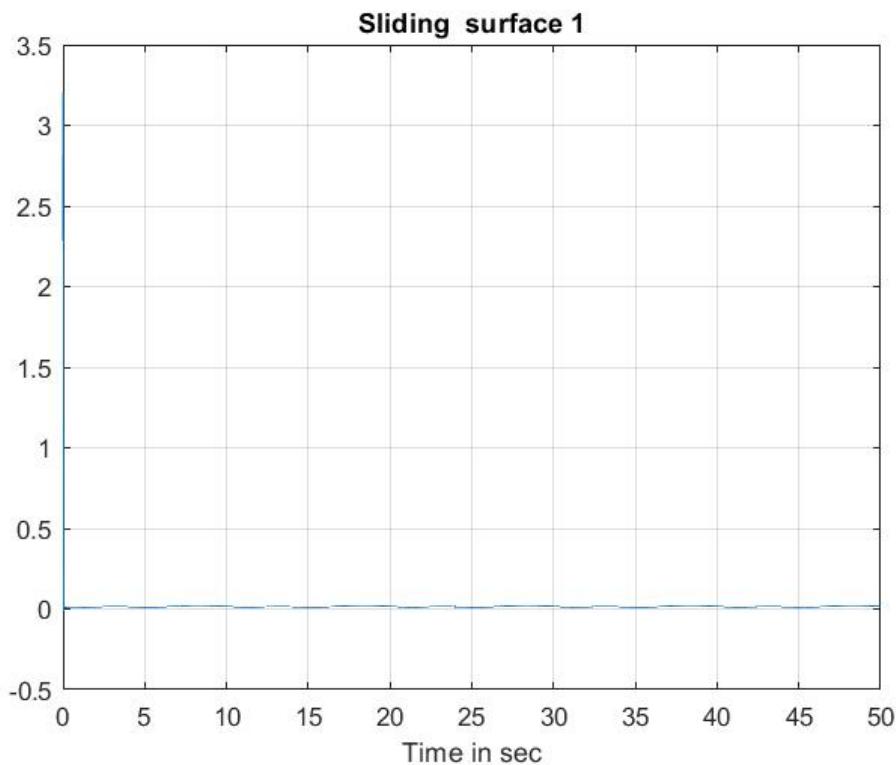
Σφάλμα γωνιακής θέσης 1(e1)(έναρξη προσομοίωσης)



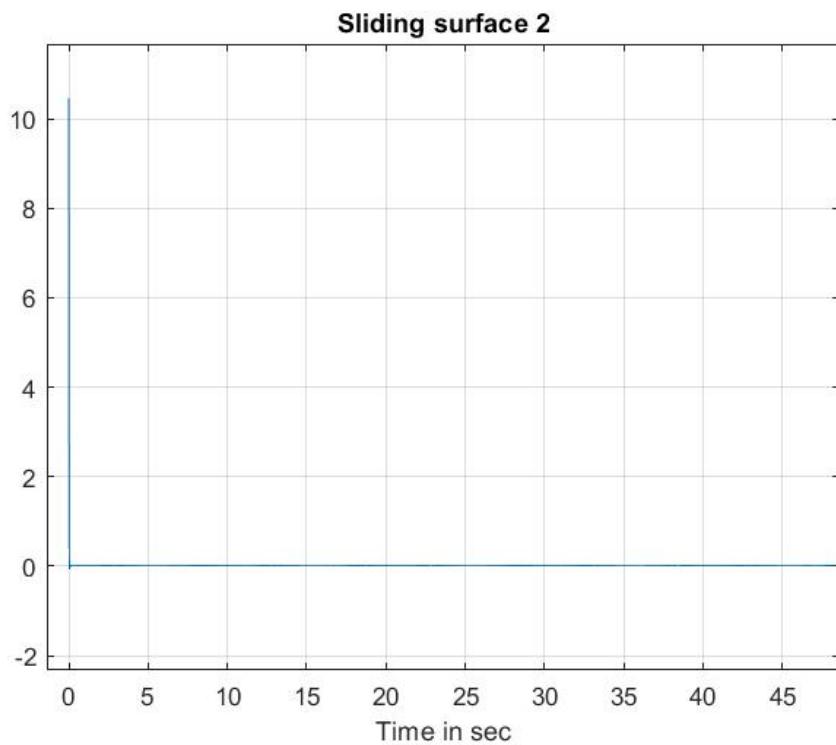
Σφάλμα γωνιακής θέσης 2( $e_2$ )(έναρξη προσομοίωσης)



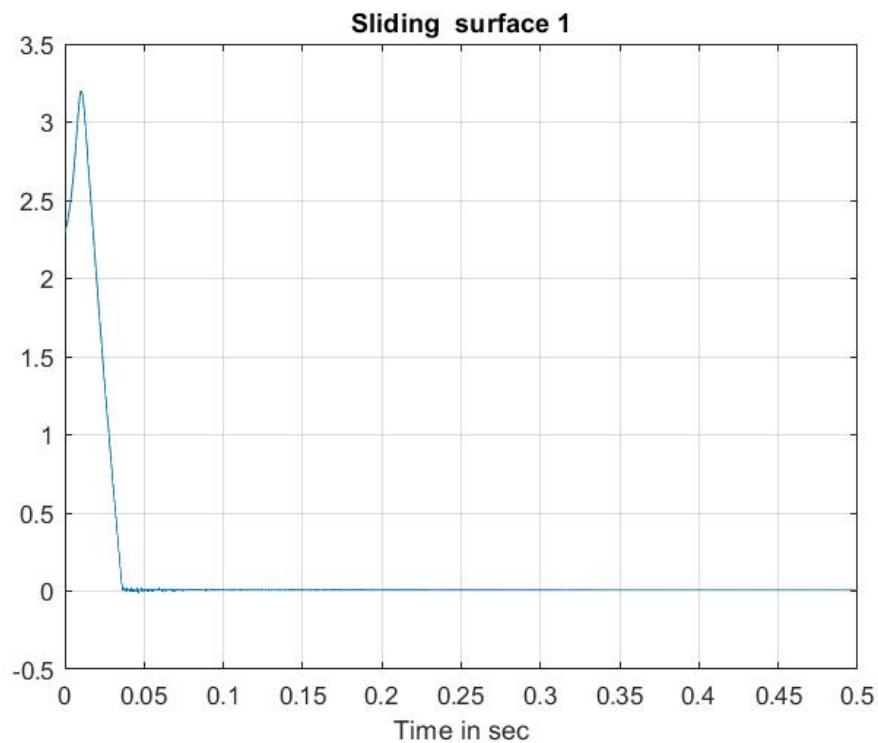
Επιφάνεια ολίσθησης 1 ( $s_1$ )(γρήγορη σύγκλιση στο 0, μεγάλο διαστημα προσομοίωσης)



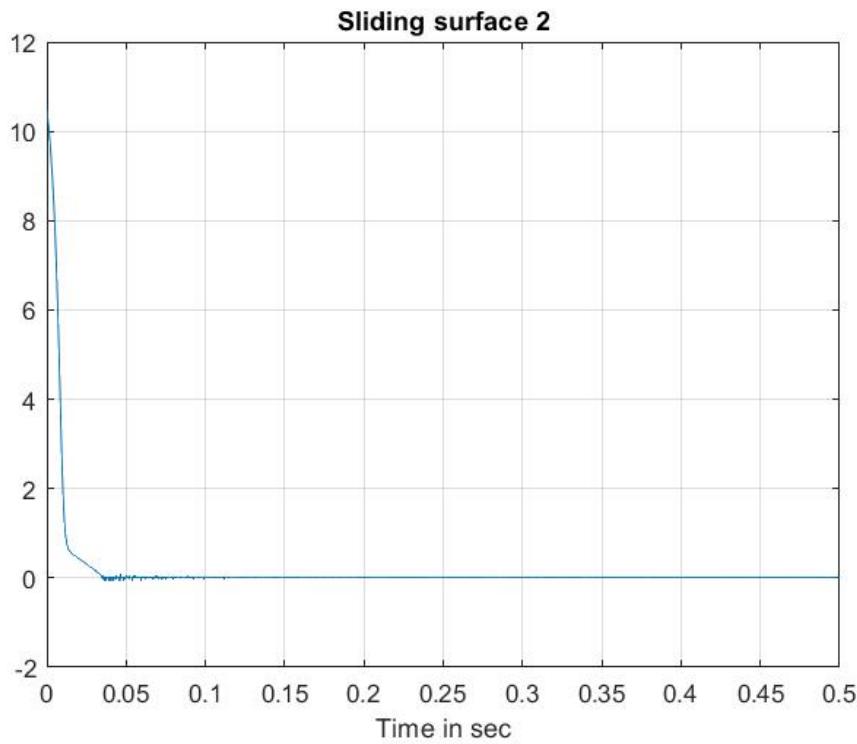
Επιφάνεια ολίσθησης 2 (s2)



Επιφάνεια ολίσθησης 1 (s1)(σε μικρότερο χρονικό διάστημα για καλύτερη απεικόνιση σύγκλισης της s στο 0)



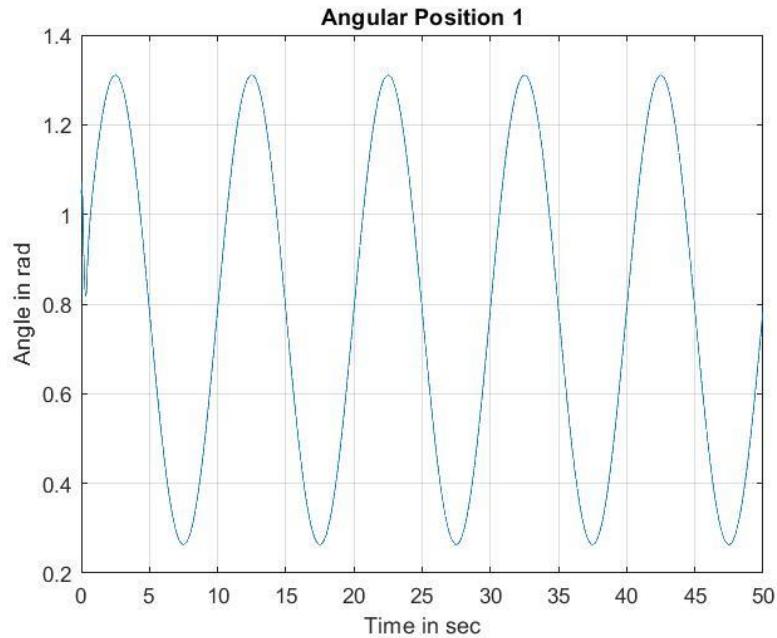
Επιφάνεια ολίσθησης 2 (s2)(σε μικρότερο χρονικό διάστημα για καλύτερη απεικόνιση σύγκλισης της s στο 0)



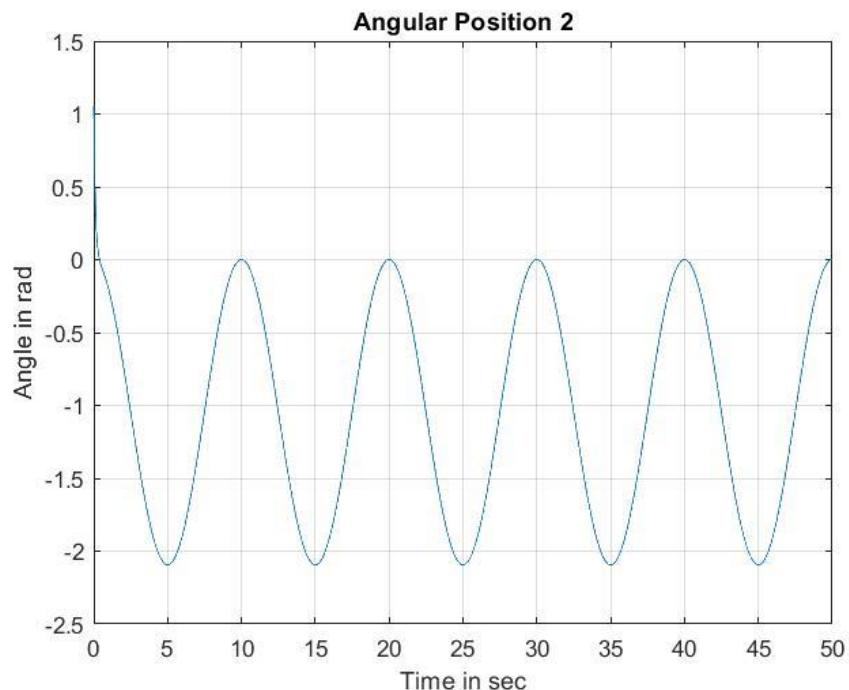
Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση προσομοιώθηκε ο ελεγκτής με «κορεσμένη απόκριση» τα αποτελέσματα του οποίου ακολουθούν παρακάτω. Εδώ το ανώτερο όριο της μέγιστης ροπής εισόδου προσομοιώθηκε να είναι το 50 Nm, μεγαλύτερο από την προηγούμενη περίπτωση καθώς εδώ απιτείται η ακολούθηση μιας συγκεκριμένης τροχιάς διαρκώς μεταβαλλόμενης. Οι τιμές των λαμδα παρέμειναν ίδιες με αυτές που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

**Αποτελέσματα προσομοιώσεων για ακολούθηση ημιτονοειδούς τροχιάς με κορεσμένη είσοδο ελέγχου.**

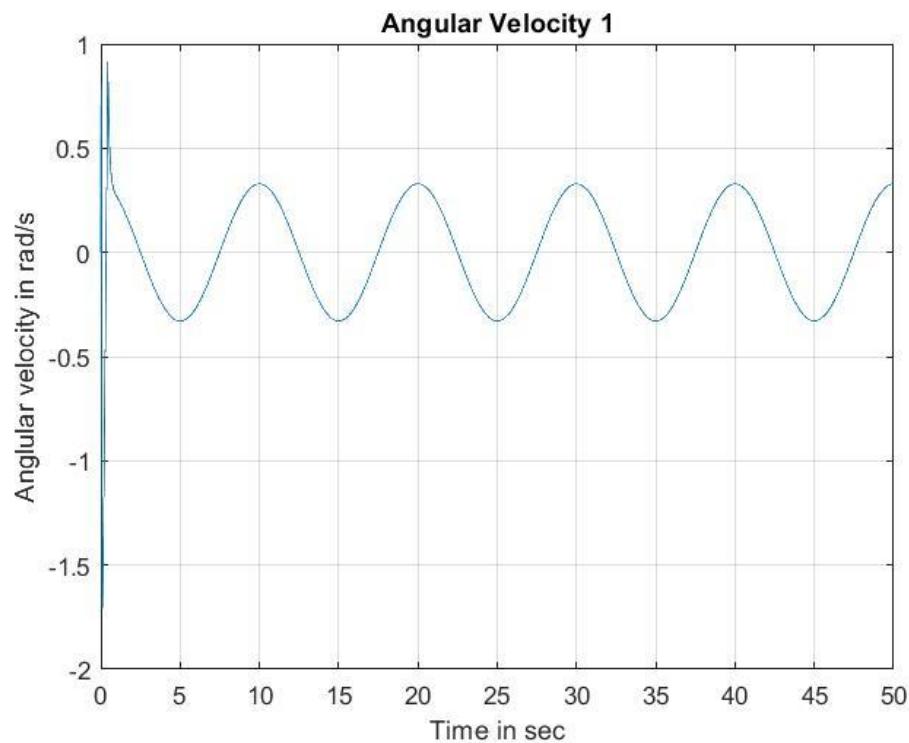
Γωνιακή Θέση 1( $\theta_1$ )



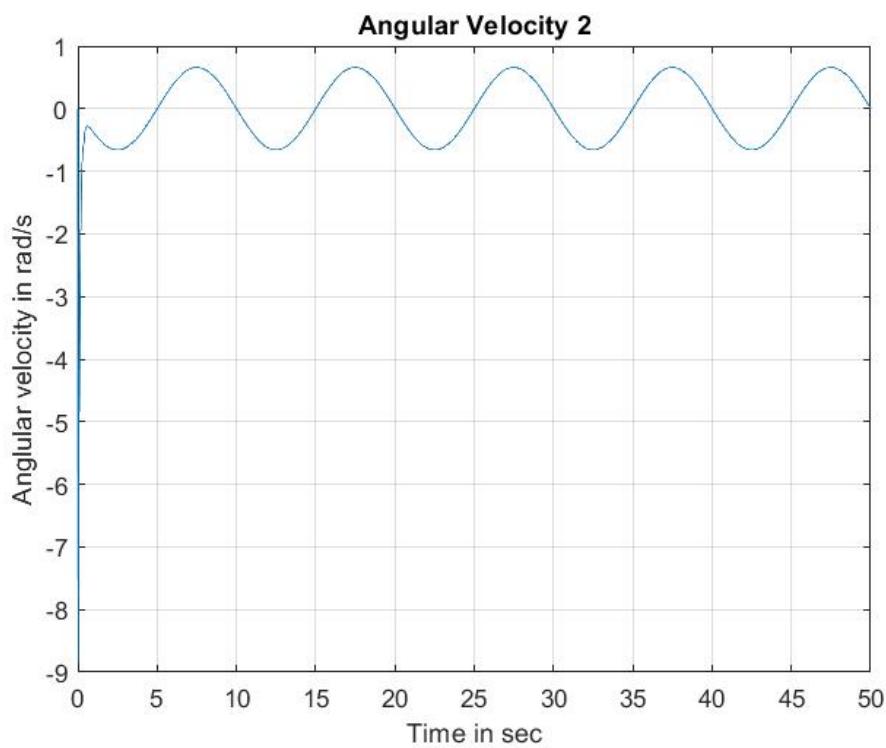
Γωνιακή Θέση 2 ( $\theta_2$ )



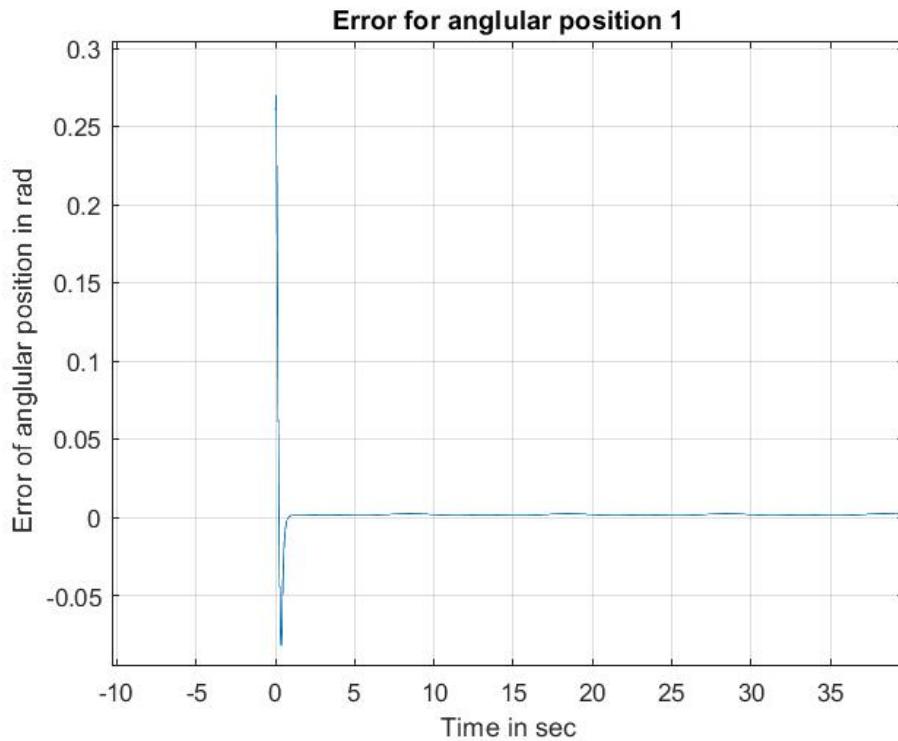
Γωνιακή ταχύτητα 1( $\dot{\theta}_1$ )



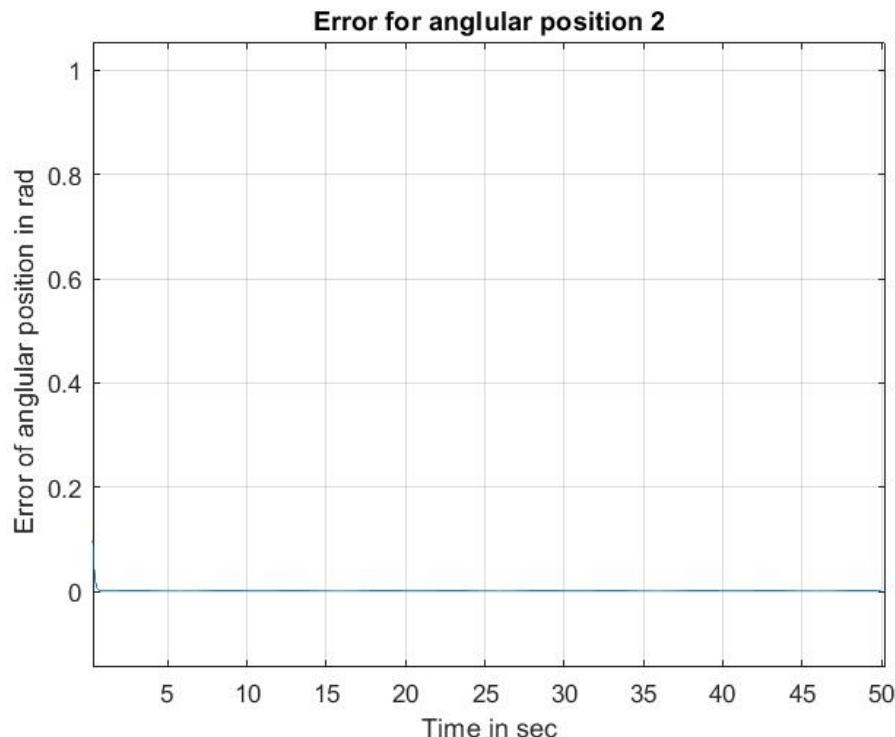
Γωνιακή ταχύτητα 2( $\dot{\theta}_2$ )



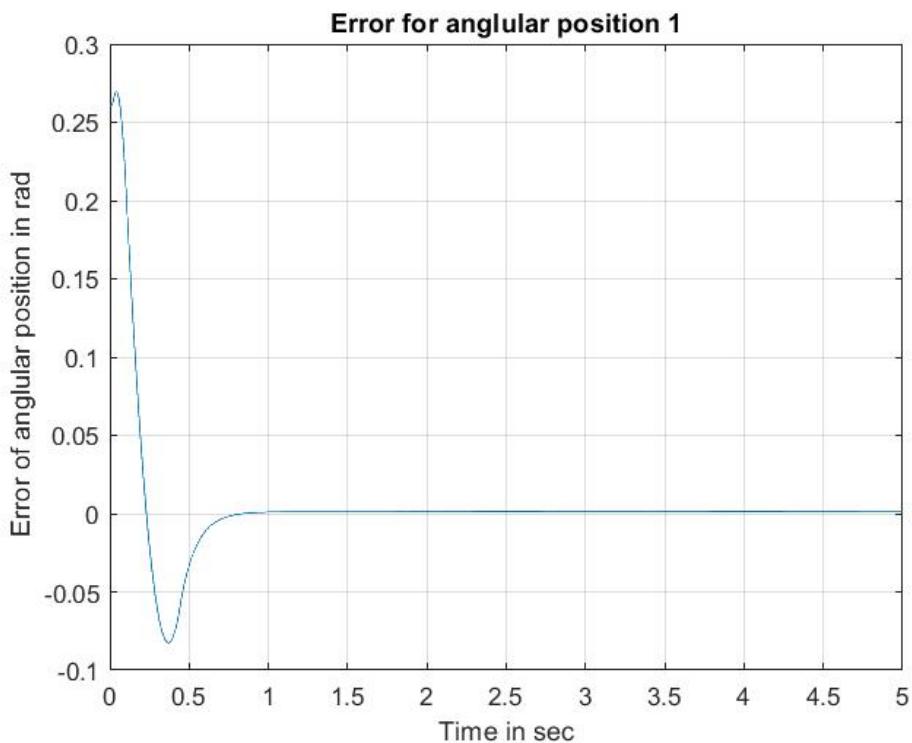
Σφάλμα γωνιακής θέσης 1 (e1) (το σφάλμα προσεγγίζει σε μικρό χρονικό διάστημα το 0 και λόγω του μεγάλου χρονικού διαστήματος της προσομοίωσης έχει τη μορφή αυτή)



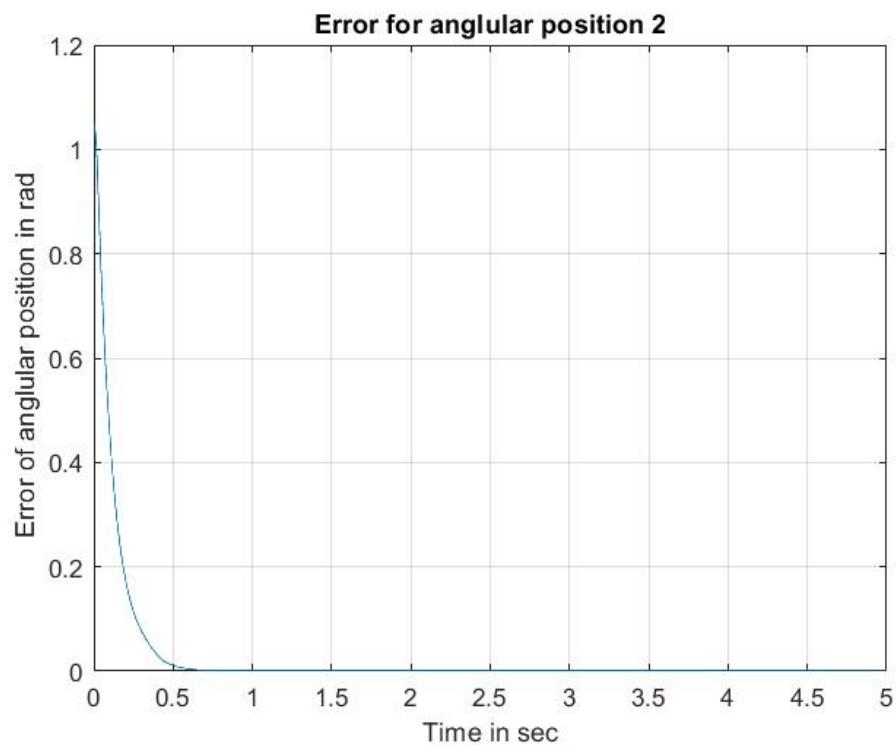
Σφάλμα γωνιακής θέσης 2(e2)



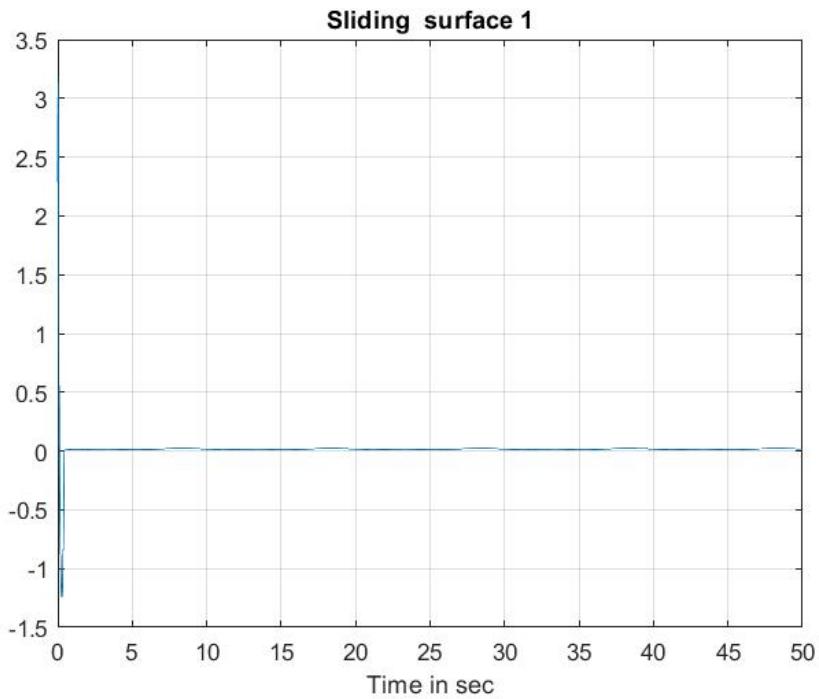
Σφάλμα γωνιακής θέσης 1(e1)(έναρξη προσομοίωσης)



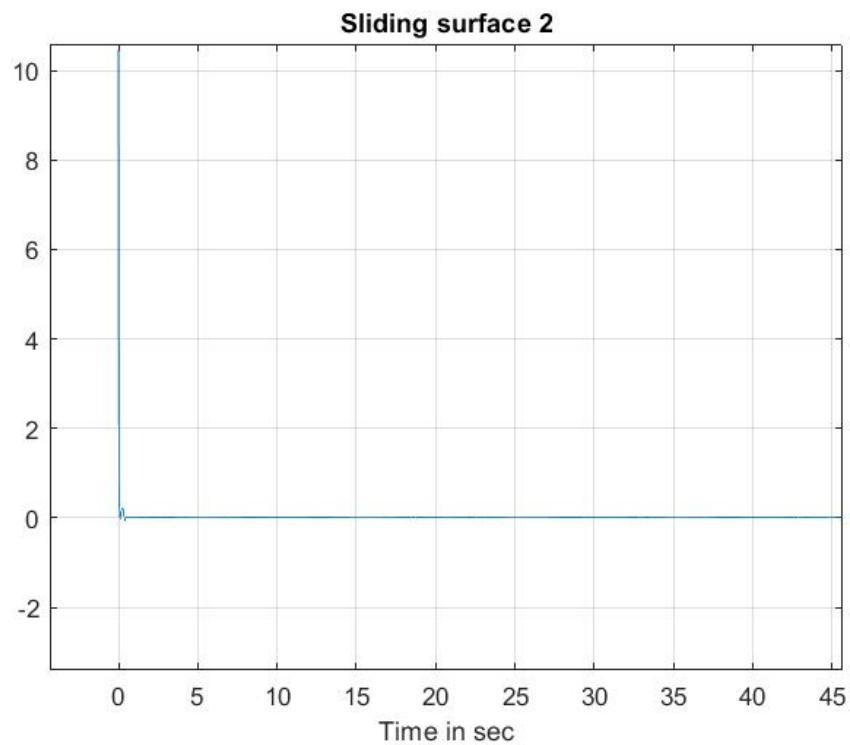
Σφάλμα γωνιακής θέσης 2(e2)(έναρξη προσομοίωσης)



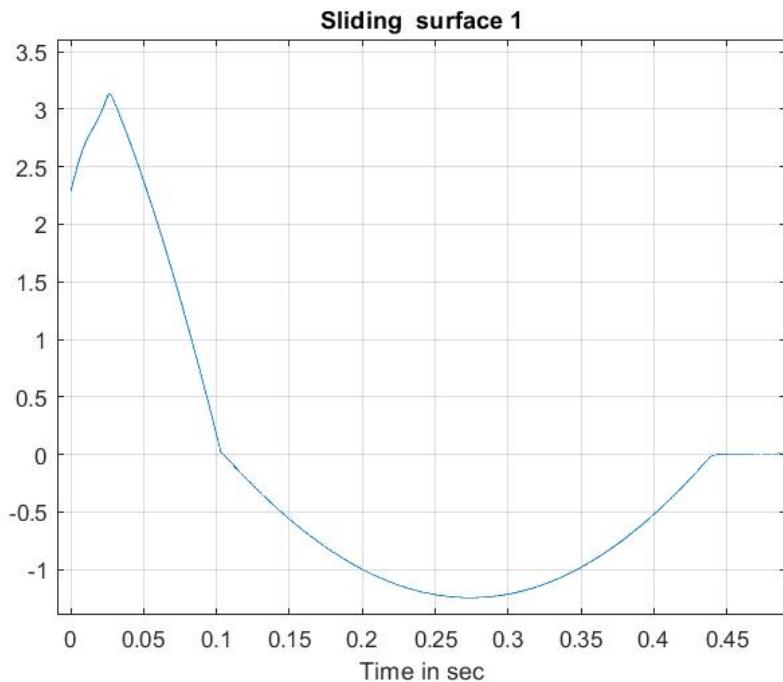
Επιφάνεια ολίσθησης 1 (s1)(γρήγορη σύγκλιση στο 0, μεγάλο διαστημα προσομοίωσης)



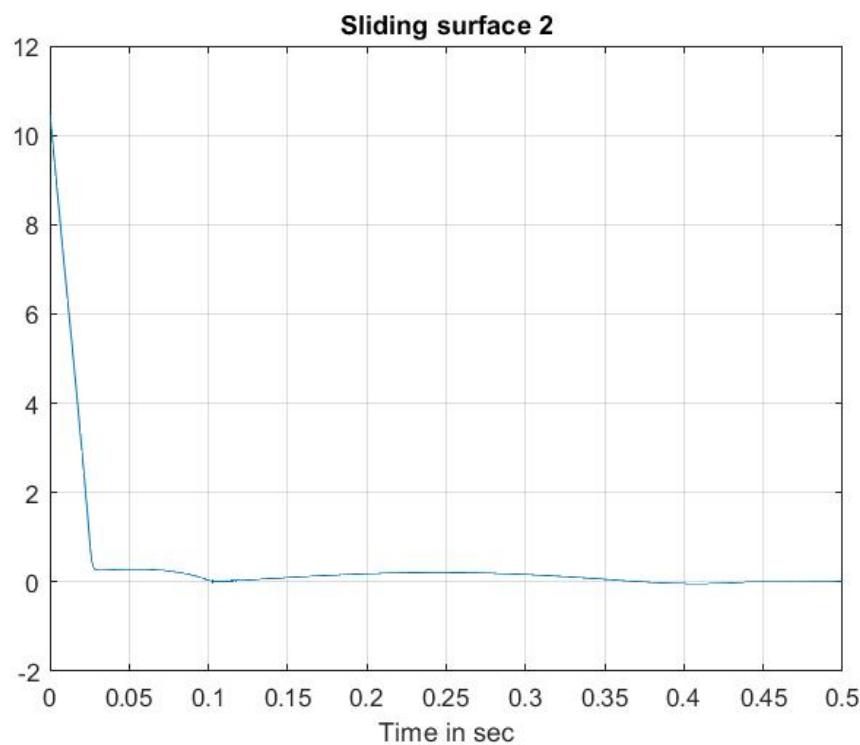
Επιφάνεια ολίσθησης 2 (s2)



Επιφάνεια ολίσθησης 1 (s1)(σε μικρότερο χρονικό διάστημα για καλύτερη απεικόνιση σύγκλισης της s στο 0)



Επιφάνεια ολίσθησης 2 (s2)(σε μικρότερο χρονικό διάστημα για καλύτερη απεικόνιση σύγκλισης της s στο 0)

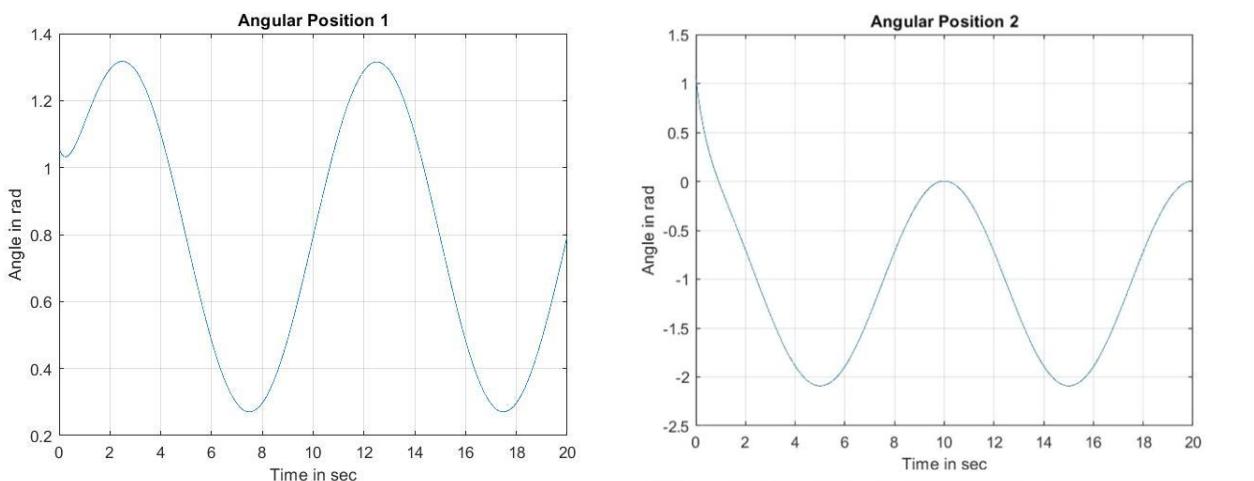


Όπως προκύπτει από τα παραπάνω διαγραμμάτα, η εισαγωγή περιορισμού ως προς την μέγιστη είσοδο επηρεάζει κυρίως την σύγκλιση του συστήματος στην επιφάνεια  $s = 0$ . Ειδικότερα για την επιφάνεια  $s_1$  παρατηρείται υπερύψωση κατά την σύγκλιση στο  $0$ (η  $s_1$  παίρνει για κάποιο χρονικό διάστημα αρνητικές τιμές και έπειτα οδηγείται στο  $0$ , πράγμα που δεν παρατηρείται αν δεν τεθεί ο συγκεκριμένος περιορισμός για τις τιμές της εισόδου). Άμεσο αποτέλεσμα αυτης της καθυστέρησης της σύγκλισης στο  $s = 0$  είναι και η καθυστέρηση της σύγκλισης των σφαλμάτων στο  $0$ , ενώ το  $e_1$  παρουσιάζει και αυτό υπερύψωση. Ωστόσο όπως φαίνεται τα παράπανω δεν επηρεάζουν την ικανότητα του ελεγχόμενου συστήματος να παρακολουθεί την ζητούμενη τροχιά, διαφοροποιούν ωστόσο τις ταχύτητες σύγκλισης.

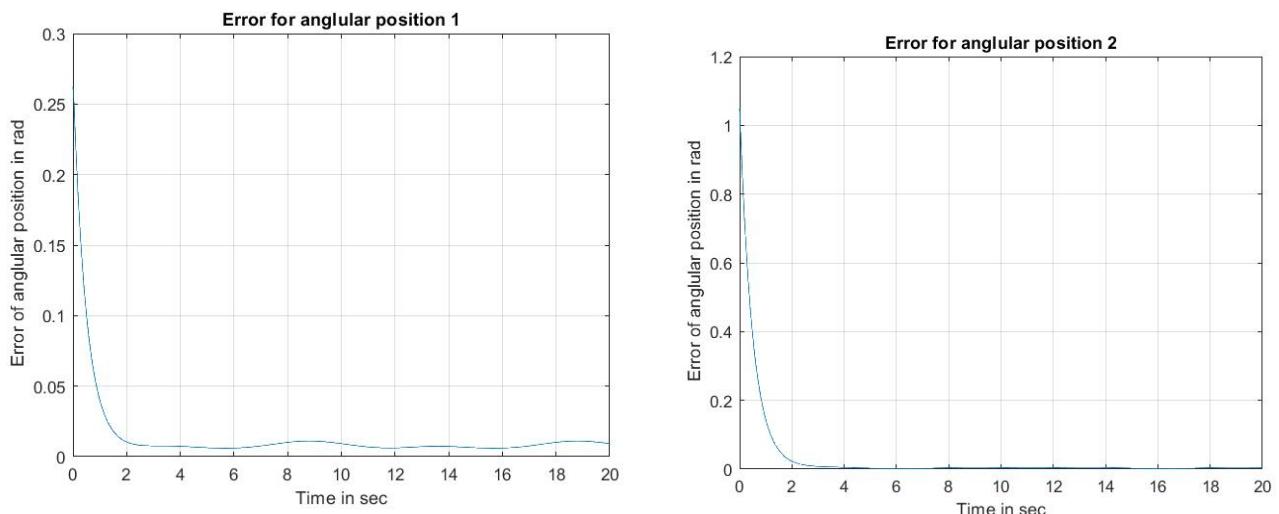
### **Αποτελέσματα προσομοιώσεων για ακολούθηση ημιτονοειδούς τροχιάς με μικρότερες τιμές λ.**

Για συγκρίση της επίδρασης του λάμδα στην συμπεριφορά του συστήματος, προσομοιώνεται παρακάτω το σύστημα με επιλογή του διαγώνιου πίνακα  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

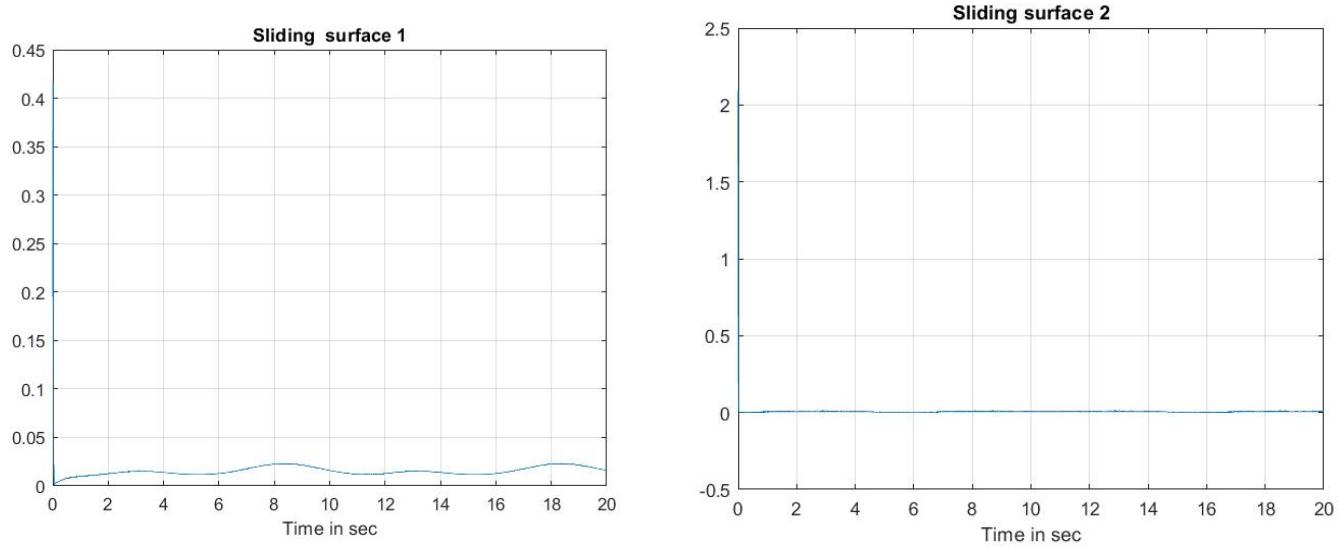
#### **Γωνιακές Θέσεις**



#### **Σφάλματα**



## Επιφάνειες ολίσθησης



Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για μικρότερη τιμή του λάμδα και χρονικά μεταβαλλόμενη τροχιά το σύστημα παρουσιάζει ενα ελαφρώς μεγαλύτερο σφάλμα, καθώς λογώ του μικρότερου  $\lambda$ , το σύστημα δεν φτάνει αρκετά γρήγορα στο  $e = 0$ , καθώς για μεταβαλλόμενη τροχιά το σφάλμα χρονική στιγμή είναι διαφορετικό, αφού η επιθυμητή θέση αλλάζει διαρκώς. Ωστόσο η συγκεκριμένη διαφορά στο σφάλμα είναι της τάξης του  $10^{-2}$ , που ανάλογα με τις απαιτήσεις της εφαρμογής μπορεί να θεωρηθεί ενδεχομένως αμελητέο και αν προτιμηθεί η συγκεκριμένη επιλογή της παραμέτρου, καθώς μειώνει και τις απαιτήσεις από την είσοδο.

## ΤΜΗΜΑ Β

Σε αυτό το τμήμα ζητείται η σχεδίαση προσαρμοστικού ελεγχου βασισμένου στην παθητικότητα.

### Θεωρητική ανάλυση για παθητικότα

Το σύστημα δίνεται από την  $H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u$ . Για την εφαρμόγη του συγκεκριμένου τρόπου ελέγχου αρχικά ορίζονται τα

$$\bar{q} = q - qd \quad (\text{σφάλμα παρακολούθησης}) \in R^{2x1}$$

$$qr = \dot{q}d - Lamda\bar{q} \Rightarrow \dot{qr} = \ddot{q}d - Lamda\dot{\bar{q}} \quad (\text{νέα τροχιά αναφοράς})$$

Ενω επίσης ορίζεται και και το  $s \in R^{2x1}$  (με τρόπο παρόμοιο με την μέθοδο Sliding) :

$$s = \dot{\bar{q}} + Lamda\bar{q} = \dot{q} - qr \quad (Lamda \text{ διαγώνιος πίνακας } 2x2)$$

Στόχος είναι το σύστημα να έρθει στην μορφή  $H(q)\ddot{s} + C(q, \dot{s})\dot{s} = A$ , οπού  $A$  θα αφορά τον προσαρμοστικό νόμο ελεγχου. Για τον λόγο αυτόν επιλέγεται είσοδος ελέγχου της μορφής

που εμπλέκει τις εκτιμήσιες των πινάκων, οι οποίες συμβολίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως

$$u = \tilde{H} \cdot \dot{q}r + \tilde{C} \cdot qr + \tilde{g} - K \cdot s =>$$

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tilde{H} \cdot \dot{q}r + \tilde{C} \cdot qr + \tilde{g} - K \cdot s => (\text{προσθαφαίρεση } H \cdot \dot{q}r + C \cdot qr)$$

$$H(q)(\ddot{q} - \dot{q}r) + C(q, \dot{q})(\dot{q} - qr) = (\tilde{H} - H) \cdot \dot{q}r + (\tilde{C} - C) \cdot qr + (\tilde{g} - g) - K \cdot s =>$$

$$H\dot{s} + (C + K)s = (\tilde{H} - H) \cdot \dot{q}r + (\tilde{C} - C) \cdot qr + (\tilde{g} - g)$$

Έχει προκυψει το ζητούμενο σύστημα, θα πρεπει να αποδειχτεί ότι το

$H\dot{s} + (C + K)s = v$  με έξοδο  $S$  είναι παθητικό και χρησιμοποιείται η ολοκληρωτική ανιστοτητα του Ρορον, συγκεκριμένα αρκεί

$$\gamma(\chi 0) + \int_0^\tau y^T v \, dt \geq 0 =>$$

$$\int_0^\tau s^T v \, dt => (\text{όμως } v = H\dot{s} + (C + K)s)$$

$$\int_0^\tau s^T H\dot{s} + s^T Cs + s^T Ks \, dt$$

Σε αυτο το σημείο θα χρησιμοποιηθεί η σχέση

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} s^T H s \right) = s^T H \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{H} s => s^T H \dot{s} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} s^T H s \right) - \frac{1}{2} s^T \dot{H} s$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται ως:

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} s^T H s \right) - \frac{1}{2} s^T \dot{H} s + s^T Cs + s^T Ks \, dt => (\text{όμως ισχύει οτι } \dot{H} - 2C \text{ αντισυμμετικος})$$

$$\frac{1}{2} s^T H s + \int_0^\tau s^T Ks \, dt$$

Για τα οποία ισχύει οτι

$$\frac{1}{2} s^T H s \geq 0 \text{ } H \text{ συμμετρικός και θετικά ορισμένος}$$

$$s^T Ks \geq 0 \text{ } K \text{ συμμετρικός και διαγώνιος πίνακας}$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\int_0^\tau s^T v \, dt \geq 0 => \text{σύστημα με έξοδο } s \text{ παθητικό}$$

Επιστρέφοντας στην μορφή του συστήματος

$$H\dot{s} + (C + K)s = (\tilde{H} - H) \cdot qr + (\tilde{C} - C) \cdot qr + (\tilde{g} - g)$$

Ορίζεται το  $H \cdot qr + C \cdot qr + g = Y\Theta$ , οπου το  $Y$  είναι ο  $R^{mx2}$  πίνακας και  $\Theta$  είναι  $R^{mx1}$  όπου το πλήθος των παραμέτρων που θα εκτιμηθουν(τα ακριβή στοιχεία των πινάκων προσδιορίζονται στην συνέχεια). Επίσης συμβολίζεται

$$(\tilde{H}) \cdot qr + (\tilde{C}) \cdot qr + (\tilde{g}) = Y\tilde{\Theta}, \text{ επομένως το δεξί μέρος της εξίσωσης του συστήματος γράφεται ως } Y\tilde{\Theta} - Y\Theta \text{ δηλαδή } Y\Delta\Theta \text{ με } \Delta\Theta = \tilde{\Theta} - \Theta$$

$$\dot{H}s + (C + K)s = Y\Delta\Theta$$

Για την επιλογή του κατάλληλου νόμου προσαρμογής των παραμέτρων επιλέγεται η συνάρτηση τύπου Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}s^T H s + \frac{1}{2}\Delta\Theta^T \Gamma \Delta\Theta \text{ όπου } \Gamma \in R^{m \times m} \text{ θετικά ορισμένος πίνακας κερδών}$$

$$\dot{V} = s^T H \dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{H} s + \Delta\Theta^T \Gamma \dot{\Delta\Theta} =>$$

$$\dot{V} = s^T(-(C + K)s + Y\Delta\Theta) + \frac{1}{2}s^T \dot{H} s + \Delta\Theta^T \Gamma \dot{\Delta\Theta} => (\text{όμως ισχύει ότι } \dot{H} - 2C \text{ αντισυμμετικος})$$

$$\dot{V} = -s^T K s + \Delta\Theta^T (Y^T s + \Gamma \dot{\Delta\Theta})$$

Και επιλέγεται ως νομός προσαρμογής των παραμέτρων  $\dot{\Delta\Theta} = -\Gamma^{-1} Y^T S$

$$\dot{V} = -s^T K s \leq 0 \text{ αρνητικά ημιοριμσμένη εφόσον } K \text{ θετικά ορισμένος πίνακας}$$

Από το παραπάνω συμπέρασμα και με χρήση του **Λημματος Barbalat** πρόκυπτει ότι

$V$  φραγμένη  $\Rightarrow$  τα  $s, \Delta\Theta$  φραγμένα, αρα και  $\dot{s}$  φραγμένη

$$\ddot{V} = -2s^T K \dot{s} \text{ φραγμένη συνάρτηση} \Rightarrow \lim_{\infty} \dot{V} = 0 \Rightarrow s \text{ τείνει στο } 0$$

Από την παραπάνω απόδειξη εξασφαλίζεται η συγκλίση των σφαλμάτων παρακολούθησης τροχιάς στο 0, κάθως για  $s = 0 \Rightarrow \dot{q} + \text{Lamda} \bar{q} = 0$

Επομένως εξασφαλίζεται η εκθετική σύσκλιση του  $q$  στο  $[0,0]$ , εδώ ο διαγώνιος πίνακας Lamda επιτρέπει την διαφοροποίηση για τις εισοδούς των δύο αρθώσεων.

Εφόσον ισχύει  $\dot{\Delta\Theta} = \dot{\tilde{\Theta}}$ , έχουμε εξασφαλίσει με αυτό τον τρόπο τον προσαργμογής των παραμέτρων.

## Επιλογή παραμέτρων συστήματος

Έχοντας την μορφή των εξισώσεων του συστήματος θα εξάχθουν από αυτές οι άγνωστες παράμετροι οι οποίες θα εκτιμώνται με βαση τον νομό που επιλέχθηκε προηγουμένως.

Ισχυει ότι

$$\begin{aligned} h_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_{c2}^2 + l_1^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + m_l(l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2) + I_1 + I_2 \\ h_{12} &= m_2 l_{c2}(l_{c2} + l_1 \cos q_2) + m_l l_2(l_2 + l_1 \cos q_2) + I_2 \\ h_{22} &= l_{c2}^2 m_2 + l_2^2 m_l + I_2 \end{aligned}$$

Επομένως αρχικά ορίζονται οι

$$\theta_1 = m_1 \cdot lc1^2, \theta_2 = m_2 \cdot lc2^2, \theta_3 = m_2 \cdot l1^2, \theta_4 = m_2 \cdot l1 \cdot lc2, \theta_5 = ml \cdot l2^2$$

$$\theta_6 = ml \cdot l1^2, \theta_7 = ml \cdot l1 \cdot l2, \theta_8 = I1, \theta_9 = I2$$

Τα στοιχεία του  $H$  γράφονται ως εξής

$$h_{11} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_3 \cdot 2 \cos(q_2) + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7 \cdot 2 \cos(q_2) + \theta_8 + \theta_9$$

$$h_{12} = \theta_2 + \theta_4 \cdot \cos(q_2) + \theta_5 + \theta_7 \cdot \cos(q_2) + \theta_9$$

$$h_{22} = \theta_2 + \theta_5 + \theta_9$$

ενώ τα στοιχεία του  $C$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -l_1(m_2 l_{c2} + m_l l_2) \sin q_2 \dot{q}_2 & -l_1(m_2 l_{c2} + m_l l_2) \sin q_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_1) \\ l_1(m_2 l_{c2} + m_l l_2) \sin q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = -(\theta_4 + \theta_7) \sin(q_2) \dot{q}_2$$

$$c_{12} = -(\theta_4 + \theta_7) \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$c_{21} = (\theta_4 + \theta_7) \sin(q_2) \dot{q}_1$$

$$c_{22} = 0$$

Για το  $\mathbf{g}$

$$g(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_2 l_{c2} + m_l l_2) g \cos(q_1 + q_2) + (m_2 l_1 + m_l l_1 + m_1 l_{c1}) g \cos q_1 \\ (m_2 l_{c2} + m_l l_2) g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Ορίζονται οι

$$\theta_{10} = m_2 \cdot lc2, \theta_{11} = ml \cdot l2, \theta_{12} = m_2 l_1, \theta_{13} = ml \cdot l1, \theta_{14} = m_1 \cdot lc1$$

Επομένως τα στοιχεία του  $\mathbf{g}$  γράφονται ως εξής

$$g_1 = (\theta_{10} + \theta_{11}) g \cdot \cos(q_1 + q_2) + (\theta_{12} + \theta_{13} + \theta_{14}) g \cdot \cos(q_1)$$

$$g_2 = (\theta_{10} + \theta_{11}) g \cdot \cos(q_1 + q_2)$$

Συνεπώς το διανυσμα των παραμέτρων είναι το

$$\theta = [\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6 \theta_7 \theta_8 \theta_9 \theta_{10} \theta_{11} \theta_{12} \theta_{13} \theta_{14}]^T$$

Τα  $\theta_3, \theta_{12}$  ωστόσο δεν αποτελούν άγνωστες παραμέτρους του συστήματος καθώς οι τιμές τους είναι γνωστές και σταθερές για το πρόβλημα, ωστόσο εξακολουθούν να συμπεριλαμβάνονται στον διάνυσμα των παραμέτρων για για να μπορεί να εκφραστεί το

$H \cdot \dot{q}r + C \cdot qr + g$  ως το γινόμενο  $Y\theta$ . Εφόσον οι τιμές τους είναι γνωστές και σταθερές δεν χρειάζεται να υπακουούν σε καποιο νόμο προσαρμογής, επομένως οι γνώστες θα τεθούν στις αρχικές τιμές των  $\theta_3, \theta_{12}$ , ενώ ο νόμος μεταβολής θα συνεπάγεται οτί δεν αλλάζουν.

Δηλαδή θα θεωρήσουμε ότι  $\dot{\Delta\theta} = -\Gamma^{-1}Y^T S$  με εξαίρεση τα στοιχεία  $\Delta\dot{\theta}_3 = 0$  και  $\Delta\dot{\theta}_{12} = 0$  τα οποία θα έχουν ως αρχική τιμή το 0 καθώς  $\Delta\theta = \tilde{\theta} - \theta$  και εφόσον είναι γνωστά

$$\tilde{\theta} = \theta \Rightarrow \Delta\theta_3 = 0, \Delta\theta_{12} = 0$$

Η παραπάνω επιλογή για να παραπείνουν τα  $\theta_3, \theta_{12}$  στο σύνολο των παραμέτρων παρόλο που είναι γνωστές τιμές έγινε για να μπορέσουν να διατηρηθεί ο συμβολισμός  $Y\theta$ , που διευκολύνει την έκφραση του  $H \cdot \dot{q}r + C \cdot qr + g$  ως γινόμενο δύο πινάκων. (στην πραγματικότητα θα εξασφαλίζοταν ο στόχος ελέγχου ακομά και αν αφήναμε τις σταθερές  $\theta_3, \theta_{12}$  να μεταβάλονται και αυτές μαζί με τις άλλες παραμέτρους παρόλο που γνώριζουμε ότι εχουν γνωστή και σταθερή τιμή)

Από τα παραπάνω για να ισχύει οτι  $H \cdot \dot{qr} + C \cdot qr + g = Y\theta$  προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{array}{ccc}
 Y = & \begin{matrix} \dot{qr}1 & 0 \\ \dot{qr}1 + \dot{qr}2 & \dot{qr}1 + \dot{qr}2 \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} \dot{qr}1 & 0 \\ 2qr^1 \cdot \cos(q2) + qr^2 \cdot \cos(q2) - qr1 \cdot \sin(q2) & \dot{qr}1 \cos(q2) + qr1 \sin(q2) \\ \dot{qr}1 + \dot{qr}2 & \dot{qr}1 + \dot{qr}2 \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} \dot{qr}1 & 0 \\ 2qr^1 \cdot \cos(q2) + qr^2 \cdot \cos(q2) - qr1 \cdot \sin(q2) & \dot{qr}1 \cos(q2) + qr1 \sin(q2) \\ \dot{qr}1 & 0 \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} \dot{qr}1 + \dot{qr}2 & \dot{qr}1 + \dot{qr}2 \\ g\cos(q1 + q2) & g\cos(q1 + q2) \\ g\cos(q1 + q2) & g\cos(q1 + q2) \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} g\cos(q1) & 0 \\ g\cos(q1) & 0 \\ g\cos(q1) & 0 \end{matrix}
 \end{array}$$

Ο νόμος προσαρμογής των παραμέτρων ειναι

**$\Delta\theta = -\Gamma^{-1}Y^T s$  με εξαίρεση τα  $\Delta\theta_3, \Delta\theta_{12}$  που είναι μηδενικά** οπου για την συγκεκριμένη περίπτωση του βραγχίονα  $\Gamma^{-1} \in R^{14x14}$  διαγώνιος πίνακας,  $Y \in R^{2x14}$ ,  $Y^T \in R^{14x2}$  και  $s \in R^{2x1}$ , ο επομένως  $\dot{\Delta\theta} = Y^T s \in R^{14x1}$ . Δηλαδή το  $\dot{\Delta\theta}$ , περιλαμβάνει τον νόμο μεταβολής για κάθε μια από τις παραμέτρους που επιλέχθηκαν παραπάνω. Ο πίνακας  $\Gamma^{-1}$  χρησιμοποιείται για την προσαργμογής της ταχύτητας προσαρμογής των παραμέτρων του συστήματος.

Με βάση την παραπάνω την ανάλυση **δεν εξασφαλίζεται** ο, τιδήποτε για την σύγκλιση των παραμέτρων σε συγκεκριμένες σταθερές τιμές. Οι τιμές των παραμέτρων δεν αντιστοιχίζονται σε πραγματικές τιμές (όπως φαίνεται και στα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που ακολουθούν παρακάτω μπορεί να απέχουν κατά πολύ από τις πραγματικές παραμέτρους του συστήματος), ενώ η τιμή τους ενδέχεται να αλλάζει διαρκώς (να «ταλαντώνεται»), ενώ οι τιμές τους εξαρτώνται σε καθέ περίπτωση από την επιθυμητό στόχο ελέγχου (επιθυμητή τροχιά). Η επιλογή του διαγώνιου πίνακα  $K$  επηρεάζει την ταχύτητα συγκλίσης του συστήματος στην επιθυμητή θέση, στα πλαίσια των προσομοιώσεων χρησιμοποιήθηκε

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

από το οποίο όπως θα φανεί παρακάτω προέκυψε ικανοποιητικά γρήγορη σύγκλιση στην επιθυμητή τροχιά. Για μεγαλύτερες απαιτήσεις θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν μεγαλύτερες τιμές για τα στοιχεία του  $K$ , που θα σήμαινε και διαφοροποίηση στις απαιτήσεις από τον ελεγκτή. Για τις τιμές του διαγώνιου πίνακα Lamda, εδώ επιλέχθηκε και εδώ

$$Lamda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. 0 \text{ πίνακας } \Gamma^{-1} \text{ επιλέχθηκε να ειναι } 5 \cdot I_{14} \text{ όπου } I_{14} \text{ ο } 14 \times 14 \text{ μοναδιαίος.}$$

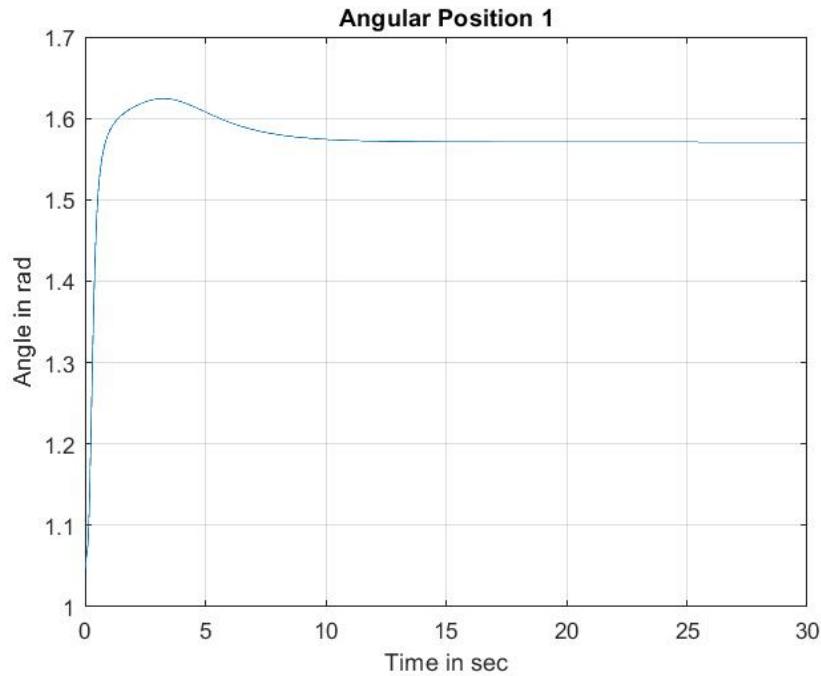
Στα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παρουσιάζεται, για παρατήρηση της επίδρασης του πίνακα  $\Gamma^{-1}$  στην συμπεριφορά του συστήματος, και η απόκριση των σφαλμάτων χωρίς επιλογή κερδών για τον νόμο προσαρμογής των παραμέτρων, δηλαδη  $\Gamma^{-1}=I_{14}$ .

## **Προσομοίωση**

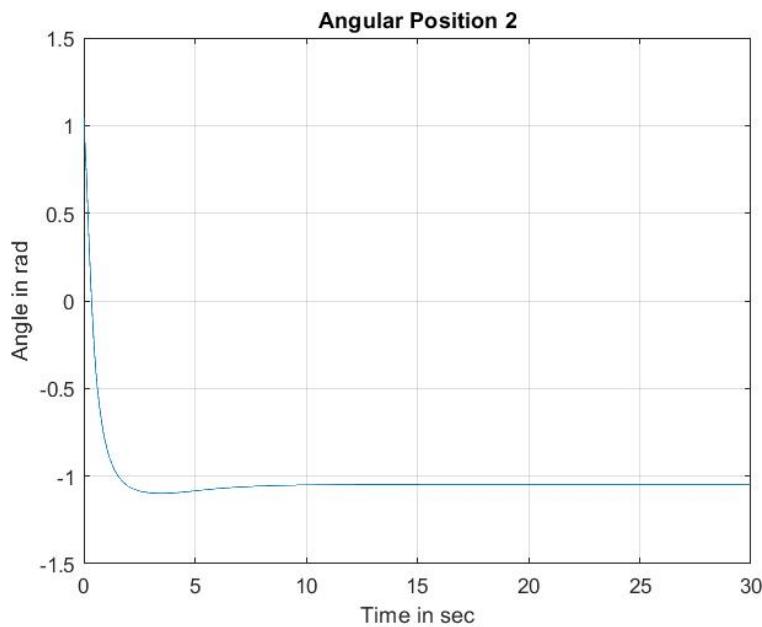
Και σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιηθήκε η ίδια μέθοδος για προσομοίωση της συμπεριφοράς του συστήματος (με χρηση του ode45). Τροποποιήθηκε ωστόσο η συνάρτηση που επιστρέφει τις εξισώσεις κατάστασης τους συστήματος (model2dof). Συγκεκριμένα σε αυτήν οι εκτιμήσεις των πινάκων ορίζονται με βάση τις παραμέτρους (διάνυσμα p (στο script του matlab)), ενώ ορίζεται ο πίνακας  $Y^T$ , όπως περιγράφηκε προηγουμένως, ο θετικά ορισμένος και διαγώνιος πίνακας  $K$  και ο ελεγκτής όπως επιλέχθηκε. Για την υλοποίηση του προσαρμοστικού νόμου ελέχου εισάγονται οι 14 νέες μεταβλητές κατάστασης όπως ορίζονται από τον νόμο προσαρμογής. Η συναρτήση model2dof επιστρέφει το σύνολο των 18 εξισώσεων κατάσταση (4 που περιγράφουν την συμπεριφορά του συστήματος και 14 που αφορούν τις παραμέτρους).

**Αποτελέσματα προσομοιώσεων για σταθερή τελική θέση με χρήση προσαρμοστικού ελέγχου**

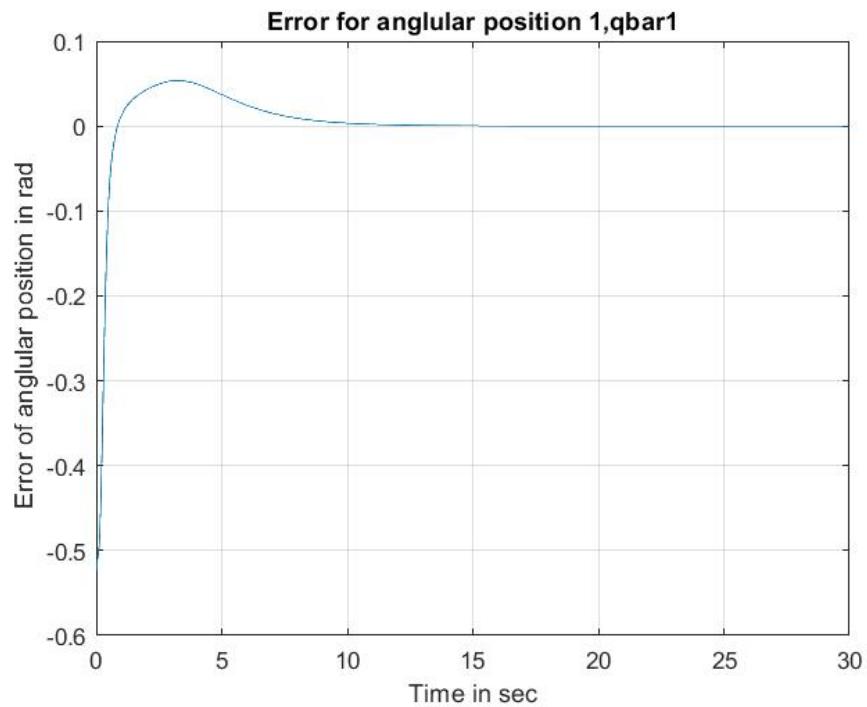
Γωνιακή Θέση 1( $\theta_1$ )



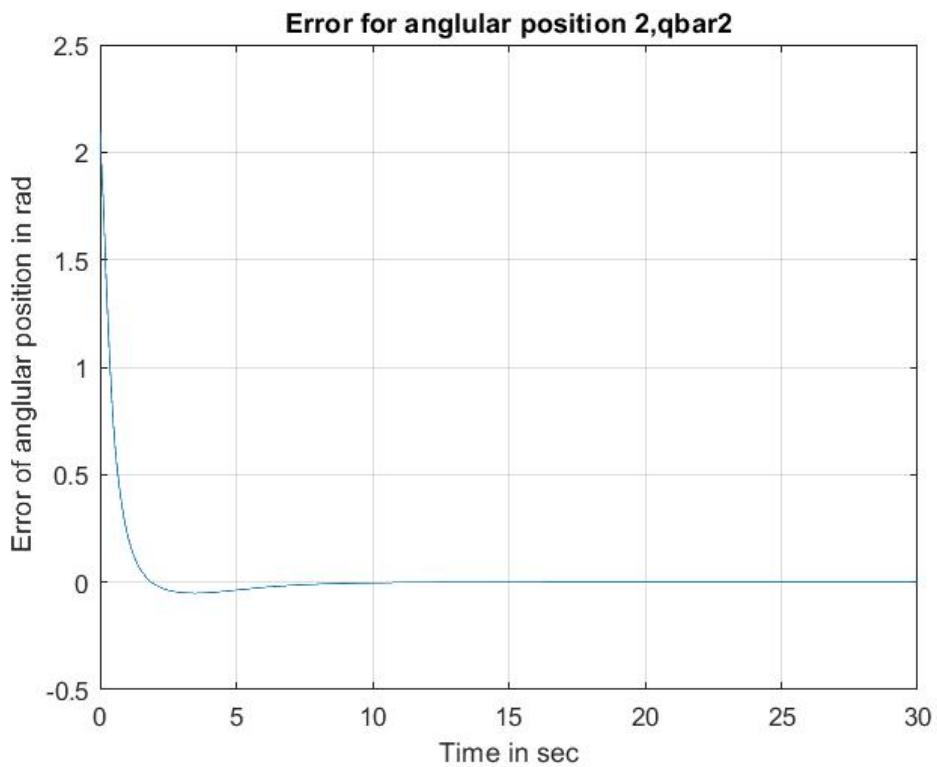
Γωνιακή Θέση 2 ( $\theta_2$ )



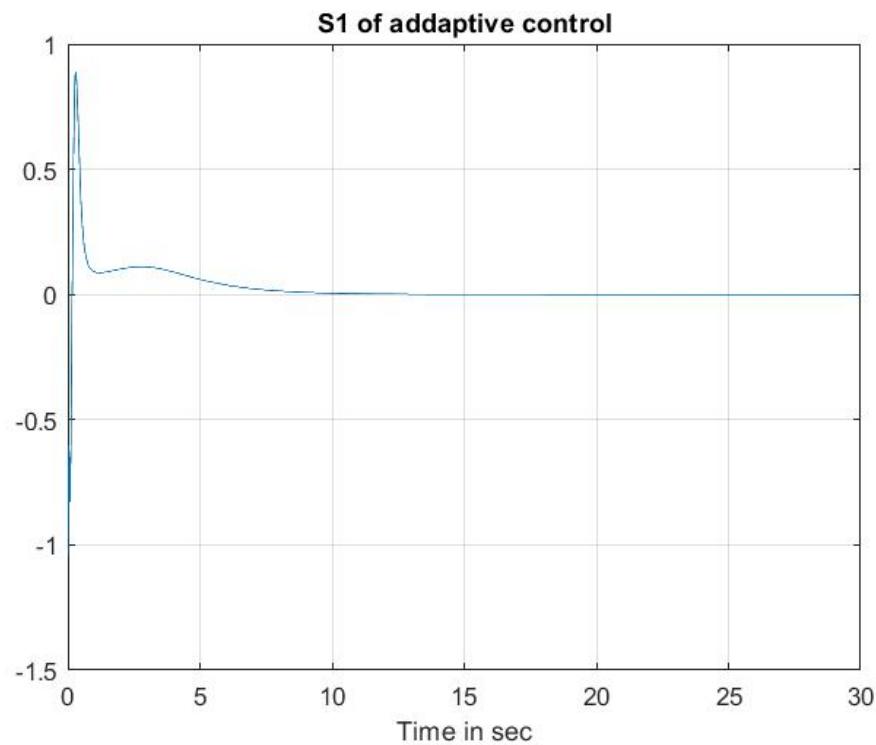
**Σφάλμα γωνιακής θέσης 1 (*qbar1*)**



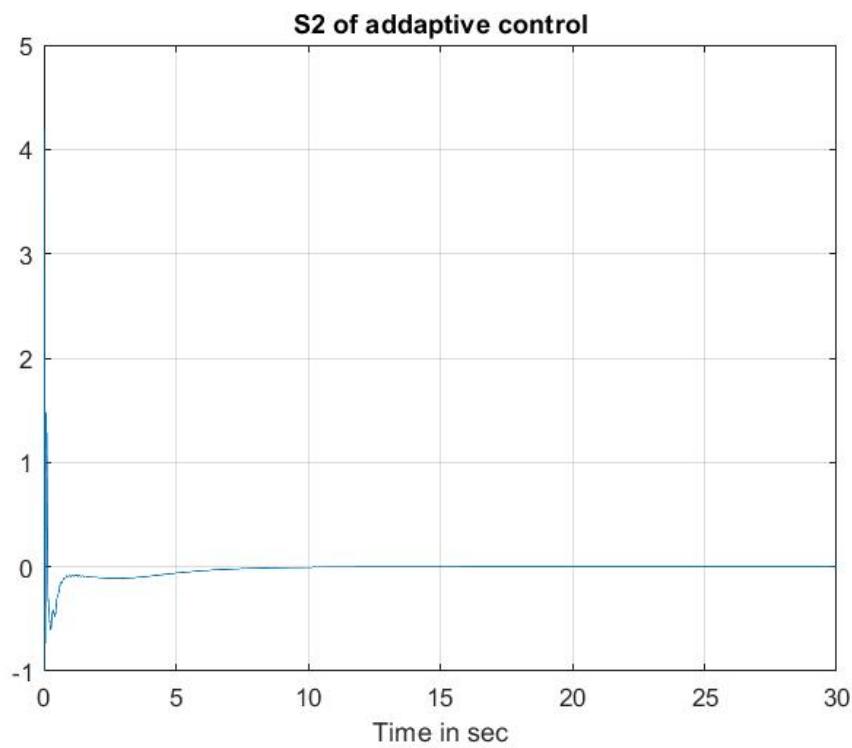
**Σφάλμα γωνιακής θέσης 2 (*qbar2*)**



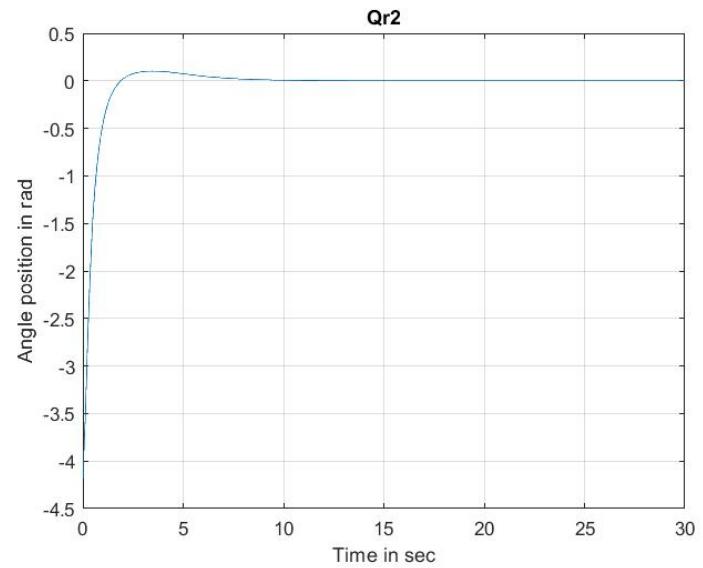
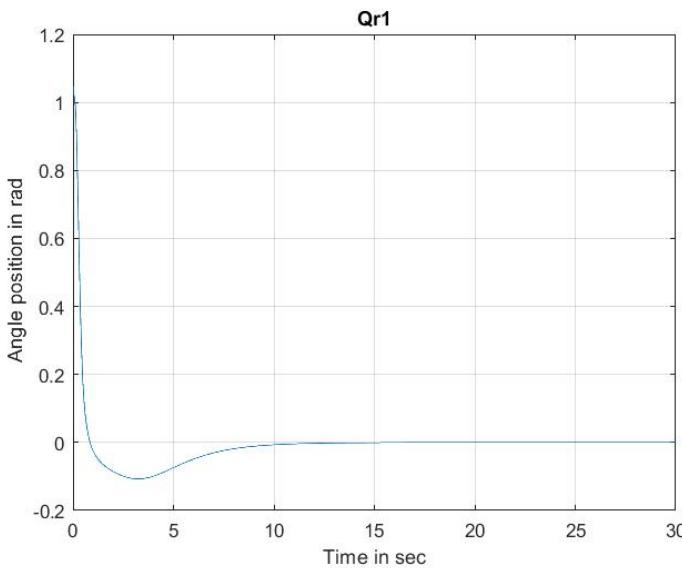
S1 προσαρμοστικού ελέγχου



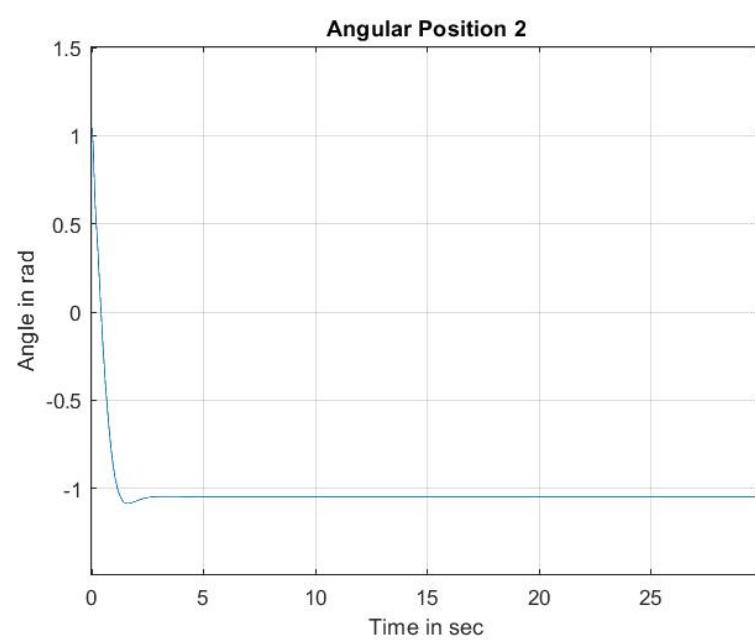
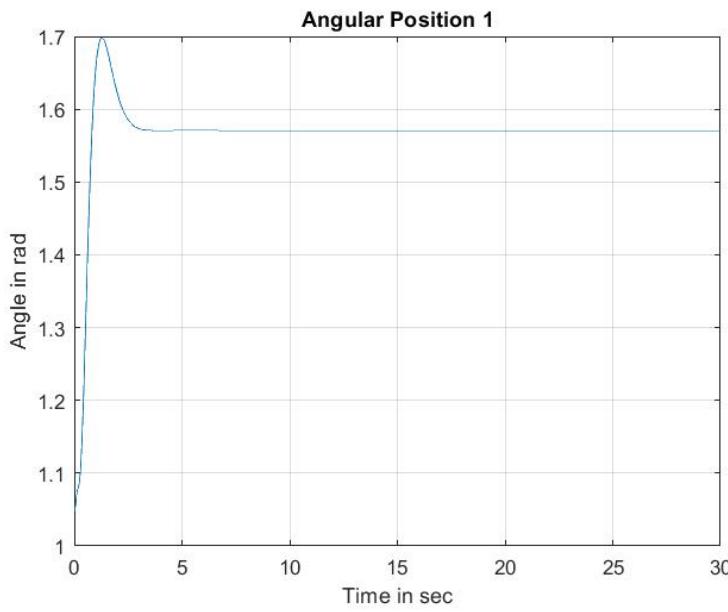
S2 προσαρμοστικού ελέγχου



## Νέες τροχιές αναφοράς (qr1,qr2)

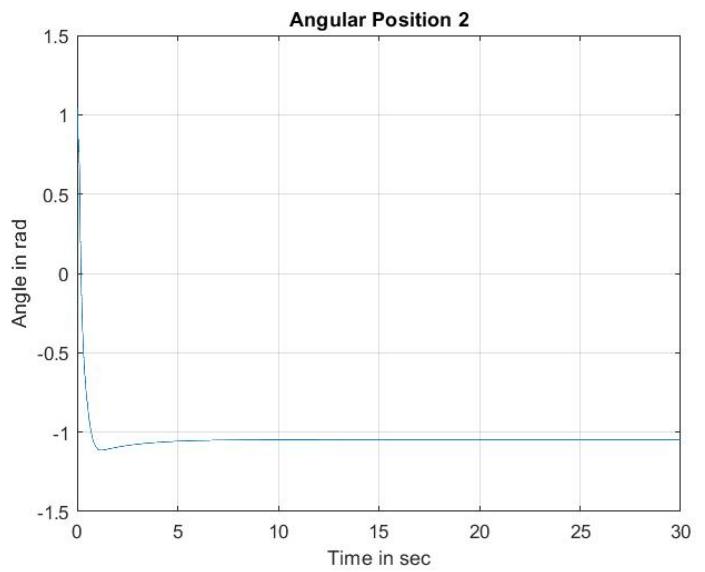
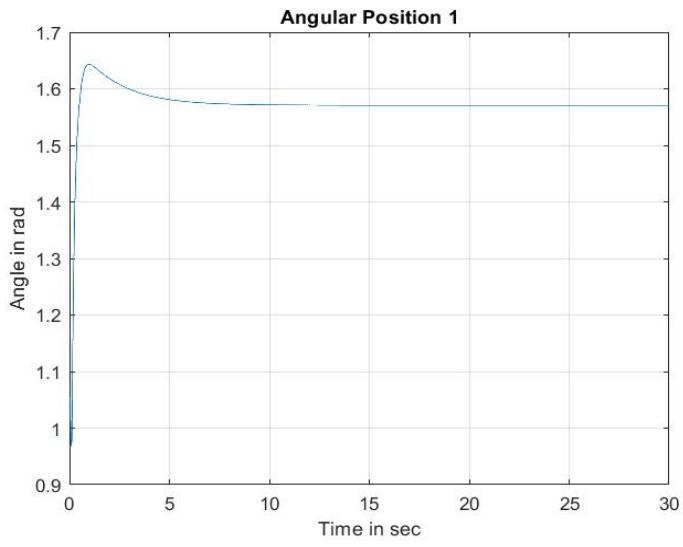


Γωνιακές θέσεις χωρίς την επιλογή κερδών για τον νόμο προσαρμογής ( $\Gamma^{-1}$  μοναδιαίος).



Από τα παραπάνω φαίνεται ότι χωρίς την επιλογή κερδών η  $\theta_1$  εμφανίζεται μεγαλύτερη υπερύψωση πανω από το ζητουμένο σημείο, ενώ στην περίπτωση αυτή για τις συγκεκριμένες συνθήκες το σύστημα χωρίς επιλογή κερδών συγκλίνει πιο γρήγορα στην τελική του θέση, εμφανίζοντας ομώς μεγαλύτερη υπερύψωση. Και στις δύο περιπτώσεις οι επιλόγες των άλλων παραμέτρων (K, Lamda) για τον ελεγκτή παρέμειναν ίδιες στις επιλογές που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Στα παρακάτω αποτελέσματα

προσομοιώνεται το σύστημα με τα lamda1, lamda2 ίσα με 5 και εφαργμοφή κερδών για τον νόμο προσαρμογής.

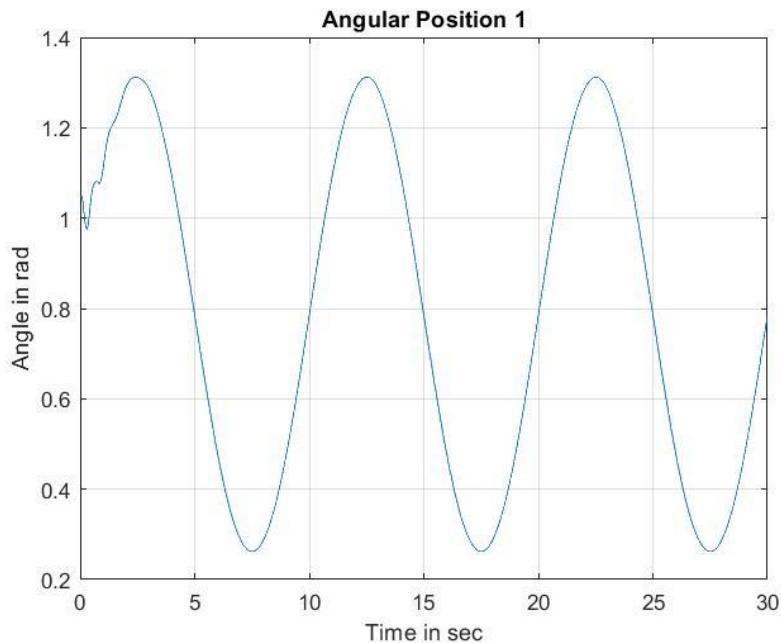


Στα παραπάνω παρατηρείται συνδυασμός μικρής υπερύψωσης και σε ένα βαθμό ταχύτερης σύγκλισης στο επιθυμητό σημείο, σε σύγκριση με τις προηγούμενες περίπτωσεις που εξασφαλίζοταν μόνο το ένα εκ των δύο. Επομένως με κατάλληλη επιλογή των κερδών προσαρμογής και του λαμδα μπορεί να ρυθμιστεί η απόκριση του συστήματος ανάλογα με τις απαιτήσεις της εφαρμογής ελέγχου σε χρόνο απόκρισης και σε περιθώρια υπερύψωσης, καθώς και από τους περιορισμούς της εισόδου ελέγχου.

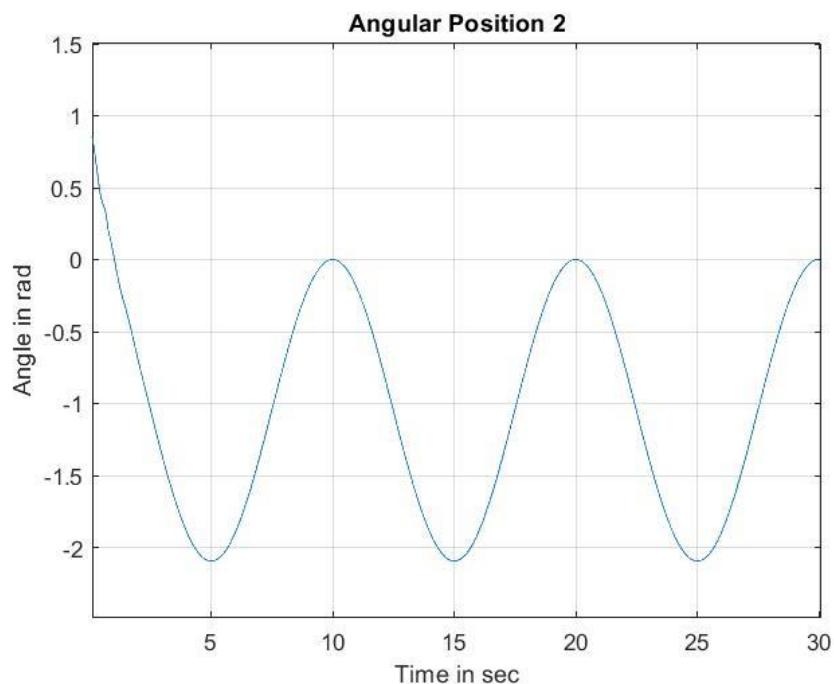
*Αποτελέσματα προσομοιώσεων για ημιτονοειδή τελική θέση με χρήση προσαρμοστικού ελέγχου*

Για  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ,  $\Gamma^{-1} = 5 * I$

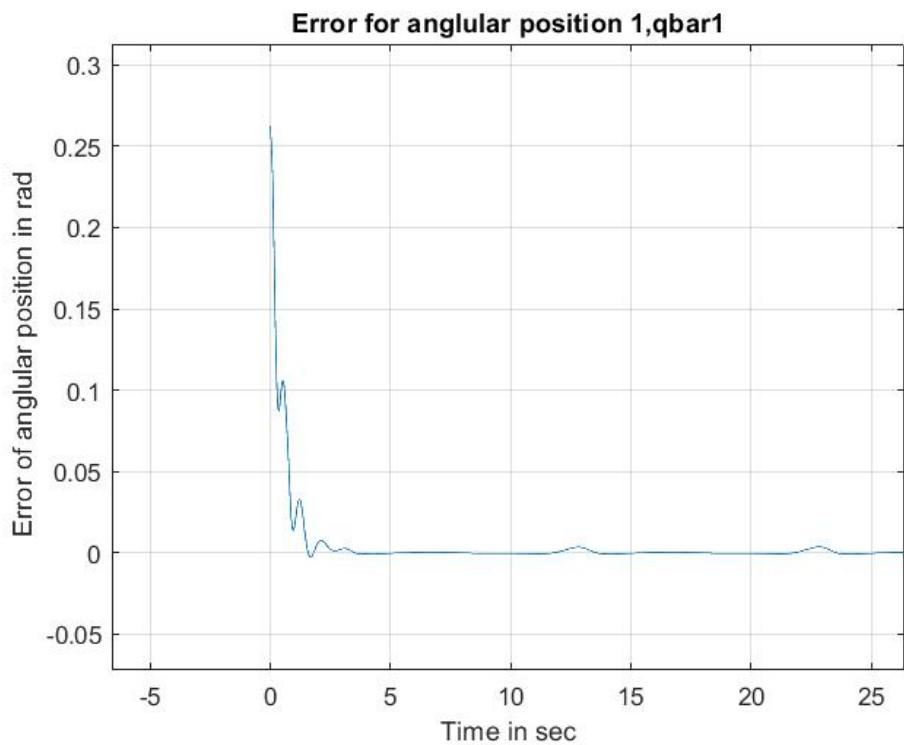
Γωνιακή θέση 1( $\theta_1$ )



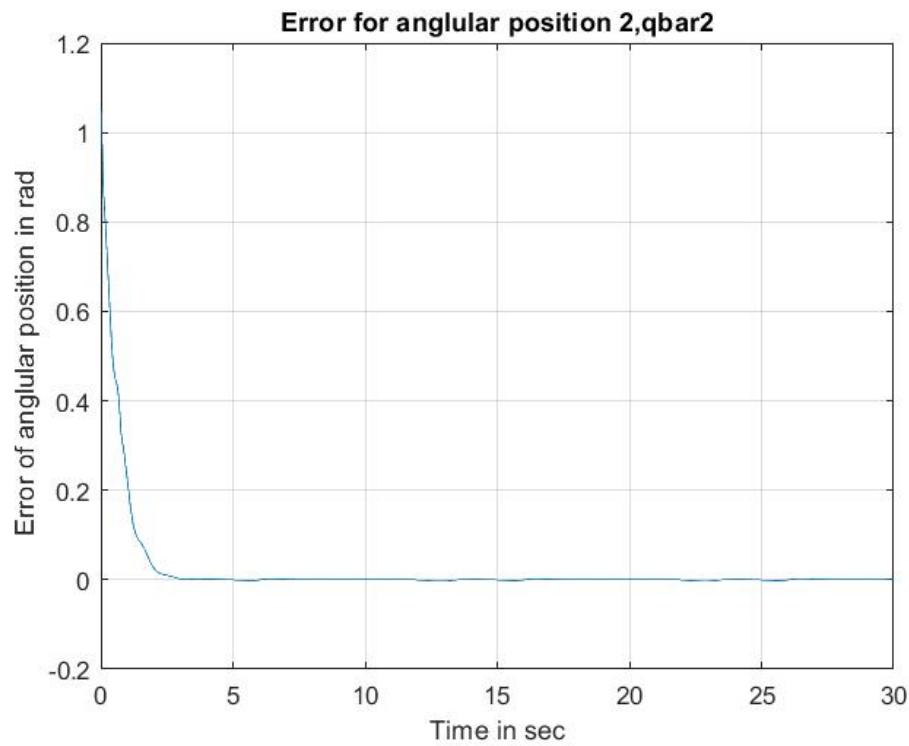
Γωνιακή θέση 2 ( $\theta_2$ )



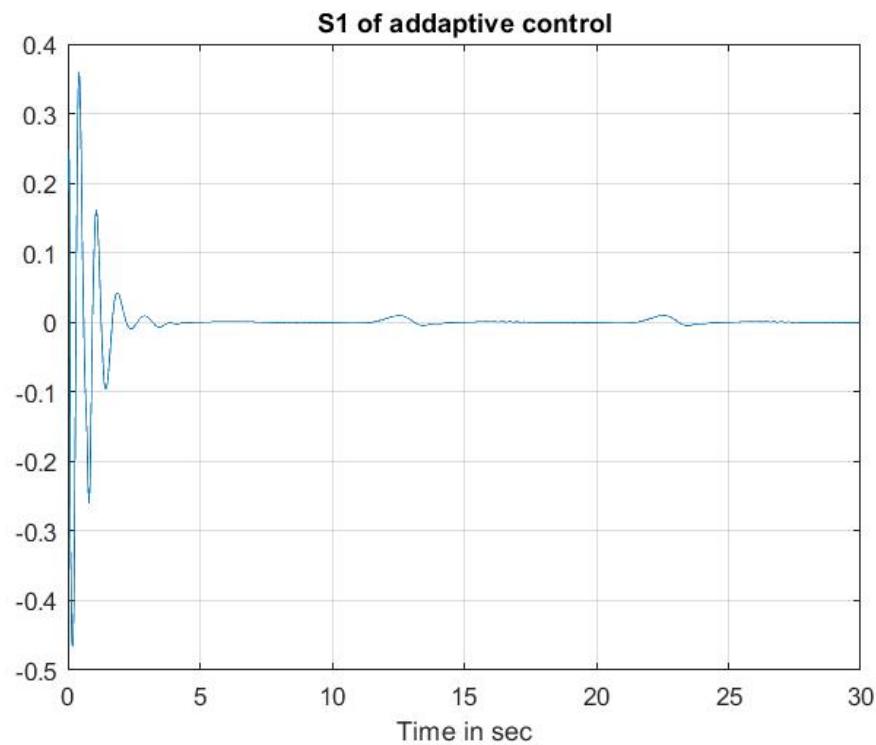
Σφάλμα γωνιακής θέσης 1 (*qbar1*)



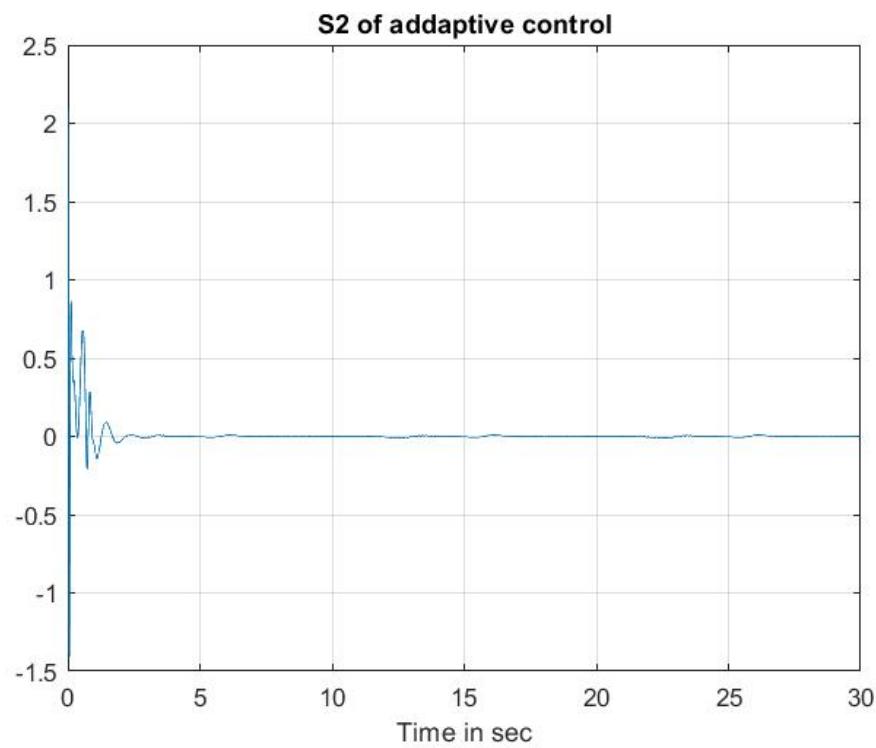
Σφάλμα γωνιακής θέσης 2(*qbar2*)



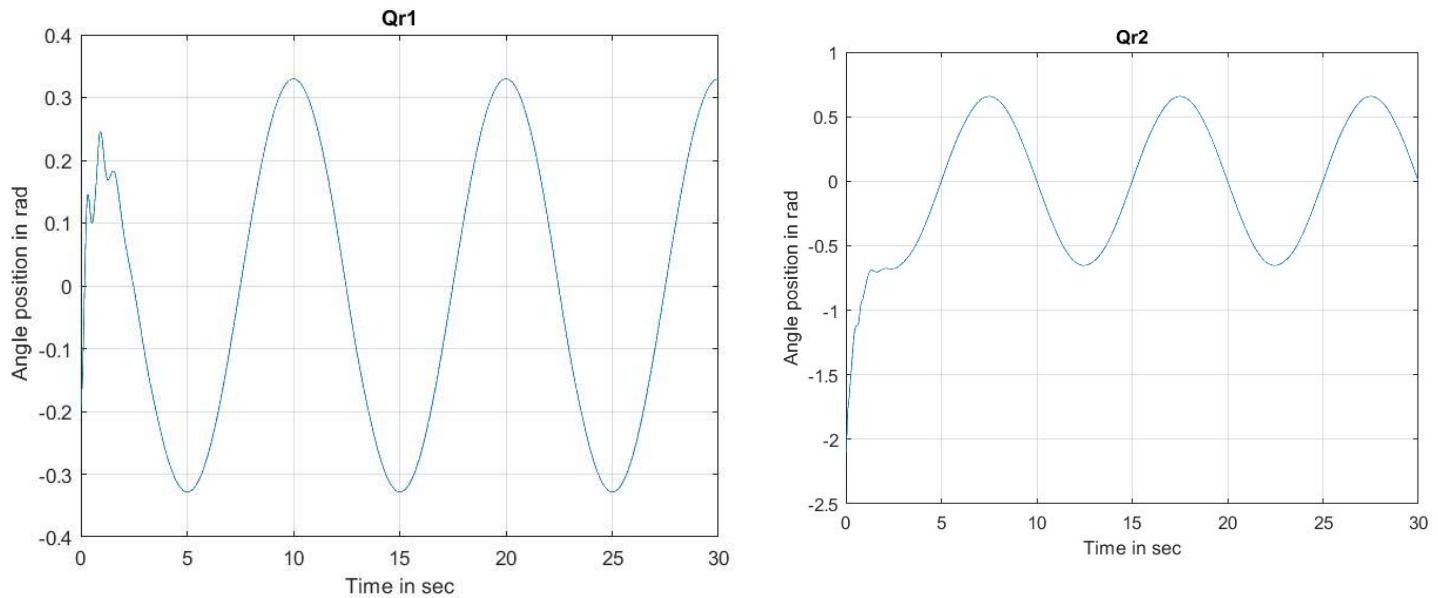
**S1 προσαρμοστικού ελέγχου**



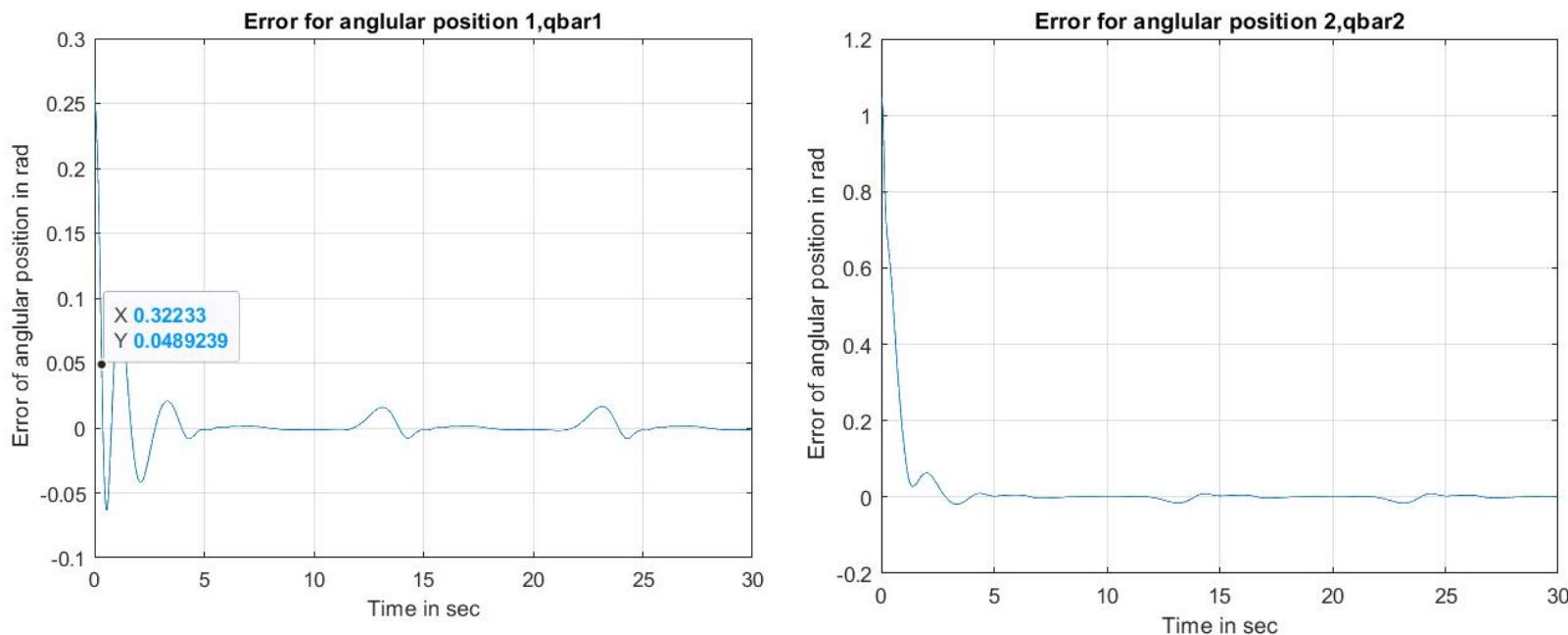
**S2 προσαρμοστικού ελέγχου**



## Νέες τροχιές αναφοράς (qr1,qr2)



Σφάλματα για τις γωνιακές θέσεις χωρίς την επιλογή κερδών για τον νόμο προσαρμογής ( $\Gamma^{-1}$  μοναδιαίος).



Από τα παραπάνω φαίνεται η σημασία της σωστής επιλογής των κερδών για τον νόμο προσαρμογής. Στα τελευταία δυο διαγράμματα (δηλαδή για σύστημα χωρίς κέρδη προσαρμογής) παρουσιάζεται ενα μεφαλύτερο σφάλμα σε σχέση με τον ελεγκτή με κέρδη, ιδιαίτερα για την γωνιακή θέση 1.

## Επιλογή παραμέτρων συστήματος (εκδοχή 2)

Αντί για τον παραπάνω ορισμό των παραμέτρων του συστήματος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και μια ομαδοποίηση των άγνωστων παραμέτρων, παρόμοια με αυτήν που εφαρμόστηκε για την εύρεση των φραγμάτων στην θεωρητική ανάλυση του sliding.0 συγκεκριμένος τρόπος εξασφαλίζει μιας απλούστερη υλοποίηση του συστήματος.

Συγκεκριμένα

$$\theta_1 = m1 * lc1^2 + m2 * lc2^2 + m2 * l1^2 + ml * l2^2 + ml * l1^2 + I1 + I2$$

$$\theta_2 = ml * l1 * lc2 + m2 * l1 * lc2$$

$$\theta_3 = m2 * lc2^2 + ml * l2^2 + I2$$

$$\theta_4 = m2 * lc2 + ml * l2$$

$$\theta_5 = m2 * l1 + ml * l1 + m1 * lc1$$

Από τα παραπάνω προκύπτει οτι

$$h11 = \theta_1 + \theta_2 \cdot 2 \cos(q2), h12 = \theta_3 + \theta_2 \cdot \cos(q2), h22 = \theta_3$$

$$c11 = -\theta_2 \cdot \sin(q2) \dot{q}2, c12 = -\theta_2 \cdot \sin(q2) (\dot{q}1 + \dot{q}2), c21 = \theta_2 \cdot \sin(q2) \dot{q}1, c22 = 0$$

$$g1 = \theta_4 \cdot g \cdot \cos(q1 + q2) + \theta_5 \cdot g \cdot \cos(q1), g2 = \theta_4 \cdot g \cdot \cos(q1 + q2)$$

Επομένως σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας ορίζεται ως

$$\gamma = \begin{pmatrix} \dot{q}r1 & 0 \\ \frac{2\dot{q}r1 \cos(q2) + \dot{q}r2 \cos(q2) - qr1 \sin(q2)(\dot{q}1 + \dot{q}2)}{\dot{q}r1 \cos(q2) + \sin(q2) qr1 \dot{q}1} & \frac{\dot{q}r1 \cos(q2) + \sin(q2) qr1 \dot{q}1}{\dot{q}r1 + \dot{q}r2} \\ \frac{g \cos(q1 + q2)}{g \cos(q1)} & \frac{g \cos(q1 + q2)}{0} \end{pmatrix}$$

Με ακριβώς την ίδια θεωρητική ανάλυση επιλέγεται και εδώ

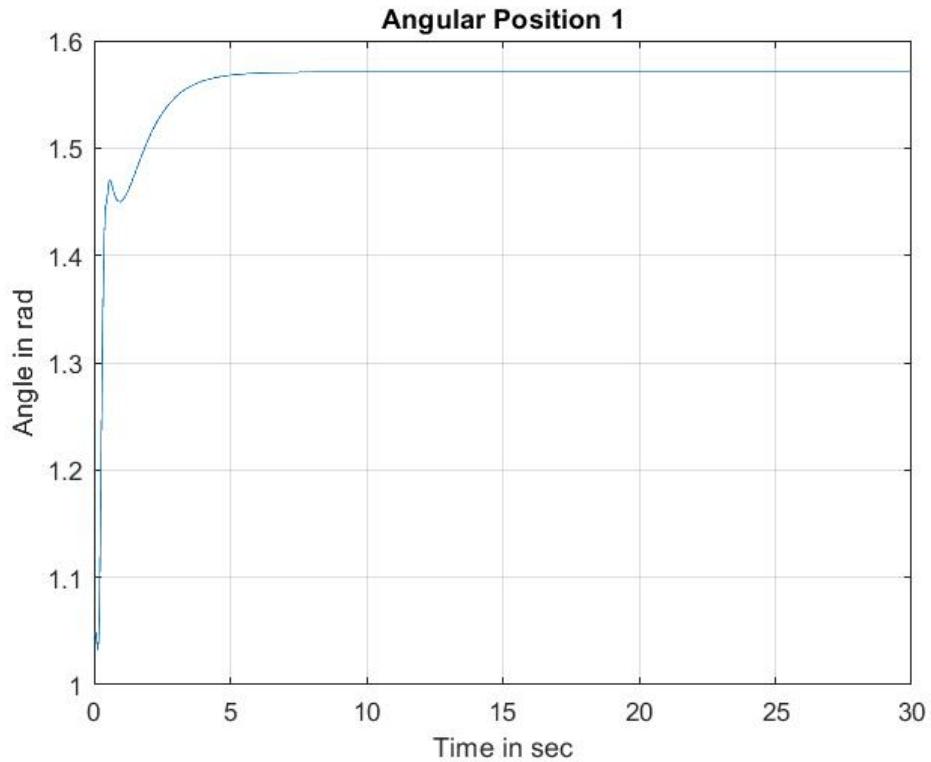
$$\dot{\Delta}\theta = -\Gamma^{-1} \gamma^T s$$

## **Προσομοίωση**

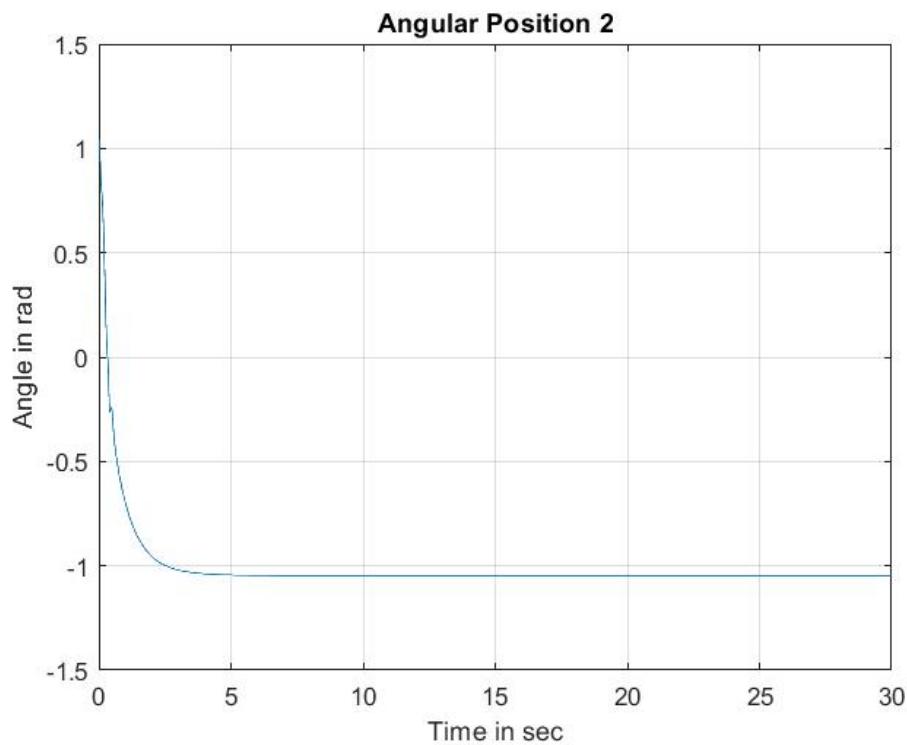
Και σε αυτή την εκδοχή του προσαρμοστικού ελέγχου το σύστημα προσομοιώνεται με τον ίδιο τρόπο μονο που εδώ οι εξισωσεις κατάστασης(στην model2dof) του συστήματος είναι 9 (4 για την συμμετεριφορά του συστήματος και 5 για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων).

**Αποτελέσματα προσομοιώσεων για σταθερή τελική θέση με χρήση προσαρμοστικού ελέγχου(εκτίμηση 5 παραμέτρων) σε αυτή την περίπτωση επιλέχθηκαν  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \Gamma^{-1} = 5 * I_5, K = 2 * I$**

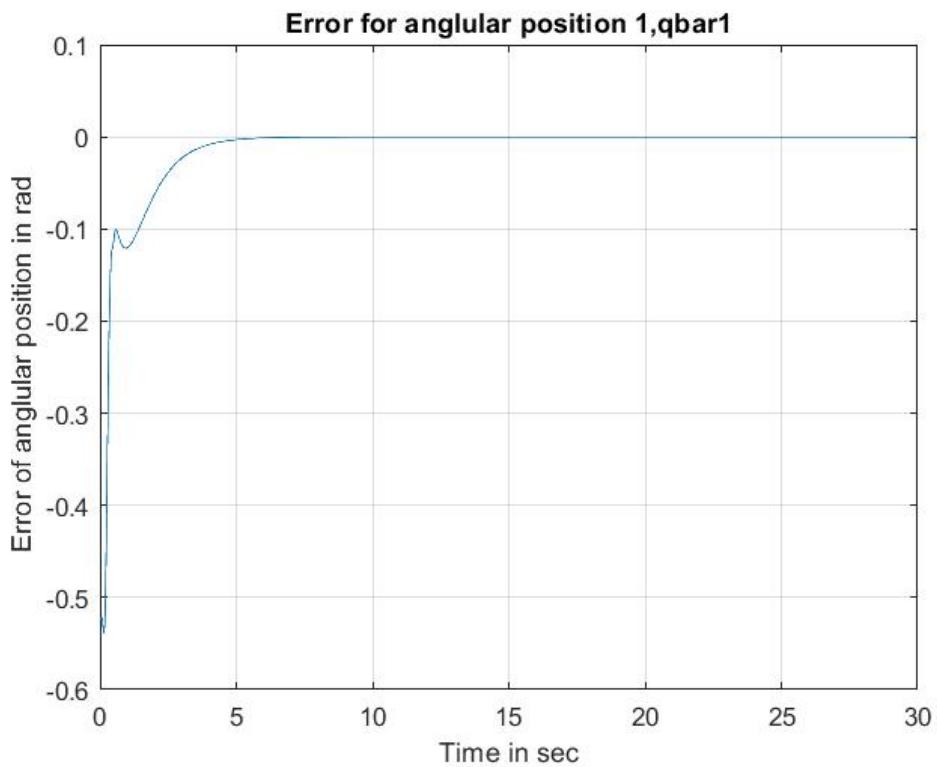
Γωνιακή θέση 1( $\theta_1$ )



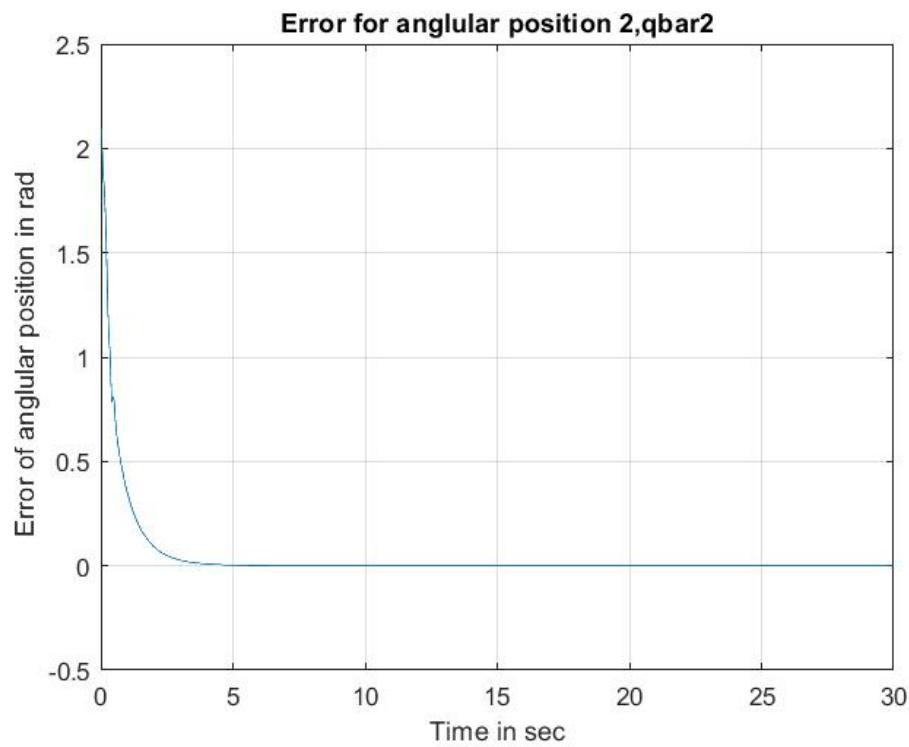
### Γωνιακή Θέση 2 ( $\theta_2$ )



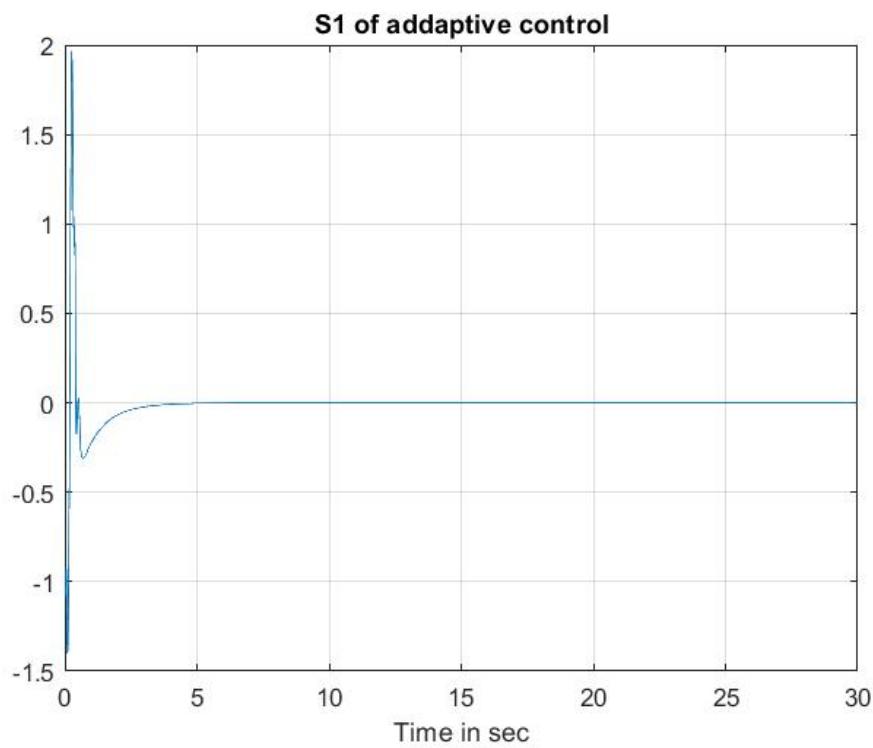
### Σφάλμα γωνιακής θέσης 1 ( $qbar1$ )



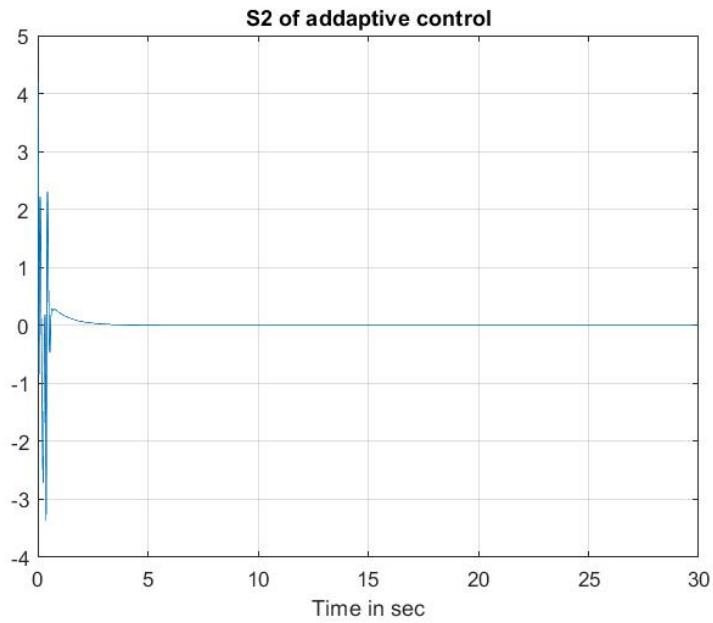
### Σφάλμα γωνιακής θέσης 2(*qbar2*)



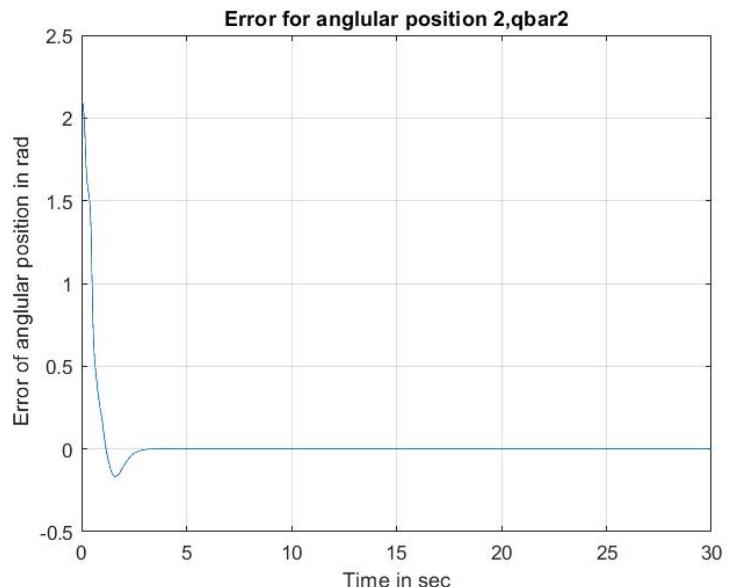
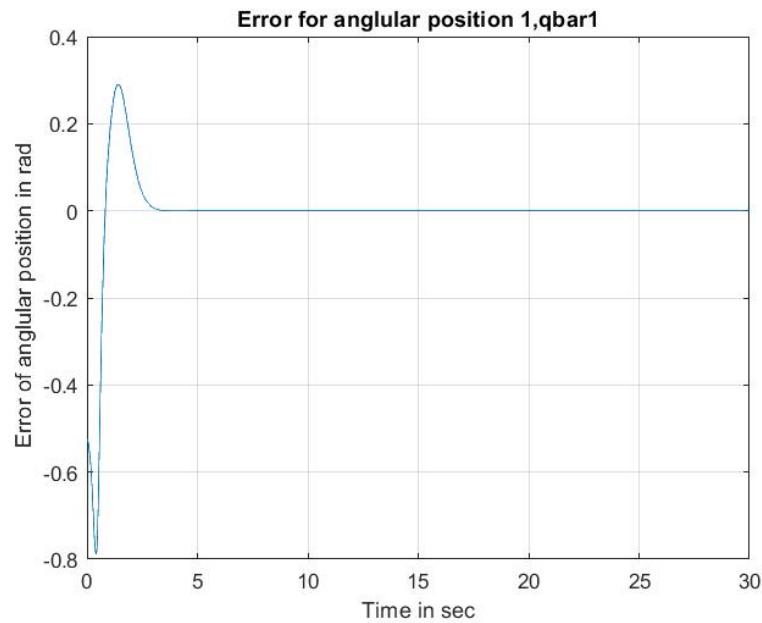
### S1 προσαρμοστικού ελέγχου



## S2 προσαρμοστικού ελέγχου



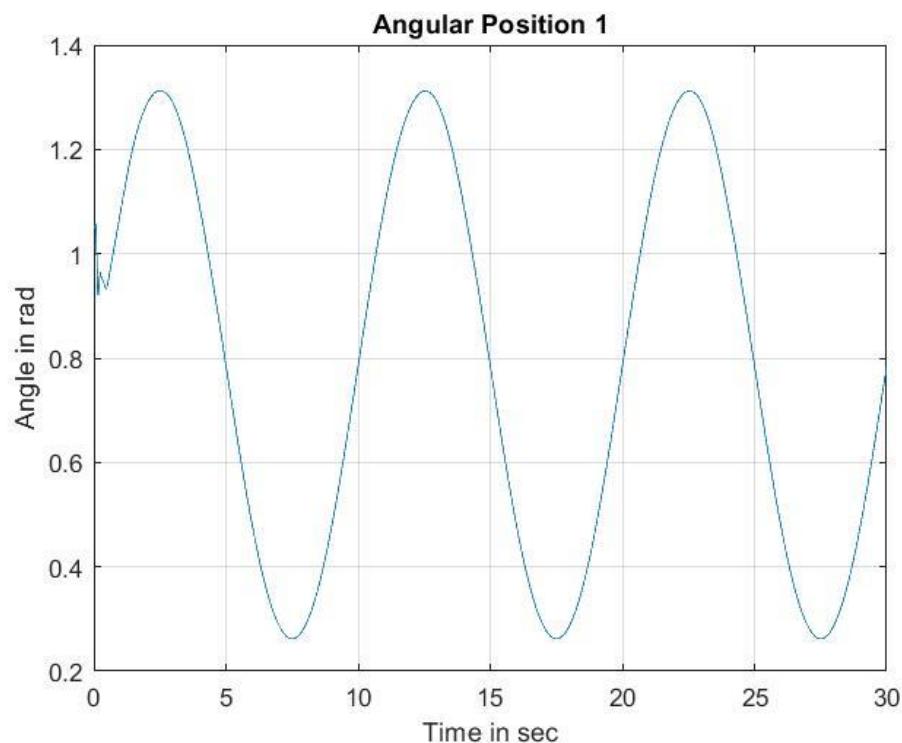
Σφάλματα γωνιακών θέσεων χωρίς την επιλογή κερδών για τον νόμο προσαρμογής ( $\Gamma^{-1}$  μοναδιαίος).



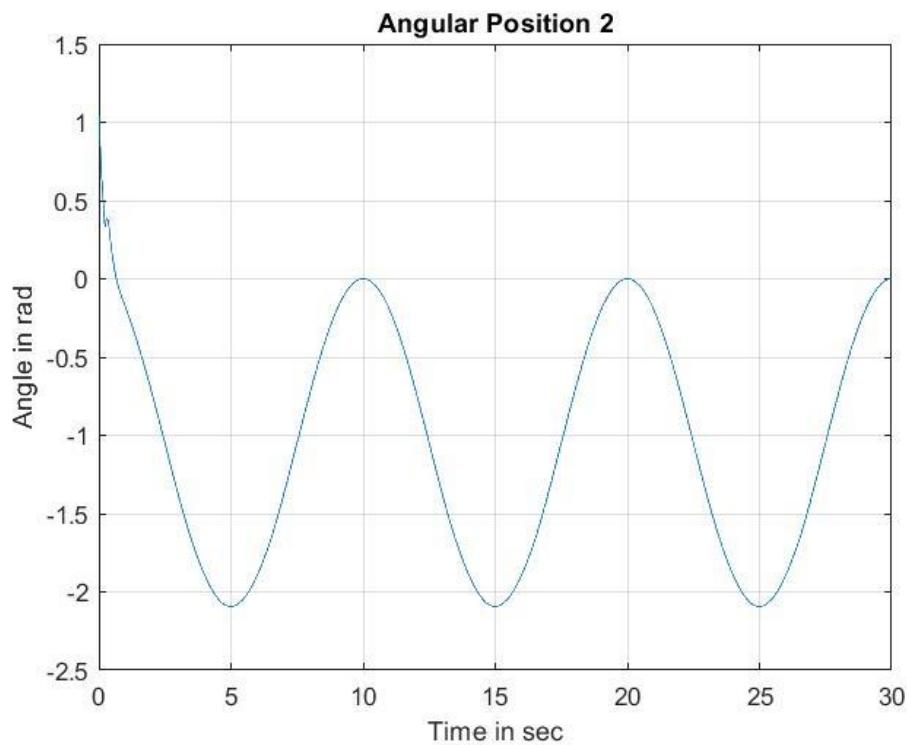
*Αποτελέσματα προσομοιώσεων για ημιτονοειδή τροχιά με χρήση προσαρμοστικού ελέγχου(εκτίμηση 5 παραμέτρων) σε αυτή την περίπτωση επιλέχθηκαν  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \Gamma^{-1} = 10 * I_5, K = 2 * I$*

Εδώ λόγω της χρονικά μεταβαλλόμενης επιθυμητής θέσης επιλέχθηκαν μεγαλύτερα κέρδη για τον νόμο προσαρμογής των παραμέτρων.

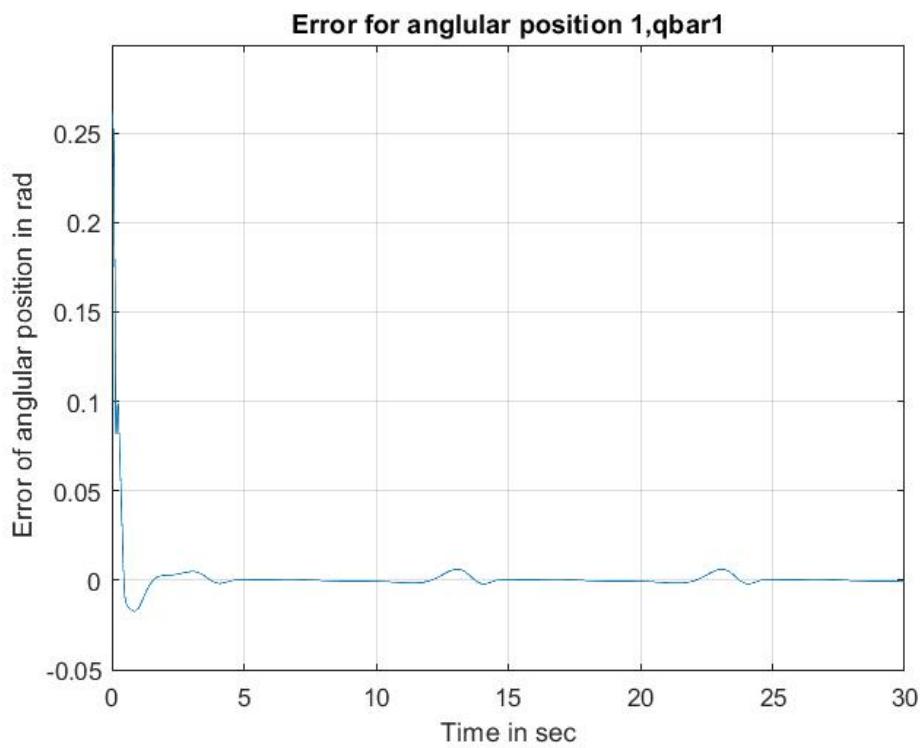
Γωνιακή θέση  $1(\theta_1)$



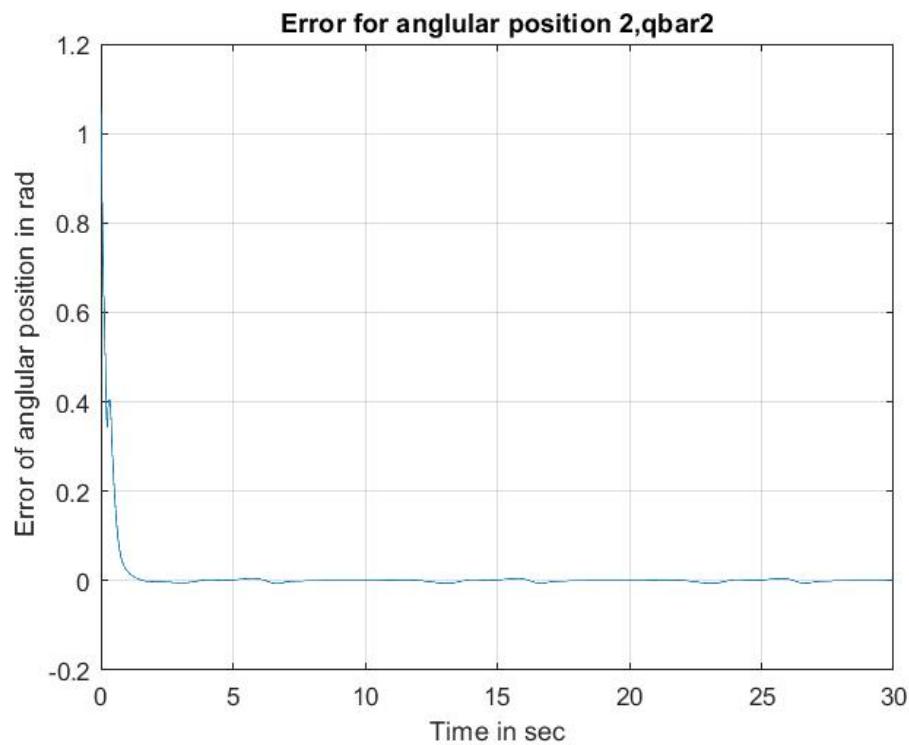
### Γωνιακή Θέση 2 ( $\theta_2$ )



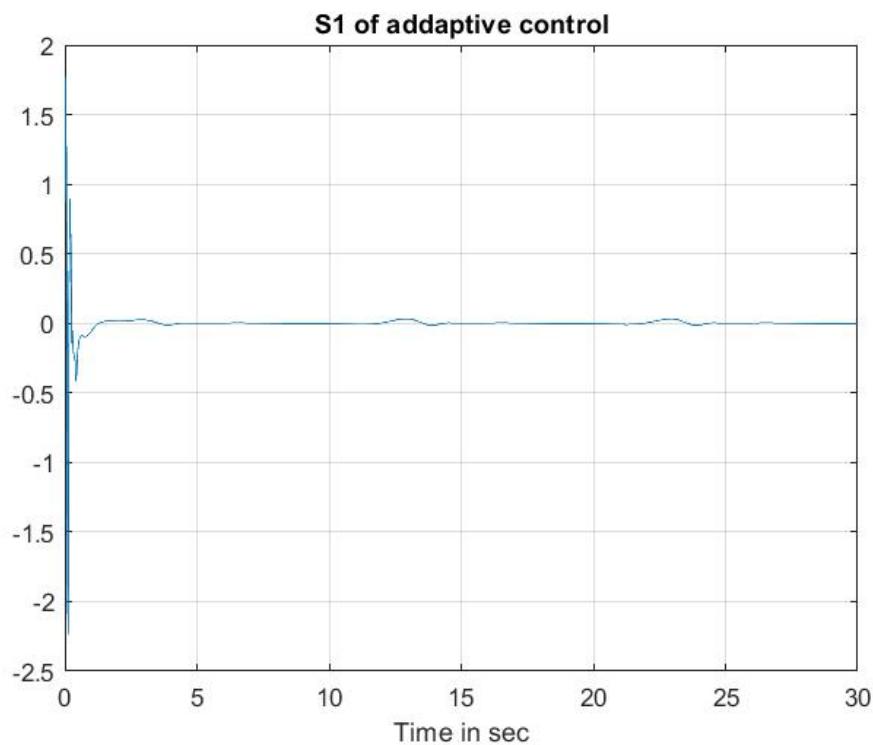
### Σφάλμα γωνιακής θέσης 1 ( $qbar1$ )



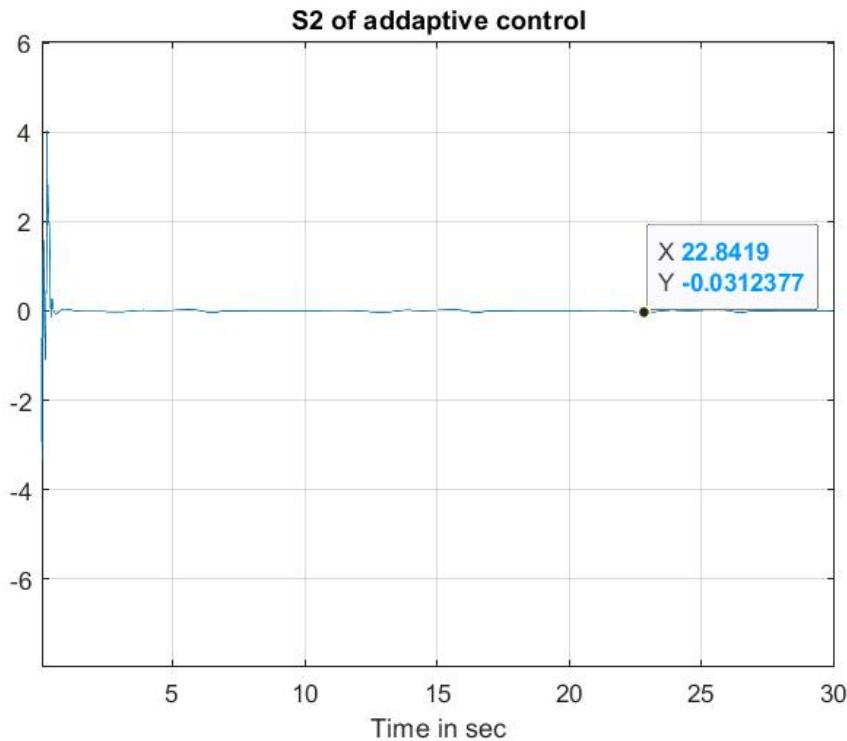
### Σφάλμα γωνιακής θέσης 2(*qbar2*)



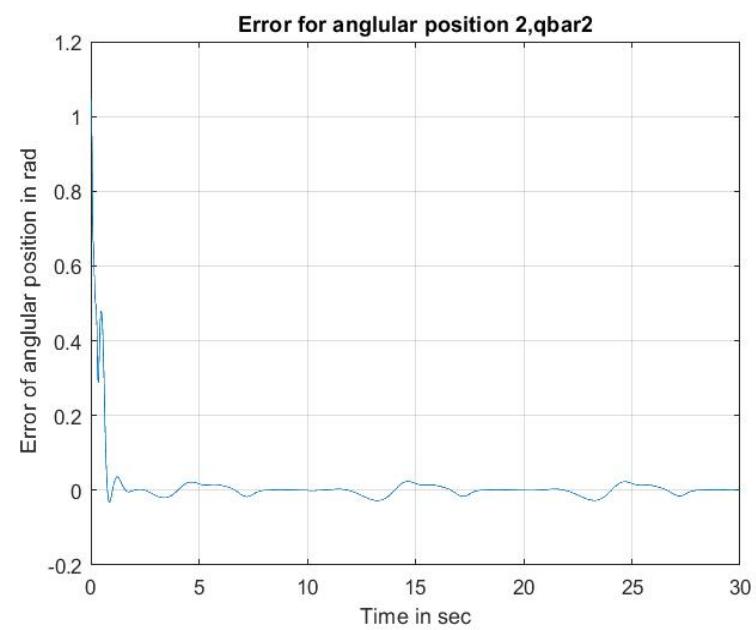
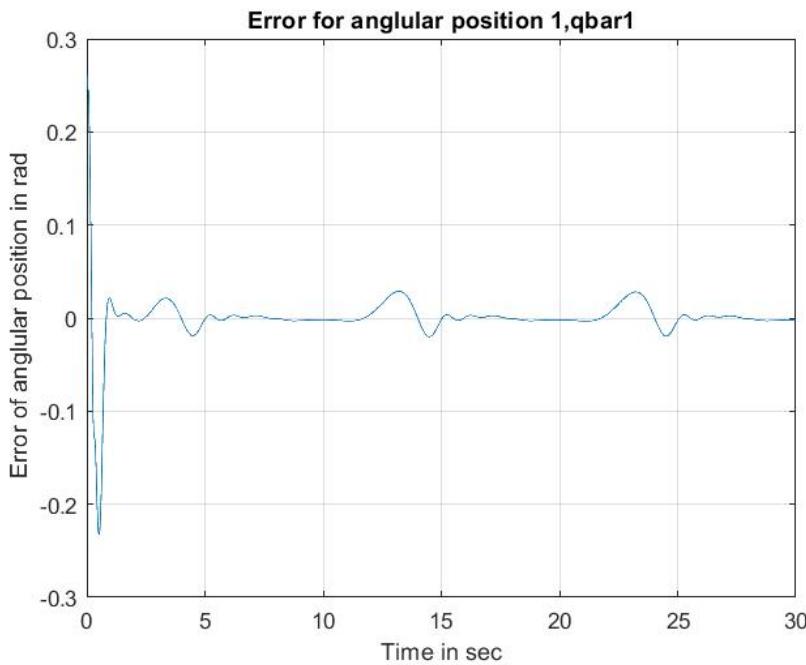
### S1 προσαρμοστικού ελέγχου



## S2 προσαρμοστικού ελέγχου



Σφάλματα γωνιακών θέσεων χωρίς την επιλογή κερδών για τον νόμο προσαρμογής ( $\Gamma^{-1}$  μοναδιαίος).



Συγκρίνωντας τις δύο διαφορετικές υλοποιήσεις προκύπτει οτι στην πρώτη με την εκτιμηση των 12 παραμέτρων (2 απο τις 14 είναι σταθερές) μπορεί να προκύψει καλύτερη συμπεριφορά του συστήματος,οπως και αναμενόταν καθώς στην δευτερή κάθε παράμετρος αφορά το άθροισμα παραμέτρων που στην πρώτη εκτιμούνται ξεχωριστά.Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίον απαιτούνται μεγαλύτερα κέρδη για τον νόμο προσαργμογής.Στην περιπτώση με τον μικρό αριθμό παραμέτρων τα σφάλματα είναι ελαφρώς μεγαλύτερα.Ωστόσο ο μικρός αριθμός παραμέτρων συνεπάγεται και μεγαλύτερη ευκολία στην υλοποίηση του ελεγκτή και του συστήματος.Κάθε ενας απο τους δυο τρόπους προσαρμοστικού ελέγχου που παρουσιαζούνται είναι λειτουργικός,με διαφόρα στα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του καθενός οσον αφορά την δυσκολία της υλοποίησης και την ακρίβεια του ελέγχου.