



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Και Μηχανικών Υπολογιστών

Διπλωματική εργασία με θέμα:

Αυτόματη κίνηση σε αυτοκινητόδρομους με ταυτόχρονη εξασφάλιση ορίων στις ταχύτητες των οχημάτων.

Ασημακίδης Σταμάτιος ΑΕΜ: 9711

Επιβλέπων Καθηγητής: Ροβιθάκης Γεώργιος

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 2023

Πρόλογος

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος που αφορά την αυτόματη κίνηση οχημάτων σε έναν ευθύ αυτοκινητόδρομο παρουσία περιορισμών στις ταχύτητες που δύναται να αναπτύξουν τα οχήματα. Για την επίλυση του προβλήματος βασικές πηγές έμπνευσης αποτέλεσαν η δημοσίευση [1] καθώς και η τεχνική του ελέγχου προδιαγεγραμμένης απόκρισης. Έννοιες δανεισμένες από τον τελευταίο χρησιμοποιούνται στον προτεινόμενο ελεγκτή χωρίς ωστόσο να εφαρμόζεται με την αυστηρή του διατύπωση. Επιπλέον ένα κομμάτι της διπλωματικής αποτελεί η σχεδίαση δομής ελέγχου για παρακολούθηση επιθυμητής τροχιάς με προδιαγεγραμμένο τρόπο που δύναται να χρησιμοποιηθεί με επιπλέον επεκτάσεις για την επίλυση του δεδομένου ή συναφών προβλημάτων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γιώργο Ροβιθάκη για την πρόταση του συγκεκριμένο θέματος προς αντιμετώπιση, καθώς και για την καθοδήγηση που παρείχε σε όλη την προσπάθεια αυτή. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Ανδρέα Κεχαγιά για την συνδρομή του σε αυτή την προσπάθεια με την έμμεση βοήθεια του σε διάφορα ζητήματα σχετικά με την διπλωματική.

Πίνακας Περιεχομένων

0. Συμβολισμοί και θεωρήματα που χρησιμοποιούνται.....	4
1.Το πρόβλημα των αυτόνομων αυτοκινητόδρομων	5
2.Το χρησιμοποιούμενο μοντέλο	7
3.Παρακολούθηση Τροχιάς Με Προδιαγεγραμμένο Τρόπο	11
3.1 Ορισμός του προβλήματος της προδιαγεγραμμένης παρακολούθησης τροχιάς	13
3.2 Ανάλυση ευστάθειας συστήματος κλειστού βρόχου	15
3.3 Επεξήγηση φυσικής σημασίας των intermediate control signals.....	21
3.4 Εξασφάλιση άνω φράγματος για το μέτρο της ταχύτητας για την προδιαγεγραμμένη παρακολούθηση τροχιάς	25
3.5 Περιορισμός αρχικών συνθηκών λόγω των περιορισμών της απόδειξης	27
3.6 Αποτελέσματα προσομοιώσεων για παρακολούθηση τροχιάς με προδιαγεγραμμένο τρόπο	29
4.Αυτόματη ρύθμιση κυκλοφορίας σε αυτοκινητόδρομο	34
4.1 Περιγραφή του προβλήματος	35
4.2 Εξασφάλιση αποφυγή συγκρούσεων-Τεχνητά δυναμικά πεδία	37
4.3 Ικανοποίηση περιορισμών ταχύτητας- προσανατολισμού.....	44
4.4 Ανάλυση Lyapunov	46
5.Αποτελέσματα Προσομοιώσεων	54
5.1.Αποτελέσματα Προσομοιώσεων 2 οχήματα σε κατάσταση κινδύνου πλάγιας σύγκρουσης .	56
5.2.Αποτελέσματα Προσομοιώσεων 2 οχήματα σε κατάσταση κινδύνου σύγκρουσης από πίσω	60
5.3.Αποτελέσματα Προσομοιώσεων 2 οχήματα κινούμενα με χαμηλές αρχικά ταχύτητες – απαίτηση για μεγαλύτερες γωνίες περιστροφής του τιμονιού.....	63
5.4. Αποτελέσματα Προσομοιώσεων 10 οχήματα – Περίπτωση $V^* = 30 \text{ m/s}$	65
5.5. Αποτελέσματα Προσομοιώσεων 10 οχήματα – Περίπτωση $V^* = 20 \text{ m/s}$	68
5.6 Συγκριτικά αποτελέσματα με δημοσίευση βάση για τον ελεγκτή – Περίπτωση 1	70
5.7. Συγκριτικά αποτελέσματα με δημοσίευση βάση για τον ελεγκτή – Περίπτωση 2.....	77
6. Βιβλιογραφικές αναφορές.....	81

0. Συμβολισμοί και θεωρήματα που χρησιμοποιούνται

Στο παρόν κείμενο και στις αποδείξεις αυτού θα χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί :

1. \dot{x} που θα συμβολίζει την χρονική παράγωγο της ποσότητας x
2. $f'(x) = \frac{df}{dx}$ που θα εκφράζει την παράγωγο μια συνάρτησης f ως προς την μεταβλητή x
3. L_∞ για το σύνολο των συναρτήσεων και των ποσοτήτων που είναι φραγμένες, δηλαδή $\exists M > 0$ τέτοιο ώστε $|f| < M$
4. L_2 για το σύνολο των συναρτήσεων που ανήκουν στην L_2 νόρμα δηλαδή ικανοποιούν

$$\int_0^\infty f^2 dt \in L_\infty$$

Επίσης θα χρησιμοποιηθούν τα θεωρήματα :

Θεώρημα 1: (Sonntag 1998)

Το πρόβλημα αρχικών συνθηκών της μορφής

$$\dot{\xi}(t) = h(t, \xi(t)), \quad \xi(0) = \xi^0 \in \Omega_\xi$$

Με $h: R_+ \times \Omega_\xi \rightarrow R^n$ και Ω_ξ μη κενό ανοικτό υποσύνολο του R^n έχει μοναδική λύση στο $(0, t_{max})$ με $t_{max} \in \{R_+^*, \infty\}$ για την οποία ισχύει $\xi \in \Omega_\xi$ αν η h ικανοποιεί:

1. Τοπικά συνεχής Lipschitz κατά ξ .
2. Συνεχής ως προς χρόνο $\forall \xi \in \Omega_\xi$
3. Τοπικά ολοκληρώσιμη ως προς t $\forall \xi \in \Omega_\xi$

Θεώρημα 2: (Sonntag 1998)

Αν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος 1 για μοναδική λύση το $(0, t_{max})$ και $t_{max} < \infty$ τότε

για κάποιο $\Omega'_\xi \subset \Omega_\xi$, $\exists t' \in [0, t_{max})$ τέτοιο ώστε $\xi(t') \notin \Omega_\xi$. Επομένως αν $\forall t \in (0, t_{max})$ $\xi \in \Omega'_\xi$ προκύπτει ότι $t_{max} = \infty$.

1. Το πρόβλημα των αυτόνομων αυτοκινητόδρομων

Το πρόβλημα της αυτόματης κίνησης, σε οποιαδήποτε μορφή του αποτέλεσε ένα θέμα στο οποίο παρατηρήθηκε έντονη ερευνητική προσπάθεια τις περασμένες δεκαετίες. Συχνότερα στην βιβλιογραφία απαντώνται προσπάθειες για την υλοποίηση τεχνικών αυτομάτου ελέγχου που να εξασφαλίζουν την κίνηση τόσο ρομποτικών αμαξιδίων όσο και βραχιόνων προς ένα επιθυμητό στόχο με ταυτόχρονη εξασφάλιση της αποφυγής συγκρούσεων με τόσο κινητά όσο και ακίνητα εμπόδια. Ένα άμεσα συνδεδεμένο με αυτό πρόβλημα είναι το πρόβλημα της αυτόματης οδήγησης οχημάτων στα πλαίσια κίνησης εντός ενός δρόμου που θέτει περιορισμούς ως προς την θέση των οχημάτων σε αυτόν καθώς και στα όρια ταχυτήτων, τα οποία θα πρέπει να τηρούν. Το πρόβλημα αυτό που περιγράφεται θέτει την επιπλέον απαίτηση για χρήση τεχνικών αυτομάτου ελέγχου που εξασφαλίζουν το φραγμένο ορισμένων καταστάσεων, όπως για παράδειγμα στην [8].

Στόχος για την αυτόματη ρύθμιση της κίνησης οχημάτων είναι η εξασφάλιση ενός πλήθους πλεονεκτημάτων που συνδέονται με αυτή και είναι για παράδειγμα, η ασφάλεια εφόσον υπάρχουν εγγυήσεις για την αποφυγή συγκρούσεων των οχημάτων που λειτουργούν συνεργατικά και αυτόματα καθώς και δυνατότητες που αφορούν την αύξηση της χωρητικότητας του δρόμου, δηλαδή τον αριθμό των εξυπηρετούμενων οχημάτων στην μονάδα καθώς και εν τέλη εξοικονόμηση των απαιτήσεων σε ενέργεια για μετακινήσεις. Τα οφέλη της προσπάθειας αυτής, διατυπώνονται εκτενέστερα στις [10],[19].

Σαν μια γενική ματιά οι προτεινόμενες λύσεις για τα προβλήματα της αυτόματης κίνησης σε αυτοκινητόδρομος μπορούν να χωρισθούν σε δύο κατηγορίες :

1. Στα προβλήματα παραγωγής μιας ασφαλούς τροχιάς και στην μετέπειτα παρακολούθηση της ή στην εύρεση του βέλτιστου τρόπου κίνησης παρουσία περιορισμών στις δυνατότητες για ανάπτυξη ταχυτήτων και επιταχύνσεων, καθώς και των περιορισμών που απαιτούνται για εξασφάλιση της, μέσω της ελαχιστοποίησης ενός κριτηρίου που λαμβάνει υπόψιν διάφορες παραμέτρους που αφορούν την κίνηση. Το μειονέκτημα της τελευταίας μεθοδολογίας είναι ο αυξημένος υπολογιστικός φόρτος, καθώς απαιτείται η εφαρμογή ενός αλγορίθμου βελτιστοποίησης. Παραδείγματα τέτοιο λύσεων αποτελούν οι [15] [16] [17][18][20], με την πλειοψηφία τέτοιων λύσεων στην βιβλιογραφία να αντιμετωπίζουν το πρόβλημα σαν ένα πρόβλημα διακριτού χρόνου.
2. Στις τεχνικές που καθορίζουν σε πραγματικό χρόνο το πως θα πρέπει να κινηθεί ένα όχημα, καθορίζοντας το πως θα πρέπει να μεταβάλλει την ταχύτητα και τον προσανατολισμό του. [1] Ενώ στην κατηγορία αυτή της αποφυγής συγκρούσεων είτε με εμπόδια είτε με άλλα κινούμενα οχήματα έχουν προταθεί ποικίλες λύσεις χωρίς ωστόσο να προσεγγίζουν το πρόβλημα υπό την σκοπιά της κίνησης εντός ενός δρόμου που θέτει περιορισμούς.

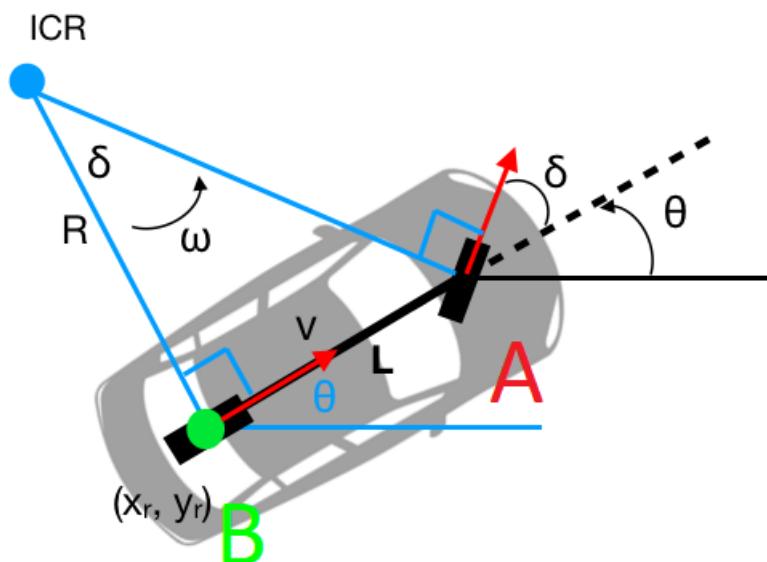
Στην βιβλιογραφία επίσης απαντώνται ποικίλες τεχνικές που οδηγούν ένα σύστημα πολλών κινούμενων οχημάτων στην κίνηση με μια προκαθορισμένη διάταξη, όπως για παράδειγμα στις [21][22][23][24]. Αν και κάτι τέτοιο σαν μια πρώτη όψη θα σήμαινε την βέλτιστη κάλυψη του δρόμου μέσω της επιβολής μια συγκεκριμένης διάταξης των οχημάτων, δεν υπάρχει κάποια γνωστή στον συντάκτη του κειμένου ερευνητική προσπάθεια που να λύνει το παραπάνω πρόβλημα παρουσία των ορίων που τίθενται για την κίνηση εντός ενός αυτοκινητόδρομου.

Στον αυτόματο έλεγχο ένα συνυφασμένο μαθηματικό εργαλείο, και το οποίο χρησιμοποιείται εδώ, με τα προβλήματα της αυτόματης πλοϊγησης και της αποφυγής εμποδίων είναι τα τεχνητά δυναμικά πεδία. Κατά καιρούς έχουν προταθεί διαφορετικές μορφές τεχνητών δυναμικών πεδίων που μπορούν να εξυπηρετήσουν διαφορετικούς σκοπούς [6][7]. Για το πρόβλημα κίνησης σε αυτοκινητόδρομους μια μορφή προτεινόμενων δυναμικών παρουσιάζεται στην [9]. Το ζήτημα στην επιλογή των δυναμικών για προβλήματα αυτόματων αυτοκινητόδρομων είναι όχι μόνο να εξασφαλιστεί η αποφυγή συγκρούσεων των οχημάτων, αλλά και να επιλεχτούν κατάλληλα ώστε να μην θέτουν σημαντικούς περιορισμούς στην κίνηση των οχημάτων επιτρέποντας την αύξηση της χωρητικότητας του δρόμου.

2. Το χρησιμοποιούμενο μοντέλο

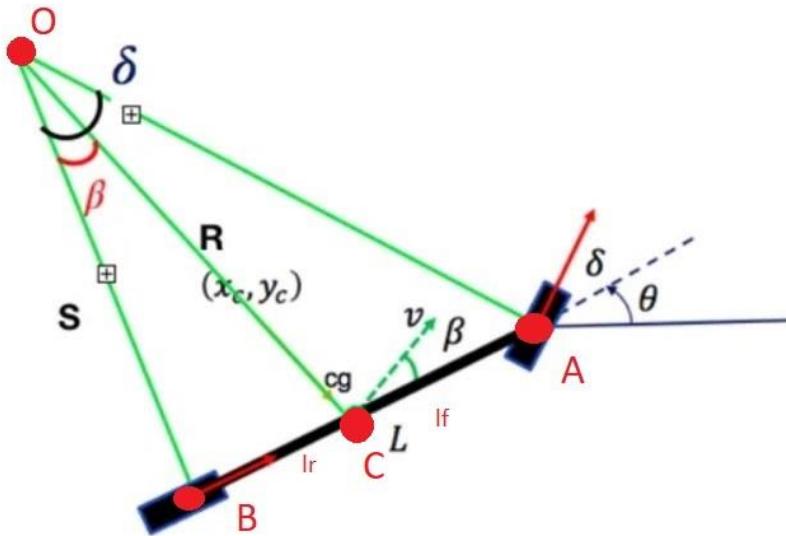
Για την μοντελοποίηση της κινηματικής συμπεριφοράς ενός οχήματος με 4 τροχούς που εκτελεί επίπεδη κίνηση ένα συχνά χρησιμοποιούμενο μοντέλο είναι το bicycle model όπως αναφέρεται στην βιβλιογραφία [3] [4] και το οποίο υιοθετείται στα πλαίσια της εν λόγω εργασίας.

Συγκεκριμένα σε αυτό, οι εμπρόσθιοι από τους 4 τροχούς του οχήματος αναπαρίστανται από έναν τροχό (σημείο A στο σχήμα). Οι πίσω τροχοί ομοίως αντικαθίστανται από έναν κεντρικό πίσω τροχό (σημείο B στο σχήμα). Αν θεωρήσουμε πως μόνο ο μπροστινός έχει δυνατότητα περιστροφής θα χρειαστεί να οριστεί η γωνία περιστροφής του (γωνία που σχηματίζει αυτός με τον διαμήκη άξονα του οχήματος) και αυτή θα ονομάζεται δ . Χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο μοντέλο μπορούν να περιγραφούν οι συντεταγμένες / η κινηματική συμπεριφορά ενός οποιοδήποτε σημείου του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία A και B, αν και συνήθως χρησιμοποιούνται είτε το σημείο του πίσω άξονα (σημείο B), είτε το γεωμετρικό κέντρο του οχήματος. Τα σημεία A και B απέχουν απόσταση που στο εξής αποκαλείται L και μπορούμε να θεωρήσουμε κατά προσέγγιση ότι ταυτίζεται με το μήκος του οχήματος. Το προς επιλογή σημείο θα απέχει απόσταση l_r από τον πίσω τροχό και l_f από τον μπροστά, ενώ είναι προφανές ότι πάντοτε θα ισχύει $L = l_r + l_f$. Εφόσον θεωρήθηκε ότι το όχημα εκτελεί μια επίπεδη κίνηση, αρκούν 3 συνταγμένες για να περιγράψουν την θέση και τον προσανατολισμό του εκφρασμένες ως προς κάποιο αδρανειακό πλαίσιο. Αυτές στο εξής θα αποκαλούνται x για την θέση και θ για τον προσανατολισμό.



Σχήμα 1 Σχηματική αναπαράσταση του κινηματικού μοντέλου

Για να προκύψουν οι εξισώσεις κίνησης για ένα οποιοδήποτε σημείο του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ του μπροστά και του πίσω τροχού θα χρειαστεί να οριστεί επιπλέον η γωνία β , η οποία εκφράζει την στιγμιαία γωνία της ταχύτητας του σημείου με τον διαμήκη άξονα του οχήματος, όπως αναπαρίσταται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2 Αναπαράσταση γωνίας β για κινηματικό μοντέλο

Για την γωνία β λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\tan(\beta) = \frac{l_r \cdot \tan(\delta)}{L} = \frac{l_r \cdot \tan(\delta)}{l_r + l_f} \quad (2.1)$$

Αυτό συμβαίνει καθώς $\widehat{BOA} = \delta$ και $\widehat{BOC} = \beta$ (ο συμβολισμός \widehat{BOA} σημαίνει την γωνία ανάμεσα στα ευθύγραμμα τμήμα BO και OA). Παίρνοντας την εφαπτομένη για τις δύο γωνίες όπως προκύπτει από τα τρίγωνα BOA και BOC και τον λόγο αυτών προκύπτει άμεσα η (2.1). Στο εξής θα θεωρείται ότι η V εκφράζει την ταχύτητα του σημείου B . Η ταχύτητα του C V_c θα πρέπει να ικανοποιεί $V_c \cos(\beta) = V$. Η γωνία που σχηματίζει η στιγμιαία ταχύτητα του V_c με τον άξονα x είναι $\beta + \theta$, συνεπώς $\dot{x} = V_c \cdot \cos(\theta + \beta)$ και $\dot{y} = V_c \cdot \sin(\theta + \beta)$.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις η ανάλυση καταλήγει στα εξής αποτελέσματα για τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{V \cdot \cos(\theta + \beta)}{\cos(\theta)} \\ \dot{y} &= \frac{V \cdot \sin(\theta + \beta)}{\cos(\theta)} \\ \dot{\theta} &= \frac{V \cdot \tan(\delta)}{L} \\ \dot{V} &= F\end{aligned}\quad (2.2)$$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)$$

και αντικαθιστώντας αυτές στις εξισώσεις που προέκυψαν θα προκύψει:

$$\dot{x} = V \cdot \cos(\theta) - \frac{l_r}{l_r + l_f} \cdot V \cdot \sin(\theta) \cdot \tan(\delta)$$

$$\dot{y} = V \cdot \sin(\theta) + \frac{l_r}{l_r + l_f} \cdot V \cdot \cos(\theta) \cdot \tan(\delta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V \cdot \tan(\delta)}{L}$$

$$\dot{V} = F$$

(2.3)

Για απλοποίηση της μορφή των εξισώσεων που έχουν προκύψει πλέον ονομάζεται

$$u = \tan(\delta)$$

Και έτσι καταλήγει να αποτελεί ένα σύστημα με δυο εισόδους ελέγχου u, F .Η τελευταία επιλογή είναι δυνατή καθώς η συνάρτηση $\tan()$ είναι αντιστρέψιμη στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.Έτσι έχοντας σχεδιάσει τους απαραίτητους νόμους ελέγχου για το u είναι άμεσα εφικτή η εύρεση του απαιτούμενου δ , μέσω της $\delta = \text{atan}(u)$,

Οι εξισώσεις οι οποίες προέκυψαν εφόσον γίνεται αναφορά στο σημείο του πίσω άξονα (δηλαδή $l_r = 0$) απλοποιούνται περαιτέρω σε :

$$\dot{x} = V \cdot \cos(\theta)$$

$$\dot{y} = V \cdot \sin(\theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V \cdot u}{L}$$

$$\dot{V} = F$$

(2.4)

Παρατήρηση 1

Το μοντέλο που περιεγράφηκε παραπάνω θέτει την προϋπόθεση ότι οι ταχύτητες και των δυο τροχών έχουν την φορά του άξονα τους. Δηλαδή, ο πίσω τροχός την φορά του διαμήκη άξονα του οχήματος (ευθεία που ορίζεται από τα σημεία A,B) και ο μπροστά τροχός του άξονα που σχηματίζει γωνία δ με τον διαμήκη. Η υπόθεση αυτή συνεπάγεται εν ολίγοις την αγνόηση των κεντρομόλων δυνάμεων που είναι μια εφικτή προσέγγιση σε ένα εύρος ταχυτήτων με μικρό μέτρο.

Παρατήρηση 2

Είναι προφανές ότι δεν λαμβάνεται υπόψιν η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Παρατηρώντας την διαφορική εξίσωση για την ταχύτητα, που είναι ένας απλός ολοκληρωτής φαίνεται η πλήρης αγνόηση της δυναμικής συμπεριφοράς του οχήματος (για παράδειγμα την ύπαρξη της μάζας). Μια ενδεχόμενη βελτίωση στο μοντέλου θα ήταν η εισαγωγή μιας μη γραμμικής συνάρτησης σε αυτή την εξίσωση που να μοντελοποιεί την δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Στην περίπτωση που η μη γραμμική συνάρτηση αυτή θωρεύται γνωστή, όσα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο εν λόγω κείμενο είναι άμεσα εφαρμόσιμα.

Παρατήρηση 3

Το συμπέρασμα ότι για ένα οποιοδήποτε σημείο η ταχύτητα του κατά x, y δίνεται από τις

$$\dot{x} = V \cdot \cos(\theta) - \frac{l_r}{l_r + l_f} \cdot V \cdot \sin(\theta) \cdot \tan(\delta)$$
$$\dot{y} = V \cdot \sin(\theta) + \frac{l_r}{l_r + l_f} \cdot V \cdot \cos(\theta) \cdot \tan(\delta)$$

Μπορεί να προκύψει και θεωρώντας την συνιστάμενη ταχύτητα του σαν αποτέλεσμα της ταχύτητας που δημιουργείται στο σημείο λόγω της μεταφορικής του ταχύτητας (οροι $V \cdot \cos(\theta)$ και $V \cdot \sin(\theta)$) και της ταχύτητας που δημιουργείται λόγω περιστροφής. Ο όρος $V \cdot \frac{\tan(\delta)}{l_r + l_f}$ είναι στην ουσία η ταχύτητα λόγω περιστροφής του σώματος. Είναι γνωστό πως ένα σημείο ενός σώματος που εκτελεί περιστροφή ως προς έναν άξονα γύρω από τον οποίον περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω αποκτάει γραμμική ταχύτητα κάθετη σε αυτόν και στο διάνυσμα θέσης (διάνυσμα που συνδέει τον άξονα με το σημείο) και έχει μέτρο ανάλογο της απόστασης από αυτόν και ανάλογο και της γωνιακής ταχύτητας. Η απόσταση εδώ είναι το l_r ενώ τα $\sin(\theta), \cos(\theta)$ δίνουν την προβολή στους άξονες το αδρανειακό πλαισίου.

Παρατήρηση 4

Στην βιβλιογραφία συχνά παρουσιάζονται κινηματικά bicycle models, όπου ο όρος V εκφράζει την ταχύτητα του σημείου που επιλέγεται πάνω στο όχημα, σε αντίθεση με το παραπάνω όπου αυτή εκφράζει την ταχύτητα του σημείου του πίσω άξονα. Οι διαφοροποιήσεις στις εξισώσεις που εμφανίζονται αυτά δεν είναι σημαντικές (παρατηρείται όπως είναι λογικό μια ομοιότητα στην μορφή των εξισώσεων), ωστόσο στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται αποκλειστικά το παραπάνω. Αυτό γίνεται καθώς κρίνεται και πιο άμεσα συνδέσιμο με μια φυσική υλοποίηση του συστήματος, εφόσον για παράδειγμα για την εφαρμογή μια επιτάχυνσης στον πίσω άξονα είναι άμεση η δυνατότητα αντιστοίχισης στην ροπή που εφαρμόζεται στους πίσω τροχούς από το σύστημα κίνησης. Το συγκεκριμένο αναφέρεται απλά για να επεξηγήσει το σκεπτικό επιλογής της μοντελοποίησης με τον συγκεκριμένο τρόπο για πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις που εμπλέκουν μια κάποια δυναμική για το σύστημα (πχ σύστημα μετάδοσης κίνησης), χωρίς αυτό να γίνεται στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Επίσης για λόγους πληρότητας αναφέρεται πιο στην βιβλιογραφία υπάρχει επέκταση του μοντέλου για οχήματα που έχουν δυνατότητα περιστροφής και των πίσω τροχών (4-wheel steering) η οποία δεν χρησιμοποιείται εδώ καθώς το πρόβλημα που επιλύεται εδώ είναι κίνηση σε αυτοκινητόδρομους από αυτοκίνητα, η πλειοψηφία των οποίων είναι γνωστό ότι δεν παρέχει την συγκεκριμένη δυνατότητα.

3.Παρακολούθηση Τροχιάς Με Προδιαγεγραμμένο Τρόπο

Σαν μια πρώτη προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος της κίνησης εντός ενός αυτοκινητόδρομου, όπως αυτό ορίζεται στο κεφάλαιο 4 του συγκεκριμένου κειμένου αυτού, υλοποιήθηκε η παρακολούθηση μιας επιθυμητής τροχιάς με χρήση ελέγχου προδιαγεγραμμένης απόκρισης, ο οποίος παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το 2008 από τους C.Bechlioulis και G.Rovithakis στην δημοσίευση Robust Adaptive Control of Feedback Linearizable MIMO Nonlinear Systems With Prescribed Performance[5]. Ωστόσο η προσπάθεια αυτή εν τέλη δεν χρησιμοποιήθηκε για την προτεινόμενη λύση του προβλήματος, χωρίς ωστόσο να αποκλείεται η χρήση του σε μελλοντικές τροποποιήσεις σε συνδυασμό με κάποιον αλγόριθμο ασφαλούς πλοϊγησης που να ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος.

Με την χρήση του ελέγχου προδιαγεγραμμένης απόκρισης εξασφαλίζεται τόσο η μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος όσο και η συμπεριφορά μόνιμης κατάστασης για το σφάλμα της εξόδου. Τα τελευταία σημαίνουν ότι το σφάλμα παρακολούθησης μπορεί να οδηγηθεί σε ένα προκαθορισμένο εύρος τιμών (στην μόνιμη κατάσταση να μην ξεπερνάει κατά απόλυτη τιμή δηλαδή μια μέγιστη αποδεκτή τιμή), αλλά και ταυτόχρονα να εξασφαλιστεί ένα ελάχιστος ρυθμός σύγκλισης σε αυτό το προεπιλεγμένο εύρος τιμών, ενώ επίσης μπορεί να εξασφαλιστεί η αποφυγή υπερυψώσεων μεγαλύτερων από μια προκαθορισμένη τιμή. Ο έλεγχος προδιαγεγραμμένης απόκρισης που στο εξής θα αναφέρεται και με την συντομογραφία PPC (prescribed performance control) έχει εφαρμοστεί για τον έλεγχο ποικίλων μη γραμμικών συστημάτων που εμπεριέχουν ακόμη και αβέβαιες μη γραμμικότητες, ενώ στην βιβλιογραφία εντοπίζονται ποικίλες τροποποιήσεις του, όπως για παράδειγμα για την εφαρμογή του σε σύστημα παρουσία κορεσμού, όπως και σε συστήματα με εμφάνιση ασυνεχειών. Ενδεικτικά αναφέρονται οι δημοσιεύσεις [11][12][13][14].

Για την εξασφάλιση των παραπάνω χαρακτηριστικών ο ρρc βασίζεται στην χρήση των βοηθητικών συναρτήσεων που στα πλαίσια αυτού ονομάζονται συναρτήσεις επίδοσης (performance functions). Αυτές θα συμβολίζονται ως $\rho(t)$ και χρειάζεται να έχουν τις εξής ιδιότητες για να ενσωματώσουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά για την χρονική απόκριση :

1. Πρόκειται για ομαλές συναρτήσεις, αυστηρά θετικές και για να οδηγήσουν το σφάλμα σε μικρότερες τιμές φθίνουσες
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_\infty > 0$, όπου ρ_∞ εκφράζει ουσιαστικά το μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα μόνιμης κατάστασης

Μια συχνά χρησιμοποιούμενη μορφή συναρτήσεων επίδοσης είναι $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty) \cdot e^{-lt} + \rho_\infty$ και όλες οι απαιτήσεις που περιγράφηκαν παραπάνω συνοψίζονται στις εξής απαιτήσεις:

$$-\text{M}\rho(t) < e(t) < \rho(t), \text{ οταν } e(0) \geq 0 \quad (3.1)$$

$$-\rho(t) < e(t) < \text{M}\rho(t), \text{ οταν } e(0) < 0 \quad (3.2)$$

όπου $M, \rho_0, \rho_\infty, l$ προς επιλογή παράμετροι η σημασία των οποίων εξηγείται στην συνέχεια.

Για την αρχική τιμή ρ_0 της συνάρτησης επίδοσης που αποτελεί μια προς επιλογή παράμετρο για τον καθορισμό της συμπεριφοράς του συστήματος τίθεται ο περιορισμός $|e(0)| < \rho(0)$. Επιπλέον παράμετρο προς επιλογή αποτελεί η μη αρνητική σταθερά M η οποία μπορεί να επιβάλλει το μέγιστο ποσό υπερυψώσεων και στην περίπτωση όπου $e(0) \neq 0$ αυτή μπορεί να επιλεχτεί ίση με

το 0 εξασφαλίζοντας έτσι την πλήρη απουσία υπερυψώσεων στο σφάλμα παρακολούθησης. Ο ελάχιστος ρυθμός σύγκλισης στο προκαθορισμένο σύνολο επιτρεπτών τιμών στην μόνιμη κατάσταση εξασφαλίζεται μέσω του ρυθμού μείωσης της συνάρτησης επίδοσης, αν χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση που αναφέρθηκε παραπάνω, μέσω της κατάλληλης επιλογής της σταθεράς l .

Έχοντας πλέον αναφέρει τα παραπάνω, στην συνέχεια η ανάλυση θα επικεντρωθεί στην περίπτωση όπου $M = 1$, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι τα αποτελέσματα για την προδιαγεγραμμένη παρακολούθηση τροχιάς δεν είναι άμεσα επεκτάσιμα για $M \neq 1$ με τις ανάλογες τροποποιήσεις όπως αυτές παρουσιάζονται τόσο στην αρχική παρουσίαση του ppc , όσο και σε μετέπειτα προσπάθειες χρήσης αυτού στην βιβλιογραφία.

Πλέον η συνθήκη της προδιαγεγραμμένης απόκρισης συνοψίζεται στην

$$-\rho(t) < e(t) < \rho(t) \quad (3.3)$$

ανεξάρτητα από το πρόσημο της αρχικής τιμής του σφάλματος παρακολούθησης. Η τελευταία αν οριστεί η ποσότητα $\xi = \frac{e(t)}{\rho(t)}$ είναι ισοδύναμη με την απαίτηση $-1 < \xi < 1$. Η ποσότητας ξ θα ονομάζεται περιορισμένο σφάλμα. Για την εξασφάλιση των απαιτήσεων που περιγράφονται στην μεθοδολογία του ppc χρησιμοποιείται ένας μετασχηματισμός που μετασχηματίζει το περιορισμένο σφάλμα σε μια ποσότητα που εκφράζει το μη περιορισμένο σφάλμα που στο εξής θα αποκαλείται ε .

Ο μετασχηματισμός $\varepsilon = T(\xi)$ αυτός θα πρέπει να έχει τις εξής ιδιότητες :

1. $T : (-1,1) \rightarrow R$ και να είναι μια ομαλή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση
2. $\lim_{\xi \rightarrow 1} T(\xi) = +\infty$ και $\lim_{\xi \rightarrow -1} T(\xi) = -\infty$

Δυο παραδείγματα συναρτήσεων που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες είναι

$$T(\xi) = \ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) \quad (3.4)$$

$$T(\xi) = \tan\left(\frac{2 \cdot \xi}{\pi}\right) \quad (3.5)$$

με τον πρώτο να χρησιμοποιείται στην πλειοψηφία των εφαρμογών του ppc . Έχοντας πλέον ορίσει το απεριόριστο σφάλμα ε η συνθήκη (3.3) είναι ισοδύναμη με την ικανοποίηση της απαίτησης το $\varepsilon \in L_\infty$, δηλαδή να παραμένει μια φρασμένη ποσότητα.

Παρατήρηση 1

Προφανώς ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος και έτσι $\xi = T^{-1}(\varepsilon)$. Για την συνάρτηση (3.4) $T^{-1}(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon + 1}$, $\varepsilon \in R$.

3.1 Ορισμός του προβλήματος της προδιαγεγραμμένης παρακολούθησης τροχιάς

Χρησιμοποιώντας το bicycle model για το επιλεγμένο σημείο αναφοράς πάνω στο όχημα να είναι το κέντρο του πίσω άξονα, δηλαδή το μοντέλο είναι:

$$\dot{x} = V \cdot \cos (\theta)$$

$$\dot{y} = V \cdot \sin (\theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V \cdot u}{L}$$

$$\dot{V} = F$$

ζητείται να σχεδιαστεί ελεγκτής που να εξασφαλίζει για επιθυμητή τροχιά αναφοράς

$(xd(t), yd(t)) = (xd, yd)$, (xd, yd για απλούστευση του συμβολισμού και με την απαίτηση (\dot{x}_d, \dot{y}_d) συνεχή και φραγμένα), ότι έχοντας επιλέξει τις συναρτήσεις επίδοσης $\rho_x(t), \rho_y(t)$ με βάση τις απαιτήσεις και τις υποθέσεις που περιεγράφηκαν παραπάνω ότι αν οριστούν τα σφάλματα παρακολούθησης σαν:

$$e_x(t) = x(t) - xd(t) \in R \text{ και } e_y(t) = y(t) - yd(t) \in R \quad (3.6)$$

Θα εξασφαλίζεται ότι :

$$|e_x(t)| < \rho_x(t) \text{ και } |e_y(t)| < \rho_y(t) \forall t > 0 \quad (3.7)$$

Για τον σκοπό αυτό ορίζονται αρχικά τα :

$$\xi_x = \frac{e_x}{\rho_x} \text{ και } \xi_y = \frac{e_y}{\rho_y} \quad (3.8)$$

Καθώς και τα :

$$\varepsilon_x = T(\xi_x) = \ln \left(\frac{1 + \xi_x}{1 - \xi_x} \right) \text{ και } \varepsilon_y = T(\xi_y) = \ln \left(\frac{1 + \xi_y}{1 - \xi_y} \right) \quad (3.9)$$

$\alpha_x = -k_x \cdot \varepsilon_x$ και $\alpha_y = -k_y \cdot \varepsilon_y$ με $k_x, k_y > 0$ ελεύθερες σχεδιαστικές παραμέτρους

Με βάση αυτά τώρα θα οριστούν τα intermediate control signals[2],η λογική των οποίων θα εξηγηθεί στην συνέχεια μετά το στάδιο της ανάλυσης ευστάθειας του συστήματος κλειστού βρόχου,

$$vd = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (3.10)$$

$$\theta d = \begin{cases} \text{atan2}(a_y, a_x) + 2k\pi & \text{αν } a_x^2 + a_y^2 \geq \varepsilon_{\theta d} \\ (\text{atan2}(a_y, a_x) + 2k\pi) \cdot f(a_x^2 + a_y^2) & \text{αν } a_x^2 + a_y^2 < \varepsilon_{\theta d} \end{cases} \quad (3.11)$$

Με $\varepsilon_{\theta d}$ ελεύθερη θετική σχεδιαστική παράμετρο η σημασία της οποίας θα εξηγηθεί στην συνέχεια.

Για να εξηγηθούν τα παραπάνω θα χρειαστεί να οριστούν οι συναρτήσεις $\text{atan2}, f$ καθώς και η μεταβλητή που $k \in Z$ που χρησιμοποιείται. Αρχικά κατά τα γνωστά

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0, y \geq 0 \\ \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

ενώ η συνάρτηση f ορίζεται σαν

$$f(a_x^2 + a_y^2) = \frac{2}{1 + e^{\frac{\gamma(a_x^2 + a_y^2)}{(a_x^2 + a_y^2)^2 - \varepsilon_{\theta d}^2}}} - 1 \quad (3.13)$$

Όπου $\gamma > 0$ ελεύθερο θετικό κέρδος, που αποτελεί σχεδιαστική παράμετρο και $\varepsilon_{\theta d} > 0$ όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Στην πράξη η f είναι μια τροποποιημένη σιγμοειδής συνάρτηση που εξαλείφει την ασυνέχεια της atan2 στην γειτονία του 0, όπως θα παρουσιαστεί αναλυτικά σε επόμενα διαγράμματα.

Η μεταβλητή k είναι στην πράξη ένας μετρητής που χρησιμοποιείται εδώ για την εξαλείψη την ασυνέχεια της atan2 κατά την μετάβαση από $-\pi$ σε $+\pi$, όπως και το αντίστροφο και να καταστήσει έτσι το σήμα θ_d συνεχή συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους. Ο μετρητής αυτός χρησιμοποιήθηκε, καθώς στην πράξη αν ο προσανατολισμός του οχήματος ορίζεται στο R και όχι το $(-\pi, +\pi)$ ή $(0, 2\pi)$ δεν υπάρχουν αυτές οι ασυνέχειες.

Συγκεκριμένα η μεταβολή του k ορίζεται σαν :

$$k = \begin{cases} k + 1 & \text{οταν } a_x < 0, a_y = 0, \dot{a}_y < 0 \\ k - 1 & \text{οταν } a_x < 0, a_y = 0, \dot{a}_y > 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Έχοντας πλέον ορίσει τα intermediate control signals θα χρειαστεί να οριστούν τα

$$\xi_\theta = \frac{\theta - \theta_d}{\rho_\theta} \text{ και } \xi_V = \frac{V - v_d}{\rho_V} \quad (3.15)$$

Καθώς και τα :

$$\varepsilon_\theta = T(\xi_\theta) = \ln\left(\frac{1 + \xi_\theta}{1 - \xi_\theta}\right) \text{ και } \varepsilon_V = T(\xi_V) = \ln\left(\frac{1 + \xi_V}{1 - \xi_V}\right) \quad (3.16)$$

Με τις ρ_θ, ρ_V κατάλληλα επιλεγμένες συναρτήσεις επίδοσης.

3.2 Ανάλυση ευστάθειας συστήματος κλειστού βρόχου

Θα επιλεχτούν τα παρακάτω σήματα για τις εισόδους

$$u = -k_\theta \varepsilon_\theta \quad (3.17)$$

$$F = -k_v \varepsilon_v \quad (3.18)$$

με $k_\theta, k_v > 0$ ελεύθερα προς επιλογή κέρδη.

Αρχικά οι παράγωγοι των $\dot{\xi}_x, \dot{\xi}_y, \dot{\xi}_\theta, \dot{\xi}_v$, οι οποίοι γράφονται ακριβώς στην συνέχεια ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 1 στο $(-1,1)$ για ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης στο $(0, t_{max})$. Στόχος είναι να αποδειχτεί πλέον $t_{max} = +\infty$. Για αρχή για την απόδειξη του ότι το ε_x παραμένει φραγμένο θα θεωρηθεί η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V_x = \frac{1}{2} \varepsilon_x^2 \quad (3.19)$$

Παραγωγίζωντας το ε_x με βάση την (3.9) λαμβάνεται ότι:

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\dot{\xi}_x}{(1 - \xi_x)(1 + \xi_x)} = \frac{\dot{x} - \dot{x}_d - \dot{\rho}_x \xi_x}{\rho_x (1 - \xi_x)(1 + \xi_x)} \quad (3.20)$$

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{V \cos(\theta) - \dot{\rho}_x \xi_x}{\rho_x (1 - \xi_x)(1 + \xi_x)} = \frac{(\rho_V \xi_V + v_d) \cos(\rho_\theta \xi_\theta + \theta_d) - \dot{x}_d - \dot{\rho}_x \xi_x}{\rho_x (1 - \xi_x)(1 + \xi_x)} \quad (3.21)$$

Άρα με αντικατάσταση της (3.21) προκύπτει η παράγωγος της Lyapunov

$$\dot{V}_x = \varepsilon_x \dot{\varepsilon}_x = \varepsilon_x \frac{(\rho_V \xi_V + v_d) \cos(\rho_\theta \xi_\theta + \theta_d) - \dot{x}_d - \dot{\rho}_x \xi_x}{\rho_x (1 - \xi_x)(1 + \xi_x)} \quad (3.22)$$

Η τελευταία είναι καλώς ορισμένη για $\xi_x \in (-1,1)$. Η πορεία της ανάλυσης Lyapunov που θα ακολουθήσει θα αφορά μόνο την περίπτωση όπου $a_x^2 + a_y^2 \geq \varepsilon_{\theta d}$ (δηλαδή θα αντικατασταθούν τα σήματα μόνο εφόσον βρισκόμαστε σε αυτούς τους κλάδους για το v_d, θ_d). Η περίπτωση $a_x^2 + a_y^2 < \varepsilon_{\theta d}$ δεν χρειάζεται να εξεταστεί περαιτέρω καθώς

$$a_x^2 < a_x^2 + a_y^2 < \varepsilon_{\theta d} \text{ και } a_y^2 < a_x^2 + a_y^2 < \varepsilon_{\theta d}, \varepsilon_{\theta d} \in L_\infty \quad (3.23)$$

Συνεπώς όσο το σύστημα βρίσκεται σε αυτή την περιοχή $\alpha_x, \alpha_y \in L_\infty \Rightarrow \varepsilon_x, \varepsilon_y \in L_\infty$

Επομένως με βάση τις (3.22), (3.10), (3.11) προκύπτει:

$$\dot{V}_x = \varepsilon_x \frac{(\rho_V \xi_V + \sqrt{a_x^2 + a_y^2}) \cos(\rho_\theta \xi_\theta + \text{atan2}(a_y, a_x) + 2k\pi) - \dot{x}_d - \dot{\rho}_x \xi_x}{\rho_x (1 - \xi_x)(1 + \xi_x)} \quad (3.24)$$

Για την πορεία της απόδειξης θα χρειαστούν οι τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \quad (3.25)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y) \quad (3.26)$$

$$\cos(\text{atan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \sin(\text{atan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (3.27)$$

Με βάση αυτές η (3.24) γίνεται

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \varepsilon_x \frac{(\rho_V \xi_V + v_d)(\cos(\rho_\theta \xi_\theta) \cos(\text{atan2}(a_y, a_x) + 2k\pi) - \sin(\rho_\theta \xi_\theta) \sin(\text{atan2}(a_y, a_x) + 2k\pi))}{\rho_x(1-\xi_x)(1+\xi_x)} \\ &\quad - \frac{\dot{x}_d - \dot{\rho}_x \xi_x}{\rho_x(1-\xi_x)(1+\xi_x)} \\ \dot{V}_x &= \varepsilon_x \frac{(\rho_V \xi_V + \sqrt{a_x^2 + a_y^2})(\cos(\rho_\theta \xi_\theta) \cos(\text{atan2}(a_y, a_x)) - \sin(\rho_\theta \xi_\theta) \sin(\text{atan2}(a_y, a_x)))}{\rho_x(1-\xi_x)(1+\xi_x)} \\ &\quad - \frac{\dot{x}_d - \dot{\rho}_x \xi_x}{\rho_x(1-\xi_x)(1+\xi_x)} \\ \dot{V}_x &= \frac{\varepsilon_x}{\rho_x(1-\xi_x)(1+\xi_x)} \left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2} (\cos(\rho_\theta \xi_\theta) \cos(\text{atan2}(a_y, a_x))) + \alpha(w) \right) \quad (3.27) \end{aligned}$$

Όπου $\alpha(w) = -\rho_V \xi_V \cos(\rho_\theta \xi_\theta) \cos(\theta_d) - (\rho_V \xi_V + v_d) \sin(\rho_\theta \xi_\theta) \sin(\text{atan2}(a_y, a_x)) - \dot{\rho}_x \xi_x - \dot{x}_d$

Όσο ισχύει $\xi_x, \xi_y, \xi_\theta, \xi_V \in (-1, 1)$ και εφόσον υποτέθηκε $\dot{\rho}_x, \dot{x}_d \in L_\infty$ προκύπτει ότι

$$-\rho_V \xi_V \cos(\rho_\theta \xi_\theta) \cos(\theta_d) - (\rho_V \xi_V + v_d) \sin(\rho_\theta \xi_\theta) \sin(\text{atan2}(a_y, a_x)) - \dot{x}_d - \dot{\rho}_x \xi_x \in L_\infty \quad (3.28)$$

Δηλαδή

$$\exists M > 0 \text{ τέτοιο } \omega \text{ (τ.ω.)} \quad (3.29)$$

$$\left| -\rho_V \xi_V \cos(\rho_\theta \xi_\theta) \cos(\theta_d) - (\rho_V \xi_V + v_d) \sin(\rho_\theta \xi_\theta) \sin(\text{atan2}(a_y, a_x)) - \dot{x}_d - \dot{\rho}_x \xi_x \right| < M$$

Άρα προκύπτει ότι

$$\dot{V}_x \leq \frac{1}{\rho_x(1-\xi_x)(1+\xi_x)} \left(\varepsilon_x \sqrt{a_x^2 + a_y^2} (\cos(\rho_\theta \xi_\theta) \cos(\text{atan2}(a_y, a_x))) + M |\varepsilon_x| \right) \quad (3.30)$$

Για την συνέχεια της απόδειξης θα δειχθεί ότι

$$\cos(\text{atan2}(a_y, a_x)) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \quad (3.31)$$

Θα χρειαστεί επομένως να εξεταστούν οι περιπτώσεις και οι ταυτότητες (3.25)-(3.27):

$\alpha_x > 0$

$$\cos(\text{atan2}(a_y, a_x)) = \cos\left(\text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a_y^2}{a_x^2}}} = \frac{|a_x|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

$\alpha_x < 0, \alpha_y \geq 0$

$$\cos(\text{atan}2(a_y, a_x)) = \cos\left(\text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + \pi\right) = -\cos\left(\text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)\right) = -\frac{|a_x|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

$\alpha_x < 0, \alpha_y < 0$

$$\cos(\text{atan}2(a_y, a_x)) = \cos\left(\text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) - \pi\right) = -\cos\left(\text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)\right) = -\frac{|a_x|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

$\alpha_x = 0, \alpha_y > 0$

$$\cos(\text{atan}2(a_y, a_x)) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

$\alpha_x = 0, \alpha_y < 0$

$$\cos(\text{atan}2(a_y, a_x)) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

Αρα η (3.31) ισχύει και αντικαθιστώντας την στην (3.30) θα προκύψει

$$\dot{V}_x \leq \frac{1}{\rho_x(1-\xi_x)(1+\xi_x)} \left(\varepsilon_x \cos(\rho_\theta \xi_\theta) \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} + M |\varepsilon_x| \right)$$

$$\dot{V}_x \leq \frac{1}{\rho_x(1-\xi_x)(1+\xi_x)} (\varepsilon_x \cos(\rho_\theta \xi_\theta) a_x + M |\varepsilon_x|) \quad (3.32)$$

$$\text{Όμως} \quad a_x = -k_x \varepsilon_x \Rightarrow \dot{V}_x \leq \frac{1}{\rho_x(1-\xi_x)(1+\xi_x)} (-k_x \cos(\rho_\theta \xi_\theta) \varepsilon_x^2 + M |\varepsilon_x|) \quad (3.33)$$

Αν τεθεί ο επιπλέον περιορισμός $\rho_\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \rho_\theta \xi_\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ οσο $\xi_\theta \in (-1, 1)$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\cos(\rho_\theta \xi_\theta) > 0 \Rightarrow \exists \lambda > 0 \ \tau. \omega. \cos(\rho_\theta \xi_\theta) \geq \lambda$, με το λ οσοδήποτε μικρό η (3.33) γίνεται

$$\dot{V}_x \leq \frac{1}{\rho_x(1-\xi_x)(1+\xi_x)} (-k_x \lambda \varepsilon_x^2 + M |\varepsilon_x|), k_x > 0, \lambda > 0 \quad (3.34)$$

από την οποία προκύπτει ότι το ε_x είναι ομοιόμορφα τελικώς φραγμένο στο σύνολο

$$\varepsilon_x \leq \max\left\{\varepsilon_x(0), \frac{M}{k_x \lambda}\right\} \text{ και αρα } \varepsilon_x \in L_\infty \quad (3.35)$$

Για να αποδειχθεί τώρα και ότι $\varepsilon_y \in L_\infty$ με την ίδια λογική θα τεθεί υποψήφια συνάρτηση

$$V_y = \frac{1}{2} \varepsilon_y^2 \quad (3.36)$$

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{V \sin(\theta) - \dot{\rho}_y \xi_y}{\rho_y(1 - \xi_y)(1 + \xi_y)} = \frac{(\rho_V \xi_V + v_d) \sin(\rho_\theta \xi_\theta + \theta_d) - \dot{y}_d - \dot{\rho}_y \xi_y}{\rho_y(1 - \xi_y)(1 + \xi_y)} \quad (3.37)$$

$$\dot{V}_y = \varepsilon_y \frac{(\rho_V \xi_V + v_d) (\cos(\rho_\theta \xi_\theta) \sin(\theta_d) + \sin(\rho_\theta \xi_\theta) \cos(\theta_d)) - \dot{y}_d - \dot{\rho}_y \xi_y}{\rho_y(1 - \xi_y)(1 + \xi_y)}$$

$$\dot{V}_y = \frac{\varepsilon_y (v_d \cos(\rho_\theta \xi_\theta) \sin(\theta_d) + \beta(w))}{\rho_y(1 - \xi_y)(1 + \xi_y)} \quad (3.38)$$

$$\text{Όπου } \beta(w) = (\rho_V \xi_V + v_d) \sin(\rho_\theta \xi_\theta) \cos(\theta_d) + \rho_V \xi_V \sin(\rho_\theta \xi_\theta) \cos(\theta_d) - \dot{y}_d - \dot{\rho}_y \xi_y$$

Όσο ισχύει $\xi_x, \xi_y, \xi_\theta, \xi_V \in (-1, 1)$ και εφόσον υποτέθηκε $y_d, \dot{\rho}_y \in L_\infty$ προκύπτει ότι $\beta(w) \in L_\infty$

Δηλαδή

$$\exists P > 0, |\beta(w)| < P \quad (3.39)$$

Και προκύπτει ότι

$$\dot{V}_y \leq \frac{1}{\rho_y(1 - \xi_y)(1 + \xi_y)} \left(\varepsilon_y \cos(\rho_\theta \xi_\theta) \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \sin(\text{atan2}(a_y, a_x)) + P |\varepsilon_y| \right) \quad (3.40)$$

Θα αποδειχθεί τώρα ότι

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sin(\text{atan2}(a_y, a_x)) = a_y \quad (3.41)$$

Θα χρειαστεί ομοίως να εξεταστούν οι περιπτώσεις και οι ταυτότητες (3.25)-(3.27):

$a_x > 0$

$$\sin(\text{atan2}(a_y, a_x)) = \sin\left(\text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)\right) = \frac{\frac{a_y}{a_x}}{\sqrt{1 + \frac{a_y^2}{a_x^2}}} = \frac{\frac{a_y}{a_x} |a_x|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{a_y \cdot \text{sgn}(a_x)}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

Όπου $\text{sgn}(a_x) = 1$ με $\text{sgn}()$ να είναι η συνάρτηση προσήμου.

$\alpha_x < 0, \alpha_y \geq 0$

$$\sin(\text{atan2}(a_y, a_x)) = \sin\left(\text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + \pi\right) = -\sin\left(\text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)\right) = -\frac{a_y \cdot \text{sgn}(a_x)}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

$\alpha_x < 0, \alpha_y < 0$

$$\sin(\text{atan2}(a_y, a_x)) = \sin\left(\text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) - \pi\right) = -\sin\left(\text{atan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)\right) = -\frac{a_y \cdot \text{sgn}(a_x)}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

$\alpha_x = 0, \alpha_y > 0$

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sin(\text{atan2}(a_y, a_x)) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = |a_y| = a_y$$

$\alpha_x = 0, \alpha_y < 0$

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sin(\text{atan2}(a_y, a_x)) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = -|a_y| = a_y$$

Αρά τελικά ισχύει η (3.41) σε κάθε περίπτωση και αντικαθιστώντας την στην (3.40)

$$\dot{V}_y \leq \frac{1}{\rho_y(1-\xi_y)(1+\xi_y)} (\varepsilon_y \cos(\rho_\theta \xi_\theta) a_y + P |\varepsilon_y|) \quad (3.42)$$

Έχοντας ήδη κάνει την υπόθεση για το ρ_θ ισχύει ότι $\cos(\rho_\theta \xi_\theta) > 0 \Rightarrow \exists \lambda > 0 \ \tau.w.\cos(\rho_\theta \xi_\theta) \geq \lambda$

$$\dot{V}_y \leq \frac{1}{\rho_y(1-\xi_y)(1+\xi_y)} (-k_y \lambda \varepsilon_y^2 + P |\varepsilon_y|) \ k_y > 0, \lambda > 0 \quad (3.43)$$

Από την οποία συμπεραίνεται ότι και το ε_y είναι ομοιόμορφα τελικώς φραγμένο στο σύνολο

$$\varepsilon_y \leq \max\left\{\varepsilon_y(0), \frac{P}{k_y \lambda}\right\} \text{ και άρα } \varepsilon_y \in L_\infty \quad (3.44)$$

Πλέον για να ολοκληρωθεί η απόδειξη θα πρέπει να αποδειχτεί ότι και τα $\varepsilon_\theta, \varepsilon_v$ είναι και αυτά φραγμένα. Για την απόδειξη αυτή είναι απαραίτητο να ισχύει $\dot{\theta}_d, v_d \in L_\infty$, που εξασφαλίζεται λόγω της μορφής των θ_d, v_d που επιλέχτηκαν.

Έτσι για το ε_θ

$$V_\theta = \frac{1}{2} \varepsilon_\theta^2 \quad (3.45)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\frac{V \cdot -k_\theta \varepsilon_\theta}{L} - \dot{\theta}_d - \dot{\rho}_\theta \xi_\theta}{\rho_\theta(1-\xi_\theta)(1+\xi_\theta)}$$

$$\dot{V}_\theta = \frac{\varepsilon_\theta (\frac{V \cdot -k_\theta \varepsilon_\theta}{L} - \dot{\theta}_d - \dot{\rho}_\theta \xi_\theta)}{\rho_\theta(1-\xi_\theta)(1+\xi_\theta)} \quad (3.46)$$

Εφόσον $\dot{\theta}_d, \dot{\rho}_\theta \xi_\theta \in L_\infty$ και όσο $\xi_\theta \in (-1,1)$

$$\begin{aligned} & |-\dot{\theta}_d - \dot{\rho}_\theta \xi_\theta| \leq H \\ & \dot{V}_\theta <= \frac{1}{\rho_\theta(1-\xi_\theta)(1+\xi_\theta)} \left(-\frac{V \cdot k_\theta \varepsilon_\theta^2}{L} H \cdot |\varepsilon_\theta| \right) \end{aligned}$$

Εφόσον το V εκφράζει το μέτρο της ταχύτητας θα ισχύει $V > 0$ καθ όλη την διάρκεια της παρακολούθησης της τροχιάς (αφού τροχιά σημαίνει κίνηση). Επομένως $\exists V_m \tau. \omega. V > V_m \Rightarrow$

$$\dot{V}_\theta <= \frac{1}{\rho_\theta(1-\xi_\theta)(1+\xi_\theta)} \left(-\frac{V_m \cdot k_\theta \varepsilon_\theta^2}{L} + H \cdot |\varepsilon_\theta| \right) \quad (3.47)$$

Που αρκεί για να δείξει το ε_θ ομοιόμορφα τελικώς φραγμένο στο σύνολο

$$\varepsilon_\theta \leq \max \left\{ \varepsilon_\theta(0), \frac{H \cdot L}{V_m \cdot k_\theta} \right\} \text{ και άρα } \varepsilon_\theta \in L_\infty \quad (3.48)$$

Τέλος για το ε_v

$$\begin{aligned} V_v &= \frac{1}{2} \varepsilon_v^2 \quad (3.49) \\ \dot{\varepsilon}_v &= \frac{-k_v \cdot \varepsilon_v - \dot{v}_d - \dot{\rho}_v \xi_v}{\rho_v(1-\xi_v)(1+\xi_v)} \\ \dot{V}_v &= \frac{\varepsilon_v(-k_v \cdot \varepsilon_v - \dot{v}_d - \dot{\rho}_v \xi_v)}{\rho_\theta(1-\xi_\theta)(1+\xi_\theta)} \quad (3.50) \end{aligned}$$

Και εδώ θα ισχύει εφόσον $\dot{V}_d, \dot{\rho}_v \in L_\infty$ και όσο $\xi_v \in (-1,1)$ ότι:

$$\begin{aligned} & |-\dot{v}_d - \dot{\rho}_v \xi_v| \leq S \\ & \dot{V}_v <= \frac{1}{\rho_v(1-\xi_v)(1+\xi_v)} \left(-k_v \cdot \varepsilon_v^2 + S \cdot |\varepsilon_v| \right) \quad (3.51) \\ & \varepsilon_v \leq \max \left\{ \varepsilon_v(0), \frac{S}{k_v} \right\}, \varepsilon_v \in L_\infty \quad (3.52) \end{aligned}$$

Έχοντας πλέον αποδείξει το φραγμένο των $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_\theta, \varepsilon_v$ για $t \in (0, t_{max})$. άρα τα $\xi_x, \xi_y, \xi_\theta, \xi_v \in (-1,1)$ για $t \in (0, t_{max})$ με βάση το θεώρημα 2 $t_{max} = +\infty$ συνεπώς έχει εξασφαλιστεί η προδιαγεγραμμένη απόκριση του συστήματος.

Παρατήρηση 1

Ο περιορισμός που τέθηκε λόγω των μαθηματικών κατά την διαδικασία της ανάλυσης συνάδει απόλυτα και με την φυσική του προβλήματος. Θα ήταν παράλογο άλλωστε να τίθεται σαν στόχος στο σύστημα η παρακολούθηση μιας τροχιάς και να του αφήνεται περιθώριο κίνησης προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αυτή είναι και η φυσική ερμηνεία του περιορισμού για $-\frac{\pi}{2} < \rho_\theta < \frac{\pi}{2}$, δηλαδή να μην επιτρέπεται κίνηση κατά αντίθετη (αντίθετη με την έννοια ότι ο τρέχον προσανατολισμός σχηματίζει αμβλεία γωνία με το θd) φορά από το θd .

Παρατήρηση 2

Η ανάλυση θα μπορούσε να εφαρμοστεί και σε συστήματα που λαμβάνουν υπόψιν και ένα μέρος της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος, για παράδειγμα σε συστήματα που η

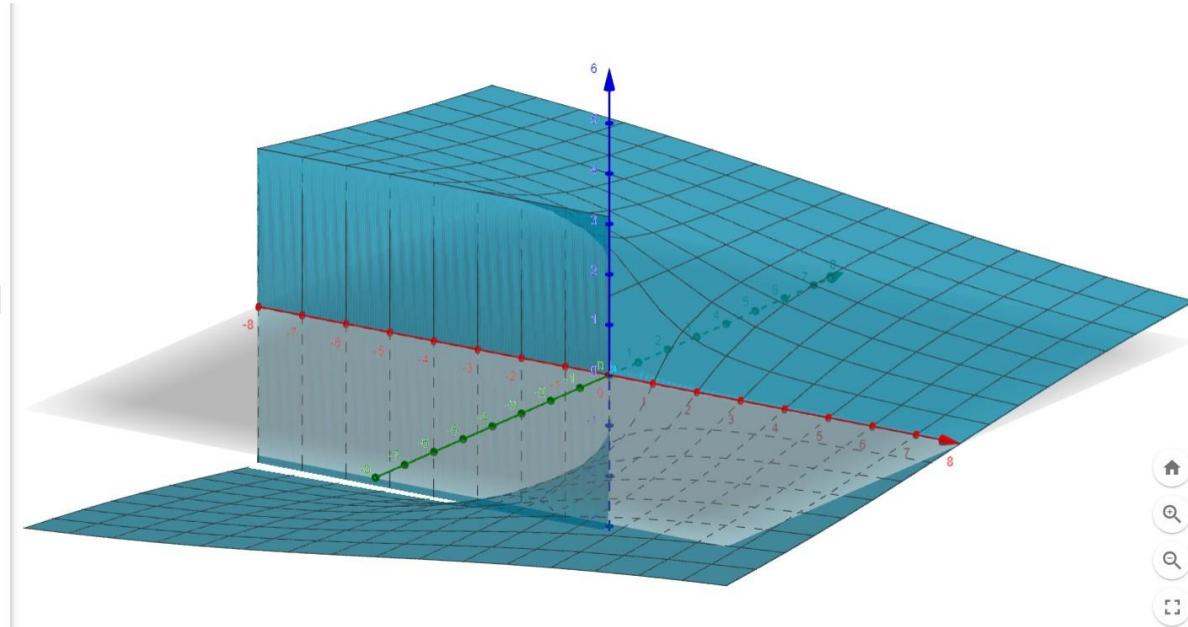
τελευταία εξίσωση κατάστασης είναι της μορφής $\dot{V} = g(F, states)$, όπου g μια αβέβαιη μη γραμμική συνάρτηση με προϋπόθεση $\frac{\partial g}{\partial F} > 0$, που είναι και αναμενόμενο σε φυσικά συστήματα, καθώς η g θα έχει την έννοια μιας μη γραμμικά εξαρτώμενης από την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος αδράνειας.

3.3 Επεξήγηση φυσικής σημασίας των intermediate control signals

Στην παραπάνω δομή ελέγχου τα σήματα a_x, a_y αποτελούν στην ουσία την επιθυμητή κάθε χρονική στιγμή ταχύτητα στους άξονες x και y αντίστοιχα. Έτσι το $vd = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ το μέτρο της τρέχουσας ταχύτητας για την επίτευξη του στόχου κίνησης, ενώ το

$$\theta d = \begin{cases} \text{atan2}(a_y, a_x) + 2k\pi & \text{αν } a_x^2 + a_y^2 \geq \varepsilon_{\theta d} \\ (\text{atan2}(a_y, a_x) + 2k\pi) \cdot f(a_x^2 + a_y^2) & \text{αν } a_x^2 + a_y^2 < \varepsilon_{\theta d} \end{cases}$$

επιλέχτηκε με βάση το γεγονός ότι η $\text{atan2}(a_y, a_x)$ εκφράζει τον τρέχοντα επιθυμητό προσανατολισμό. Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζεται η τελευταία



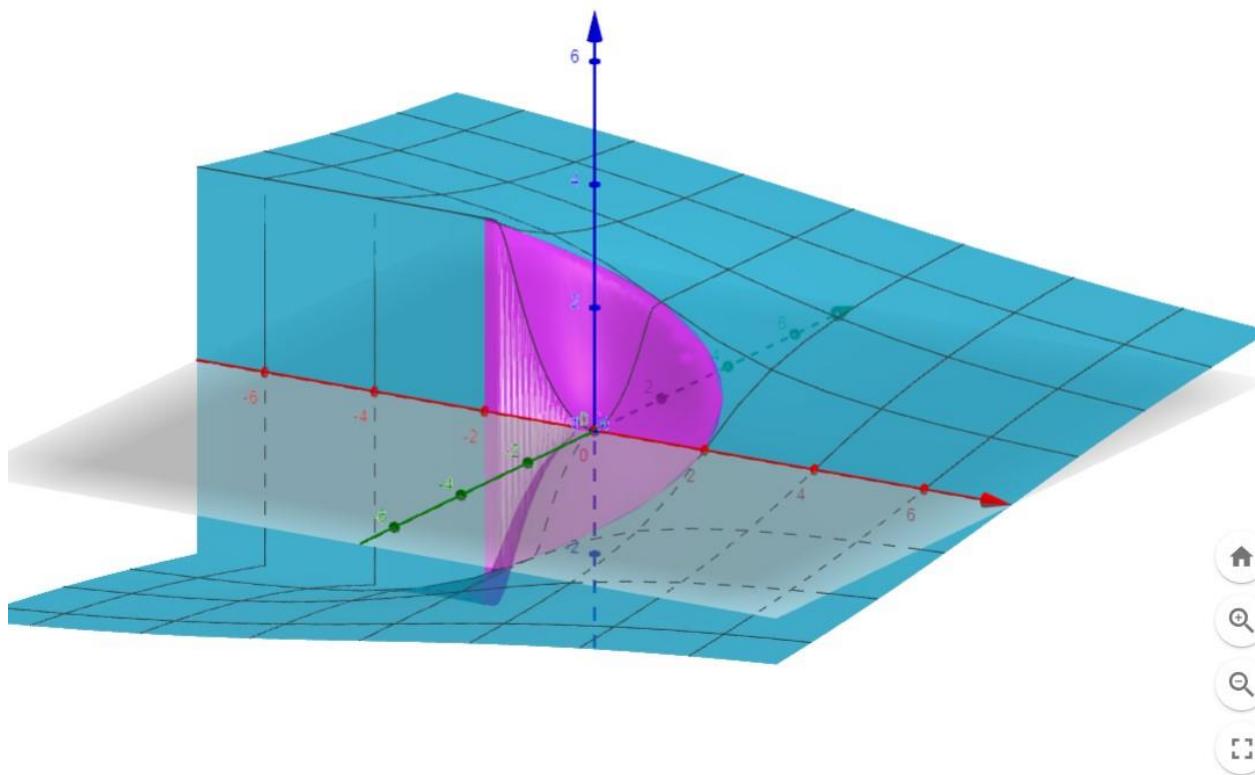
Σχήμα 3 Γραφική παράσταση atan2

Από το γράφημα συμπεραίνεται ότι αν δεν τροποποιούνταν μέσω της σιγμοειδούς συνάρτησης και του μετρητή k το σήμα θ_d δεν θα ικανοποιούσε τον περιορισμό για φραγμένη και (τμηματικά) συνεχή παράγωγο αλλά θα ήταν και αυτό ασυνεχές. Οι ασυνέχειες που παρουσιάζει η atan2 οφείλονται σε δύο παράγοντες:

1. Ασυνέχεια κατά την μετάβαση από την περιοχή $(a_x < 0, a_y < 0)$ στην περιοχή $(a_x < 0, a_y > 0)$ και αντίστροφα. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως στην πράξη δεν υφίσταται αυτή η ασυνέχεια αν δεν περιοριστεί ο προσανατολισμός σε διάστημα $(-\pi, \pi)$. Η ασυνέχεια αυτή εξαλείφεται και για την μαθηματική αναπαράσταση του συστήματος με την εισαγωγή του μετρητή k με την λογική που περιγράφηκε στην (3.14).

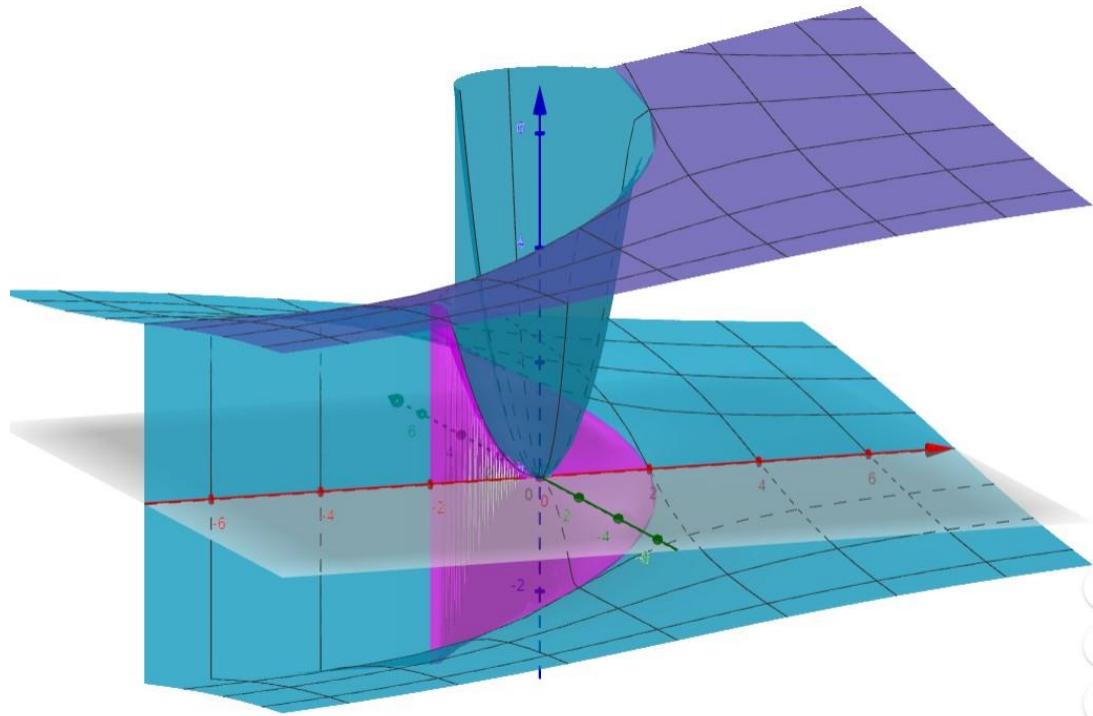
2. Ασυνέχεια κατά την μετάβαση από $a_x = 0, a_y < 0$ σε $a_x = 0, a_y > 0$. Για την εξάλειψη την συγκεκριμένης ασυνέχειας καθώς και της απροσδιοριστίας της atan2 στο $(0,0)$ χρησιμοποιείται η τροποποιημένη σιγμοειδής συνάρτηση.

Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται η προτεινόμενη επιλογή για το σήμα θ_d , χωρίς την χρήση του μετρητή για να φανεί το πως εξαλείφεται η ασυνέχεια γειτονιά του 0 όσο η τιμή του k δεν αλλάζει.

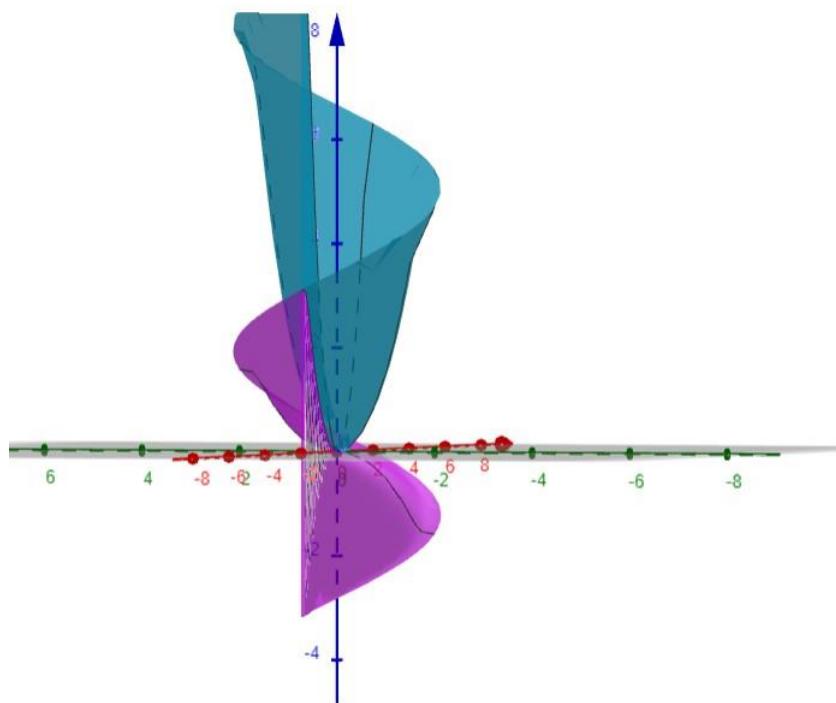


Σχήμα 4 Atan2 με σιγμοειδή συνάρτηση

Ενώ στην συνέχεια παρατίθενται και τα γραφήματα παρουσία του μετρητή που στην ουσία μετατοπίζουν την τελευταία κατά μια ποσότητα 2π . Η συνέχεια στην αναπαράσταση του προσανατολισμού στο R έχει την έννοια της μνήμης των πόσων πλήρη περιστροφών έχουν ήδη πραγματοποιηθεί και το οποίο αξιοποιείται και στην συγκεκριμένη περίπτωση.



Σχήμα 5 Γράφημα $\text{atan}2$ με χρήση μετρητή και σειγμοειδούς



Σχήμα 6 Γράφημα $\text{atan}2$ με χρήση μετρητή και σιγμοειδούς για την γειτονιά του 0

Παρατήρηση 1

Η χρήση της σιγμοειδούς αντιστοιχίζεται άμεσα και σε μια φυσική οδηγική συμπεριφορά. Δηλαδή στην πράξη ένας οδηγός (άνθρωπος) που έχει θέσει έναν κινούμενο στόχο (στόχο να παρακολουθήσει μια τροχιά) καθώς προσεγγίζει τον στόχο δεν θα κάνει απότομες περιστροφές εφόσον βρίσκεται ικανοποιητικά κοντά στον επιθυμητό στόχο. Δηλαδή καθώς προσεγγίζει την επιθυμητή θέση κατά τη για παράδειγμα(αν θεωρήσουμε ότι το σφάλμα κατά x είναι μηδενικό) θα μειώσει σταδιακά την γωνία περιστροφής του τιμονιού. Μια πλήρης αντιστοιχία παρατηρείται και στο προτεινόμενο σήμα θ_d όπου χωρίς την χρήση της σιγμοειδούς f αν $a_x = 0, a_y > 0$ θα επιβαλλόταν στο σύστημα μια πλήρης θετική περιστροφή ($\theta_d = \frac{\pi}{2}$) που σημαίνει κάθετη κίνηση κατά τα θετικά γενάρην αν $a_x = 0, a_y > 0$ θα επιβαλλόταν στο σύστημα μια πλήρης αρνητική περιστροφή ($\theta_d = -\frac{\pi}{2}$) που σημαίνει κάθετη κίνηση κατά τα αρνητικά γενάρην. Καθώς όμως αλλάζει το πρόσημο του a_y παρατηρούνταν μια διαρκής ταλάντωση μεταξύ των τιμών $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. Έχοντας κάνει αυτό τον παραλληλισμό με την πράξη την έννοια της ποσοτικοποίηση του ικανοποιητικά κοντά στον επιθυμητό στόχο κίνησης έχει η σχεδιαστική παράμετρος $\varepsilon_{\theta d}$.

Παρατήρηση 2

Το θετικό κέρδος $\gamma > 0$ που αποτελεί και αυτό ελεύθερη σχεδιαστική παράμετρο τροποποιεί την μορφή της σιγμοειδούς συνάρτησης, χωρίς να επιδρά στην συνέχεια του τελικά παραγόμενου σήματος. Η κατάλληλη ρύθμιση του μπορεί να δώσει μια συμπεριφορά που εξασφαλίζει μικρότερες εν δυνάμει μεταβολές ταχύτητας και άρα θεωρητικά μεγαλύτερη άνεση για του επιβάτες του οχήματος.

Έχοντας αναφέρει τα παραπάνω για την λογική επιλογής των v_d, θ_d θα πρέπει για την πληρότητα της απόδειξης να δειχθεί η συνέχεια και το φραγμένο των χρονικών παραγώγων αυτών. Για το $vd = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ μπορεί να εξασφαλιστεί άμεσα. Για το

$$\dot{\theta}_d = \begin{cases} \text{atan2}(a_y, a_x) + 2k\pi & \text{αν } a_x^2 + a_y^2 \geq \varepsilon_{\theta d} \\ (\text{atan2}(a_y, a_x) + 2k\pi) \cdot f(a_x^2 + a_y^2) & \text{αν } a_x^2 + a_y^2 < \varepsilon_{\theta d} \end{cases}$$

είναι προφανώς εξασφαλισμένο όσο βρίσκεται εντός ενός κλάδου και θα χρειαστεί έτσι να εξεταστεί μόνο η συμπεριφορά της παραγώγου μεταξύ των δύο κλάδων

$$\begin{aligned} & \dot{\theta}_d \\ &= \begin{cases} (\text{atan2}(a_y, a_x))' k(\dot{a}_x, \dot{a}_y) & \text{αν } a_x^2 + a_y^2 \geq \varepsilon_{\theta d} \\ (\text{atan2}(a_y, a_x))' \cdot f((a_x^2 + a_y^2) k(\dot{a}_x, \dot{a}_y) + \text{atan2}(a_y, a_x) \cdot f'(a_x^2 + a_y^2) l(\dot{a}_x, \dot{a}_y)) & \text{αν } a_x^2 + a_y^2 < \varepsilon_{\theta d} \end{cases} \end{aligned}$$

όμως η συνέχεια στο σύνορο εξασφαλίζεται λόγω της επιλεγμένης συνάρτησης f επειδή

$$f'(\varepsilon_{\theta d}) = 0 \text{ και } f(\varepsilon_{\theta d}) = 0$$

3.4 Εξασφάλιση άνω φράγματος για το μέτρο της ταχύτητας για την προδιαγεγραμμένη παρακολούθηση τροχιάς

Μέσω της εφαρμογής των παραπάνω νόμων ελέγχου μπορεί να προκύψει ένα άνω φράγμα για το μέτρο της ταχύτητας που θα εμφανίζει το όχημα και θα εξαρτάται όπως θα δειχθεί από την παρακάτω ανάλυση από τα αρχικά σφάλματα, από τον μέτρο της ταχύτητας που επιβάλλει η επιθυμητή τροχιά, από τα κέρδη καθώς και από τις επιλογές των συναρτήσεων επίδοσης για το θ και το V . Για τον σκοπό αυτό θα παρουσιαστούν συγκεκριμένα όρια για τα φραγμένα σύνολα των (3.35) και (3.44). Συγκεκριμένα στην (3.29) είχε προκύψει :

$$|\xi_V \rho_V \cos(\xi_\theta \rho_\theta) \cos(\theta_d) - (\rho_V \xi_V + v_d) \sin(\rho_\theta \xi_\theta) \sin(\theta_d) - \dot{\rho}_x \xi_x - \dot{x}_d|$$

Ανά όρους μπορούν να προκύψουν τα φράγματα :

$$\begin{aligned} |\xi_V \rho_V \cos(\xi_\theta \rho_\theta) \cos(\theta_d)| &\leq \rho_{Vmax} \\ |-\xi_V \rho_V \sin(\xi_\theta \rho_\theta) \sin(\theta_d)| &\leq \rho_{Vmax} \cdot \sin(\rho_{\theta max}) \\ |-v_d \sin(\theta_d) \sin(\xi_\theta \rho_\theta)| &\leq |\alpha_y| \cdot \sin(\rho_{\theta max}) \text{ μεσω της (3.41)} \end{aligned}$$

Ενώ τα άνω φράγματα των παρακάτω είναι εξ υποθέσεως γνωστά

$$|-\dot{x}_d| \leq \dot{x}_{dmax} \text{ και } |-\dot{\rho}_x \xi_x| \leq \dot{\rho}_{xmax}$$

Με βάση τα παραπάνω άνω φράγματα η (3.35) πλέον γίνεται

$$|\varepsilon_x| \leq \max \left\{ \varepsilon_x(0), \frac{\rho_{Vmax}(1 + \sin(\rho_{\theta max})) + |\alpha_y| \cdot \sin(\rho_{\theta max}) + \dot{x}_{dmax} + \dot{\rho}_{xmax}}{k_x \cos(\rho_{\theta max})} \right\} \quad (3.53)$$

Ενώ

$$|\alpha_x| \leq \max \left\{ \alpha_x(0), \frac{\rho_{Vmax}(1 + \sin(\rho_{\theta max})) + |\alpha_y| \cdot \sin(\rho_{\theta max}) + \dot{x}_{dmax} + \dot{\rho}_{xmax}}{\cos(\rho_{\theta max})} \right\} \quad (3.54)$$

Με παρόμοια λογική για την (3.44)

$$\begin{aligned} |\xi_V \rho_V \cos(\xi_\theta \rho_\theta) \sin(\theta_d)| &\leq \rho_{Vmax} \\ |\xi_V \rho_V \sin(\xi_\theta \rho_\theta) \cos(\theta_d)| &\leq \rho_{Vmax} \cdot \sin(\rho_{\theta max}) \\ |v_d \sin(\theta_d) \sin(\xi_\theta \rho_\theta)| &\leq |\alpha_x| \cdot \sin(\rho_{\theta max}) \text{ μεσω της (3.31)} \end{aligned}$$

Ενώ επίσης τα άνω φράγματα των παρακάτω είναι εξ υποθέσεως γνωστά

$$|-\dot{y}_d| \leq \dot{y}_{dmax} \text{ και } |-\dot{\rho}_y \xi_y| \leq \dot{\rho}_{ymax}$$

Η (3.44) γίνεται

$$|\varepsilon_y| \leq \max \left\{ \varepsilon_y(0), \frac{\rho_{Vmax}(1 + \sin(\rho_{\theta max}) + |\alpha_x| \cdot \sin(\rho_{\theta max}) + \dot{y}_{dmax} + \dot{\rho}_{ymax})}{k_y \cos(\rho_{\theta max})} \right\} \quad (3.55)$$

$$|\alpha_y| \leq \max \left\{ \alpha_y(0), \frac{\rho_{Vmax}(1 + \sin(\rho_{\theta max}) + |\alpha_x| \cdot \sin(\rho_{\theta max}) + \dot{y}_{dmax} + \dot{\rho}_{ymax})}{\cos(\rho_{\theta max})} \right\} \quad (3.56)$$

Πλέον το ζητούμενο με βασή τα παραπάνω είναι να προκύψει ένα άνω φράγμα για το $v_d = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, καθώς είναι γνωστό ότι εν τέλη το μέτρο της ταχύτητας θα βρίσκεται πάντοτε στο εύρος $(v_d - \rho_{Vmax}, v_d + \rho_{Vmax})$, όποτε θα υπάρχει ένα άμεσο άνω φράγμα για το μέτρο.

Για το δεύτερο μέλος των (3.54) και (3.56) έχει προκύψει:

$$|\alpha_x| \leq \frac{\rho_{Vmax}(1 + \sin(\rho_{\theta max})) + |\alpha_y| \cdot \sin(\rho_{\theta max}) + \dot{x}_{dmax} + \dot{\rho}_{xmax}}{\cos(\rho_{\theta max})}$$

$$|\alpha_y| \leq \frac{\rho_{Vmax}(1 + \sin(\rho_{\theta max})) + |\alpha_x| \cdot \sin(\rho_{\theta max}) + \dot{y}_{dmax} + \dot{\rho}_{ymax}}{\cos(\rho_{\theta max})}$$

Προσθέτοντας τις τελευταίες ανισότητες κατά μέλη:

$$|\alpha_x|(1 - \tan(\rho_{\theta max})) + |\alpha_y|(1 - \tan(\rho_{\theta max})) \leq \frac{2\rho_{Vmax}(1 + \sin(\rho_{\theta max})) + \dot{x}_{dmax} + \dot{\rho}_{xmax} + \dot{y}_{dmax} + \dot{\rho}_{ymax}}{\cos(\rho_{\theta max})}$$

Αν τώρα περιοριστεί επιπλέον το $\rho_{\theta max}$ στο εύρος $0 < \rho_{\theta max} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 - \tan(\rho_{\theta max}) > 0$

$$|\alpha_x| + |\alpha_y| \leq \frac{2\rho_{Vmax}(1 + \sin(\rho_{\theta max})) + \dot{x}_{dmax} + \dot{\rho}_{xmax} + \dot{y}_{dmax} + \dot{\rho}_{ymax}}{\cos(\rho_{\theta max})(1 - \tan(\rho_{\theta max}))} \quad (3.57)$$

Εδώ θα χρησιμοποιηθεί η ανισότητα $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$ η οποία δίνει

$$v_d = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \leq |\alpha_x| + |\alpha_y| \leq \frac{2\rho_{Vmax}(1 + \sin(\rho_{\theta max})) + \dot{x}_{dmax} + \dot{\rho}_{xmax} + \dot{y}_{dmax} + \dot{\rho}_{ymax}}{\cos(\rho_{\theta max})(1 - \tan(\rho_{\theta max}))} \quad (3.58)$$

Εν τέλη λαμβάνοντας υπόψιν και το αριστερό μέλος των φραγμένων συνόλων, αυτό που αφορά δηλαδή την αρχική τιμή των συνόλων προκύπτει:

$$v_d \leq \max \left\{ v_d(0), \frac{2\rho_{Vmax}(1 + \sin(\rho_{\theta max})) + \dot{x}_{dmax} + \dot{\rho}_{xmax} + \dot{y}_{dmax} + \dot{\rho}_{ymax}}{\cos(\rho_{\theta max})(1 - \tan(\rho_{\theta max}))} \right\} \quad (3.59)$$

Ενώ για την ταχύτητα του σώματος ισχύει

$$V_d - \rho_V < V < V_d + \rho_V$$

Από την τελευταία μπορεί μέσω κατάλληλης επιλογής των ελεύθερων παραμέτρων του ελεγκτή του συστήματος να εξαχθούν κάποιες εγγυήσεις σχετικά με το μέγιστο μέτρο ταχύτητας που θα εμφανιστεί για τον προτεινόμενο ελεγκτή. Το παραπάνω άνω φράγμα ωστόσο μπορεί να δώσει αυστηρότερα φράγματα όσο μικρότερη είναι η μέγιστη τιμή για το $\rho_{\theta max}$.

Στην πραγματικότητα το άνω φράγμα που προέκυψε στην (3.59) μπορεί να εφαρμοστεί για να προκύψει μια εγγύηση για το άνω φράγμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή δηλαδή να γίνει

$$v_{upper}(t) = \frac{2\rho_V(t)(1 + \sin(\rho_\theta(t))) + \dot{x}_d(t) + \dot{\rho}_x(t) + \dot{y}_d(t) + \dot{\rho}_y(t)}{\cos(\rho_\theta)(1 - \tan(\rho_\theta))} \quad (3.60)$$

3.5 Περιορισμός αρχικών συνθηκών λόγω των περιορισμών της απόδειξης

Για την εξασφάλιση της λειτουργίας του συστήματος τέθηκε η προϋπόθεση ότι η συνάρτηση επίδοσης για τον προσανατολισμό θα πρέπει να λαμβάνει τιμές που δεν ξεπερνάνε το $\frac{\pi}{2}$. Αυτό συνεπάγεται και έναν περιορισμό για την τροχιά που ζητείται να ακολουθηθεί σε σχέση με τον αρχικό προσανατολισμό του συστήματος. Συγκεκριμένα για την χρονική στιγμή $t = 0$ θα πρέπει να ισχύει:

$$|\theta(0) - \theta_d(0)| < \rho_\theta(0) \quad (3.61)$$

Όμως και για το $\rho_\theta(0)$ θα πρέπει να ισχύει $\rho_\theta(0) < \frac{\pi}{2}$ για να είναι δυνατή η ικανοποίηση του παραπάνω περιορισμού που τέθηκε. Εφόσον το θ_d έχει οριστεί σαν:

$$\theta_d = \begin{cases} \text{atan2}(a_y, a_x) + 2k\pi & \text{αν } a_x^2 + a_y^2 \geq \varepsilon_{\theta d} \\ (\text{atan2}(a_y, a_x) + 2k\pi) \cdot f(a_x^2 + a_y^2) & \text{αν } a_x^2 + a_y^2 < \varepsilon_{\theta d} \end{cases}$$

Με την συνάρτηση f να παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$ και για $k = 0$ αυτό συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} -\text{atan2}(a_y(0), a_x(0)) &\leq \theta_d(0) \leq \text{atan2}(a_y(0), a_x(0)) \\ \theta(0) - \text{atan2}(a_y(0), a_x(0)) &\leq \theta(0) - \theta_d(0) \leq \theta(0) - \text{atan2}(a_y(0), a_x(0)) \end{aligned}$$

Επομένως για να είναι εφικτό να ικανοποιείται η (3.61) είναι αναγκαίο να ισχύει

$$\begin{aligned} -\rho_\theta(0) &< \theta(0) - \text{atan2}(a_y(0), a_x(0)) < \rho_\theta(0) \\ -\frac{\pi}{2} &< \theta(0) - \text{atan2}(a_y(0), a_x(0)) < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} + \text{atan2}(a_y(0), a_x(0)) &< \theta(0) < \frac{\pi}{2} + \text{atan2}(a_y(0), a_x(0)) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Δηλαδή να μην σχηματίζεται γωνία μεγαλύτερη κατά μέτρο από $\frac{\pi}{2}$ rad ανάμεσα στον προσανατολισμό του οχήματος και στο θ_d που εκφράζει τον στιγμιαίο επιθυμητό προσανατολισμό. Από τα παραπάνω μπορεί να προκύψει μια αυστηρότερη συνθήκη που η ικανοποίηση της θα εξασφαλίζει εξασφάλιση της. Εφόσον τώρα ισχύει $a_y(0) = -k_y \varepsilon_y(0)$ και $a_x(0) = -k_x \varepsilon_x(0)$, επιπλέον επειδή τα όρια για τον rps έχουν επιλεχτεί συμμετρικά ως προς το 0

$$\text{sgn}(\varepsilon_x) = \text{sgn}(e_x) \text{ και } \text{sgn}(\varepsilon_y) = \text{sgn}(e_y)$$

Οι τιμές που θα παίρνει η $\text{atan2}(a_y(0), a_x(0))$ θα βρίσκονται στο ίδιο τεταρτημόριο με τις τιμές που θα παίρνει η $\text{atan2}(-e_y(0), -e_x(0))$, ανεξάρτητα από τις τιμές των θετικών κερδών k_x, k_y . Εδώ η έννοια του ίδια τεταρτημόριου αναφέρεται με την έννοια του διαστήματος

$$\left(-\pi + \lambda \frac{\pi}{2}, -\pi + \lambda \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ με } \lambda = \{0,1,2,3\}$$

Με

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{όταν } e_y(0) > 0, e_x(0) > 0 \\ 1 & \text{όταν } e_y(0) > 0, e_x(0) < 0 \\ 2 & \text{όταν } e_y(0) < 0, e_x(0) < 0 \\ 3 & \text{όταν } e_y(0) < 0, e_x(0) > 0 \end{cases}$$

Επομένως αν

$$\text{atan2}\left(a_y(0), a_x(0)\right) \in \left(-\pi + \lambda \frac{\pi}{2}, -\pi + \lambda \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ με } \lambda = \{0,1,2,3\}$$

Τότε θα ισχύει και

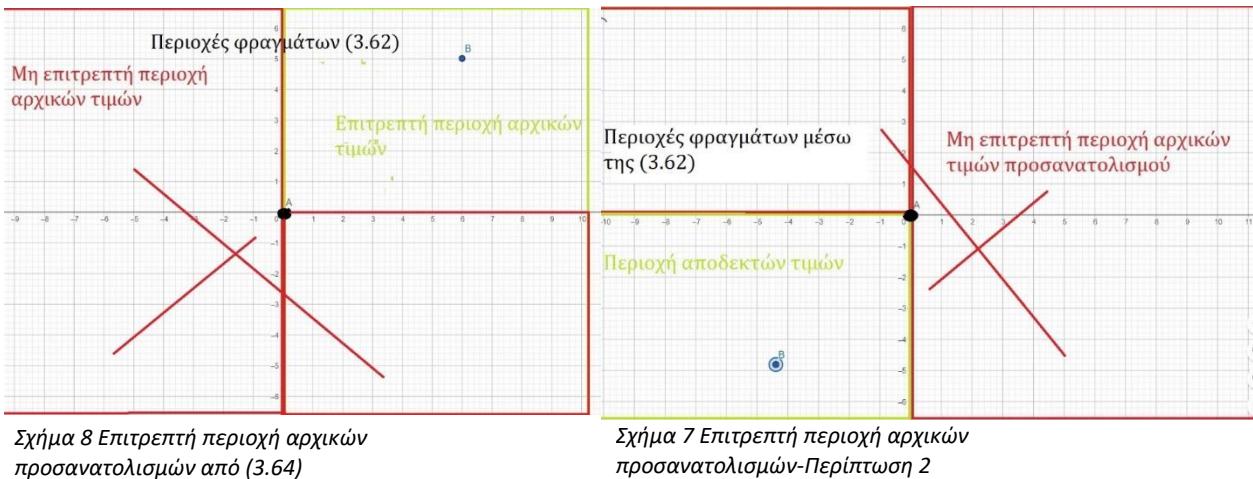
$$\text{atan2}\left(-e_y(0), -e_x(0)\right) \in \left(-\pi + \lambda \frac{\pi}{2}, -\pi + \lambda \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ με } \lambda = \{0,1,2,3\}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την τελευταία στην (3.63) αυτή ενισχύεται σε :

$$-\frac{\pi}{2} + \lambda \frac{\pi}{2} < \theta(0) < -\pi + \frac{\pi}{2} + \lambda \frac{\pi}{2} \quad \lambda = \{0,1,2,3\} \quad (3.64)$$

Η τιμή του λ καθορίζεται ανάλογα από την τα πρόσημα των $e_y(0), e_x(0)$.

Η φυσική σημασία της (3.64) έχει την έννοια ότι ο αρχικός προσανατολισμός αρκεί περιορίζεται σε ένα εύρος 90 μοιρών ανάλογα με τα αρχικά σφάλματα. Αυτό για να γίνει καλύτερα κατανοητό στην πράξη αναπαρίσταται με δύο οπτικά παραδείγματα ανάλογα με την αρχική θέση του σημείου του μέσου του πίσω άξονα του οχήματος (σημείο A) και την αρχική τιμή της επιθυμητής τροχιάς (σημείο B).



Τα τελευταία δείχνουν δηλαδή ότι η κατεύθυνση κίνησης του οχήματος στην αρχική κατάσταση αρκεί να είναι προς την κατεύθυνση της επιθυμητής τροχιάς. Σημειώνεται ότι οι παρακάτω περιορισμοί είναι ικανοί αλλα όχι αναγκαίοι για την εξασφάλιση δυνατότητας $\rho_\theta < \frac{\pi}{2}$. Στην πραγματικότητα η πλήρης εφικτή περιοχή των περιορισμών είναι οι προσανατολισμοί εκείνοι για τους οποίουν ισχύει

$$-\frac{\pi}{2} + \theta_d(0) < \theta(0) < \theta_d(0) + \frac{\pi}{2} \quad (3.65)$$

Το μειονέκτημα ωστόσο της (3.65) είναι ότι θέτει έναν περιορισμό που εξαρτάται τόσο από το πρόσημο των αρχικών σφαλμάτων e_x, e_y όσο και από τις επιλογές των k_x, k_y , ενώ τα όρια που προκύπτουν από αυτή δεν είναι την μορφής $\mu \frac{\pi}{2}$ με $\mu \in Z$. Έτσι παρουσιάστηκε η (3.64) που αποτελεί μια αυστηρότερη περίπτωση της (3.65), αλλά είναι ανεξάρτητη από τις επιλογές των k_x, k_y . Αναλόγως την περίπτωση της εφαρμογή μπορεί να αξιοποιηθεί ο ανάλογος περιορισμός. Σε κάθε περίπτωση δεν επιτρέπεται ο αρχικός προσανατολισμός του οχήματος να είναι αντίθετος (με την έννοια της αμβλείας γωνίας) από την τιμή $\theta_d(0)$.

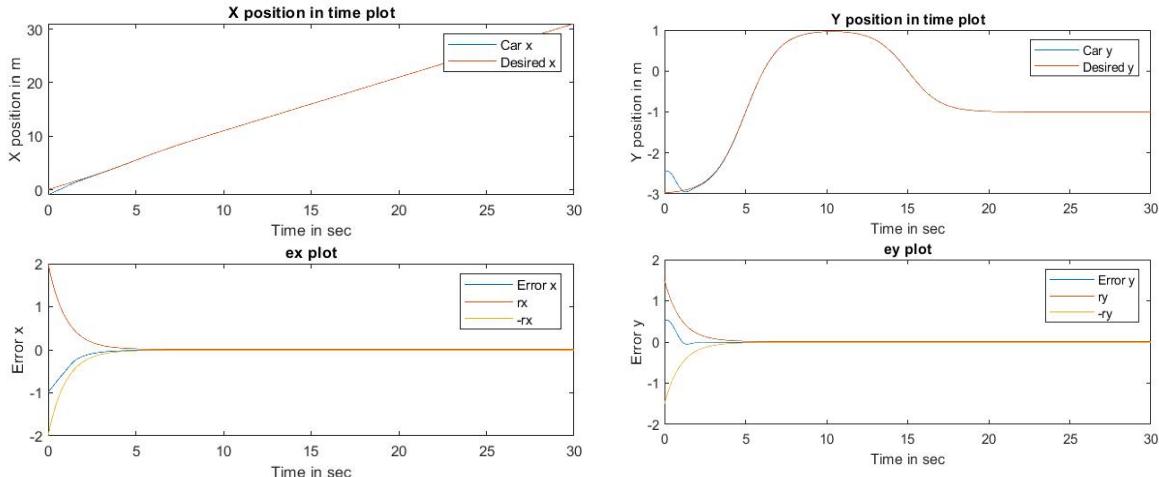
3.6 Αποτελέσματα προσομοιώσεων για παρακολούθηση τροχιάς με προδιαγεγραμμένο τρόπο

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν ορισμένα αποτελέσματα για την παραπάνω δομή ελέγχου.

Σαν πρώτη περίπτωση παρουσιάζεται η περίπτωση της τροχιάς που θα μπορούσε να περιγράψει την κίνηση ενός οχήματος για την προσπέραση ενός άλλου ή για την αποφυγή ενός εμποδίου:

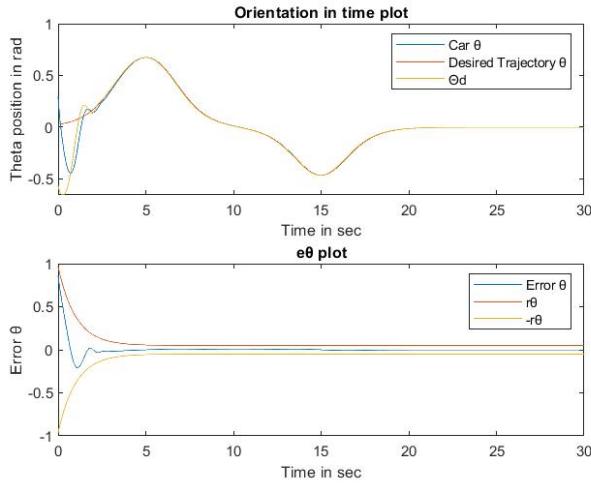
$$x_d(t) = 1 \cdot t + \frac{1}{1 + e^{-(t-5)}}$$

$$y_d(t) = -3 + \frac{4}{1 + e^{-(t-5)}} - \frac{2}{1 + e^{-(t-15)}}$$

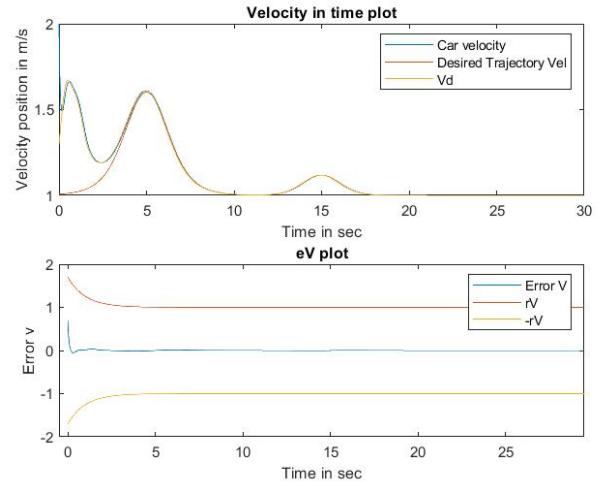


Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 2 A)
Θέση κατά x-επιθυμητή θέση κατά x B) Σφάλμα
θέσης κατά x

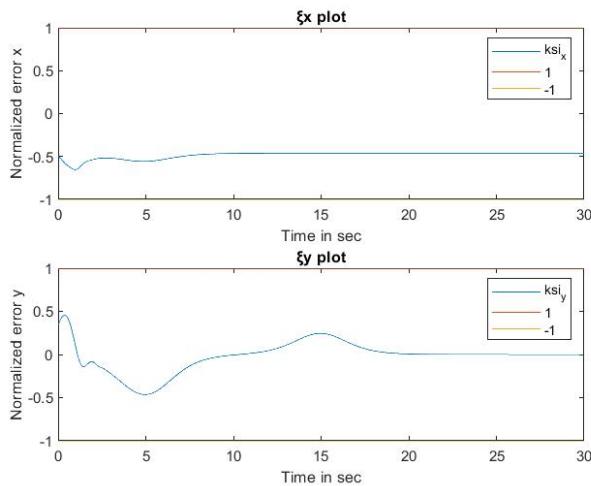
Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 1 A) Θέση κατά y-
επιθυμητή θέση κατά y B) Σφάλμα θέσης κατά y



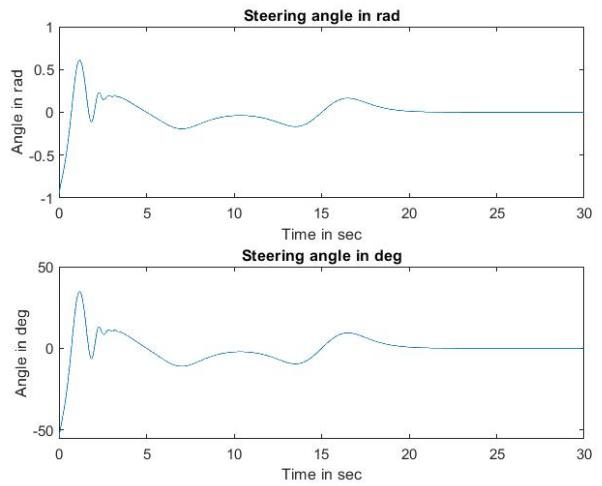
Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 3
Α)Προσανατολισμός οχήματος-Προσανατολισμός επιθυμητής τροχιάς- Σήμα θd Β) Σφάλμα θ



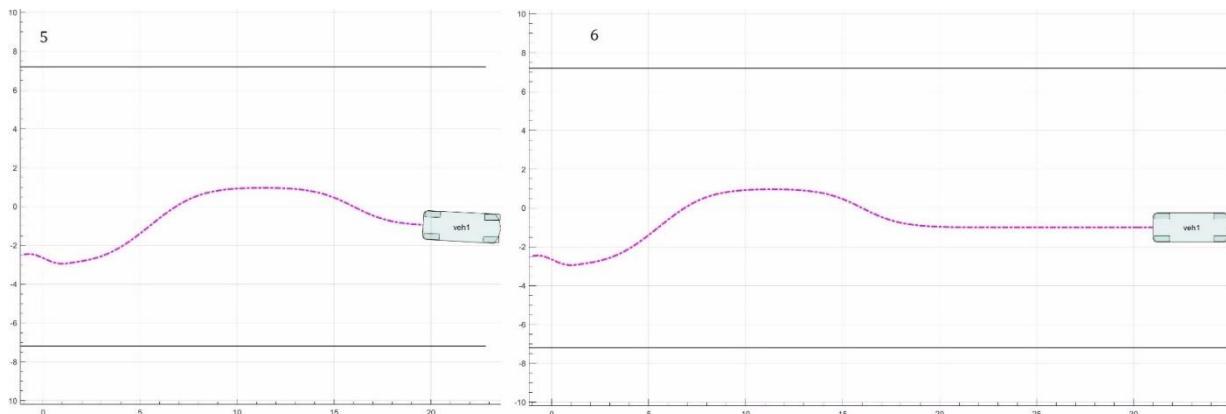
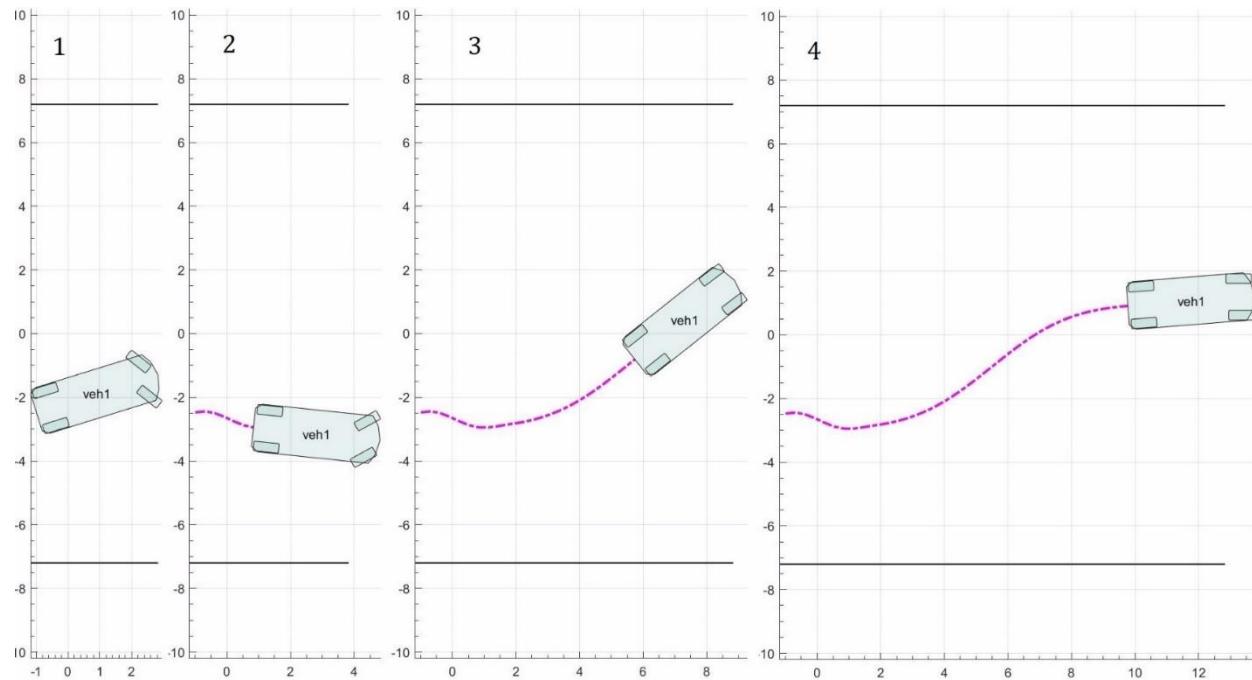
Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 4 Α)Ταχύτητα οχήματος-Ταχύτητα επιθυμητής τροχιάς- Σήμα vd Β) Σφάλμα V



Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 6 Σήματα ξx ξy



Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 5 Γωνία περιστροφής τιμονιού σε ακτίνια και μοίρες



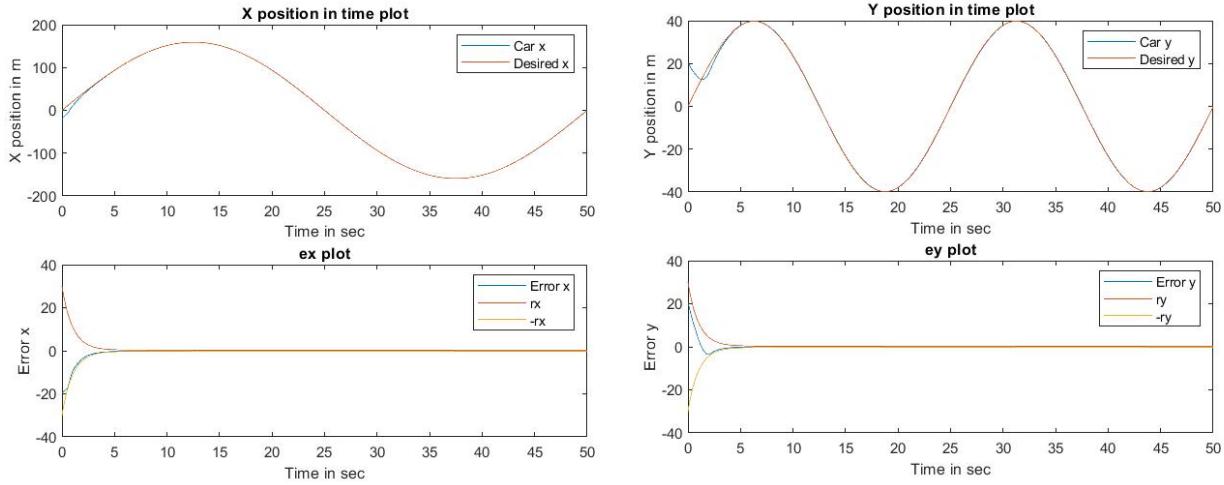
Στιγμιότυπο παρακολούθησης τροχιάς 1 Περίπτωση τροχιάς 1

Σαν μια δεύτερη θεωρητικά πιο απαιτητική περίπτωση επιλέχτηκε η καμπύλη της μορφής

$$x_d(t) = 2 \cdot A \cdot \sin(2\pi f t)$$

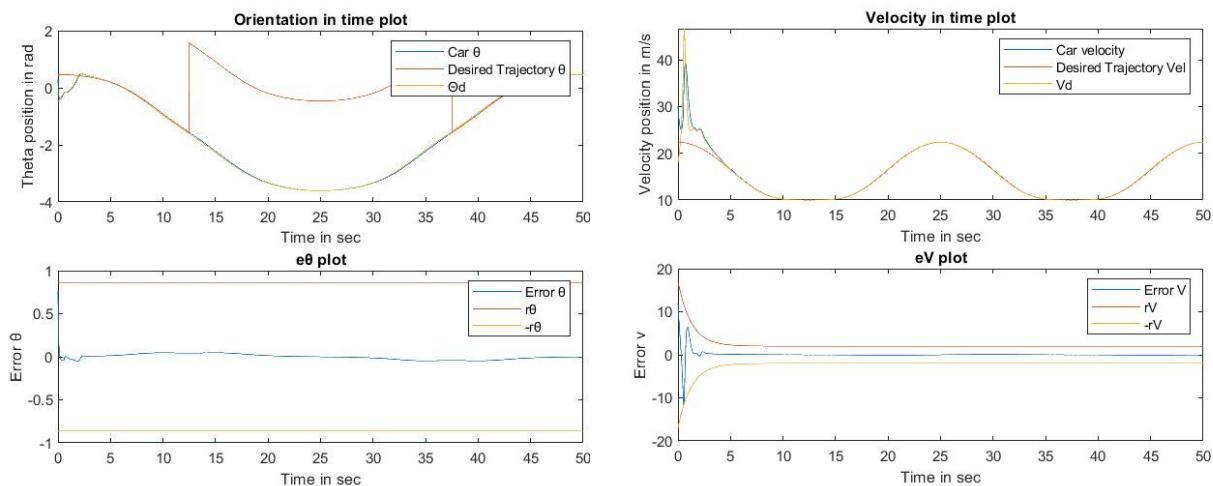
$$y_d(t) = A \cdot \sin(4\pi f t)$$

Με το A να καθορίζει διαστάσεις και f συχνότητα, άρα καθορίζει ταχύτητα. Η επιλογή αυτή έγινε καθώς σχηματίζεται επί της ουσίας το σχήμα του απείρου.



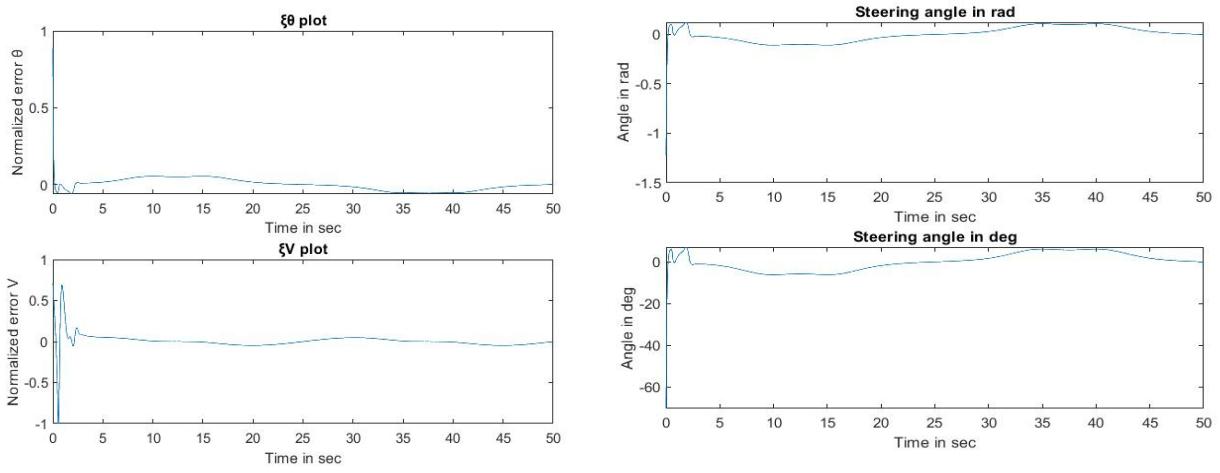
Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 8 A) Θέση κατά x -επιδυμητή θέση κατά x B) Σφάλμα θέσης κατά x

Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 7 A) Θέση κατά x -επιδυμητή θέση κατά y B) Σφάλμα θέσης κατά y



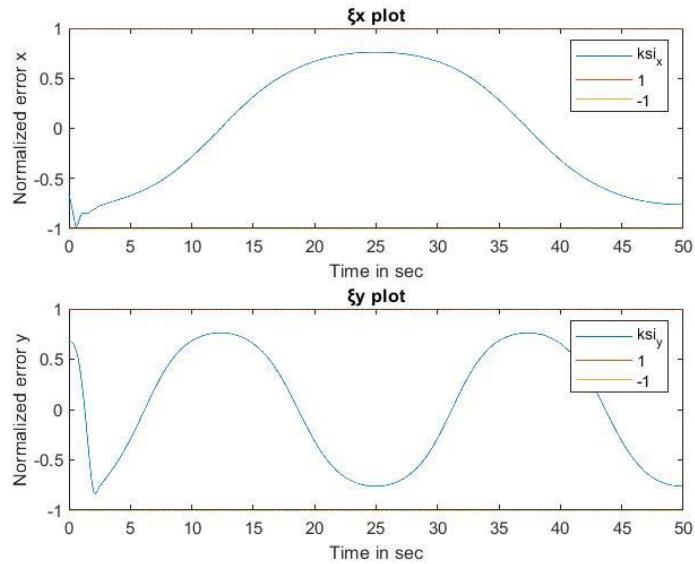
Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 10 Προσανατολισμός οχήματος-Προσανατολισμός επιδυμητής τροχιάς περιορισμένος στο $(-\pi/2, \pi/2)$ - Σήμα θd B) Σφάλμα θ

Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 9 A) Ταχύτητα οχήματος-Ταχύτητα επιδυμητής τροχιάς- Σήμα vd B) Σφάλμα v

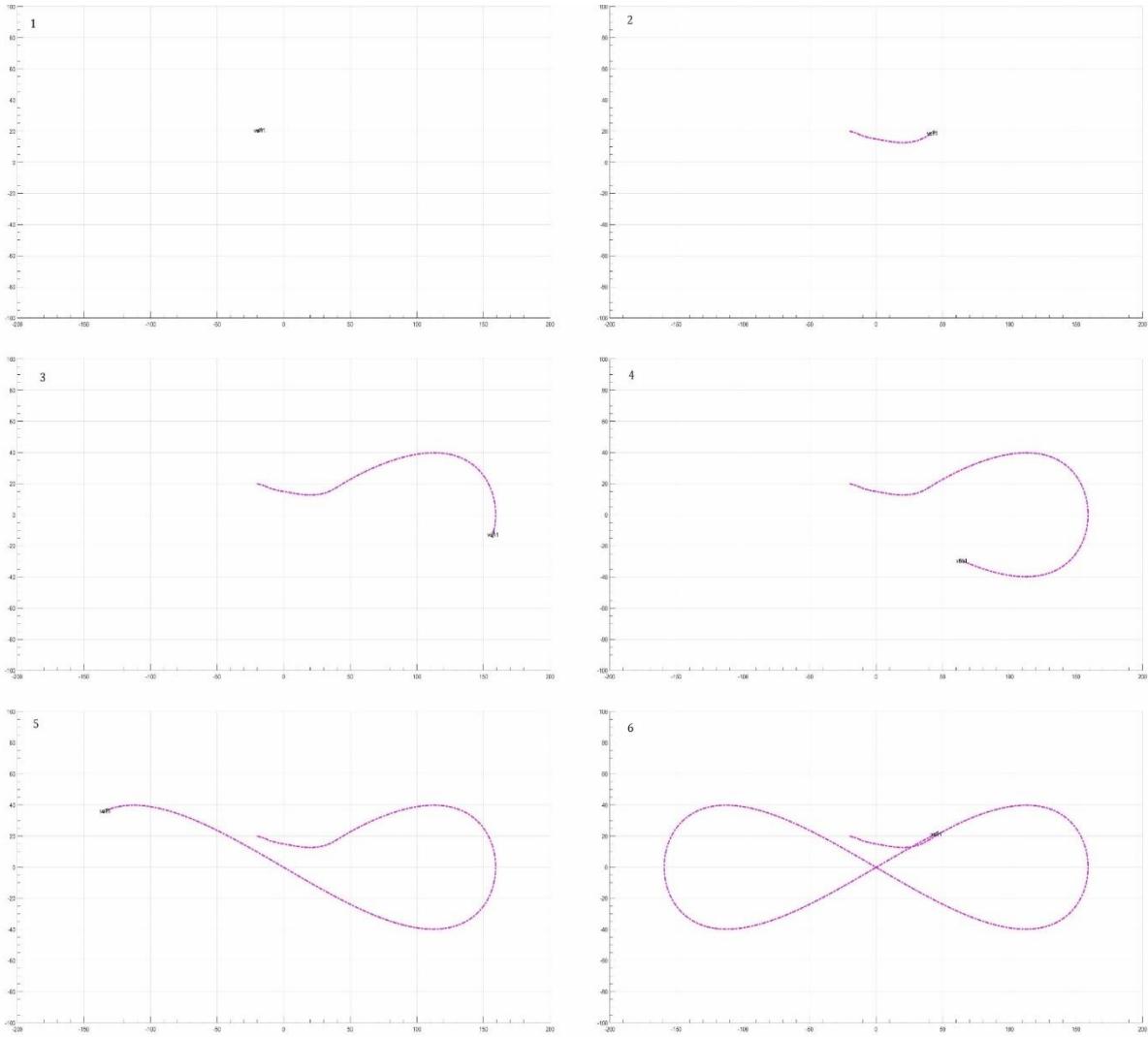


Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 11 Σήματα ξθ ξν

Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 12 Γωνία περιστροφής τιμονιού σε ακτίνια και μοίρες



Διάγραμμα Παρακολούθησης Τροχιάς 13 Σήματα ξx ξy



Στιγμιότυπο παρακολούθησης τροχιάς 2 Περίπτωση τροχιάς που μοιάζει με άπειρο

4. Αυτόματη ρύθμιση κυκλοφορίας σε αυτοκινητόδρομο

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται η διατύπωση του προβλήματος καθώς και τα κύρια συμπεράσματα/αποτελέσματα για την παρούσα εργασία. Αρχικά γίνεται σαφής διατύπωση του προβλήματος που επιλύεται από την παρούσα μεθοδολογία, στην συνέχεια η παρουσίαση των εννοιών που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του προβλήματος και τέλος παρατίθεται η μαθηματική απόδειξη της ορθής λειτουργίας του προτεινόμενου ελεγκτή. Στο κεφάλαιο 5 θα παρουσιαστούν αποτελέσματα προσομοιώσεων της εφαρμογής αυτού του ελεγκτή.

4.1 Περιγραφή του προβλήματος

Συγκεκριμένα, σαν μορφή αυτοκινητόδρομου θα θεωρηθεί ένας πλήρως ευθύς δρόμος που θα έχει άπειρο μήκος και το πλάτος του θα είναι $2 \cdot a$. Το πλήθος των οχημάτων που κινούνται εντός αυτού θα συμβολίζεται ως n , ενώ η σχεδίαση του ελεγκτή θα είναι ανεξάρτητη από την τιμή αυτή. Ο αυτοκινητόδρομος θα θεωρηθεί μίας κατεύθυνσης (τα αυτοκίνητα κινούνται αποκλειστικά κατά τα θετικά x), ενώ δεν υπάρχουν λωρίδες κυκλοφορίας. Η απουσία των λωρίδων κυκλοφορίας προτιμάται καθώς αναμένεται σε περιβάλλοντα αυτόματης πλοϊγησης να αυξήσει τις δυνατότητες της χωρητικότητας του δρόμου, δηλαδή αύξηση του αριθμού των εξυπηρετούμενων οχημάτων στην μονάδα του χρόνου.

Για την περιγραφή οποιασδήποτε θέσης πάνω στον αυτοκινητόδρομο θα χρειαστούν δύο συντεταγμένες x, y οι οποίες θα εκφράζονται ως προς ένα αδρανειακό πλαίσιο. Ο προσανατολισμός των οχημάτων που κινούνται εντός του αυτοκινητόδρομου θα εκφράζεται από την γωνία θ που θα εκφράζει τον προσανατολισμό του οχήματος σε σχέση με τον προσανατολισμό του αδρανειακού πλαισίου. Το τελευταίο θα θεωρηθεί ότι είναι τοποθετημένο στην αρχή του αυτοκινητόδρομου ως προς το μήκος αυτού και στο μέσο αυτού ως προς το πλάτος του και θα έχει τον άξονα x παράλληλο με τα όρια του αυτοκινητόδρομου, όπως απεικονίζεται και στο παρακάτω σχήμα.



Τα όρια του δρόμου είναι το $y = +a$ και το $y = -a$ και άρα συνάγεται η συνθήκη που θα πρέπει να υπάρχει για την παραμονή των οχημάτων εντός των ορίων του αυτοκινητόδρομου

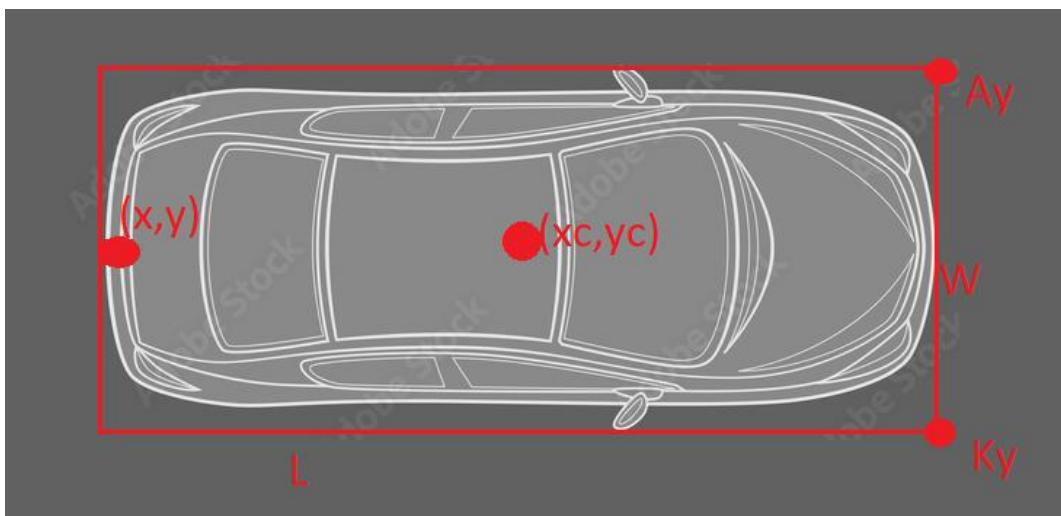
Έχοντας πλέον διατυπώσει σαφώς την μορφή του αυτοκινητόδρομου, θα γίνει η θεώρηση ότι τα οχήματα τα οποία κινούνται σε αυτόν έχουν διαστάσεις τέτοιες ώστε το γεωμετρικό τους σχήμα να εμπεριέχεται πλήρως σε ένα παραλληλόγραμμο με διαστάσεις, W, L και η κινηματική τους συμπεριφορά για το σημείο του πίσω άξονα τους εκφράζεται από το bicycle model των εξισώσεων (2.4), δηλαδή

$$\dot{x} = V \cdot \cos (\theta)$$

$$\dot{y} = V \cdot \sin (\theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V \cdot u}{L}$$

$$\dot{V} = F$$



Σχήμα 9 Περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο οχήματος

Τα όρια που τίθενται για την κίνηση εντός του αυτοκινητόδρομου είναι η ταχύτητα του οχήματος $V \in (0, V_{max})$, δηλαδή να είναι αυστηρά θετική και να μην ξεπερνάει ένα μέγιστο επιτρεπτό μέτρο που θα επιβάλλεται από τον αυτοκινητόδρομο. Επίσης θα θεωρηθεί ότι τα οχήματα θα έχουν ένα κοινό στόχο για την τελική τους ταχύτητα που θα συμβολίζεται ως V^* . Τελικός στόχος επίσης θα είναι επιπλέον όλα τα οχήματα να μην μεταβάλλουν στην μόνιμη κατάσταση την θέση τους κατά y . Ο προσανατολισμός των οχημάτων θα πρέπει να ικανοποιεί τον περιορισμό $\theta \in (-\theta_{max}, \theta_{max})$ με $0 < \theta_{max} < \frac{\pi}{2}$ για να εξασφαλίζεται η κίνηση τους αυστηρά προς τα εμπρός ($\dot{x} > 0$) (κίνηση διαρκώς κατά τα θετικά x).

Το ζητούμενο λοιπόν είναι να σχεδιαστεί decentralized ελεγκτής (που θα εφαρμόζεται ανεξάρτητα σε κάθε όχημα) τέτοιος ώστε να εξασφαλίζει την αποφυγή συγκρούσεων των οχημάτων και την παραμονή εντός ορίων αυτοκινητόδρομου υπό τον περιορισμούς κίνησης που διατυπώθηκαν παραπάνω. Για την σχεδίαση του ελεγκτή θα θεωρηθεί ότι κάθε όχημα έχει διαθέσιμες πληροφορίες (ανάδραση) μόνο για την θέση των γειτονικών οχημάτων καθώς και πλήρη γνώση της τρέχουσας κατάστασης του (θέση, ταχύτητας, προσανατολισμός).

4.2 Εξασφάλιση αποφυγή συγκρούσεων-Τεχνητά δυναμικά πεδία

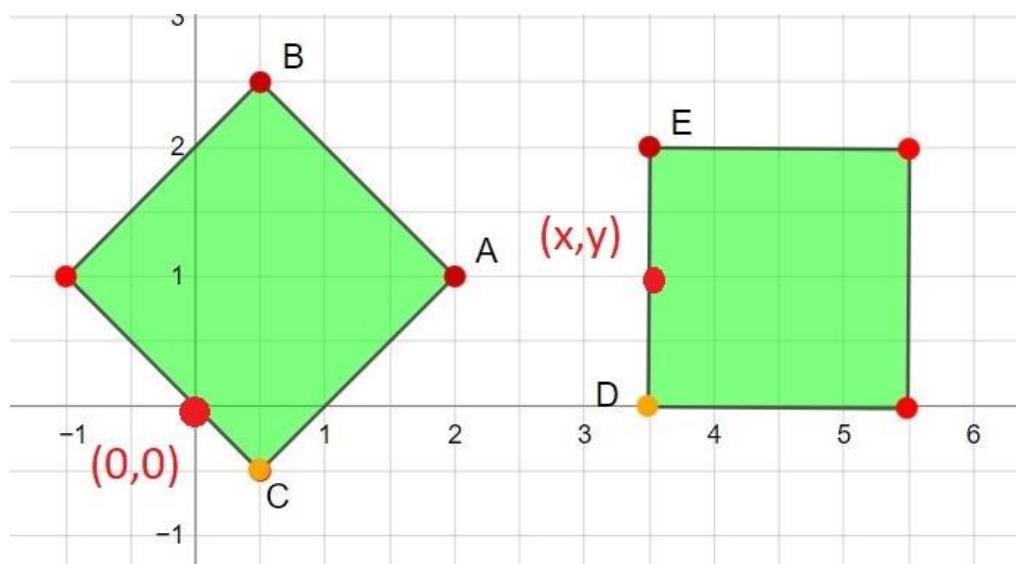
Σημείωση: Έχοντας αναφέρει ότι εντός του δρόμου υπάρχουν η οχήματα, στην συνέχεια όταν γίνεται αναφορά σε κάποιο συγκεκριμένο όχημα θα χρησιμοποιούνται οι δείκτες $i, j \in \{1..n\}$.

Για την αποφυγή των συγκρούσεων θα χρησιμοποιηθεί η παρακάτω ελλειψοειδής μετρική της απόστασης των οχημάτων:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + p \cdot (y_i - y_j)^2}, \text{ με } p \geq 1$$

Η τελευταία προτιμάται σε σύγκριση με την απλή ευκλείδεια απόσταση, καθώς ο διαφορετικός συντελεστής για την απόσταση κατά y μπορεί να παρέχει σημαντικές βελτιώσεις στην χωρητικότητα του δρόμου, καθώς μπορεί να επιτρέψει με κατάλληλη ρύθμιση μεγαλύτερο αριθμό οχημάτων που βρίσκονται στο ίδιο x , μεγαλύτερο αριθμό δηλαδή οχημάτων κατά πλάτος του δρόμου.

Για το γεωμετρικό σχήμα καθώς και τις διαστάσεις του οχήματος θα θεωρηθεί το περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο στο οποίο μπορεί να χωρέσει πλήρως κάθε όχημα που κινείται στον δρόμο, όπως απεικονίζεται στο σχήμα της προηγούμενης σελίδας. Το τελευταίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για οχήματα διαφορετικών διαστάσεων θεωρώντας σαν το κρίσιμο παραλληλόγραμμο αυτό που έχει τις μέγιστες διαστάσεις (μέγιστο μήκος αλλά και μέγιστο πλάτος ταυτόχρονα). Έστω ότι οι διαστάσεις του παραλληλογράμμου όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως είναι W πλάτος και L μήκος. Για την αποτροπή συγκρούσεων είναι προφανές ότι ισοδύναμη συνθήκη είναι τα παραλληλόγραμμα των γειτονικών οχημάτων να μην εμφανίζουν κοινά σημεία, να μην υπάρχει δηλαδή κοινή επιφάνεια μεταξύ τους. Με βάση αυτό για να προκύψει η ελάχιστη απόσταση που θα πρέπει να τηρείται θα θεωρηθεί για λόγους απόδειξης ένα δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων και δυο παραλληλόγραμμα σε αυτό που το μέσο της μιας (της πίσω) πλευράς τους θα βρίσκεται στα σημεία $(0,0)$ και (x, y) αντίστοιχα, ενώ ο προσανατολισμός των παραλληλογράμμων αυτών θα θεωρείται ότι βρίσκεται εντός των περιορισμών $(-\theta_{max}, \theta_{max})$, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 10 Βοηθητικό σχήμα για εύρεση ελάχιστη απαίτουμενης απόστασης

Οι συντεταγμένες των σημείων της επιφάνειας ενός παραλληλογράμμου που το μέσο της πίσω πλευράς του βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και έχει μηδενικό προσανατολισμό θα δίνονται από:

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{L \cdot h_x}{w} \\ y_r &= -\frac{w}{2} + w \cdot h_y \quad \text{με } 0 \leq h_x, h_y \leq 1 \end{aligned}$$

Ενώ για ένα παραλληλόγραμμο με προσανατολισμό θ (στροφή κατά θ γύρω από τον κάθετο άξονα z) ως προς το αδρανειακό πλαίσιο και το οποίο θα χρειαστεί για την παρούσα απόδειξη θα βρεθεί πολλαπλασιάζοντας το παραπάνω με τον αντίστοιχο πίνακα στροφής:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \cdot h_{x1} \\ -\frac{w}{2} + w \cdot h_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lh_{x1}\cos\theta_1 + \frac{w}{2}\sin\theta_1 - wh_{y1}\sin\theta_1 \\ Lh_{x1}\sin\theta_1 - \frac{w}{2}\cos\theta_1 + wh_{y1}\cos\theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Ένα παραλληλόγραμμο το σημείο αναφοράς του οποίου βρίσκεται στο (x, y) και έχει μη μηδενικό προσανατολισμό βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας με τον ομογενή που συνδέει το πλαίσιο του με το αδρανειακό:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & x \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \cdot h_{x2} \\ -\frac{w}{2} + w \cdot h_{y2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + Lh_{x2}\cos\theta_2 + \frac{w}{2}\sin\theta_2 - wh_{y2}\sin\theta_2 \\ y + Lh_{x2}\sin\theta_2 - \frac{w}{2}\cos\theta_2 + wh_{y2}\cos\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Όταν υπάρχει κοινή επιφάνεια για τα δύο παραλληλόγραμμα, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο το οποίο ανήκει καις τα δύο και για τα οποίο δηλαδή ισχύει $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$ δηλαδή $\exists h_{x1}, h_{x2}, h_{y1}, h_{y2} \in [0,1]$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} x + Lh_{x2}\cos\theta_2 + \frac{w}{2}\sin\theta_2 - wh_{y2}\sin\theta_2 &= Lh_{x1}\cos\theta_1 + \frac{w}{2}\sin\theta_1 - wh_{y1}\sin\theta_1 \quad \text{και} \\ y + Lh_{x2}\sin\theta_2 - \frac{w}{2}\cos\theta_2 + wh_{y2}\cos\theta_2 &= Lh_{x1}\sin\theta_1 - \frac{w}{2}\cos\theta_1 + wh_{y1}\cos\theta_1 \end{aligned}$$

Δηλαδή το x, y θα είναι ίσα με :

$$\begin{aligned} x &= L(h_{x1}\cos\theta_1 - h_{x2}\cos\theta_2) + \frac{w}{2}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) - w(h_{y1}\sin\theta_1 - h_{y2}\sin\theta_2) \\ y &= L(h_{x1}\sin\theta_1 - h_{x2}\sin\theta_2) - \frac{w}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + w(h_{y1}\cos\theta_1 - h_{y2}\cos\theta_2) \end{aligned}$$

Επομένως αν χρησιμοποιηθεί η ελλειψοειδής μετρική αρκεί να βρεθεί ένα άνω φράγμα για την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει αυτή για $h_{x1}, h_{x2}, h_{y1}, h_{y2} \in [0,1]$ και να εξασφαλιστεί μέσω των δυναμικών που θα χρησιμοποιηθούν ότι η ελλειψοειδής απόσταση δεν θα γίνει μικρότερη από αυτή την μέγιστη τιμή. Από αυτό συνεπάγεται ότι δεν θα υπάρξουν κοινά σημεία των δύο επιφανειών σε καμία περίπτωση. Ζητείται δηλαδή να υπολογιστεί ένα άνω φράγμα για την ποσότητα:

$$d = \sqrt{\begin{aligned} &(L(h_{x1}\cos\theta_1 - h_{x2}\cos\theta_2) + \frac{w}{2}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) - w(h_{y1}\sin\theta_1 - h_{y2}\sin\theta_2))^2 \\ &+ p(L(h_{x1}\sin\theta_1 - h_{x2}\sin\theta_2) - \frac{w}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + w(h_{y1}\cos\theta_1 - h_{y2}\cos\theta_2))^2 \end{aligned}} \quad (4.3)$$

Ισοδύναμα αρκεί να υπολογιστεί ένα φράγμα για την υπόρριζη ποσότητα d^2 , όπως γίνεται εφόσον ισχύει:

$$\begin{aligned} & (L(h_{x1}\cos\theta_1 - h_{x2}\cos\theta_2) + \frac{w}{2}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) - w(h_{y1}\sin\theta_1 - h_{y2}\sin\theta_2))^2 = \\ & (L(h_{x1}\cos\theta_1 - h_{x2}\cos\theta_2) - w(h_{y1}\sin\theta_1 - h_{y2}\sin\theta_2))^2 + \frac{w^2}{4}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2 \\ & + \frac{w}{2}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)(L(h_{x1}\cos\theta_1 - h_{x2}\cos\theta_2) - w(h_{y1}\sin\theta_1 - h_{y2}\sin\theta_2)) \end{aligned}$$

Καθώς και

$$\begin{aligned} & (L(h_{x1}\sin\theta_1 - h_{x2}\sin\theta_2) - \frac{w}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + w(h_{y1}\cos\theta_1 - h_{y2}\cos\theta_2))^2 = \\ & (L(h_{x1}\sin\theta_1 - h_{x2}\sin\theta_2) + w(h_{y1}\cos\theta_1 - h_{y2}\cos\theta_2))^2 + \frac{w^2}{4}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2 \\ & - \frac{w}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)(L(h_{x1}\sin\theta_1 - h_{x2}\sin\theta_2) + w(h_{y1}\cos\theta_1 - h_{y2}\cos\theta_2)) \end{aligned}$$

ομαδοποιώντας κατάλληλα τους όρους λαμβάνεται:

$$\begin{aligned} d_{max}^2 = & L^2(h_{x1}\cos\theta_1 - h_{x2}\cos\theta_2)^2 + pL^2(h_{x1}\sin\theta_1 - h_{x2}\sin\theta_2)^2 + w^2(h_{y1}\sin\theta_1 - h_{y2}\sin\theta_2)^2 \\ & + pw^2(h_{y1}\cos\theta_1 - h_{y2}\cos\theta_2)^2 + 2Lw(h_{x1}\cos\theta_1 - h_{x2}\cos\theta_2)(h_{y1}\sin\theta_1 - h_{y2}\sin\theta_2) \\ & + 2pLw(h_{x1}\sin\theta_1 - h_{x2}\sin\theta_2)(h_{y1}\cos\theta_1 - h_{y2}\cos\theta_2) + \frac{w^2}{4}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2 \\ & + \frac{w^2}{4}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2 + \frac{w}{2}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)(L(h_{x1}\cos\theta_1 - h_{x2}\cos\theta_2) - w(h_{y1}\sin\theta_1 - h_{y2}\sin\theta_2)) \\ & - p\frac{w}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)(L(h_{x1}\sin\theta_1 - h_{x2}\sin\theta_2) + w(h_{y1}\cos\theta_1 - h_{y2}\cos\theta_2)) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα που έχει αποδειχθεί στην εργασία [1]

$$(h_1\cos\theta_1 - h_2\cos\theta_2)^2 + p(h_1\sin\theta_1 - h_2\sin\theta_2)^2 \leq \max(4p^2 \sin^2 \theta_{max}, 1 + (p-1) \sin^2 \theta_{max})$$

Για $h_1, h_2 \in [0,1]$. Εφαρμόζοντας αυτή προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} & L^2((h_{x1}\cos\theta_1 - h_{x2}\cos\theta_2)^2 + p(h_{x1}\sin\theta_1 - h_{x2}\sin\theta_2))^2 \\ & \leq L^2 \max(4p^2 \sin^2 \theta_{max}, 1 + (p-1) \sin^2 \theta_{max}) \\ & w^2 p^2 \left((h_{y1}\cos\theta_1 - h_{y2}\cos\theta_2)^2 + \frac{1}{p^2} (h_{y1}\sin\theta_1 - h_{y2}\sin\theta_2)^2 \right) \leq \\ & \leq w^2 p^2 \max \left(\frac{4}{p^2} \sin^2 \theta_{max}, 1 + \left(\frac{1}{p^2} - 1 \right) \sin^2 \theta_{max} \right) \end{aligned}$$

Ενώ για τους άλλους όρους ισχύει: $|\sin\theta_1 - \sin\theta_2| \leq 2 \sin \theta_{max}$ $|\cos\theta_1 - \cos\theta_2| \leq 1 - \cos \theta_{max}$

$$\begin{aligned} |h_{x1} \cos \theta_1 - h_{x2} \cos \theta_2| &\leq 1 \quad |h_{y1} \sin \theta_1 - h_{y2} \sin \theta_2| \leq 2 \sin \theta_{max} \\ |h_{y1} \cos \theta_1 - h_{y2} \cos \theta_2| &\leq 1 \quad |h_{x1} \sin \theta_1 - h_{x2} \sin \theta_2| \leq 2 \sin \theta_{max} \end{aligned}$$

Αρα:

$$\begin{aligned} &2Lw(h_{x1} \cos \theta_1 - h_{x2} \cos \theta_2)(h_{y1} \sin \theta_1 - h_{y2} \sin \theta_2) \\ &\leq Lw |h_{x1} \cos \theta_1 - h_{x2} \cos \theta_2| |h_{y1} \sin \theta_1 - h_{y2} \sin \theta_2| \leq 4Lw \sin \theta_{max} \\ &2pLw(h_{x1} \sin \theta_1 - h_{x2} \sin \theta_2)(h_{y1} \cos \theta_1 - h_{y2} \cos \theta_2) \\ &\leq 2pLw |h_{x1} \sin \theta_1 - h_{x2} \sin \theta_2| |h_{y1} \cos \theta_1 - h_{y2} \cos \theta_2| \leq 4pLw \sin \theta_{max} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w^2}{4} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 &\leq w^2 \sin^2 \theta_{max} \text{ και } \frac{w^2}{4} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)^2 \leq \frac{w^2}{4} (1 - \cos \theta_{max})^2 \\ \frac{w}{2} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) (L(h_{x1} \cos \theta_1 - h_{x2} \cos \theta_2) - w(h_{y1} \sin \theta_1 - h_{y2} \sin \theta_2)) \\ &\leq \left| \frac{w}{2} L(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)(h_{x1} \cos \theta_1 - h_{x2} \cos \theta_2) \right| + \left| \frac{w^2}{2} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)(h_{y1} \sin \theta_1 - h_{y2} \sin \theta_2) \right| \\ &\leq wL \sin \theta_{max} + w^2 \sin \theta_{max} \end{aligned}$$

Επίσης ενισχύοντας με ανισότητα τους υπόλοιπου όρους λαμβάνεται:

$$\begin{aligned} &-\frac{w}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \left(L(h_{x1} \sin \theta_1 - h_{x2} \sin \theta_2) + w(h_{y1} \cos \theta_1 - h_{y2} \cos \theta_2) \right) \\ &\leq \left| \frac{w}{2} L(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)(h_{x1} \sin \theta_1 - h_{x2} \sin \theta_2) \right| + \left| \frac{w^2}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)(h_{y1} \cos \theta_1 - h_{y2} \cos \theta_2) \right| \\ &\leq wL(1 - \cos \theta_{max}) + \frac{w^2}{2} (1 - \cos \theta_{max}) \end{aligned}$$

Συνολικά δηλαδή έχει προκύψει

$$\begin{aligned} d_{max}^2 &\leq L^2 \max(4p^2 \sin^2 \theta_{max}, 1 + (p - 1) \sin^2 \theta_{max}) \\ &+ w^2 p \max\left(\frac{4}{p^2} \sin^2 \theta_{max}, 1 + \left(\frac{1}{p} - 1\right) \sin^2 \theta_{max}\right) + w^2 \sin^2 \theta_{max} + \frac{w^2}{4} (1 - \cos \theta_{max})^2 \\ &+ 4(1 + p)Lw \sin \theta_{max} + wL \sin \theta_{max} + w^2 \sin \theta_{max} + wL(1 - \cos \theta_{max}) + \frac{w^2}{2} (1 - \cos \theta_{max}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Το δεξί μέλος της ανισότητας αυτής θα αποκαλείται στο εξής d_{safety} . Επομένως μέσω της παραπάνω ανάλυσης έχει εξασφαλιστεί ότι μια ικανή συνθήκη για την αποφυγή συγκρούσεων των οχημάτων είναι:

$$d_{ij} > d_{safety} \tag{4.5}$$

Για την επιβολή της παραπάνω απαίτησης και για την ύπαρξη ενός προσυμφωνημένου τρόπου αλληλεπίδρασης μεταξύ των οχημάτων θα χρειαστεί να οριστεί ένα τεχνητό δυναμικό πεδίο. Η λογική αυτού βασίζεται στο γεγονός ότι θα πρέπει να απειρίζεται για την οριακή περίπτωσης της της (4.5). Το δυναμικό αυτό θα αποκαλείται στο εξής ως Φ και θα πρέπει να έχει τις εξής ιδιότητες

1. $\Phi: (d_{safety}, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, το πεδίο ορισμού του δυναμικού θα είναι για αποστάσεις μεγαλύτερες από d_{safety} και θα παίρνει θετικές τιμές.
2. $\lim_{d_{ij} \rightarrow d_{safety}^+} \Phi(d_{ij}) = +\infty$

Έχοντας ορίσει το δυναμικό με βάση τα παραπάνω και επειδή το δυναμικό θα περιγράφει ουσιαστικά τον τρόπο αλληλεπίδρασης των οχημάτων θα ήταν μια λογική υπόθεση να θεωρηθεί ότι τα οχήματα δεν βρίσκονται κοντά (με την έννοια ότι η κίνηση του ενός δεν χρειάζεται να επηρεάζει την κίνηση του άλλου), όταν η απόσταση τους γίνεται μεγαλύτερη από μια προκαθορισμένη τιμή d_{inter} , δηλαδή προστίθεται η επιπλέον ιδιότητα:

3. $\Phi(d_{ij}) = 0, \text{ για } d_{ij} \geq d_{inter}$

Παρατήρηση 1

Ουσιαστικά μέσω της χρήσης του δυναμικού η ικανοποίηση της συνθήκης (4.1) ανάγεται στην ισοδύναμη συνθήκη $\Phi(d_{ij}) \in L_\infty \forall i, j$.

Για την παραμονή εντός ορίων του αυτοκινητόδρομου θα χρειαστεί να εξασφαλιστεί ότι η συνιστώσα κατά γ των συντεταγμένων όλων των σημείων της επιφάνειας ενός οχήματος θα παραμένει στο εύρος $(-\alpha, \alpha)$. Η τελευταία συνθήκη ισοδυναμεί με την απαίτηση ότι για τα σημεία A_y, K_y του σχήματος 7 γ γ συντεταγμένη τους να παραμένει εντός ορίων του δρόμου δηλαδή :

$$y_{A_y} < \alpha \text{ και } y_{K_y} > -\alpha$$

Η περίπτωση $y_{A_y} > -\alpha$ δεν χρειάζεται να εξετασθεί επιπλέον καθώς εξασφαλίζεται άμεσα από την $y_{A_y} > y_{K_y} > -\alpha$ ομοίως για την $y_{K_y} < \alpha$. Οι συντεταγμένες των σημείων αυτών με βάση τις συντεταγμένες του σημείου του πίσω άξονα (x, y) θα δίνονται:

$$y_{A_y} = y + L \cdot \sin \theta + \frac{w}{2} \cdot \cos \theta \quad y_{K_y} = y + L \cdot \sin \theta - \frac{w}{2} \cdot \cos \theta$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές με του περιορισμούς που προέκυψαν :

$$y < \alpha - L \cdot \sin \theta - \frac{w}{2} \cdot \cos \theta \quad (4.6\alpha)$$

$$y > -\alpha - L \cdot \sin \theta + \frac{w}{2} \cdot \cos \theta \quad (4.6\beta)$$

Θα χρειαστεί να βρεθεί τώρα ένα κάτω φράγμα για την $f(\theta) = \alpha - L \cdot \sin \theta - \frac{w}{2} \cdot \cos \theta$ και ένα άνω φράγμα για το $g(\theta) = -\alpha - L \cdot \sin \theta + \frac{w}{2} \cdot \cos \theta$. Παραγωγίζοντας την πρώτη προκύπτει

$$f'(\theta) = -L \cdot \cos \theta + \frac{w}{2} \cdot \sin \theta$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$f'(\theta) = 0 \text{ για } \tan \theta = \frac{2L}{w} \text{ ενώ } f'(\theta) > 0 \text{ για } 0 < \theta < \arctan \frac{2L}{w} \text{ και } f'(\theta) > 0 \text{ για } \theta > \arctan \frac{2L}{w}$$

Εφόσον από τον ελεγκτή που θα εφαρμοσθεί στο σύστημα εξασφαλίζεται ότι $\theta \in (-\theta_{max}, \theta_{max})$ για τον καθορισμό του άνω φράγματος στην περίπτωση όπου $\arctan \frac{2L}{w} \leq \theta_{max}$ αυτό θα προκύπτει από την τιμή $f(\arctan \frac{2L}{w})$, ενώ αν $\theta_{max} < \arctan \frac{2L}{w}$ επειδή η f θα είναι αύξουσα για $\theta \in (0, \theta_{max})$ το άνω φράγμα θα προκύπτει από την τιμή $f(\theta_{max})$.

Από την άλλη ισχύει

$$g'(\theta) = -L \cdot \cos \theta - \frac{w}{2} \cdot \sin \theta$$

Και με παρόμοια λογική με την παραπάνω το μέγιστο εφικτό κάτω φράγμα θα προκύπτει

τιμή $g(-\arctan \frac{2L}{w})$, όταν ισχύει $-\theta_{max} < -\arctan \frac{2L}{w}$ ή $g(\arctan \frac{2L}{w})$, για τις περιπτώσεις που ισχύει $-\arctan \frac{2L}{w} < -\theta_{max}$. Το κάτω φράγμα για το δεξί μέλος της (4.6α) όπως θα προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση θα είναι πάντοτε ίσο και αντίθετο από το άνω φράγμα για το δεξί μέλος της (4.6β), εφόσον για αυτά ισχύει ότι συμβαίνουν πάντα για ίσες και αντίθετες τιμές γωνιών. Η τιμή αυτών των άνω στο εξής θα καλείται a_r και $-a_r$ αντίστοιχα.

Από την παραπάνω διαδικασία με τα φράγματα προκύπτει ότι οι συνθήκες (4.6) ανάγονται στις

$$y < a_r \leq \alpha - L \cdot \sin \theta - \frac{w}{2} \cdot \cos \theta$$

$$y > -a_r \geq -\alpha - L \cdot \sin \theta + \frac{w}{2} \cdot \cos \theta$$

Αρκεί δηλαδή να εξασφαλιστεί σε κάθε περίπτωση $y \in (-a_r, a_r)$. Για τον λόγο αυτό στα πλαίσια του παρόντα ελεγκτή θα χρησιμοποιηθεί ένα δεύτερο δυναμικό για το οποίο θα πρέπει να ισχύει:

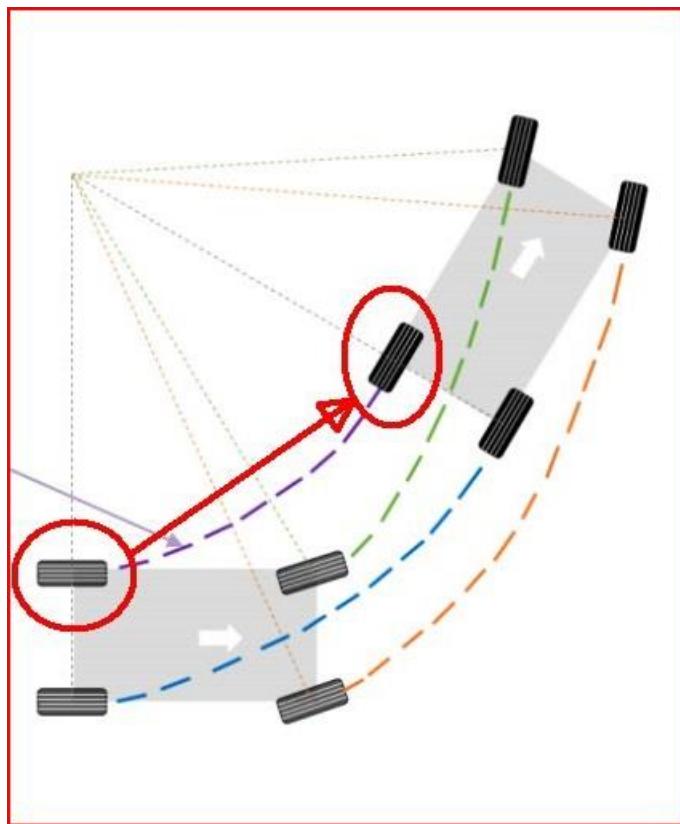
1. $U: (-a_r, a_r) \rightarrow [0, +\infty)$, θα λαμβάνει μόνο θετικές τιμές με πεδίο ορισμού το εύρος των αποδεκτών τιμών.
2. $\lim_{y_i \rightarrow a_r} U(y_i) = +\infty$ $\lim_{y_i \rightarrow -a_r} U(y_i) = +\infty$, δηλαδή θα απειρίζεται στο σύνορο αυτών.

Για λόγους καλύτερης εκμετάλλευσης του δρόμου μια χρήσιμη ιδιότητα θα ήταν η ενεργεία που βιώνει ένα όχημα λόγω της θέσης του κατά y μέσω του να μηδενίζεται σε ένα εσωτερικό σύνολο τιμών των αποδεκτών τιμών και όχι αποκλειστικά στο μέσο αυτών, δηλαδή στο 0. Το τελευταίο θα σήμαινε μια τάση προς όλα τα οχήματα σταδιακά να συγκλίνουν στο $y = 0$ γεγονός που θα άφηνε ανεκμετάλλευτο το πλάτος του δρόμου και θα οδηγούσε το σύστημα σε περισσότερο πιεστικές καταστάσεις αυξάνοντας έτσι τις απαιτήσεις για το παρεχόμενο έργο από τις εισόδους ελέγχου. Θα πρέπει δηλαδή για το δυναμικό να ισχύει επιπλέον ότι:

3. $U(y_i) = 0 \forall y_i \in (a_n + \varepsilon_\alpha, a_p - \varepsilon_\alpha)$ με $\varepsilon_\alpha > 0$ που αποτελεί στην πράξη σχεδιαστική παράμετρο.

Παρατήρηση 1

Η συνθήκη της πλήρους παραμονής όλης της επιφάνειας ενός οχήματος εντός ορίων του αυτοκινητόδρομου κατέστη δυνατό να αναχθεί στην συνθήκη $y_{A_y} < a$ και $y_{K_y} > -a$ δηλαδή σε μια συνθήκη που αφορά μόνο τα πάνω και κάτω σημεία της μπροστά πλευράς του παραλληλογράμμου που περιβάλλει το όχημα, καθώς τα οχήματα εντός του αυτοκινητόδρομου θα κινούνται με αυστηρά θετικές ταχύτητες. Το τελευταίο σημαίνει ότι τα σημεία του πίσω άξονα καθώς και όλα τα ενδιάμεσα σημεία θα τείνουν να ακολουθούν την τροχιά των αντίστοιχων σημείων του μπροστινού άξονα χωρίς ωστόσο ποτέ να την ξεπερνούν. Θα βρίσκονται δηλαδή πάντα στην περιοχή που ορίζεται από την τροχιά των σημείων του μπροστινού άξονα και του κέντρου περιστροφής για αυτή. Το τελευταίο χρησιμοποιείται εδώ καθώς για οποιαδήποτε σημείο του οχήματος θα ισχύει $y_{K_y} \leq y \leq y_{A_y}$, για οποιαδήποτε κίνηση εφόσον αυτό κινείται με θετική ταχύτητα και έχει δυνατότητα περιστροφής μόνο των εμπρόσθιων τροχών. Ένα οπτικό παράδειγμα αποτελεί το παρακάτω σχήμα που αναπαριστά ουσιαστικά την κίνηση του οχήματος για μια κίνηση αποφυγής του κάτω συνόρου του δρόμου (αριστερή στροφή). Σε αυτό φαίνεται ότι οι πίσω τροχοί θα βρίσκονται πάντα στο εσωτερικό της τροχιάς των μπροστά.



Σχήμα 11 Τροχιά πίσω τροχών

Οι υποθέσεις που διατυπώνονται παραπάνω προφανώς ισχύουν και για την περίπτωση όπου για ένα χρονικό διάστημα ένα όχημα προσεγγίζει το σύνορο του δρόμου, καθώς και για κάθε κίνηση απομάκρυνσης από αυτό, άρα και σε κάθε κίνηση.

4.3 Ικανοποίηση περιορισμών ταχύτητας- προσανατολισμού

Έχοντας πλέον ορίσει τα κατάλληλα δυναμικά, στην συνέχεια θα γίνει αναφορά στον τρόπο με τον οποίο θα εξασφαλιστεί η τήρηση των ορίων ταχύτητα και προσανατολισμού. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθούν έννοιες άμεσα σχετιζόμενες και εμπνευσμένες από τον έλεγχο προδιαγραμμένης απόκρισης. Συγκεκριμένα οι απαιτήσεις για την ταχύτητα και τον προσανατολισμό ανάγονται στους εξής περιορισμούς :

$$\theta \in (-\theta_{max}, \theta_{max}), \text{όπου } 0 < \theta_{max} < \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad V \in (0, V_{max})$$

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο στον έλεγχο προδιαγραμμένης απόκρισης όταν τίθεται σαν στόχος ελέγχου η έξοδος x να βρίσκεται εντός του envelope $(-\rho(t), \rho(t))$, τότε ορίζεται η ποσότητα:

$$\xi = \frac{x}{\rho(t)}$$

Κατά πλήρη αντιστοιχία εδώ για να περιοριστεί το θ εντός των απαιτούμενων ορίων θα οριστεί η ποσότητα :

$$\xi_\theta = \frac{\theta}{\theta_{max}}$$

Για την παραμονή εντός των ορίων ταχύτητας και εφόσον τα άκρα του διαστήματος των περιορισμών δεν είναι συμμετρικά ως προς το 0, δηλαδή δεν είναι της μορφής $(-V_{max}, V_{max})$, θα οριστεί η ποσότητα :

$$\xi_V = \frac{V - \frac{V_{max}}{2}}{\frac{V_{max}}{2}}$$

Η τελευταία ορίστηκε με την διαφοροποίηση αυτή, καθώς η συνθήκη διατήρησης του $\xi_V \in (-1,1)$ είναι ισοδύναμη με την συνθήκη $V \in (0, V_{max})$ όπως εξηγείται και στην παρατήρηση 1 που ακολουθεί. Στην συνέχεια θα οριστούν κατά αντιστοιχία των μη περιορισμένων σφαλμάτων τα :

$$\varepsilon_\theta = \ln \left(\frac{1 + \xi_\theta}{1 - \xi_\theta} \right) \quad (4.6)$$

Και για την ταχύτητα αντίστοιχα με την τροποποίηση της εισαγωγής ενός επιπλέον θετικού συντελεστή

$$\varepsilon_V = \ln \left(a_{shift} \cdot \frac{1 + \xi_V}{1 - \xi_V} \right) \quad (4.7)$$

Ο επιπλέον αυτός συντελεστής εισάγεται για την εξασφάλιση σύγκλισης στην επιθυμητή ταχύτητα V^* και η τιμή του θα επιλέγεται ανάλογα με τις V_{max}, V^* . Η απαίτηση για αυτόν είναι να εξασφαλίζεται μέσω της εισαγωγής του στην (4.7)

$$\varepsilon_V = 0, \text{όταν } V = V^*$$

Η τελευταία είναι ισοδύναμη με την απαίτηση να ισχύει

$$a_{shift} = \frac{1 - \xi_{V^*}}{1 + \xi_{V^*}}, \text{όπου } \xi_{V^*} = \frac{V^* - \frac{V_{max}}{2}}{\frac{V_{max}}{2}} \quad (4.8)$$

Ο συντελεστής αυτός πέρα από τα παραπάνω εξασφαλίζει και ότι $\varepsilon_V > 0$, αν $V > V^*$, $\varepsilon_V < 0$, αν $V < V^*$ (4.9). Χωρίς την χρήση του θα ίσχει $\varepsilon_V = 0$, όταν $V = \frac{V_{max}}{2}$. Για την περίπτωση του ε_θ δεν χρειάζεται να εισαχθεί κάποιος επιπλέον συντελεστής, εφόσον ο στόχος σύγκλισης βρίσκεται στο μέσο των δύο άκρων, δηλαδή για εδώ είναι το 0 (τα οχήματα αναφέρθηκε ότι στην μόνιμη κατάσταση δεν πρέπει να αλλάζουν την θέση τους κατά y , δηλαδή να έχουν προσανατολισμό $\theta = 0$).

Παρατήρηση 1

Γενικότερα η χρήση του ελέγχου προδιαγεγραμμένης απόκρισης είναι εφικτή και για περιπτώσεις όπου τα ανεκτά φράγματα για το σφάλμα είναι μη συμμετρικά ως προς το 0, δηλαδή για περιπτώσεις όπου η απαίτηση για το προς έλεγχο σύστημα είναι της μορφής:

$$\rho_d < x < \rho_u$$

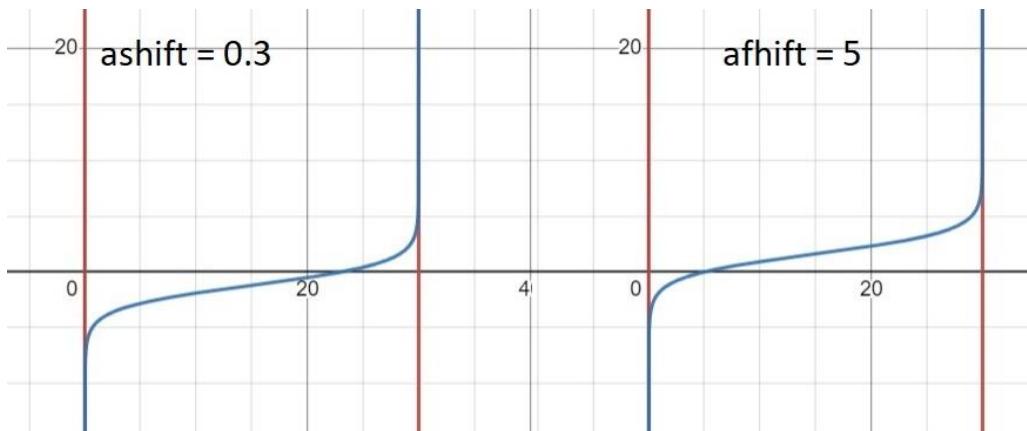
Αυτό μπορεί να δειχθεί προσθέτοντας στην τελευταία όλα τα μέρη το $-\frac{\rho_u}{2} + \frac{\rho_d}{2}$ και άρα

$$-\left(\frac{\rho_u}{2} + \frac{\rho_d}{2}\right) < x - \frac{\rho_u}{2} + \frac{\rho_d}{2} < \frac{\rho_u}{2} + \frac{\rho_d}{2} \Rightarrow -1 < \frac{x - \frac{\rho_u}{2} + \frac{\rho_d}{2}}{\frac{\rho_u}{2} + \frac{\rho_d}{2}} < 1$$

Άρα και εδώ αρκεί να οριστεί το $\xi = \frac{x - \frac{\rho_u}{2} + \frac{\rho_d}{2}}{\frac{\rho_u}{2} + \frac{\rho_d}{2}}$ και να ακολουθηθεί η ίδια μεθοδολογία σχεδίασης ελέγχου με την περίπτωση των συμμετρικών άκρων.

Παρατήρηση 2

Η λογική με βάση με την οποία εισάχθηκε ο συντελεστής a_{shift} είναι η δυνατότητα μετατόπισης του σημείου μηδενισμού του ε_V χωρίς αυτό να επηρεάζει τα σημεία απειρισμού του, για την οπτικοποίηση αυτού παρατίθενται τα ακόλουθα διαγράμματα :



Σχήμα 12 Επίδραση χρήσης a_{shift} στο ε_V

4.4 Ανάλυση Lyapunov

Οι είσοδοι ελέγχου που θα εφαρμοστούν στο κάθε όχημα θα δίνονται από:

$$F_i = -\Sigma F_{xpoti} \cos(\theta_i) - \Sigma F_{ypoti} \sin(\theta_i) - k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \quad (4.10)$$

$$u_i = L \frac{\Sigma F_{xpoti} \sin(\theta_i) - \Sigma F_{ypoti} \cos(\theta_i) + \frac{\sin(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} - k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i}}{V_i^2} \quad (4.11)$$

$$\Sigma F_{xpot} = \sum_{i \neq j} \Phi'(d_{ij}) \frac{x_i - x_j}{d_{ij}} \quad (4.12) \quad \text{και} \quad \Sigma F_{ypot} = U'(y_i) + p \sum_{i \neq j} \Phi' (d_{ij}) \frac{y_i - y_j}{d_{ij}} \quad (4.13)$$

$\varepsilon_{Vi}, \varepsilon_{\theta i}$ όπως ορίστηκαν στις σχέσεις (4.6), (4.7), $k_{Vi}, k_{\theta i}$ ελεύθερα θετικά κέρδη. Ο όρος $1 + \cos(\theta_i)$ που εμφανίζεται στον παρονομαστή ενός όρου το ελεγκτή είναι διάφορος του 0 εφόσον μέσω της εφαρμογής του ελεγκτή εξασφαλίζεται $\theta \in (-\theta_{max}, \theta_{max}) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(\theta) \geq 0$.

Ορίζεται η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V_{lyap} = \sum_{i=1}^n U(y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Phi(d_{ij}) + \frac{1}{2} (V_i \cos(\theta_i) - V^*)^2 + \frac{1}{2} (V_i \sin(\theta_i))^2 \quad (4.14)$$

Όπου $U(y_i), \Phi(d_{ij})$ τα δυναμικά που ορίστηκαν προηγουμένως. Με παραγώγιση προκύπτει

$$\begin{aligned} \dot{V}_{lyap} &= U'(y_i) V_i \sin(\theta_i) + \sum_{i \neq j} \Phi'(d_{ij}) \frac{(x_i - x_j) V_i \cos(\theta_i) + p(y_i - y_j) V_i \sin(\theta_i)}{d_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(V_i \cos(\theta_i) - V^* \right) \left(F_i \cos(\theta_i) - \frac{V_i^2 \cos(\theta_i) u_i}{L} \right) + V_i \sin(\theta_i) \left(F_i \sin(\theta_i) + \frac{V_i^2 \cos(\theta_i) u_i}{L} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{lyap} &= \sum_{i=1}^n \left(V_i \sin(\theta_i) (U'(y_i) + p \sum_{i \neq j} \Phi'(d_{ij}) \frac{y_i - y_j}{d_{ij}}) + V_i \cos(\theta_i) \sum_{i \neq j} \Phi'(d_{ij}) \frac{x_i - x_j}{d_{ij}} \right. \\ &\quad \left. + (V_i \cos(\theta_i) - V^*) (F_i \cos(\theta_i) - \frac{V_i^2 \cos(\theta_i) u_i}{L}) + V_i \sin(\theta_i) (F_i \sin(\theta_i) + \frac{V_i^2 \cos(\theta_i) u_i}{L}) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Αν } \Sigma F_{xpot} = \sum_{i \neq j} \Phi'(d_{ij}) \frac{x_i - x_j}{d_{ij}} \quad \text{και} \quad \Sigma F_{ypot} = U'(y_i) + p \sum_{i \neq j} \Phi'(d_{ij}) \frac{y_i - y_j}{d_{ij}}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{lyap} &= \sum_{i=1}^n \left(V_i \sin(\theta_i) \Sigma F_{ypoti} + V_i \cos(\theta_i) \Sigma F_{xpoti} \right. \\ &\quad \left. + (V_i \cos(\theta_i) - V^*) (F_i \cos(\theta_i) - \frac{V_i^2 \cos(\theta_i) u_i}{L}) + V_i \sin(\theta_i) (F_i \sin(\theta_i) + \frac{V_i^2 \cos(\theta_i) u_i}{L}) \right) \end{aligned}$$

Επίσης ισχύει ότι $\sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} \Phi'(d_{ij}) \frac{x_i - x_j}{d_{ij}} = 0$ αρα και $\sum_{i=1}^n V^* \sum_{i \neq j} \Phi'(d_{ij}) \frac{x_i - x_j}{d_{ij}} = 0$ και χρησιμοποιώντας αυτό μπορεί να εμφανιστεί ο όρος στην παράσταση χωρίς να αλλάξει η ισότητα:

$$\dot{V}_{lyap} = \sum_{i=1}^n \frac{V_i \sin(\theta_i) \Sigma F_{ypoti} + (V_i \cos(\theta_i) - V^*) \Sigma F_{xpotti}}{(V_i \cos(\theta_i) - V^*)(F_i \cos(\theta_i) - \frac{V_i^2 \cos(\theta_i) u_i}{L}) + V_i \sin(\theta_i) (F_i \sin(\theta_i) + \frac{V_i^2 \cos(\theta_i) u_i}{L})}$$

Επιλέγοντας

$$F_i = -\Sigma F_{xpotti} \cos(\theta_i) - \Sigma F_{ypotti} \sin(\theta_i) - k_{Vi} \varepsilon_{Vi}$$

$$u_i = L \frac{\Sigma F_{xpotti} \sin(\theta_i) - \Sigma F_{ypotti} \cos(\theta_i) + \frac{\sin(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} - k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i}}{V_i^2}$$

Για λόγους παρουσίασης θα υπολογιστούν ξεχωριστά οι όροι :

$$F_i \cos(\theta_i) = -\Sigma F_{xpotti} \cos^2(\theta_i) - \Sigma F_{ypotti} \sin(\theta_i) \cos(\theta_i) - k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \cos(\theta_i)$$

$$-\frac{V_i^2 \sin(\theta_i) u_i}{L} = -\Sigma F_{xpotti} \sin^2(\theta_i) + \Sigma F_{ypotti} \cos(\theta_i) \sin(\theta_i) - \frac{\sin^2(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} + k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i)$$

Αρα:

$$F_i \cos(\theta_i) - \frac{V_i^2 \sin(\theta_i) u_i}{L} = -\Sigma F_{xpotti} - k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \cos(\theta_i) - \frac{\sin^2(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} + k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i)$$

Ενώ

$$(V \cos(\theta_i) - V^*) \left(F_i \cos(\theta_i) - \frac{V_i^2 \sin(\theta_i) u_i}{L} \right) =$$

$$-(V_i \cos(\theta_i) - V^*) \Sigma F_{xpotti} - V_i k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \cos^2(\theta_i) - V_i \frac{\cos(\theta_i) \sin^2(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} + V_i k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i) \cos(\theta_i)$$

$$+ V^* k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \cos(\theta_i) + V^* \frac{\sin^2(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} - V^* k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i)$$

Επίσης υπολογίζεται:

$$F_i \sin(\theta_i) = -\Sigma F_{xpotti} \sin(\theta_i) \cos(\theta_i) - \Sigma F_{ypotti} \sin^2(\theta_i) - k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \sin(\theta_i)$$

$$\frac{V_i^2 \cos(\theta_i) u_i}{L} = \Sigma F_{xpotti} \cos(\theta_i) \sin(\theta_i) - \Sigma F_{ypotti} \cos^2(\theta_i) + \frac{\cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} - k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \cos(\theta_i)$$

Αρα:

$$F_i \sin(\theta_i) + \frac{V_i^2 \cos(\theta_i) u_i}{L} = -\Sigma F_{ypotti} - k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \sin(\theta_i) + \frac{\cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} - k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \cos(\theta_i)$$

Και τελικά

$$V_i \sin(\theta_i) \left(F_i \sin(\theta_i) + \frac{V_i^2 \cos(\theta_i) u_i}{L} \right) = \\ -V_i \sin(\theta_i) \Sigma F_{ypoti} - V_i k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \sin^2(\theta_i) + V_i \frac{\cos(\theta_i) \sin^2(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} - V_i k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i) \cos(\theta_i)$$

Και αντικαθιστώντας στην (4.15)

$$\dot{V}_{lyap} = \\ V_i \sin(\theta_i) \Sigma F_{ypoti} + (V_i \cos(\theta_i) - V^*) \Sigma F_{xpoti} - V_i \sin(\theta_i) \Sigma F_{ypoti} - (V_i \cos(\theta_i) - V^*) \Sigma F_{xpoti} \\ = \sum_{i=1}^n -V_i k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \cos^2(\theta_i) - V_i \frac{\cos(\theta_i) \sin^2(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} + V_i k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i) \cos(\theta_i) + V^* k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \cos(\theta_i) \\ + V^* \frac{\sin^2(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} - V^* k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i) - V_i k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \sin^2(\theta_i) \\ + V_i \frac{\cos(\theta_i) \sin^2(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} - V_i k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i) \cos(\theta_i)$$

$$\dot{V}_{lyap} = \sum_{i=1}^n -V_i k_{Vi} \varepsilon_{Vi} + V^* k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \cos(\theta_i) + V^* \frac{(1 - \cos(\theta_i))(1 + \cos(\theta_i))}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi} \varepsilon_{Vi} - V^* k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i) \\ \dot{V}_{lyap} = \sum_{i=1}^n -V_i k_{Vi} \varepsilon_{Vi} + V^* k_{Vi} \varepsilon_{Vi} \cos(\theta_i) + V^* k_{Vi} \varepsilon_{Vi} - V^* k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \cos(\theta_i) - V^* k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i) \\ \dot{V}_{lyap} = \sum_{i=1}^n -(V_i - V^*) k_{Vi} \varepsilon_{Vi} - V^* k_{\theta i} \varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i) \quad (4.16)$$

Από την οποία μπορεί να προκύψει άμεσα ότι $\dot{V}_{lyap} \leq 0$ εφόσον ισχύουν τα εξής:

$$k_{Vi}, k_{\theta i} > 0 \\ \varepsilon_V > 0, \alpha \nu V > V^* \quad και \quad \varepsilon_V < 0, \alpha \nu V < V^* \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_\theta > 0, \alpha \nu \theta > 0, \sin \theta > 0, \alpha \nu 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad και \quad \varepsilon_\theta < 0, \alpha \nu \theta < 0, \sin \theta < 0, \alpha \nu -\frac{\pi}{2} < \theta < 0$$

Έχοντας πλέον εξασφαλίσει $\dot{V}_{lyap} \leq 0$ η V_{lyap} θα είναι μια φθίνουσα συνάρτηση και επομένως θα ισχύει: $V_{lyap}(t) \leq V_{lyap}(0) \forall t > 0$, δηλαδή θα παίρνει τιμές πάντοτε μικρότερες από την αρχική της τιμή. Πλέον μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι: $V_{lyap}(t) \in L_\infty$ εφόσον εξ υποθέσεως για τις αρχικές θέσεις των οχημάτων (ότι στην αρχική κατάσταση τα οχήματα δεν βρίσκονται σε σύγκρουση) ισχύει $V_{lyap}(0) \in L_\infty$. Επίσης, ισχύει $\sum_{i=1}^n U(y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Phi(d_{ij}) \leq V_{lyap}$, αρα προκύπτει και $\sum_{i=1}^n U(y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Phi(d_{ij}) \in L_\infty$ και επομένως $U(y_i) \in L_\infty$ και $\Phi(d_{ij}) \in L_\infty \forall i \in 1..n$. Εξασφαλίζεται δηλαδή ότι όλα τα δυναμικά που εμπλέκονται στο σύστημα θα παραμείνουν

φραγμένα και επομένως η αποφυγή των συγκρούσεων μεταξύ των οχημάτων και η αποφυγή της εξόδου από τα όρια του αυτοκινητόδρομου έχουν εξασφαλιστεί.

Στην συνέχεια θα πρέπει να αποδειχθεί ότι δεν παραβιάζονται οι περιορισμοί δηλαδή $\varepsilon_{Vi}, \varepsilon_{\theta i} \in L_\infty$. Για τον λόγο αυτό θα θεωρηθούν οι υποψήφιες συναρτήσεις Lyapunov

$$V_{Vi} = \frac{1}{2} \varepsilon_{Vi}^2 \text{ και } V_{\theta i} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\theta i}^2 \quad (4.17)$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη προκύπτει:

$$\dot{V}_{Vi} = 2\varepsilon_{Vi} a_{shift} \frac{\dot{\xi}_{Vi}}{(1 - \xi_{Vi})(1 + \xi_{Vi})}$$

$$\begin{aligned} \text{Η παράγωγος } \dot{\xi}_{Vi} &= \frac{\dot{V}_i}{\frac{V_{max}}{2}} = \frac{2F_i}{V_{max}} \quad \text{άρα } \dot{V}_{Vi} = \frac{4a_{shift}}{(1 - \xi_{Vi})(1 + \xi_{Vi})V_{max}} \varepsilon_{Vi} F_i \\ \dot{V}_{Vi} &= \frac{4a_{shift}}{(1 - \xi_{Vi})(1 + \xi_{Vi})V_{max}} \varepsilon_{Vi} (-\Sigma F_{xpoti} \cos(\theta_i) - \Sigma F_{ypoti} \sin(\theta_i) - k_{Vi} \varepsilon_{Vi}) \quad (4.18) \end{aligned}$$

Από την (4.18) συνεπάγεται ότι $\varepsilon_{Vi} \in L_\infty$, εφόσον οι περιορισμοί του προβλήματος επιτρέπουν να υπάρχει $M > 0$ με $M \in L_\infty$ τέτοιο ώστε $|\Sigma F_{xpoti} \cos(\theta_i) - \Sigma F_{ypoti} \sin(\theta_i)| < M$ χωρίς να οδηγούνται τα $\varepsilon_{Vi}, \varepsilon_{\theta i}$ στο ∞ . Το τελευταίο όταν οι περιορισμοί είναι της μορφής $\theta \in (-\theta_{max}, \theta_{max})$ και $V \in (0, V_{max})$ είναι πάντοτε εφικτό. Αυτό γίνεται καθώς δίνεται η δυνατότητα κινήσεων στο σύστημα που επιτρέπουν την σταδιακή μείωση της δύναμη που βιώνει κάθε agent(όχημα) από το συνιστάμενο δυναμικό λόγω των γειτόνων του. Συγκεκριμένα $-\Sigma F_{xpoti}$ μπορεί να παραμείνει φραγμένη εντός των περιορισμών που τίθενται για την ταχύτητα και τον προσανατολισμό, δηλαδή να επιτρέπονται κινήσεις απομάκρυνσης από την «πηγή» της δύναμης που προκαλείται. Στην περίπτωση της συνιστώσας της δύναμη του πεδίου κατά x η πηγή είναι μόνο τα μπροστά και τα πίσω οχήματα. Η δύναμη που βιώνει ένα προπορευόμενο όχημα θα είναι φραγμένη καθώς σταδιακά θα επιβάλλει στα πίσω οχήματα να αποκτήσουν ταχύτητα κατά V_x μικρότερη από την δική του, επειδή αν το ίδιο έχει ταχύτητα $V_{xf} \in (0, V_{max})$ πάντοτε θα υπάρχει $\delta > 0$ οσοδήποτε μικρό τέτοιο ώστε τα πίσω οχήματα να αποκτήσουν ταχύτητα $V_{xb} \in (0, V_{max})$ για την οποία ισχύει $V_{xb} - V_{xf} < -\delta$. Η τελευταία δηλώνει ότι πάντοτε υπάρχει δυνατότητα παραμένοντας εντός του συνόλου των περιορισμών η σχετική ταχύτητα μεταξύ πηγής της δύναμης και του οχήματος που την βιώνει να γίνει αρνητική και επομένως η μεταξύ τους απόσταση να μειωθεί. Η μείωση της μεταξύ τους απόστασης συνεπάγεται ότι η δύναμη από ένα σημείο και έπειτα θα μειώνεται και άρα δεν θα ξεπεράσει την τιμή που είχε στο χρονικό σημείο αυτό άρα και θα παραμείνει φραγμένη. Ομοίως ισχύουν οι ισχυρισμοί για την δυνατότητα για το φραγμένο της δύναμης κατά x για ένα όχημα που ακολουθεί ένα προπορευόμενο. Για να υπάρχει δυνατότητα και η $-\Sigma F_{ypoti}$ να παραμείνει φραγμένη εντός του συνόλου των περιορισμών θα πρέπει κατά αντιστοιχία να υπάρχει δυνατότητα απομάκρυνσης από την πηγή που την προκαλεί. Η διαφοροποίηση εδώ είναι ότι οι πηγές των δυνάμεων είναι δύο, τα πάνω και κάτω οχήματα και το ακίνητο πλευρικό τοίχωμα. Για την δυνατότητα απομάκρυνσης από τα υπόλοιπα οχήματα κατά την ίδια λογική για την συνιστώσα της δύναμης κατά x και με $V_{yb} \in (-V_{max} \sin(\theta_{max}), V_{max} \sin(\theta_{max}))$ πάντοτε θα υπάρχει $\delta > 0$ οσοδήποτε μικρό τέτοιο ώστε το όχημα να αποκτήσει ταχύτητα $V_{yf} \in (-V_{max} \sin(\theta_{max}), V_{max} \sin(\theta_{max}))$ για την οποία ισχύει $V_{yb} - V_{yf} < -\delta$ όταν $y_f > y_b$ και $V_{yb} - V_{yf} > \delta$ όταν $y_f < y_b$, δηλαδή σε κάθε περίπτωση η μεταξύ

τους απόσταση κατά τον άξονα γ να αυξηθεί. Για τα ακίνητα πλευρικά τοιχώματα θεωρώντας $V_{yf} = 0$ εξασφαλίζεται το ίδιο εφόσον επιτρέπονται κινήσεις και προς τις δύο κατευθύνσεις κατά την συνιστώσα γ. Πλέον έχει εξασφαλιστεί ότι $\varepsilon_{Vi} \in L_\infty$, εφόσον

$$\dot{V}_{Vi} = \frac{4a_{shift}}{(1 - \xi_{Vi})(1 + \xi_{Vi})V_{max}} (M|\varepsilon_{Vi}| - k_{Vi}\varepsilon_{Vi}^2) < 0 \quad \text{για } |\varepsilon_{Vi}| < \frac{M}{k_{Vi}}$$

Παραγωγίζοντας τώρα την $V_{\theta i}$ προκύπτει:

$$\dot{V}_{\theta i} = 2\varepsilon_{\theta i} \frac{\dot{\xi}_{\theta i}}{(1 - \xi_{\theta i})(1 + \xi_{\theta i})} \quad (4.18)$$

Η παράγωγος $\dot{\xi}_{\theta i} = \frac{\dot{\theta}_i}{\theta_{max}} = \frac{v_i u_i}{L \theta_{max}}$ άρα

$$\begin{aligned} \dot{V}_{Vi} &= \frac{2V_i}{(1 - \xi_{\theta i})(1 + \xi_{\theta i})L \theta_{max}} \varepsilon_{\theta i} \left(L \frac{\Sigma F_{xpoti} \sin(\theta_i) - \Sigma F_{ypoti} \cos(\theta_i) + \frac{\sin(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi}\varepsilon_{Vi} - k_{\theta i}\varepsilon_{\theta i}}{V_i^2} \right) \\ \dot{V}_{\theta i} &= \frac{2}{(1 - \xi_{\theta i})(1 + \xi_{\theta i}) \theta_{max} V_i} \varepsilon_{\theta i} \left(\Sigma F_{xpoti} \sin(\theta_i) - \Sigma F_{ypoti} \cos(\theta_i) + \frac{\sin(\theta_i)}{1 + \cos(\theta_i)} k_{Vi}\varepsilon_{Vi} - k_{\theta i}\varepsilon_{\theta i} \right) \end{aligned}$$

Το $\varepsilon_{Vi} \in L_\infty$ από την προηγούμενη ανάλυση όπως και τα $\Sigma F_{xpoti} \sin(\theta_i) - \Sigma F_{ypoti} \cos(\theta_i)$, για τους λόγους που εξηγήθηκε παραπάνω.

Επομένως $\varepsilon_{\theta i} \in L_\infty$. Αρά έχει αποδειχθεί η τήρηση των περιορισμών. Άρα από την (4.16)

$$\dot{V}_{lyap} = \sum_{i=1}^n -(V_i - V^*)k_{Vi}\varepsilon_{Vi} - V^*k_{\theta i}\varepsilon_{\theta i} \sin(\theta_i) \Rightarrow \dot{V}_{lyap} \in L_\infty$$

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης θα γίνει χρήση του λήμματος Barbalat το οποίο διατυπώνεται ως εξής : Αν για μια παραγωγίσιμη θετική συνάρτηση f ισχύουν $f \in L_\infty \cap L_2$ και $\dot{f} \in L_\infty$ τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$. Με την χρήση αυτού θα αποδειχθούν ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} V_i \cos(\theta_i) = V^*$, $\lim_{t \rightarrow \infty} V_i \sin(\theta_i) = 0$.

Συγκεκριμένα έχει ήδη αποδειχθεί στην ότι $V_{lyap}(t) \in L_\infty$, άρα και

$$\sum_{i=1}^n (V_i \cos(\theta_i) - V^*)^2 + (V_i \sin(\theta_i))^2 \in L_\infty \quad (4.18)$$

Ενώ εφόσον όλοι οι όροι που σχετίζονται με τα F, u είναι φραγμένοι σαν πράξη φραγμένων ποσοτήτων, εφόσον τα δυναμικά δεν απειρίζονται θα ισχύει ότι δεν απειρίζονται και οι δυνάμεις που προκαλούνται από τα πεδία, ενώ οι όροι ε_V και ε_θ είναι επίσης φραγμένοι και συνεπώς ισχύει:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n (V_i \cos(\theta_i) - V^*)^2 + (V_i \sin(\theta_i))^2 \right) \in L_\infty \quad (4.19)$$

Μένει τώρα να δειχθεί ότι

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n (V_i \cos(\theta_i) - V^*)^2 + (V_i \sin(\theta_i))^2 \in L_\infty \quad (4.20)$$

Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθεί η ανισότητα ότι

$$(V - V^*)^2 \leq (V - V^*)\varepsilon_V$$

Καθώς και

$$V^* \sin^2 \theta \leq V^* \sin \theta \varepsilon_\theta$$

Παίρνοντας τα ολοκληρώματα για τις δύο τελευταίες και αθροίζοντας τες κατά μέλη:

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n k_{V_i} (V_i - V^*)^2 + V^* k_{\theta_i} \sin^2 \theta_i \leq \int_0^\infty \sum_{i=1}^n (V_i - V^*) k_{V_i} \varepsilon_{V_i} + V^* \sin \theta_i k_{\theta_i} \varepsilon_{\theta_i} \quad (4.21)$$

Έχοντας όμως από την (4.15) ότι :

$$\dot{V}_{lyap} = \sum_{i=1}^n -(V_i - V^*) k_{V_i} \varepsilon_{V_i} - V^* k_{\theta_i} \varepsilon_{\theta_i} \sin(\theta_i)$$

Για το δεξί μέλος της (4.21) ισχύει

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n (V_i - V^*) k_{V_i} \varepsilon_{V_i} + V^* k_{\theta_i} \sin \theta_i \varepsilon_{\theta_i} \leq V_{lyap}(0) - V_{lyap}(\infty)$$

Από το οποίο μπορεί εξασφαλιστεί ότι

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n (V_i - V^*) k_{V_i} \varepsilon_{V_i} + V^* k_{\theta_i} \sin \theta_i \varepsilon_{\theta_i} \in L_\infty, V_{lyap} \in L_\infty$$

Άρα και από την (4.21) $\int_0^\infty \sum_{i=1}^n k_{V_i} (V_i - V^*)^2 + V^* k_{\theta_i} \sin^2 \theta_i \in L_\infty \Rightarrow$

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n (V_i - V^*)^2 + \sin^2 \theta_i \in L_\infty, \text{όμως ισχύει}$$

$$\sum_{i=1}^n (V_i \cos(\theta_i) - V^*)^2 + (V_i \sin(\theta_i))^2 = \sum_{i=1}^n V_i^2 + V^{*2} - 2V_i V^* \cos \theta_i$$

$$\sum_{i=1}^n (V_i - V^*)^2 + 2V_i V^* (1 - \cos \theta_i) \leq \sum_{i=1}^n (V_i - V^*)^2 + 2V_{max} V^* \sin^2 \theta_i$$

Άρα με τον συνδυασμό των παραπάνω και με ολοκλήρωση της τελευταίας προκύπτει η (4.22)

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n (V_i \cos(\theta_i) - V^*)^2 + (V_i \sin(\theta_i))^2 \in L_\infty \quad \sum_{i=1}^n (V_i \cos(\theta_i) - V^*)^2 + (V_i \sin(\theta_i))^2 \in L_2$$

Από τις (4.19) (4.20)(4.22) συνολικά για την $f = (V_i \cos(\theta_i) - V^*)^2 + (V_i \sin(\theta_i))^2$ και μέσω χρήσης Λήμματος Barbalat:

$$f \in L_\infty \cap L_2 \text{ και } \dot{f} \in L_\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (V_i \cos(\theta_i) - V^*)^2 + (V_i \sin(\theta_i))^2 = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_i \cos(\theta_i) = V^* \text{ και } \lim_{t \rightarrow \infty} V_i \sin(\theta_i) = 0$$

Παρατήρηση 1

Η φυσική σημασία της επιλεγμένης συνάρτησης Lyapunov είναι ότι πρόκειται για το άθροισμα ποσοτήτων που αντιστοιχούν με ενέργεια. Συγκεκριμένα οι όροι $U(y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Phi(d_{ij})$ εκφράζουν την συνολική ενέργεια του δυναμικού που βιώνει το κάθε όχημα εντός του αυτοκινητόδρομου, ενώ ο $(V_i \sin(\theta_i))^2$ την κινητική ενέργεια για τον άξονα y για το κάθε όχημα για έναν ακίνητο παρατηρητή, ενώ τέλος $(V_i \cos(\theta_i) - V^*)^2$ την κινητική ενέργεια για τον άξονα x για έναν κινούμενο παρατηρητή με ταχύτητα V^* κατά τον άξονα x . Παρατηρώντας αυτή είναι προφανές ότι η ελαχιστοποίηση αυτών (δηλαδή ο μηδενισμός τους, αφού είναι μη αρνητικοί όροι) εκφράζει και την επιθυμητή μόνιμη κατάσταση.

Παρατήρηση 2

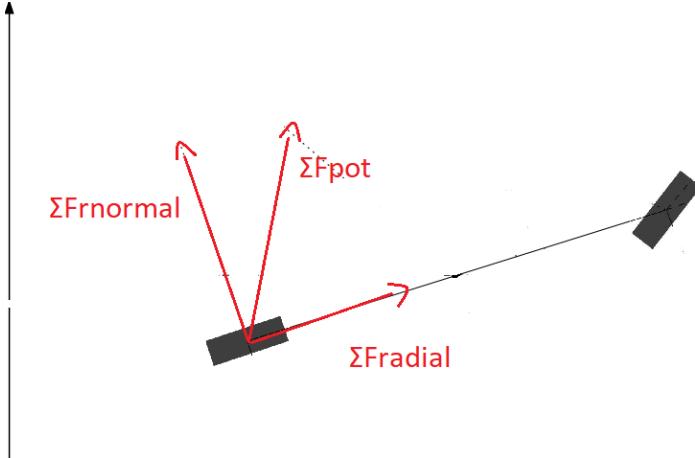
Οι όροι $-\Sigma F_{xpot} = -\sum_{i \neq j} \Phi'(d_{ij}) \frac{x_i - x_j}{d_{ij}}$ και $-\Sigma F_{ypot} = -(U'(y_i) + \sum_{i \neq j} \Phi'(d_{ij}) \frac{y_i - y_j}{d_{ij}})$ θα εκφράζουν την συνιστάμενη δύναμη που επιβάλλεται σε κάθε agent από το συνιστάμενο πεδίο. Συγκεκριμένα είχε γίνει η θεώρηση ότι $U'(y_i) \rightarrow -\infty$ για $y_i \rightarrow +\alpha$ και $U'(y_i) \rightarrow +\infty$ για $y_i \rightarrow -\alpha$, επομένως οι όροι αυτοί τείνουν να επαναφέρουν το όχημα εντός δρόμου. Έχοντας επιπλέον ότι $\Phi'(d_{ij}) > 0$ φαίνεται ότι για $x_i > x_j \Rightarrow -\Phi'(d_{ij}) \frac{x_i - x_j}{d_{ij}} < 0$ δηλαδή δέχεται μια δύναμη επιβράδυνσης από τα μπροστά οχήματα και $x_i < x_j \Rightarrow -\Phi'(d_{ij}) \frac{x_i - x_j}{d_{ij}} > 0$, επομένως μια δύναμη επιτάχυνση από τα πίσω οχήματα. Αντιστοιχίζεται δηλαδή πλήρως σε μια φυσική οδηγική συμπεριφορά όπου τα μπροστά οχήματα επιταχύνουν για διευκόλυνση των πίσω αν έχουν την δυνατότητα αυτή, ενώ τα πίσω επιβραδύνουν ανάλογα με το πόσο περιορίζονται από τα μπροστινά οχήματα. Εν τέλη το κάθε όχημα κινείται με βάση την συνιστάμενη δύναμη που βιώνει τόσο από τα μπροστά όσο και από τα πίσω οχήματα, γίνεται δηλαδή ένα διαρκής συμβιβασμός για την τήρηση των αποστάσεων ασφαλείας με βάση έναν προσυμφωνημένο τρόπο. Ο προσυμφωνημένος τρόπος περιγράφεται από τα τεχνητά δυναμικά πεδία που έχουν επιλεχθεί.

Παρατήρηση 3

Ο όρος $-\Sigma F_{xpoti} \cos(\theta_i) - \Sigma F_{ypoti} \sin(\theta_i) = \Sigma F_{radial}$ που καθορίζει την δύναμη/επιτάχυνση που δέχεται κάθε όχημα είναι επί της ουσίας η προσβολή της συνιστάμενης δύναμης του πεδίου πάνω

στον διαμήκη άξονα του οχήματος, ενώ ο όρος $\Sigma F_{xpoti} \sin(\theta_i) - \Sigma F_{ypoti} \cos(\theta_i) = \Sigma F_{rnormal}$ που αντιστοιχίζεται στον ρυθμό μεταβολής του προσανατολισμού είναι η κάθετη σε αυτή συνιστώσα.

Ένα ενδεικτικό σχήμα είναι το παρακάτω



Σχήμα 13 Κατανομή δυνάμεων που θιώνει ένα όχημα λόγω του πεδίου

Παραπέραση 4

Ο παραπάνω ελεγκτής δεν δύναται να εξασφαλίσει την σύγκλιση της απόστασης των οχημάτων σε κάποια δεδομένη τιμή καθώς $\dot{V}_{lyap} < 0$ μόνο για κάποιο όχημα ισχύει $V_i \neq V^*$ και $\theta_i \neq 0$. Στην πραγματικότητα στην τελική κατάσταση θα ισχύει $\Sigma F_{xpoti} = \Sigma F_{ypoti} = 0 \forall i, j$, τότε τα οχήματα εφόσον έχουν επιτύχει τον επιθυμητό στόχο για ταχύτητα και προσανατολισμό δεν θα μεταβάλλουν την ταχύτητα τους και άρα $\dot{V}_{lyap} = 0$. Στην μόνιμη κατάσταση δηλαδή τα οχήματα θα βρίσκονται σε μία ισορροπία μεταξύ των γειτόνων τους, η οποία ισορροπία εκφράζεται από το $\Sigma F_{xpoti} = \Sigma F_{ypoti} = 0$. Προφανώς το τελευταίο ισχύει και για $d_{ij} > d_{inter} \forall i, j$, αλλά μπορεί να ισχύσει και στο εσωτερικό αυτού. Το τελευταίο θα απεικονιστεί και στα διαγράμματα των προσομοιώσεων που θα ακολουθήσουν.

5. Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν αποτελέσματα προσομοιώσεων για συγκεκριμένα σενάρια χρήσης τους παραπάνω ελεγκτή. Για την διάσταση του δρόμου θα θεωρηθεί ότι έχει πλάτος περίπου όσο ένας αυτοκινητόδρομος 4 λωρίδων κυκλοφορίας. Θα εκτείνεται δηλαδή από $-a = -7.2 \text{ m}$ εώς $+a = +7.2 \text{ m}$. Για τις περιπτώσεις αυτές πλέον θα θεωρείται ότι τα οχήματα έχουν μήκος $L = 4 \text{ m}$ και πλάτος $W = 1.5 \text{ m}$. Οι διαστάσεις αυτές επιλέχθηκαν με σκοπό να αντικατοπτρίζουν μια μέση ενός συμβατικού αυτοκινήτου. Οι περιορισμοί της ταχύτητας θα είναι $V_{max} = 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και ο επιθυμητός στόχος σύγκλισης ταχύτητας το $V^* = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Για τον περιορισμό του προσανατολισμού θα επιλεχθεί $\theta_{max} = 0.25 \text{ rad}$ ενώ για την τιμή μετρικής $p = 2$. Με βάση τις παραπάνω επιλογές και την σχέση (4.4) προκύπτει ότι $d_{safety} = 6.3302$, ενώ για τα φράγματα των σχέσεων (4.6) λαμβάνεται εφόσον ισχύει $\tan \frac{2L}{w} = 1.385 > 0.25 = \theta_{max}$, $a_r = 5.4836 \text{ m}$. Σαν απόσταση κατά την οποία θεωρείται ότι τα οχήματα δεν αλληλοεπιδρούν επιλέγεται $d_{inter} = 20 \text{ m}$

Στις μέχρι τώρα θεωρητικές αναλύσεις δεν είχαν δοθεί συγκεκριμένοι τύποι δυναμικών που θα χρησιμοποιηθούν, αλλά περιγράφονταν μόνο οι απαραίτητες συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούν οι οποιεσδήποτε συναρτήσεις χρησιμοποιηθούν για τεχνητά δυναμικά πεδία. Για τις παρακάτω προσομοιώσεις θα χρησιμοποιηθεί για το δυναμικό Φ η συνάρτηση:

$$\Phi(d) = \begin{cases} q \frac{(d_{inter} - d)^3}{d - d_{safety}} & \text{όταν } d_{safety} < d \leq d_{inter} \\ 0 & \text{όταν } d > d_{inter} \end{cases}$$

Με q μια θετική σταθερά η οποία ρυθμίζει τον ρυθμό με τον οποίον αυξάνονται οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των οχημάτων όσο η μεταξύ του απόσταση μειώνεται.

Για την μορφή του δυναμικού για την διατήρηση εντός των ορίων του δρόμου θα χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση

$$U(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{a_r^2 - y^2} - \frac{c}{a_r^2} \right)^2 & \text{όταν } -a_r < y < \frac{-a_r\sqrt{c-1}}{c} \text{ και } \frac{a_r\sqrt{c-1}}{c} < y < a_r \\ 0 & \text{όταν } \frac{-a_r\sqrt{c-1}}{c} < y < \frac{-a_r\sqrt{c-1}}{c} \end{cases}$$

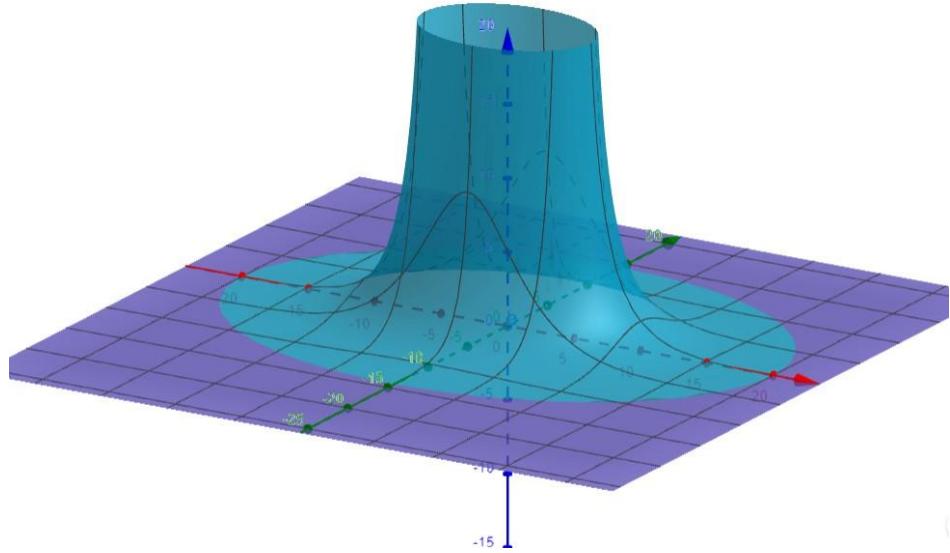
Στην προτεινόμενη αυτή συνάρτηση η παράμετρος c θα πρέπει να είναι $c \geq 1$ και στην πράξη ρυθμίζει το ποσό των αποδεκτών θέσεων για το οποίο θα θεωρείται ότι το όχημα δεν δέχεται κάποια απωθητική δύναμη λόγω της απόστασης του από τα πλευρικά τοιχώματα του δρόμου.

Για τις παραμέτρους τις ελεύθερες παραμέτρους του ελεγκτή έχουν γίνει οι παρακάτω επιλογές

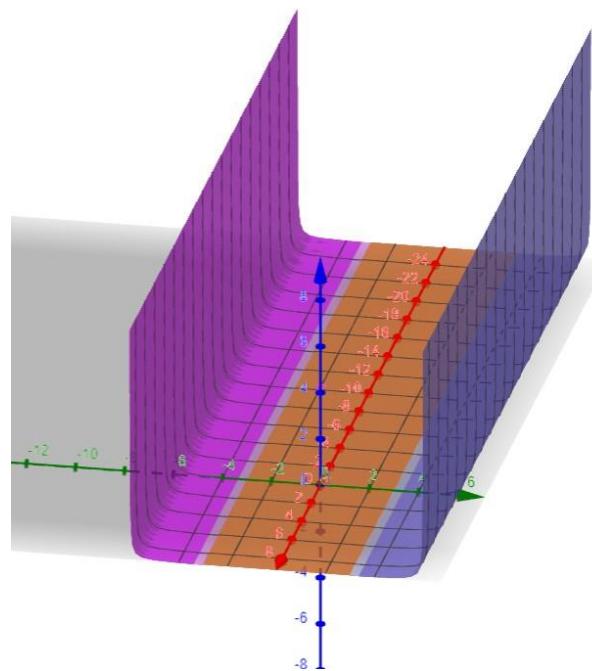
$$k_v = 1$$

$$k_\theta = 10$$

Δυο ενδεικτικά γραφήματα για δεδομένες επιλογές των ελεύθερων παραμέτρων των δυναμικών



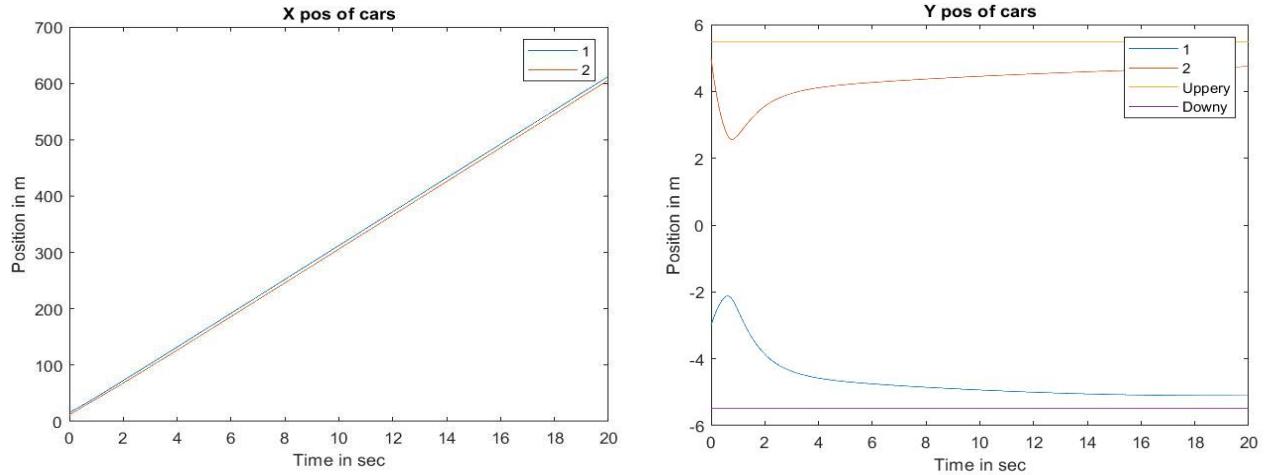
Σχήμα 14 Προτεινόμενο δυναμικό για αποφυγή συγκρούσεων



Σχήμα 15 Προτεινόμενο δυναμικό για παραμονή εντός ορίων δρόμου

5.1. Αποτελέσματα Προσομοιώσεων 2 οχήματα σε κατάσταση κινδύνου πλάγιας σύγκρουσης

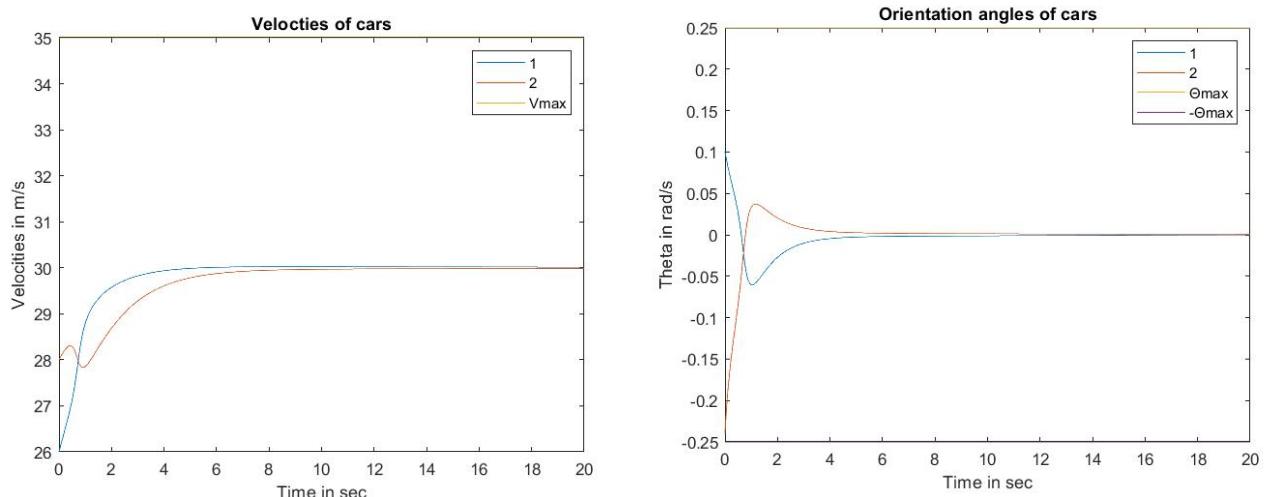
Αρχικά παρατίθενται αποτελέσματα για κίνηση δυο μεμονωμένων οχημάτων υπό διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Επιλέγεται σαν αρχικό στάδιο των προσομοιώσεων να δειχθούν μεμονωμένα σενάρια που θα αναδεικνύουν κάθε φορά και από μια διαφορετική ικανότητα του ελεγκτή, για τον λόγο αυτό παρουσιάζονται αρχικά με μόνο δύο οχήματα στον αυτοκινητόδρομο καθώς είναι ευκολότερη η δημιουργία ενός συγκεκριμένου σεναρίου κίνησης. Αρχικά παρατίθενται τα διαγράμματα των καρτεσιανών θέσεων των οχημάτων ως προς χρόνο



Διάγραμμα προσομοιώσεων 1 Θέση x ως προς χρόνο

Διάγραμμα προσομοιώσεων 2 Θέση y ως προς χρόνο

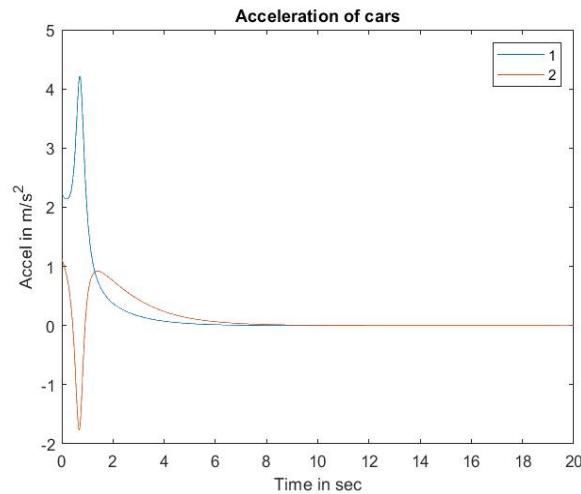
Τα παραπάνω δείχνουν ότι η θέση του μέσου του πίσω άξονα των οχημάτων κατά γραμμένη εντός των ορίων που τέθηκαν για να παραμένει εντός του αυτοκινητόδρομου ολόκληρο το όχημα. Σημειώνεται ότι στα παραπάνω τα *Uppery*, *Downy* δεν αποτελούν τα πραγματικά όρια του δρόμου, αλλά τα a_r όπως ορίστηκαν στις σχέσεις (4.6).



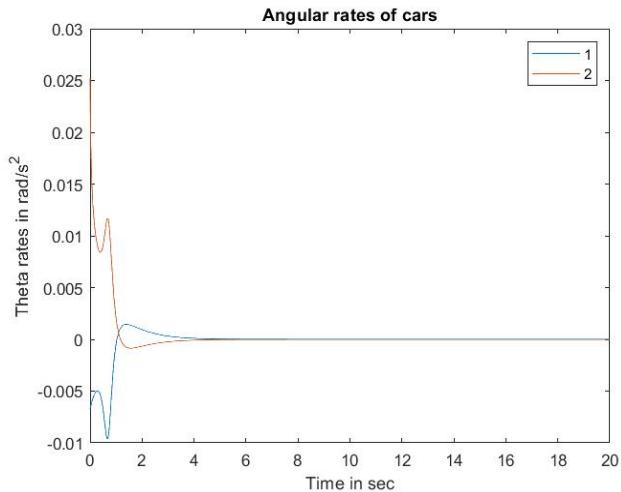
Διάγραμμα προσομοιώσεων 4 ταχύτητες οχημάτων ως προς χρόνος

Διάγραμμα προσομοιώσεων 3 Προσανατολισμός οχημάτων ως προς χρόνο

Οι επιταχύνσεις και οι ρυθμοί μεταβολής του προσανατολισμού που αναπτύσσονται, δηλαδή F , u

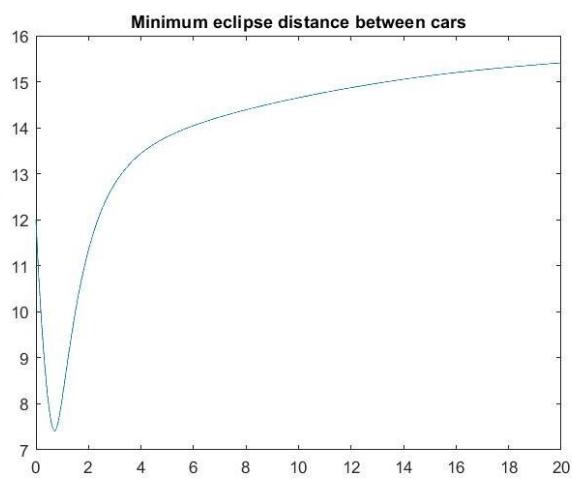


Διάγραμμα προσομοιώσεων 6 Επιταχύνσεις
οχημάτων F

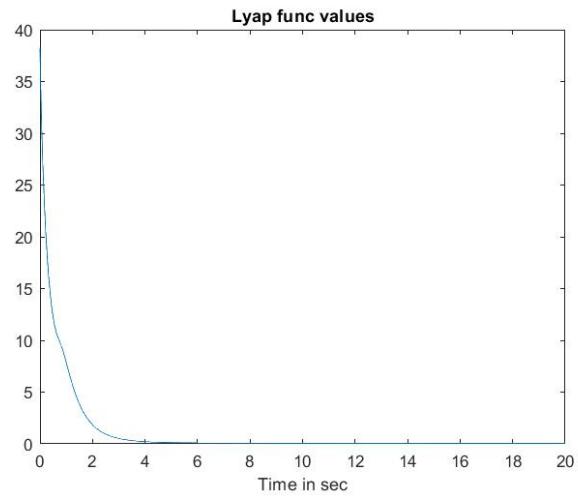


Διάγραμμα προσομοιώσεων 5 Είσοδος u

Ενώ παρουσιάζονται επίσης και τα διαγράμματα της μετρικής της απόστασης και των τιμών της συνάρτηση Lyapunov



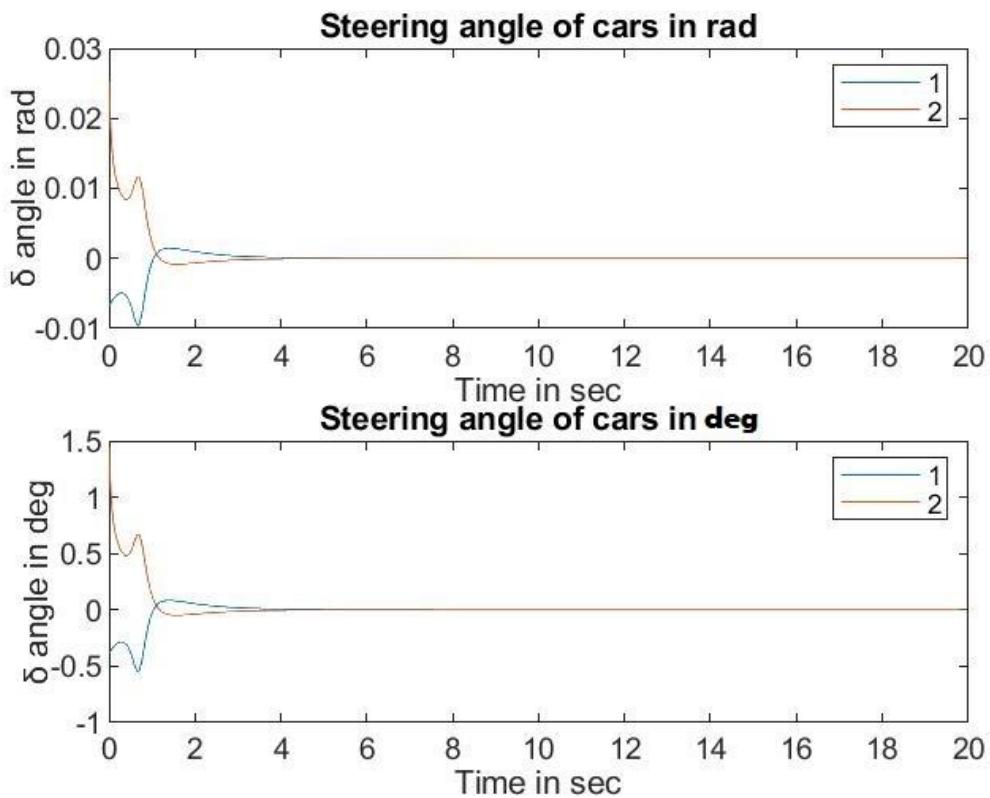
Διάγραμμα προσομοιώσεων 8 Ελάχιστη τιμή
απόστασης οχημάτων



Διάγραμμα προσομοιώσεων 7 Τιμές συνάρτησης
lyapunov

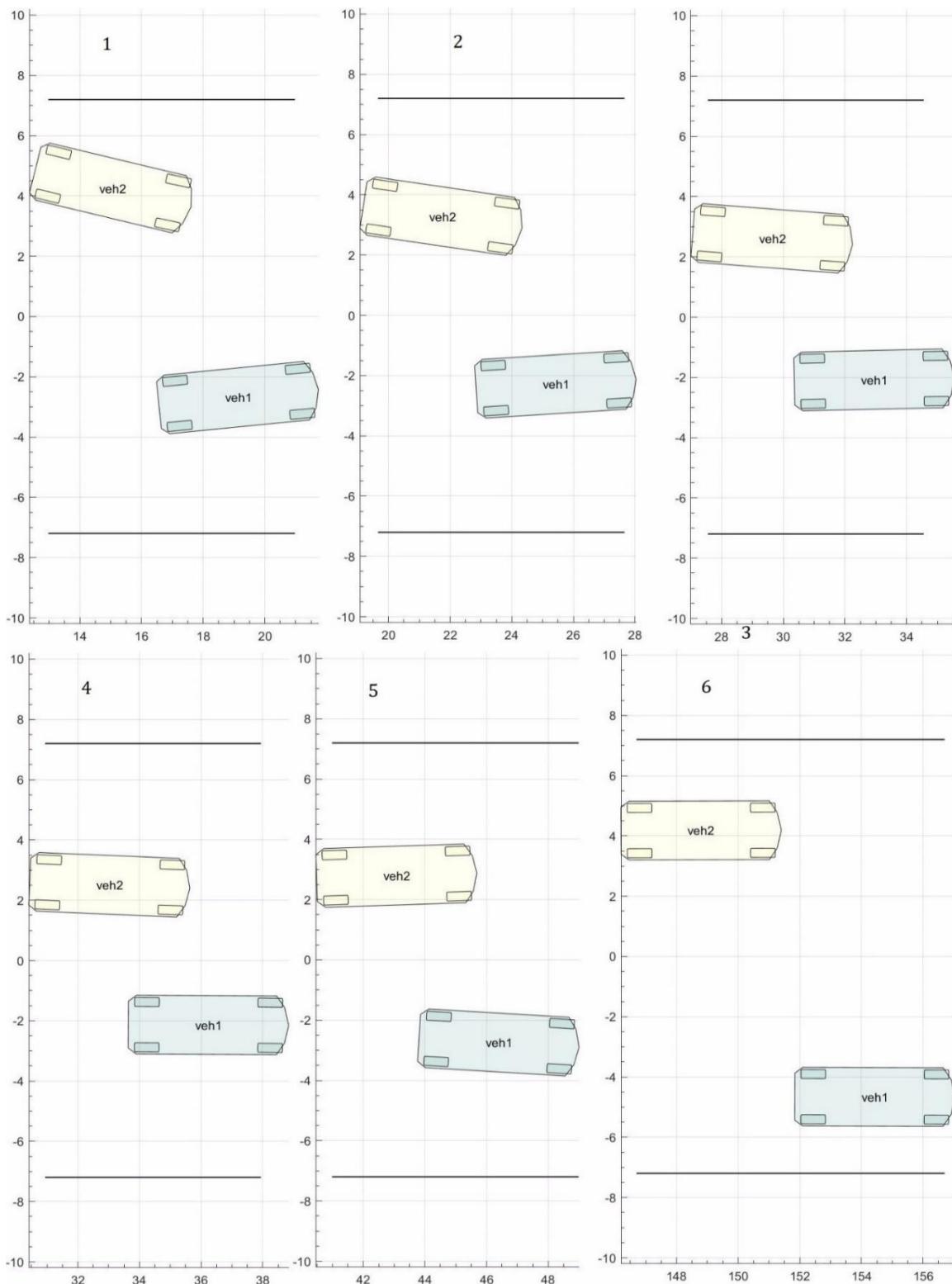
Η συνάρτηση Lyapunov είναι φθίνουσα όπως και διαπιστώνεται ενώ η μετρική της απόστασης δεν γίνεται μικρότερη από την τιμή d_{safety} , χωρίς ωστόσο να εξασφαλίζεται η σύγκλιση της σε δεδομένη τιμή για την χρήση του παρόντα ελεγκτή.

Καθώς και η γωνία περιστροφή του τιμονιού σε ακτίνια και σε μοίρες :



Διάγραμμα προσομοιώσεων 9 Γωνίες Περιστροφής τιμονιού σε ακτίνια και μοίρες

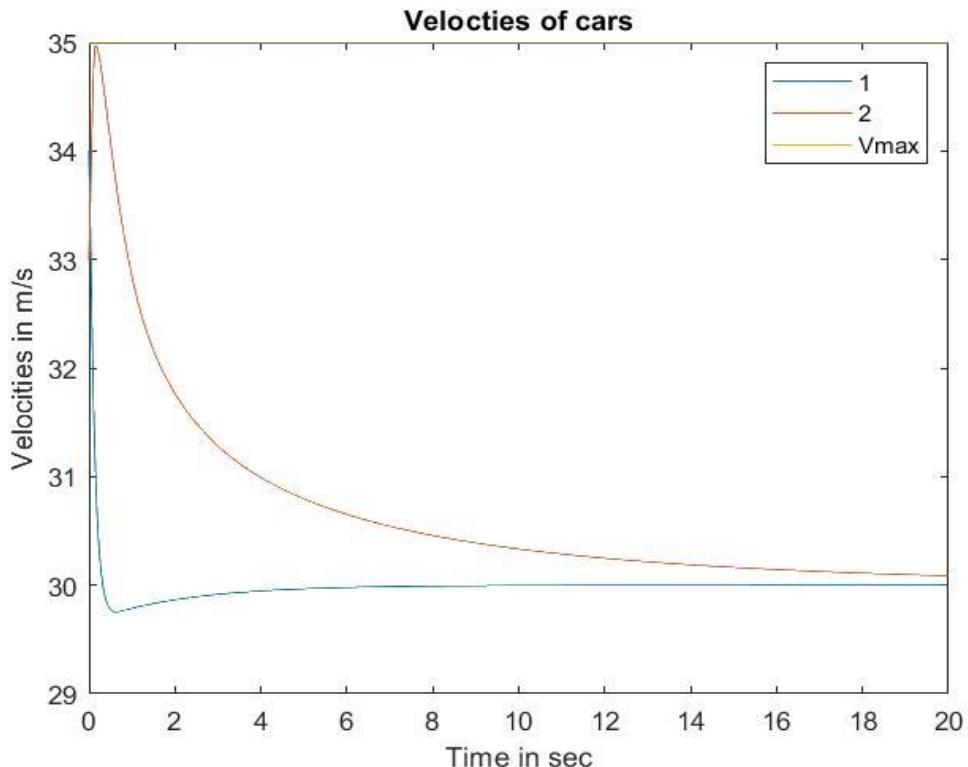
Από τα διαγράμματα φαίνεται η ικανοποίηση των μαθηματικών προϋποθέσεων που τέθηκαν για την ρύθμιση της κυκλοφορία, ωστόσο επειδή δεν είναι άμεσα αντιληπτό ότι οι στόχοι επιτυγχάνονται παρέχονται ορισμένα frames από την διαδικασία της κίνησης.



Στιγμιότυπα Κίνησης, 1 Οχήματα σε κατάσταση κινδύνου πλάγιας σύγκρουσης

5.2. Αποτελέσματα Προσομοιώσεων 2 οχήματα σε κατάσταση κινδύνου σύγκρουσης από πίσω

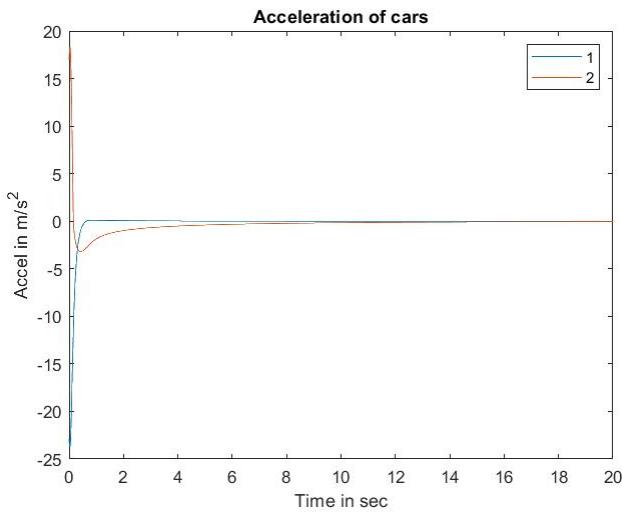
Στην συνέχεια για να παρουσιαστεί σε μια πιο απαιτητική κατάσταση η εγκυρότητα της ανάλυσης για την τήρηση των ορίων ταχύτητας παρουσιάζεται μια περίπτωση όπου το μπροστά όχημα βρίσκεται σε πολύ κοντινή απόσταση από το πίσω όχημα. Έτσι στο μπροστά επιβάλλεται μεγάλη επιτάχυνση που το αναγκάζει να αυξήσει σημαντικά την ταχύτητα του, χωρίς να ξεπερνάει τα όρια. Αρχικά παρουσιάζεται το γράφημα των ταχυτήτων που αναπτύσσουν τα οχήματα:



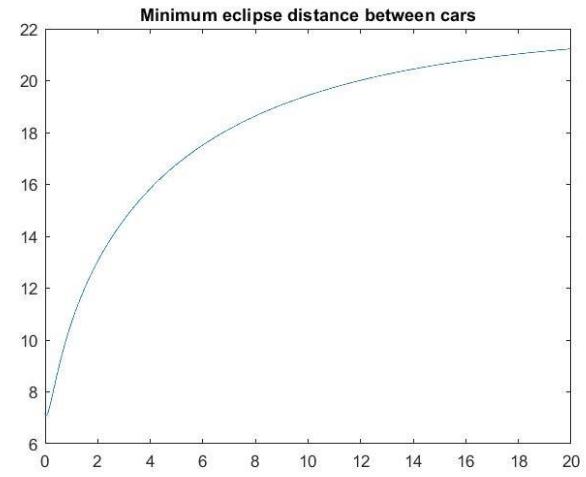
Διάγραμμα προσομοιώσεων 10 Ταχύτης οχημάτων

Στο παραπάνω φαίνεται ότι παρόλο που το όχημα 2 συνεχίζει να δέχεται δυνάμεις για να επιταχυνθεί δεν παραβιάζει τα όρια ταχύτητας, δηλαδή εδώ τα $35 \frac{m}{s}$. Το γεγονός ότι εξακολουθεί να δέχεται δυνάμεις επιβεβαιώνεται από την συμπεριφορά του οχήματος 1 που εξακολουθεί να επιβραδύνεται για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

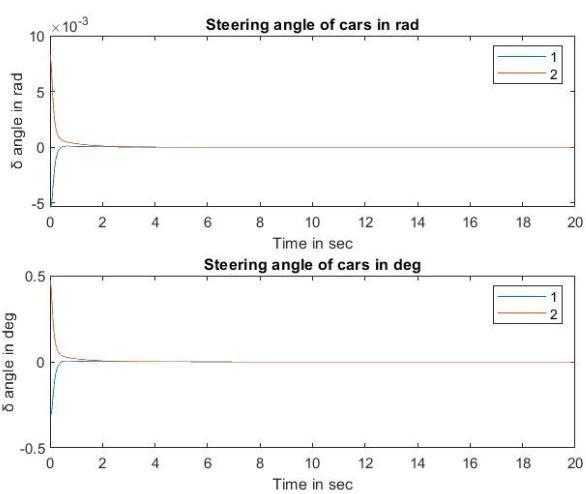
Στην συνέχεια παρουσιάζονται κατά διαγράμματα των επιταχύνσεων, της απόστασης των οχημάτων με χρήση της ελλειψοειδούς μετρικής, της γωνίας περιστροφής του τιμονιού, καθώς και των τιμών της συνάρτηση Lyapunov. Ενώ στην συνέχεια παρατίθενται ορισμένα frames που απεικονίζουν την κίνηση.



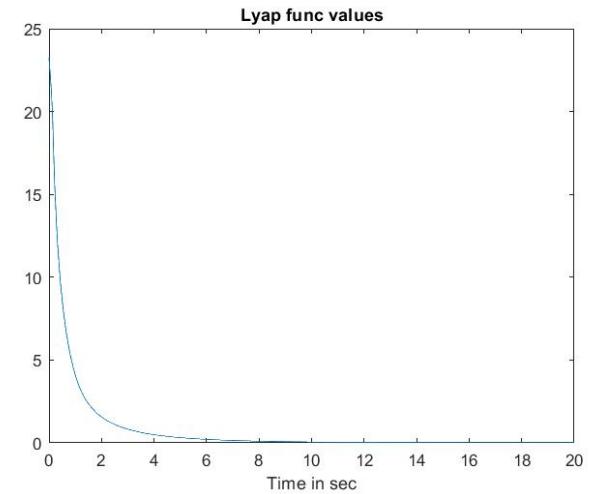
Διάγραμμα προσομοιώσεων 12 Επιταχύνσεις
Οχημάτων



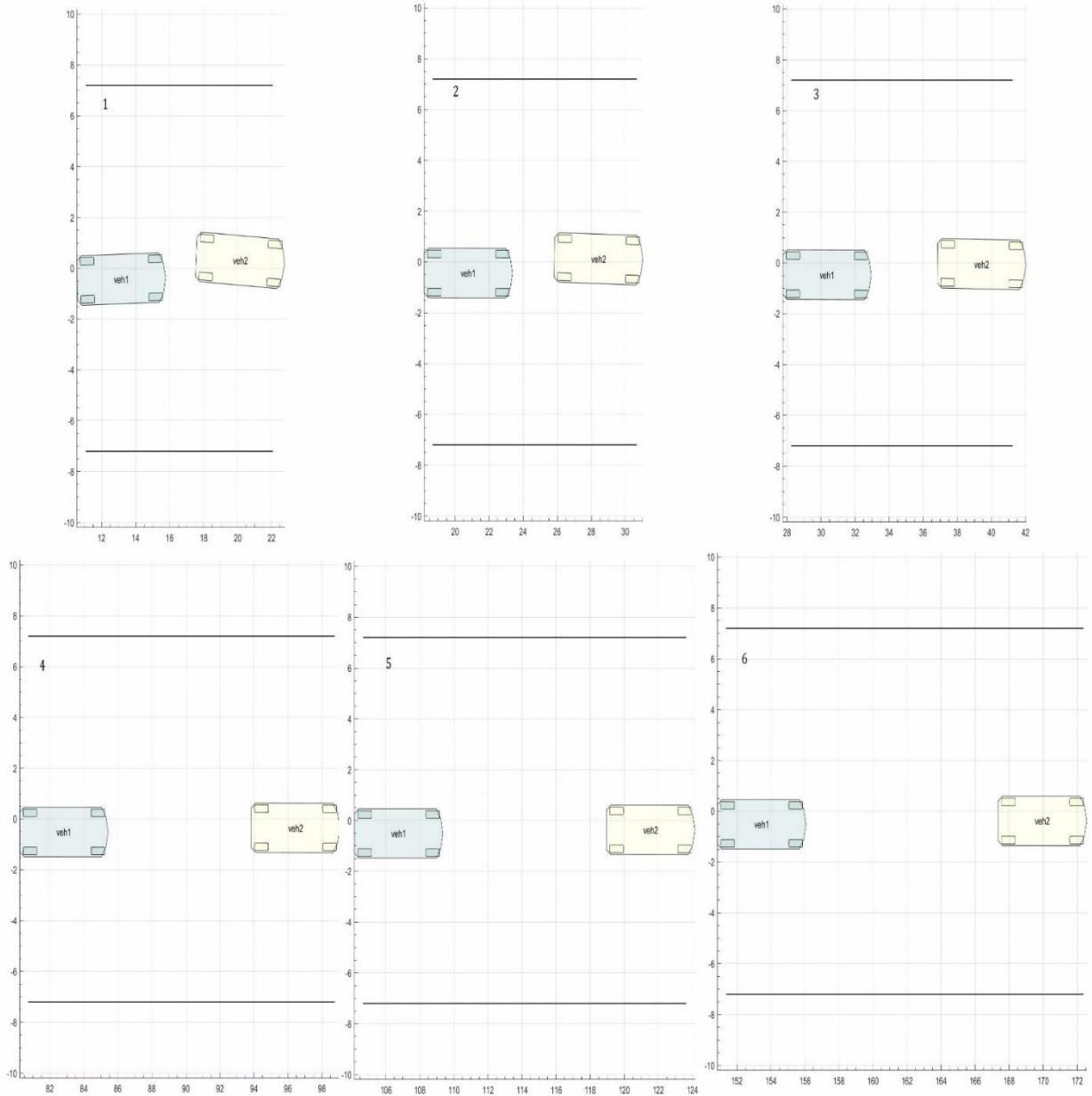
Διάγραμμα προσομοιώσεων 11 Ελάχιστη τιμή απόστασης



Διάγραμμα προσομοιώσεων 13 Γωνία περιστροφής τιμονιού σε
ακτίνια και μοίρες



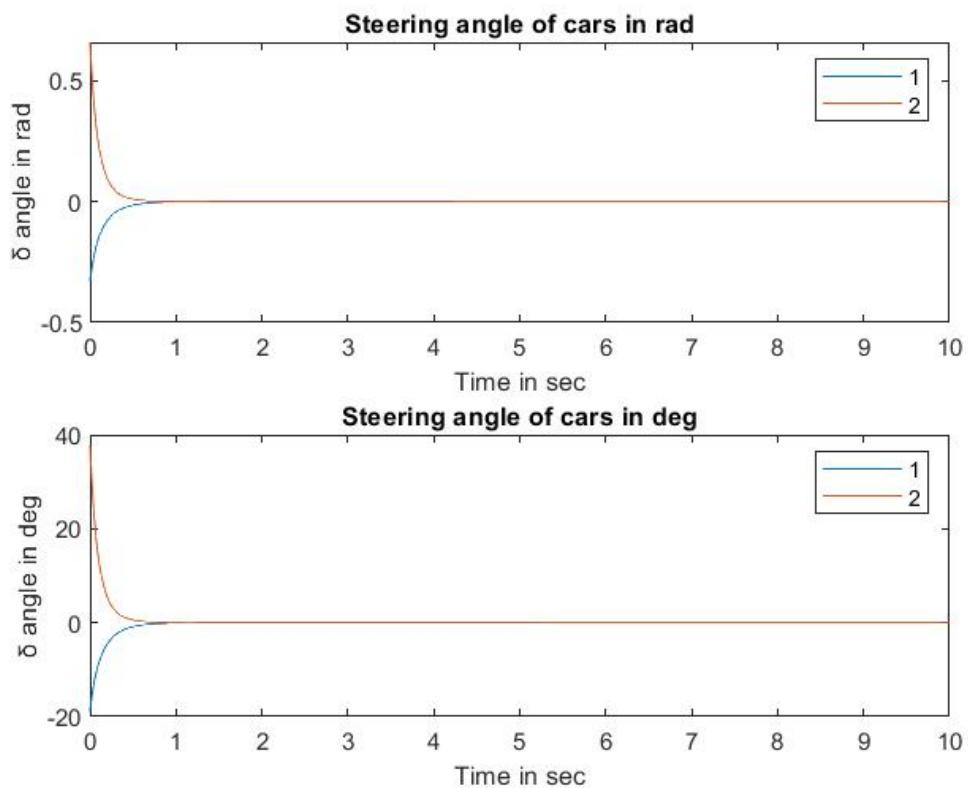
Διάγραμμα προσομοιώσεων 14 Τιμές συνάρτησης
Lyapunov



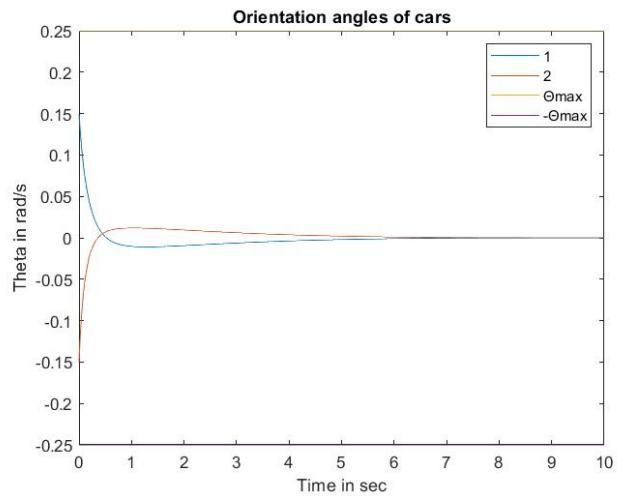
Στιγμιότυπα Κίνησης 2 Κίνηση οχημάτων σε κατάσταση οπίσθιας σύγκρουσης

5.3. Αποτελέσματα Προσομοιώσεων 2 οχήματα κινούμενα με χαμηλές αρχικά ταχύτητες - απαίτηση για μεγαλύτερες γωνίες περιστροφής του τιμονιού

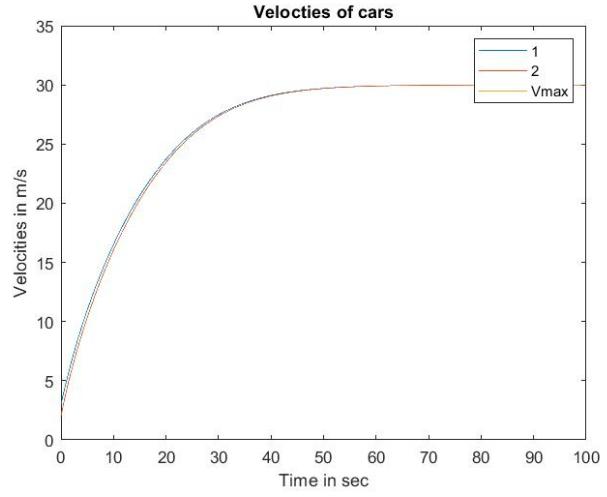
Σαν τελευταία από τις μεμονωμένες περιπτώσεις παρουσιάζεται η περίπτωση δύο οχημάτων που κινούνται αρχικά με χαμηλές ταχύτητες. Η περίπτωση αυτή εξετάζεται ξεχωριστά καθώς όπως θα φανεί στα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν θα απαιτηθούν μεγαλύτερες γωνίες περιστροφής του τιμονιού. Η απαίτηση αυτή ωστόσο συνάδει πλήρως με την φυσική του προβλήματος καθώς σε πραγματικά οχήματα υπάρχει η δυνατότητα να εμφανίζουν μεγαλύτερες γωνίες περιστροφής του τιμονιού χωρίς να τίθεται σε κίνδυνο η ισορροπίας του οχήματος. Έτσι παρατίθεται αρχικά το διάγραμμα των γωνιών του τιμονιού, ενώ στην συνέχεια τα διαγράμματα ταχύτητας, προσανατολισμού, καθώς και της απόστασης των οχημάτων όπως και στιγμιότυπα από τη κίνηση.



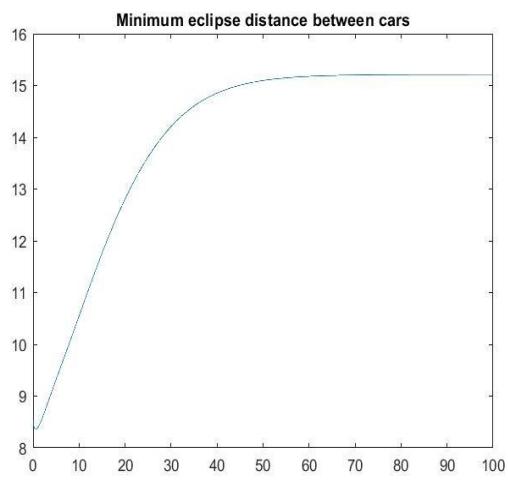
Διάγραμμα προσομοιώσεων 15 Γωνίες περιστροφής τιμονιού σε ακτίνια και μοίρες



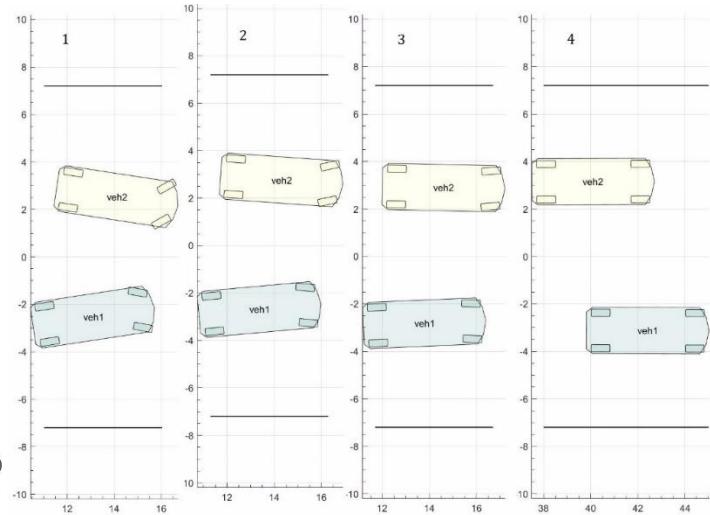
Διάγραμμα προσομοιώσεων 16 Γωνίες προσανατολισμού



Διάγραμμα προσομοιώσεων 17 Διάγραμμα ταχυτήτων



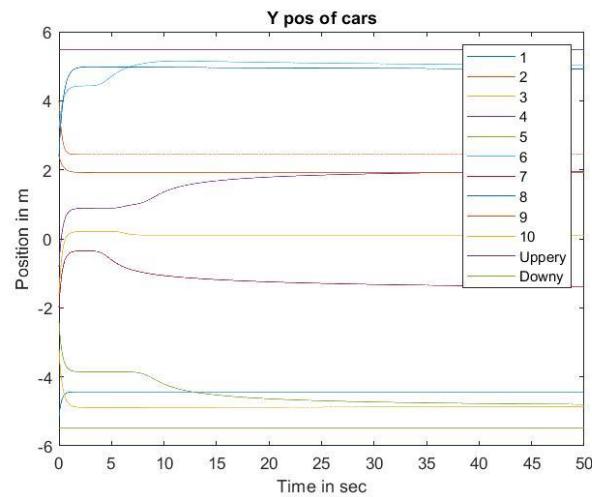
Διάγραμμα προσομοιώσεων 19 Ελάχιστη απόσταση



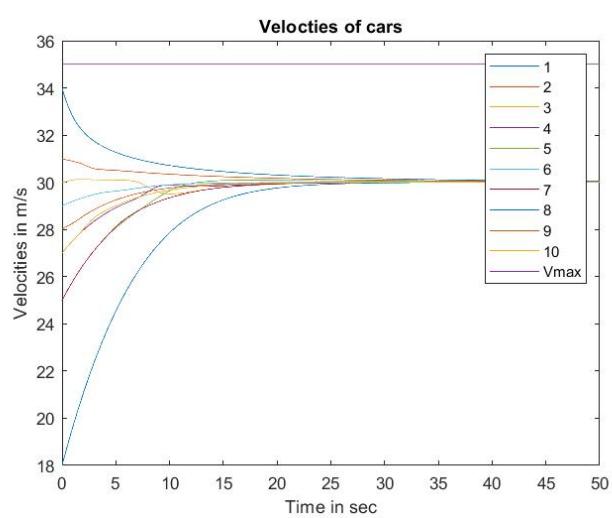
Διάγραμμα προσομοιώσεων 18 Στιγμούτυπο κίνησης οχημάτων

5.4. Αποτελέσματα Προσομοιώσεων 10 οχήματα - Περίπτωση $V^* = 30 \text{ m/s}$

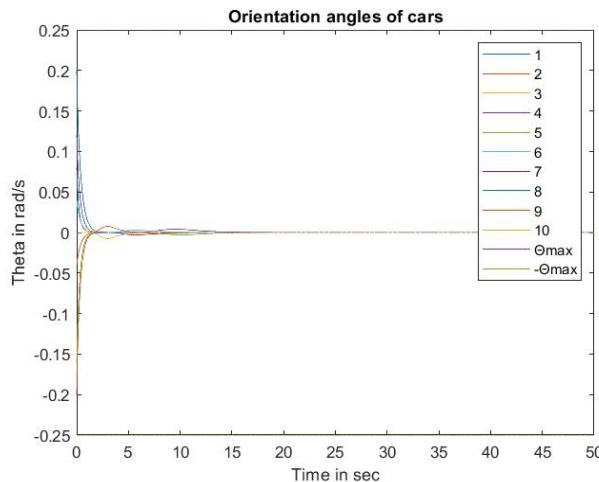
Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα προσομοιώσεων για 10 οχήματα να κινούνται εντός του δρόμου. Οι αρχικές συνθήκες τέτοιες ώστε τα οχήματα να μην έχουν τον επιθυμητό προσανατολισμό, ενώ βρίσκονται σε αποστάσεις τέτοιες ώστε να θεωρείται ότι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (βρίσκονται δηλαδή αρκετά κοντά το ένα στο άλλο), εφόσον το d_{inter} έχει επιλεχτεί ίσο με 10 m. Η απόκριση του ελεγκτή υποδηλώνει μια αρκετά ομαλή συμπεριφορά που συνεπάγεται μεγαλύτερη άνεση για τους επιβάτες, παρόλο που οι αρχικές συνθήκες δεν αποτελούν ιδιαίτερα ευνοϊκές περιπτώσεις αρχικής διάταξης.



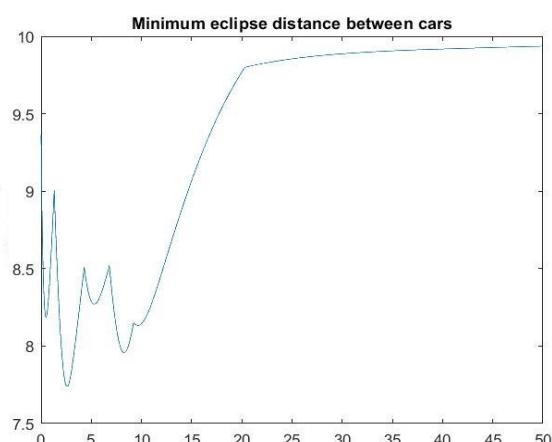
Διάγραμμα προσομοιώσεων 23 Θέσεις οχημάτων κατά γ



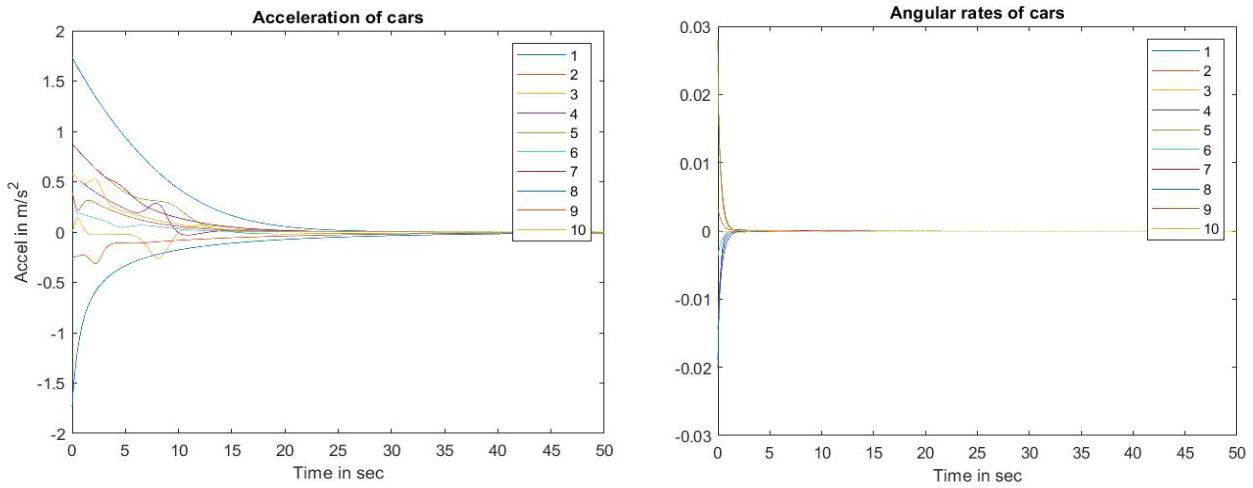
Διάγραμμα προσομοιώσεων 22 Ταχύτητες οχημάτων



Διάγραμμα προσομοιώσεων 21 Γωνίες προσανατολισμού

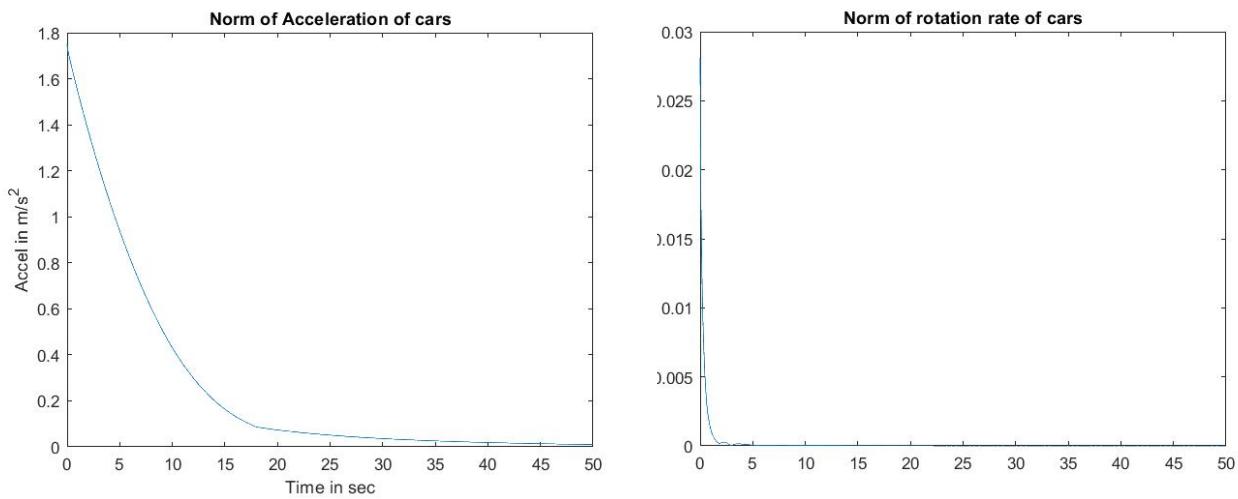


Διάγραμμα προσομοιώσεων 20 Ελάχιστη τιμής από τις αποστάσεις των οχημάτων



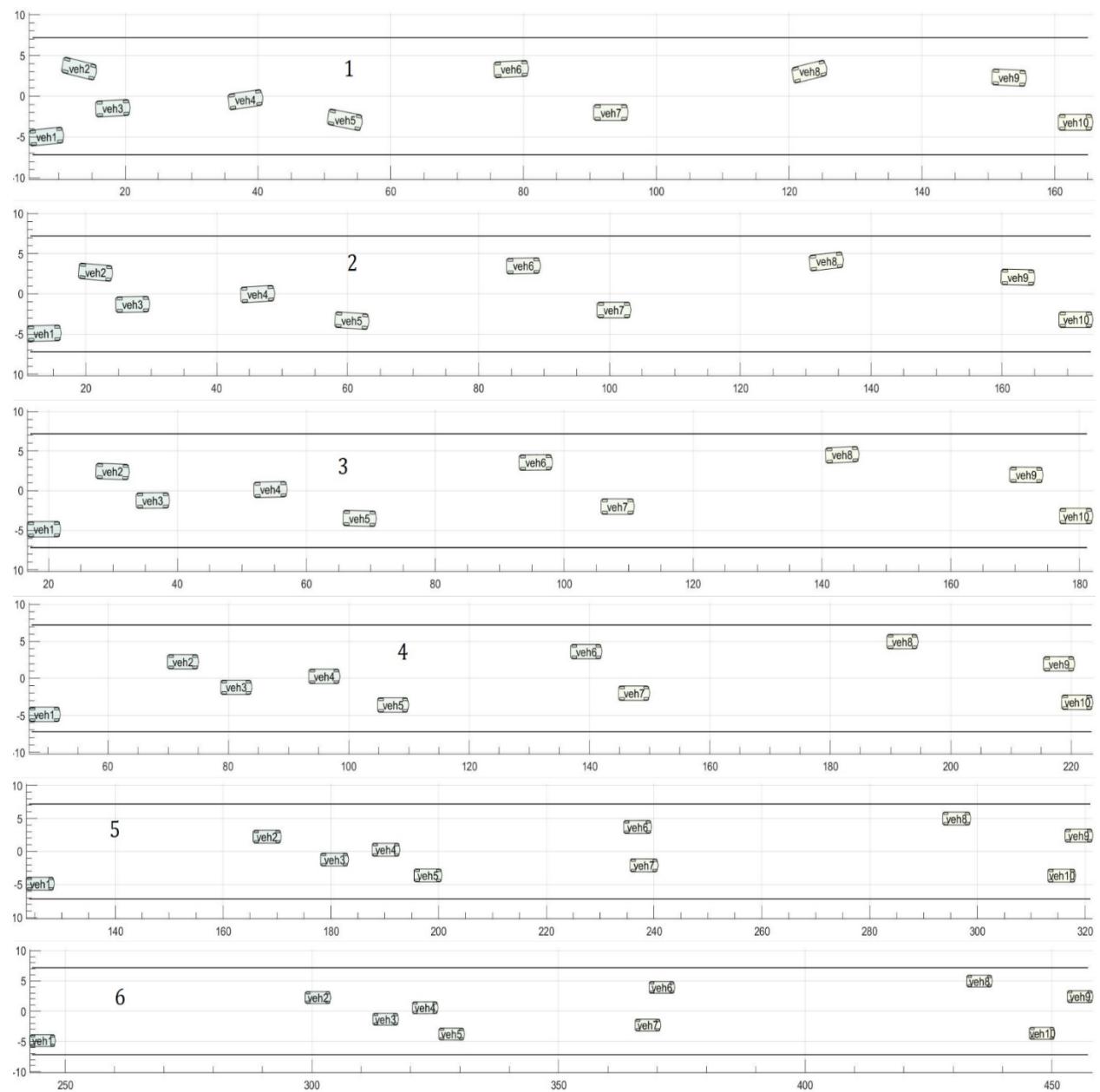
Διάγραμμα προσομοιώσεων 27 Επιταχύνσεις οχημάτων

Διάγραμμα προσομοιώσεων 26 Είσοδος και



Διάγραμμα προσομοιώσεων 25 Μέγιστη τιμή επιταχύνσεων οχημάτων

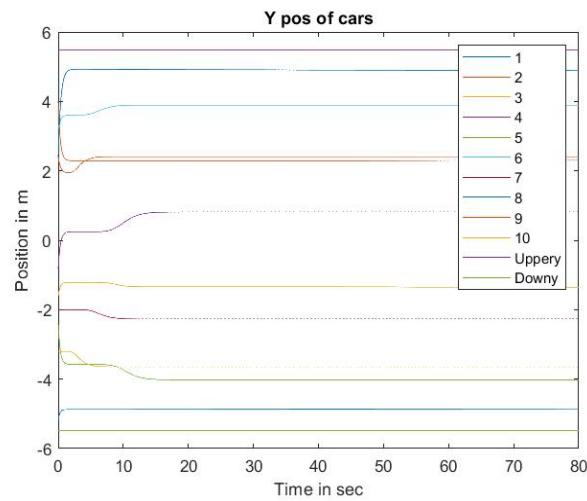
Διάγραμμα προσομοιώσεων 24 Μέγιστη τιμή και οχημάτων κάθε χρονική στιγμή



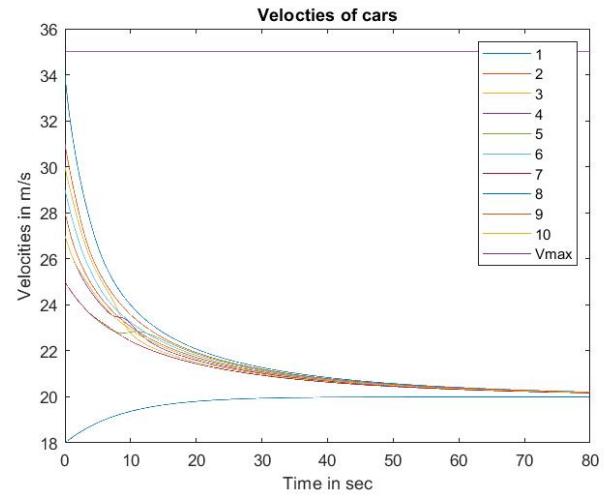
Στιγμιότυπα Κίνησης 3 Κίνηση 10 οχημάτων εντός του αυτοκινητόδρομου

5.5. Αποτελέσματα Προσομοιώσεων 10 οχήματα - Περίπτωση $V^* = 20 \text{ m/s}$

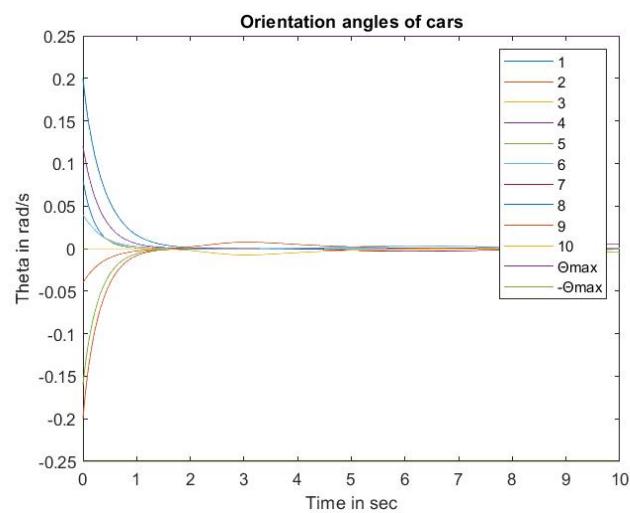
Με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, αλλά διαφορετικό στόχο τελικής ταχύτητας λαμβάνεται η παρακάτω συμπεριφορά από το ελεγκτή



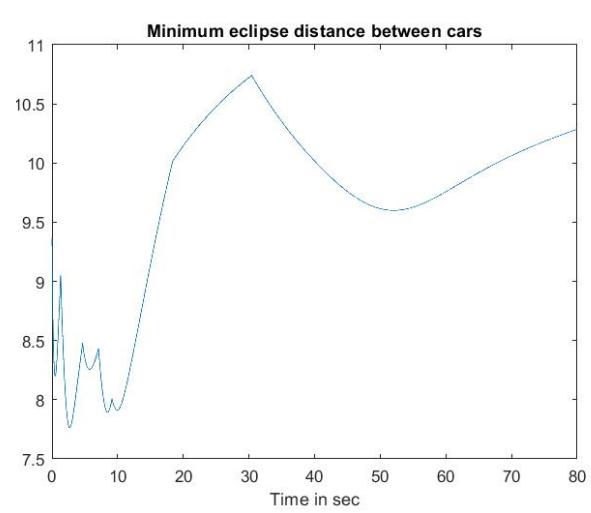
Διάγραμμα προσομοιώσεων 29 Θέση γ οχημάτων



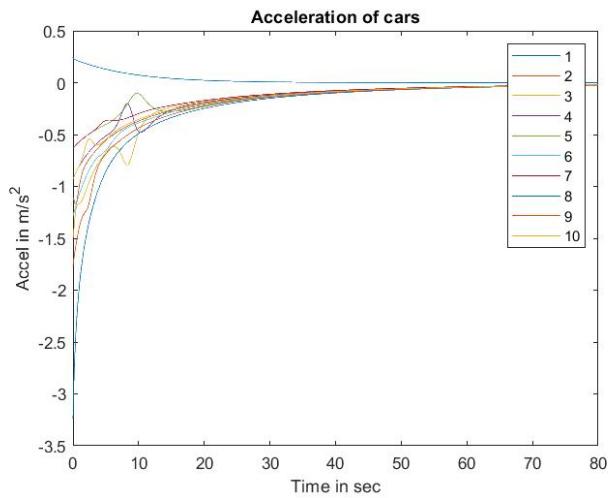
Διάγραμμα προσομοιώσεων 28 Ταχύτητες οχημάτων



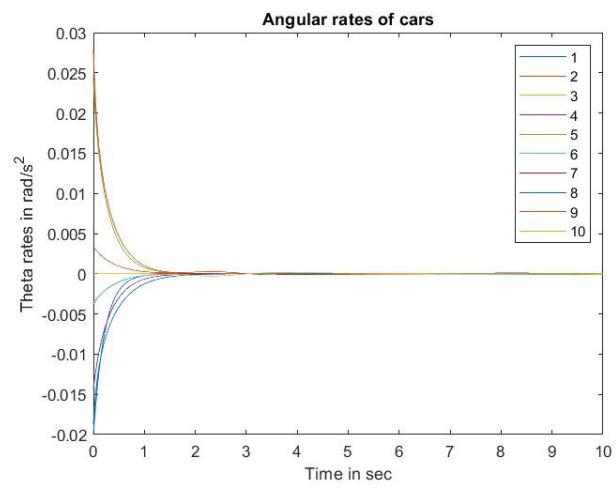
Διάγραμμα προσομοιώσεων 31 Γωνίες προσανατολισμού



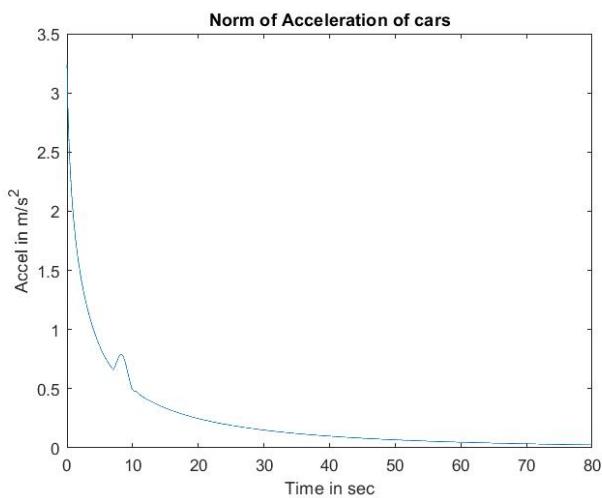
Διάγραμμα προσομοιώσεων 30 Ελάχιστη απόσταση από τις αποστάσεις των οχημάτων



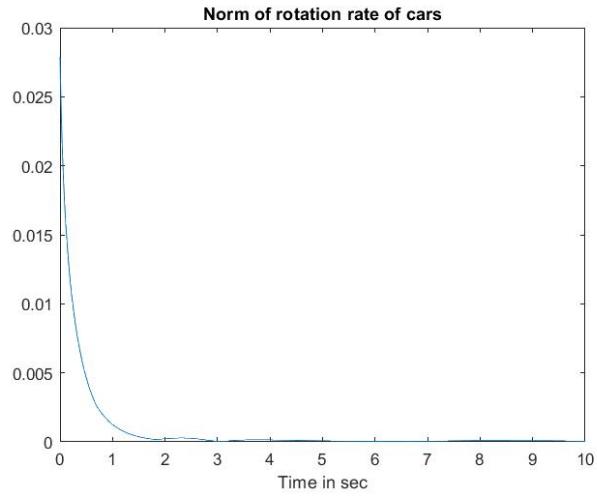
Διάγραμμα προσομοιώσεων 35 Επιταχύνσεις οχημάτων



Διάγραμμα προσομοιώσεων 34 Είσοδοι και



Διάγραμμα προσομοιώσεων 33 Μέγιστη επιτάχυνση των οχημάτων

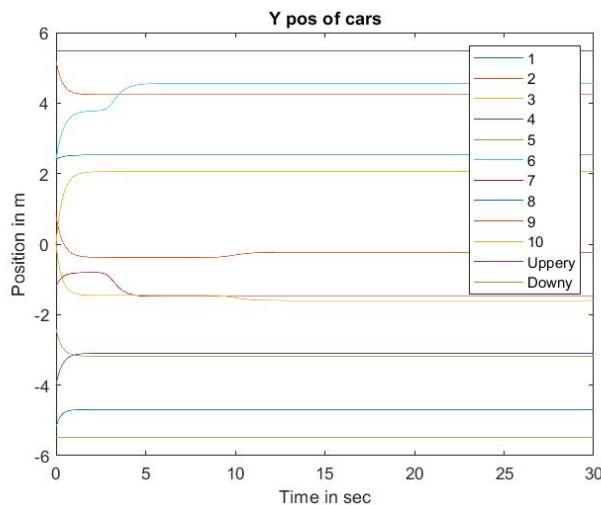


Διάγραμμα προσομοιώσεων 32 Μέγιστο οχημάτων

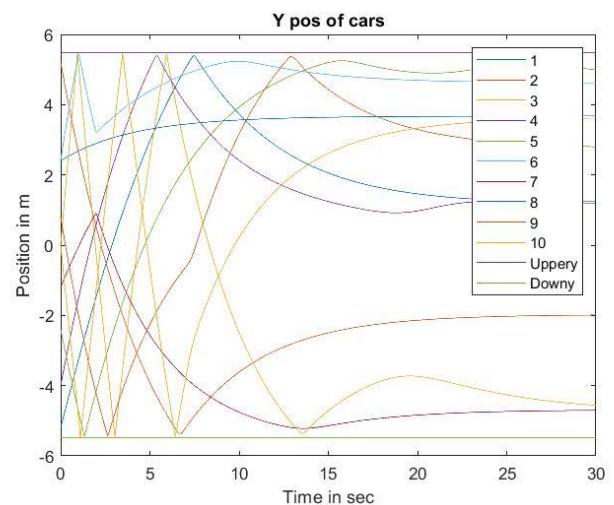
5.6 Συγκριτικά αποτελέσματα με δημοσίευση βάση για τον ελεγκτή – Περίπτωση 1

Όσα αποτελέσματα προτείνονται στην παρούσα εργασία σαν κύρια πηγή έμπνευσης είχαν την δημοσίευση [1]. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων δείχνουν ότι ο ελεγκτής που παρουσιάστηκε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής δύναται να παρέχει βελτιωμένα αποτελέσματα αναφορικά με ζητήματα απαιτήσεων για το μέτρο εισόδων ελέγχου, δηλαδή για το μέτρο της επιτάχυνσης που χρειάζεται να εμφανίζει ένα όχημα, καθώς και σε ζητήματα που αφορούν την άνεση των επιβατών. Είναι προφανές ότι σε μια ενδεχόμενη πρακτική εφαρμογή ενός περιβάλλοντος αυτόματης οδήγησης οι μεταβολές στις ταχύτητες των οχημάτων, καθώς και στον προσανατολισμό τους θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο περιορισμένες. Για να απεικονιστεί η αίσθηση της ένδειξης βελτιωμένων επιδόσεων του παρόντα ελεγκτή παρουσιάζονται αποτελέσματα σε δύο περιπτώσεις αρχικών συνθηκών. Σημειώνεται πως για τον ελεγκτή της δημοσίευσης χρησιμοποιούνται οι προτεινόμενες σε αυτή τιμές των ελεύθερων παραμέτρων του, ενώ τόσο οι αρχικές συνθήκες όσο και οι συναρτήσεις των δυναμικών έχουν επιλεχθεί ίδιες και στις δύο περιπτώσεις για να γίνεται με δίκαιο τρόπο η σύγκριση. Αρχικά παρουσιάζονται αποτελέσματα για δεδομένες αρχικές συνθήκες όταν έχει επιλεχτεί και στους δύο ελεγκτές ότι η απόσταση στην οποία θεωρείται ότι τα οχήματα δεν αλληλεπιδρούν είναι $d_{inter} = 10 m$.

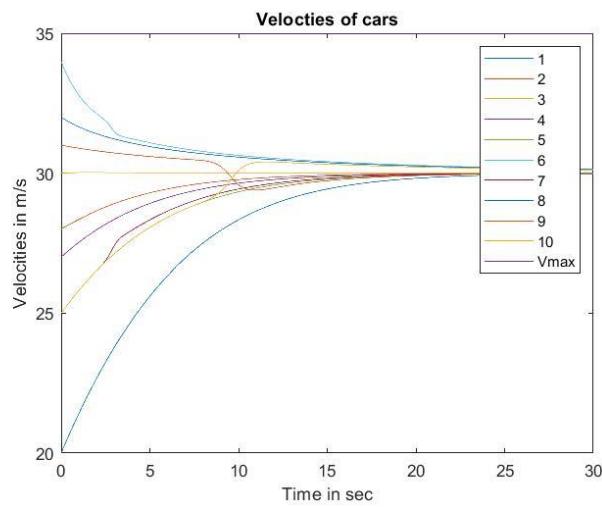
Στην αριστερά πλευρά θα δίνονται τα αποτελέσματα για τον ελεγκτή που προτάθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας, ενώ στον δεξί για τον ελεγκτή της δημοσίευσης



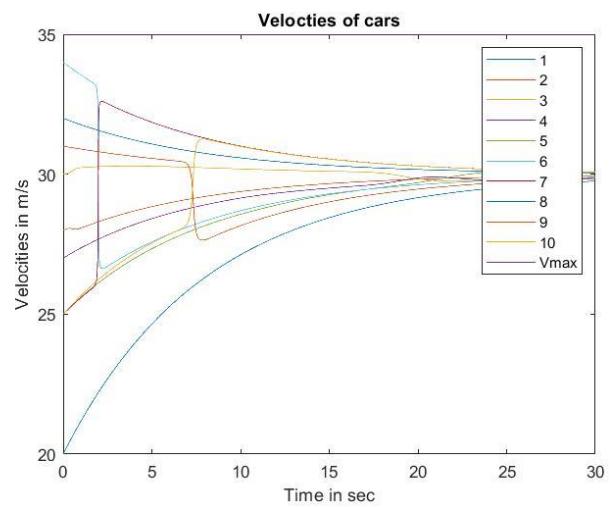
Διάγραμμα προσομοιώσεων 37 Θέσεις γ-Προτεινόμενος Ελεγκτής



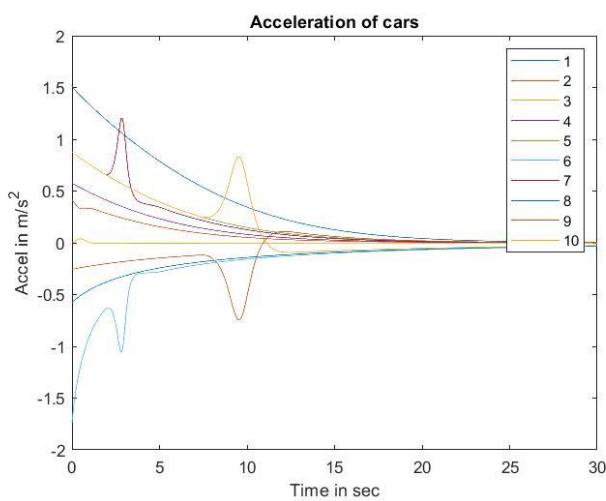
Διάγραμμα προσομοιώσεων 36 Θέσεις γ-Ελεγκτής Δημοσίευσης



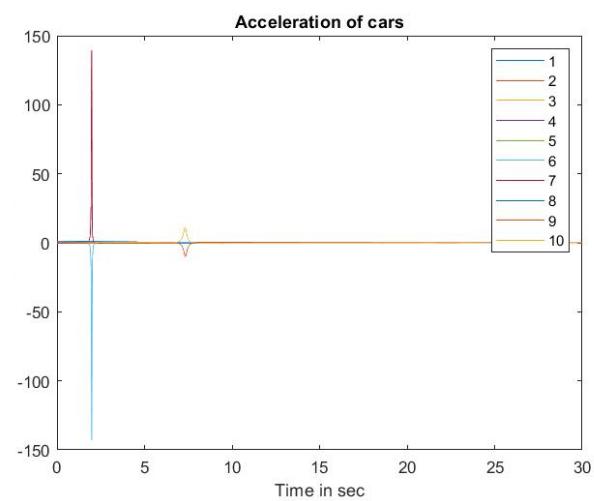
Διάγραμμα προσομοιώσεων 39 Ταχύτητες-Προτεινόμενος Ελεγκτής



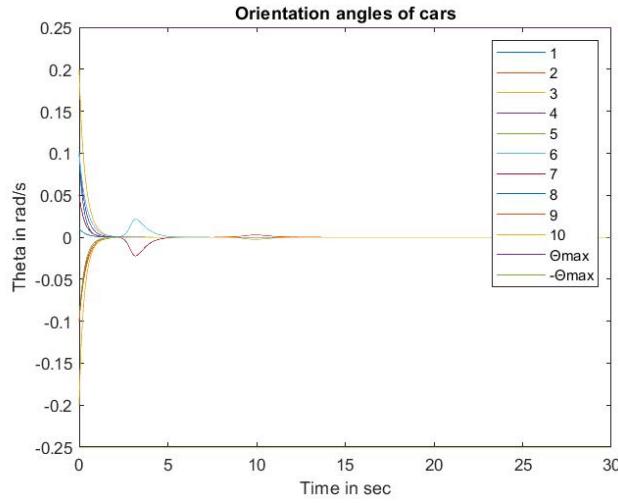
Διάγραμμα προσομοιώσεων 38 Ταχύτητες-Ελεγκτής δημοσίευσης



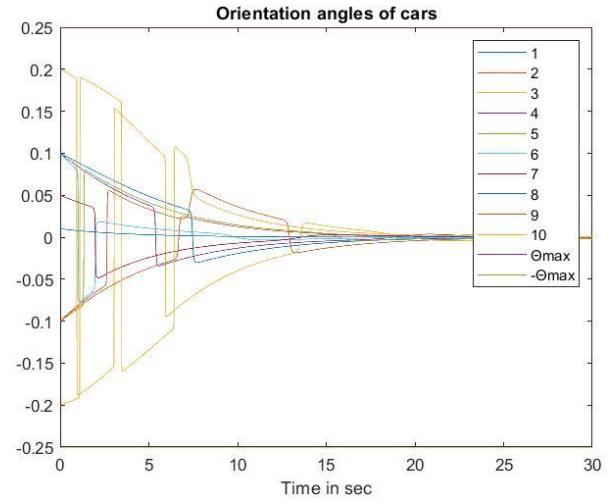
Διάγραμμα προσομοιώσεων 41 Επιταχύνσεις-Προτεινόμενος Ελεγκτής



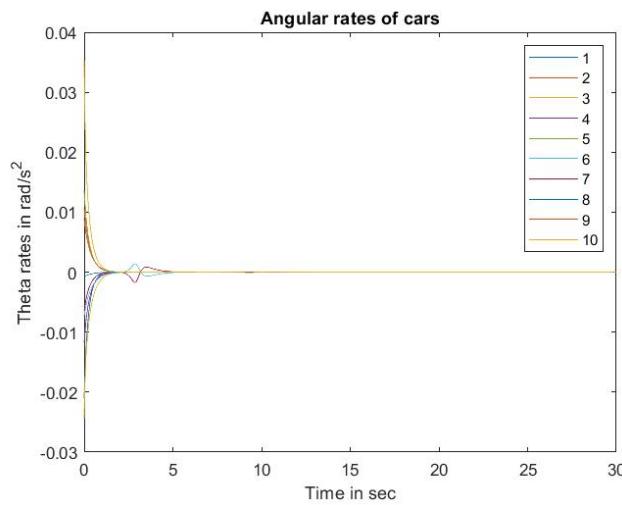
Διάγραμμα προσομοιώσεων 40 Επιταχύνσεις-Ελεγκτής δημοσίευσης



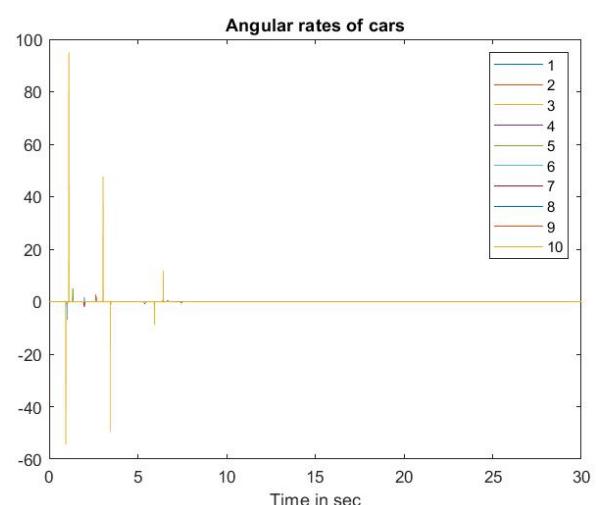
Διάγραμμα προσομοιώσεων 45 Γωνίες προσανατολισμού-
Προτεινόμενος ελεγκτής



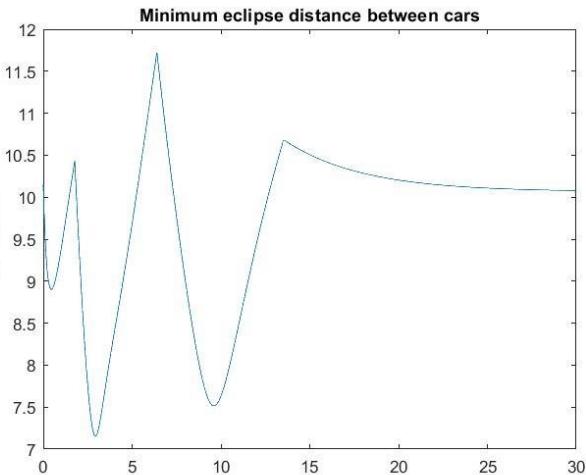
Διάγραμμα προσομοιώσεων 44 Γωνίες προσανατολισμού-
Ελεγκτής δημοσίευσης



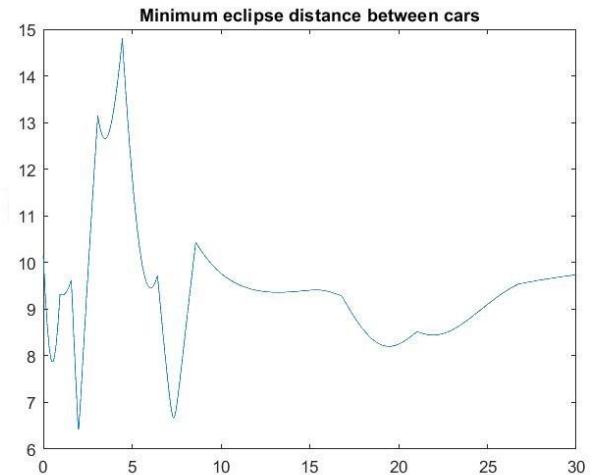
Διάγραμμα προσομοιώσεων 43 Είσοδοι υ- Προτεινόμενος
ελεγκτής



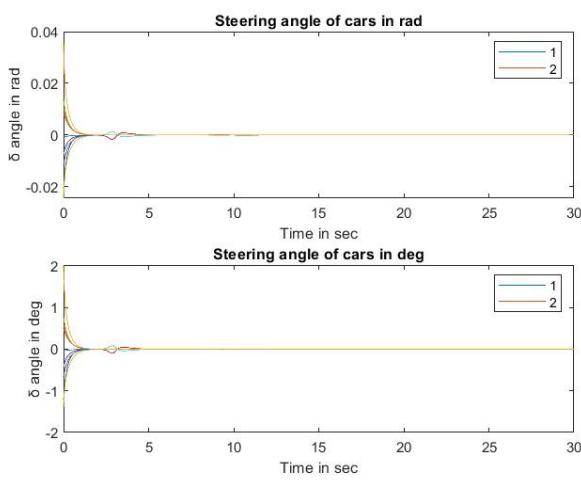
Διάγραμμα προσομοιώσεων 42 Είσοδοι υ- Ελεγκτής
δημοσίευσης



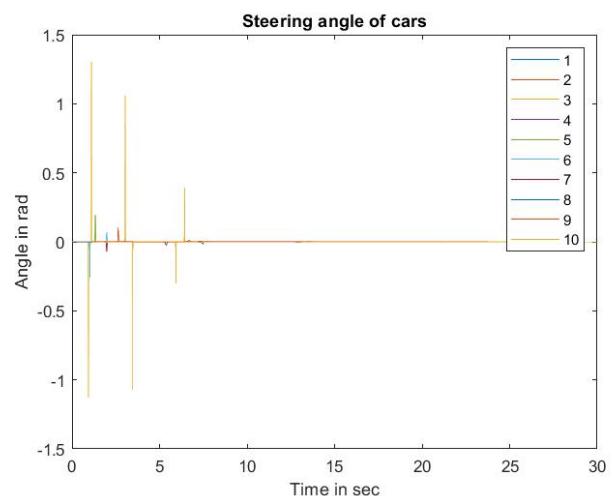
Διάγραμμα προσομοιώσεων 47 Ελάχιστη από τις αποστάσεις των οχημάτων-Προτεινόμενος Ελεγκτής



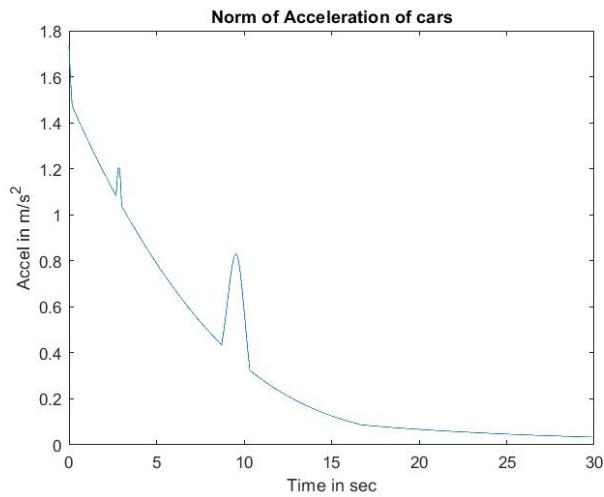
Διάγραμμα προσομοιώσεων 46 Ελάχιστη από τις αποστάσεις των οχημάτων-Ελεγκτής δημοσίευσης



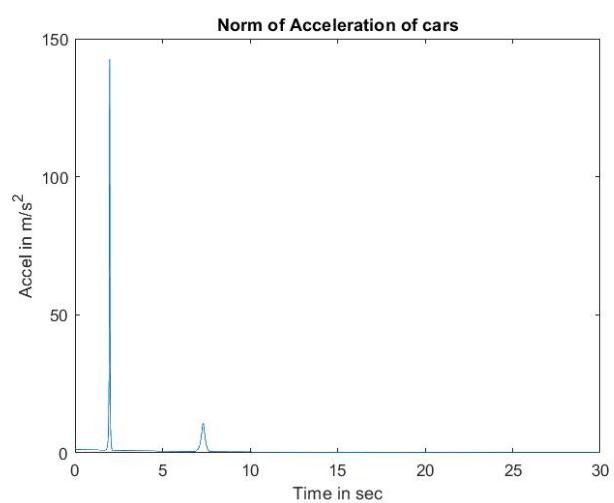
Διάγραμμα προσομοιώσεων 49 Γωνίες περιστροφής τιμονιού - Προτεινόμενος ελεγκτής



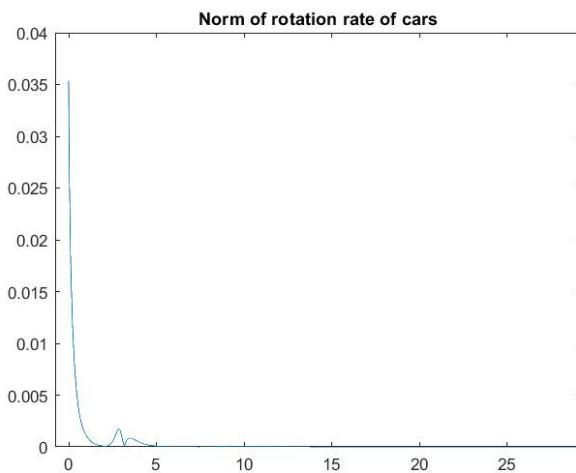
Διάγραμμα προσομοιώσεων 48 Γωνίες περιστροφής τιμονιού-Ελεγκτής δημοσίευσης



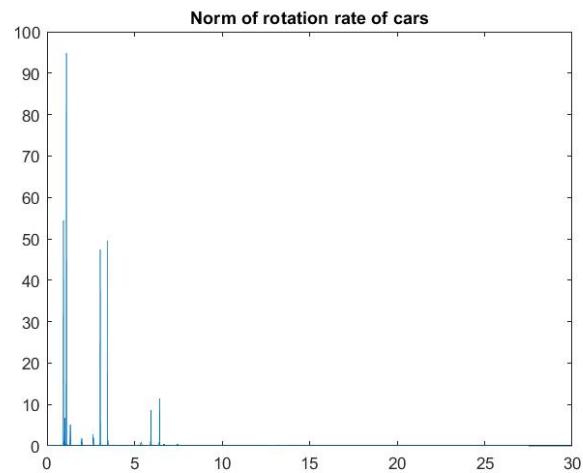
Διάγραμμα προσομοιώσεων 53 Μέγιστη από επιταχύνσεις οχημάτων-Προτεινόμενος ελεγκτής



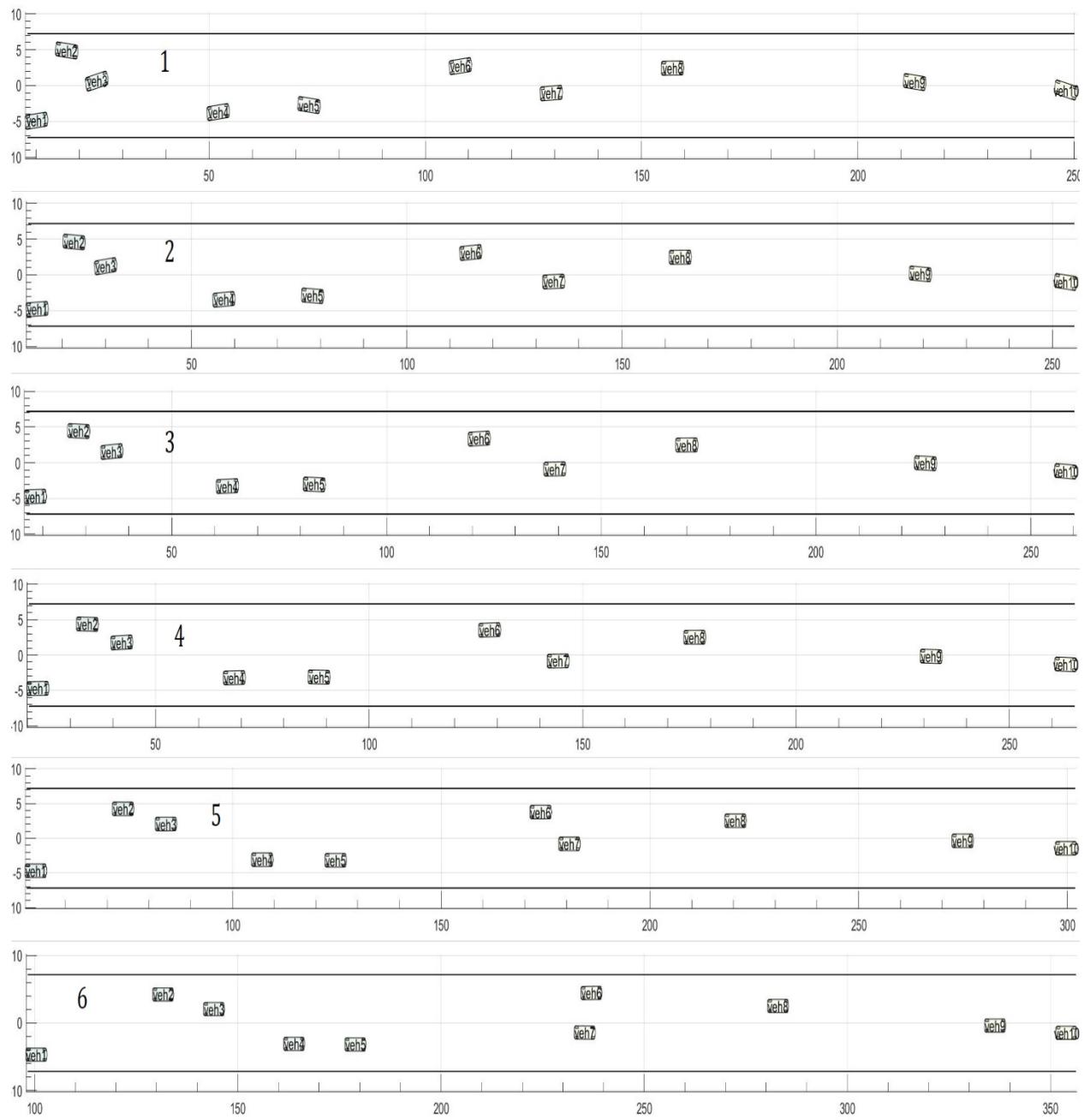
Διάγραμμα προσομοιώσεων 51 Μέγιστη από επιταχύνσεις οχημάτων-Ελεγκτής δημοσίευσης



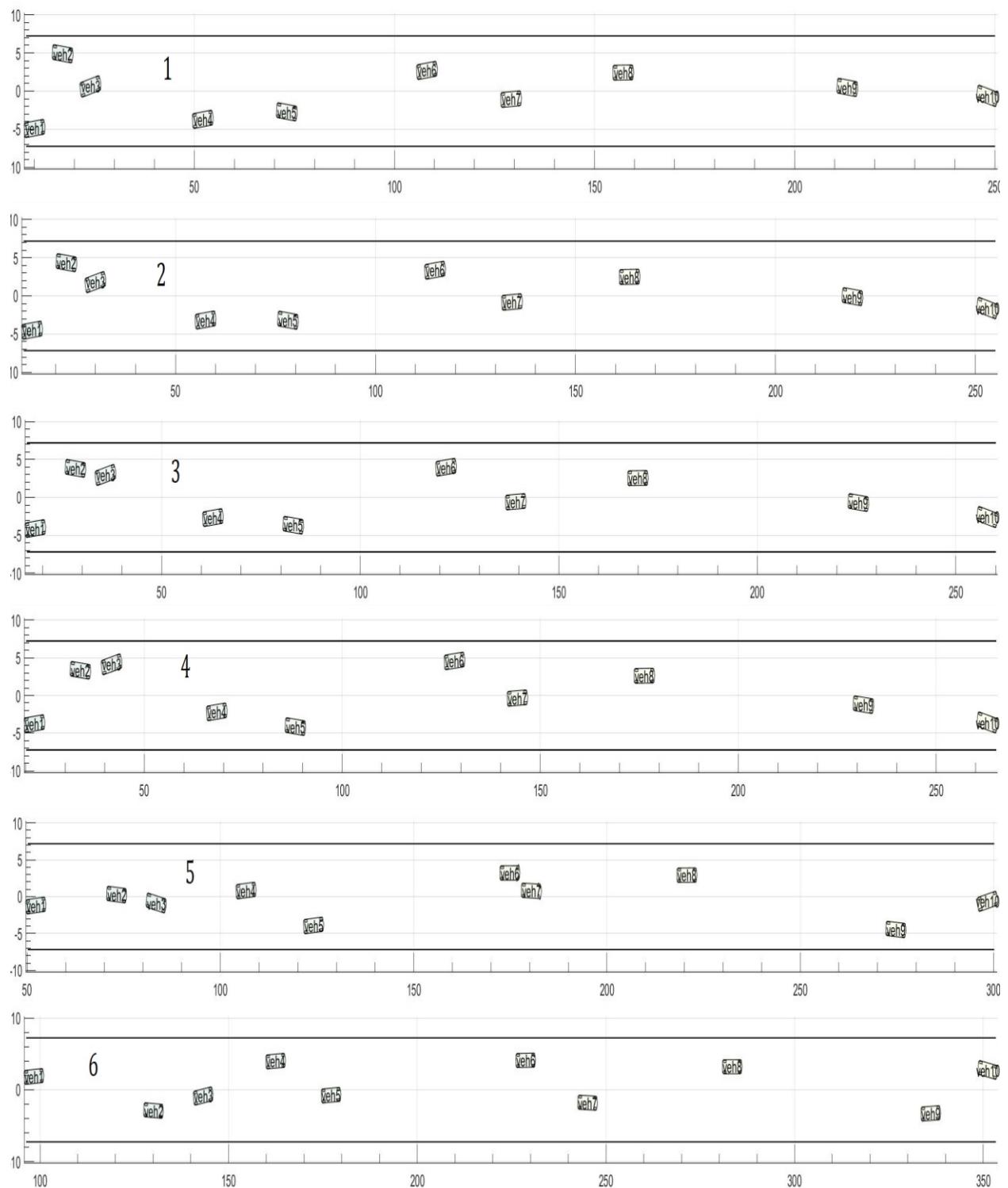
Διάγραμμα προσομοιώσεων 52 Μέγιστη είσοδος u-Προτεινόμενος Ελεγκτής



Διάγραμμα προσομοιώσεων 50 Μέγιστη είσοδος u-Ελεγκτής δημοσίευσης



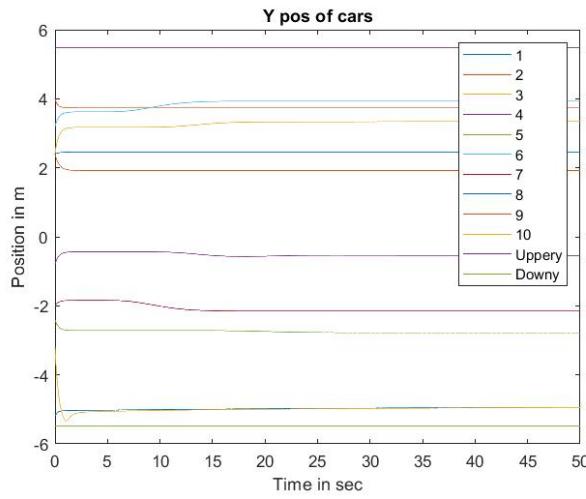
Στιγμιότυπα Κίνησης 4 Κίνηση οχημάτων με προτεινόμενο ελεγκτή



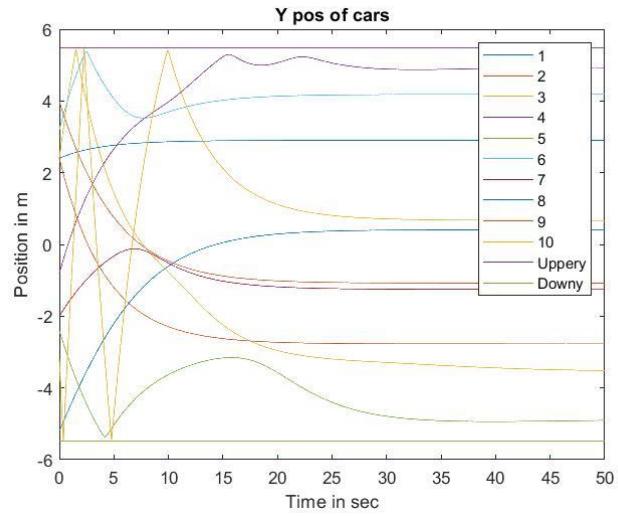
Στιγμότυπα Κίνησης 5 Κίνηση 10 οχημάτων με ελεγκτή δημοσίευσης

5.7. Συγκριτικά αποτελέσματα με δημοσίευση βάση για τον ελεγκτή - Περίπτωση 2

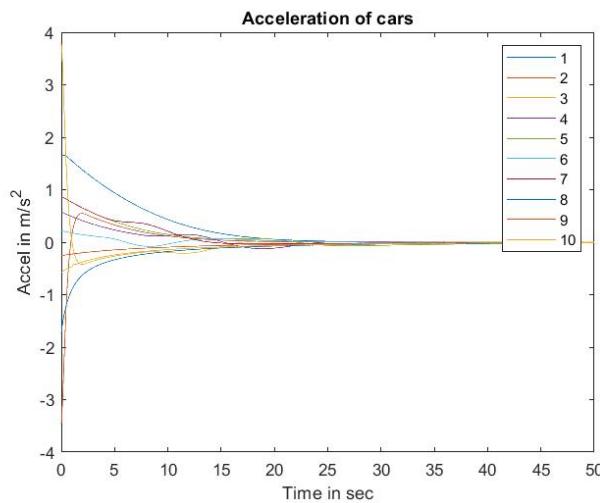
Παρατίθεται και μια δεύτερη περίπτωση προσομοίωσης και διαφοροποιημένες αρχικές συνθήκες όπως και με διαφορετική επιλογή $d_{inter} = 20 m$. Αριστερά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διπλωματικής και δεξιά της δημοσίευσης:



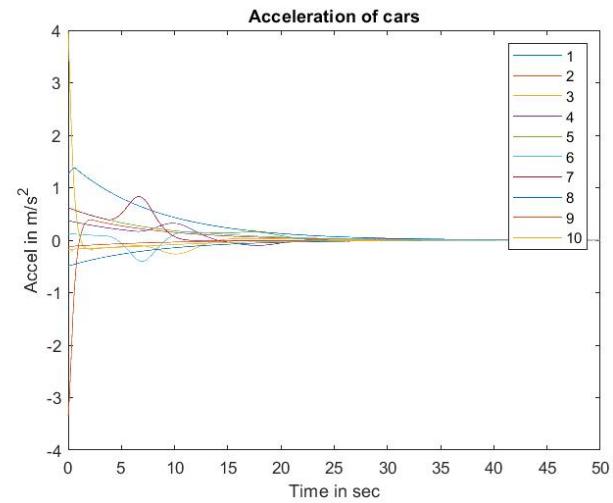
Διάγραμμα προσομοιώσεων 55 Θέσεις γ -Προτεινόμενος ελεγκτής



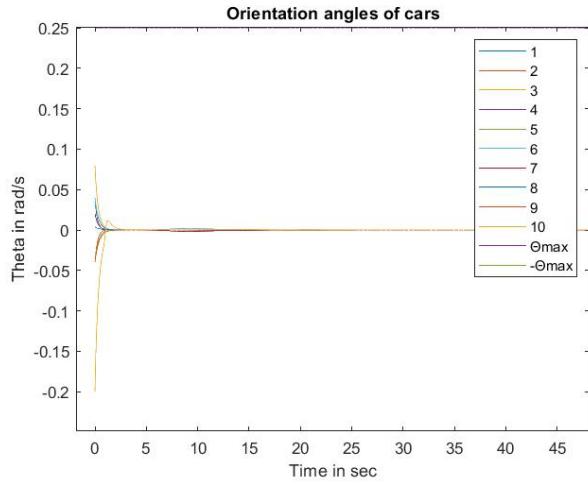
Διάγραμμα προσομοιώσεων 54-Θέσεις γ-Ελεγκτής Δημοσίευσης



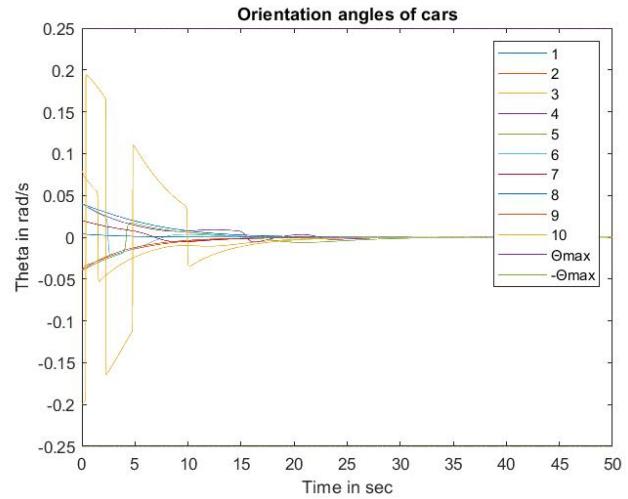
Διάγραμμα προσομοιώσεων 57 Επιταχύνσεις-Προτεινόμενος ελεγκτής



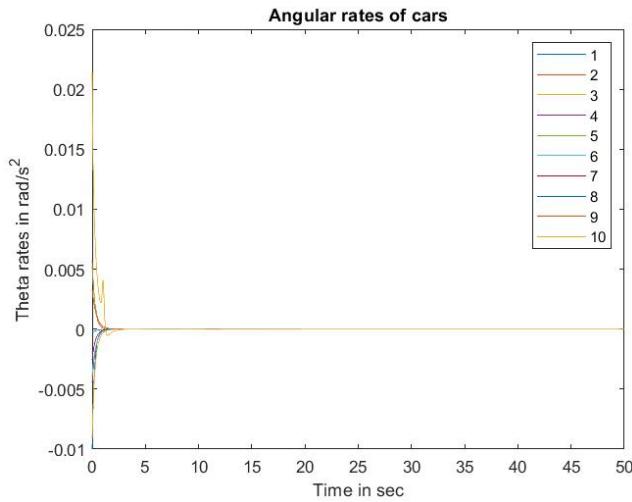
Διάγραμμα προσομοιώσεων 56 Επιταχύνσεις-Ελεγκτής Δημοσίευσης



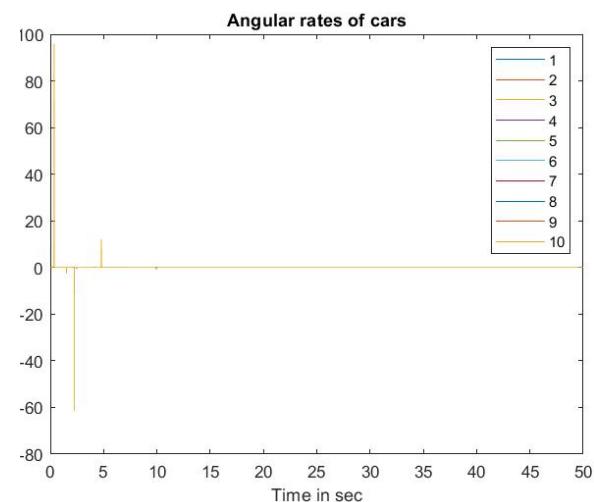
Διάγραμμα προσομοιώσεων 61 Γωνίες προσανατολισμού-Προτεινόμενος Ελεγκτής



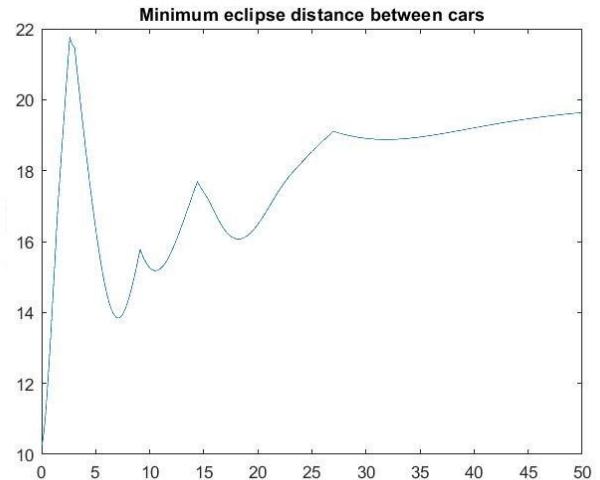
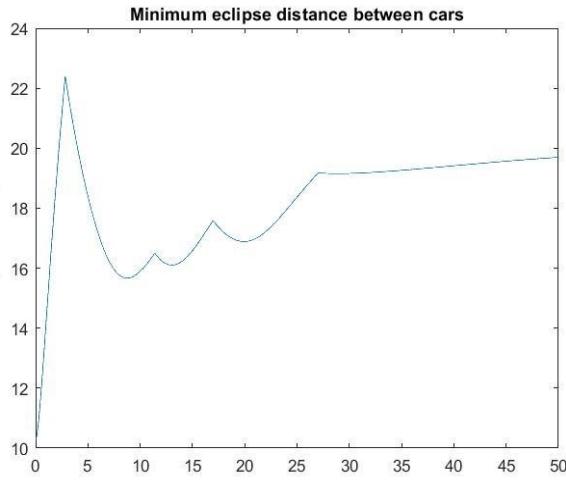
Διάγραμμα προσομοιώσεων 60 Γωνίες προσανατολισμού-Ελεγκτής Δημοσίευσης



Διάγραμμα προσομοιώσεων 59 Είσοδοι υ-Προτεινόμενος Ελεγκτής

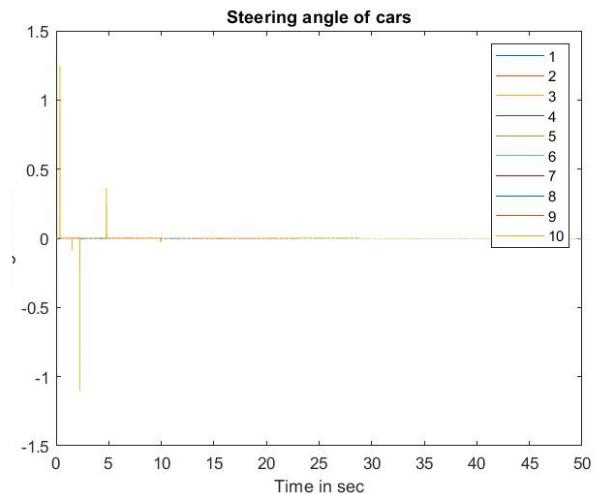
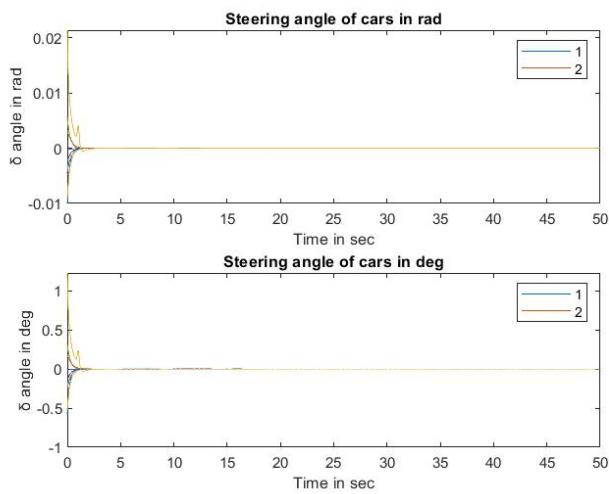


Διάγραμμα προσομοιώσεων 58 Είσοδοι υ-Ελεγκτής Δημοσίευσης



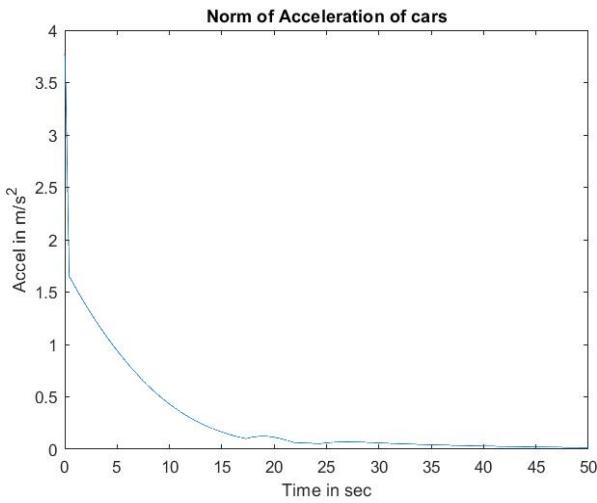
Διάγραμμα προσομοιώσεων 65 Ελάχιστη από αποστάσεις οχημάτων-Προτεινόμενος Ελεγκτής

Διάγραμμα προσομοιώσεων 64 Ελάχιστη από αποστάσεις οχημάτων-Ελεγκτής Δημοσίευσης

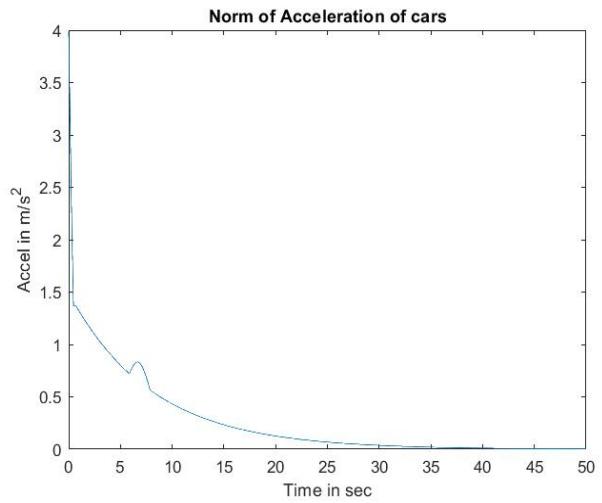


Διάγραμμα προσομοιώσεων 63 Γωνία περιστροφής τιμονιού-Προτεινόμενος Ελεγκτής

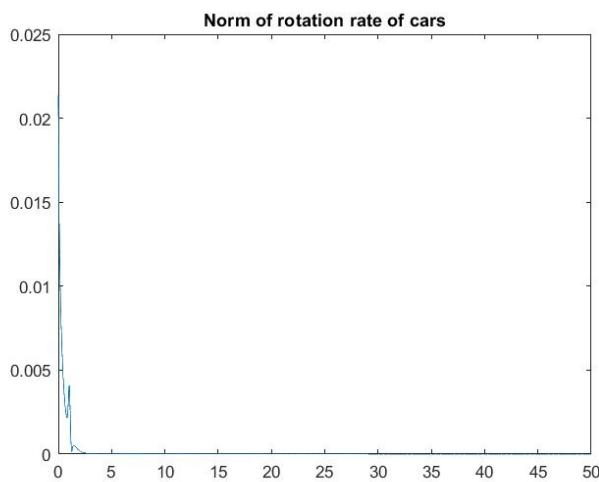
Διάγραμμα προσομοιώσεων 62 Γωνία περιστροφής τιμονιού-Ελεγκτής Δημοσίευσης



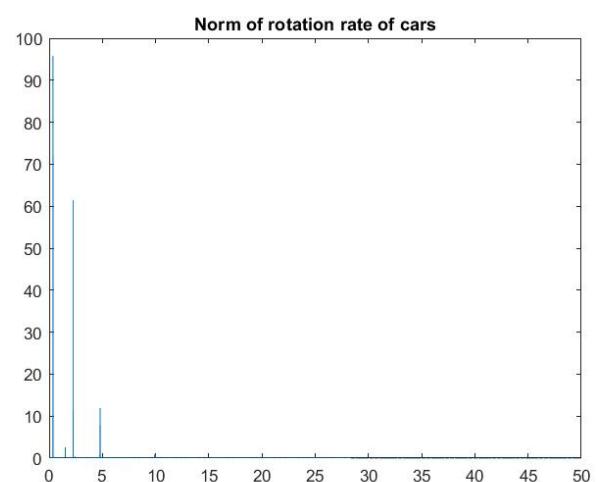
Διάγραμμα προσομοιώσεων 69 Μέγιστη από επιταχύνσεις - Προτεινόμενος Ελεγκτής



Διάγραμμα προσομοιώσεων 68 Μέγιστη από επιταχύνσεις- Ελεγκτής Δημοσίευσης



Διάγραμμα προσομοιώσεων 67 Μέγιστη από εισόδους u - Προτεινόμενος Ελεγκτής



Διάγραμμα προσομοιώσεων 66 Μέγιστη από εισόδους u- Ελεγκτής Δημοσίευσης

6. Βιβλιογραφικές αναφορές

- [1] I. Karafyllis, D. Theodosis and M. Papageorgiou, "Lyapunov-Based Two-Dimensional Cruise Control of Autonomous Vehicles on Lane-Free Roads," *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Austin, TX, USA, 2021, pp. 2683-2689, doi: 10.1109/CDC45484.2021.9682975.
- [2] Bechlioulis, Charalampos & Rovithakis, George. (2014). A Low-Complexity Global Approximation-Free Control Scheme with Prescribed Performance for Unknown Pure Feedback Systems. *Automatica*. 50. 10.1016/j.automatica.2014.02.020.
- [3] P. Polack, F. Altché, B. d'Andréa-Novel and A. de La Fortelle, "The kinematic bicycle model: A consistent model for planning feasible trajectories for autonomous vehicles?," *2017 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, Los Angeles, CA, USA, 2017, pp. 812-818, doi: 10.1109/IVS.2017.7995816.
- [4] Rajesh Rajamani *Vehicle Dynamics and Control*
- [5] C. P. Bechlioulis and G. A. Rovithakis, "Robust Adaptive Control of Feedback Linearizable MIMO Nonlinear Systems With Prescribed Performance," in *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 9, pp. 2090-2099, Oct. 2008, doi: 10.1109/TAC.2008.929402.
- [6] D. V. Dimarogonas and K. J. Kyriakopoulos, "Inverse Agreement Protocols With Application to Distributed Multi-Agent Dispersion," in *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 3, pp. 657-663, March 2009, doi: 10.1109/TAC.2008.2011009.
- [7] D. E. Chang, S. C. Shadden, J. E. Marsden and R. Olfati-Saber, "Collision avoidance for multiple agent systems," *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475)*, Maui, HI, USA, 2003, pp. 539-543 Vol.1, doi: 10.1109/CDC.2003.1272619.
- [8] Peter Wieland, Frank Allgöwer, CONSTRUCTIVE SAFETY USING CONTROL BARRIER FUNCTIONS, IFAC Proceedings Volumes,
- [9] M. T. Wolf and J. W. Burdick, "Artificial potential functions for highway driving with collision avoidance," *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Pasadena, CA, USA, 2008, pp. 3731-3736, doi: 10.1109/ROBOT.2008.4543783.
- [10] P. Tientrakool, Y. -C. Ho and N. F. Maxemchuk, "Highway Capacity Benefits from Using Vehicle-to-Vehicle Communication and Sensors for Collision Avoidance," *2011 IEEE Vehicular Technology Conference (VTC Fall)*, San Francisco, CA, USA, 2011, pp. 1-5, doi: 10.1109/VETECF.2011.6093130.
- [11] Y. Yang, J. Tan and D. Yue, "Prescribed Performance Tracking Control of a Class of Uncertain Pure-Feedback Nonlinear Systems With Input Saturation," in *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 50, no. 5, pp. 1733-1745, May 2020, doi: 10.1109/TSMC.2017.2784451.
- [12] F. Fotiadis and G. A. Rovithakis, "Input-Constrained Prescribed Performance Control for SISO Nonlinear Systems via Reference Relaxation," *2023 31st Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, Limassol, Cyprus, 2023, pp. 777-782, doi: 10.1109/MED59994.2023.10185809.
- [13] F. Fotiadis and G. A. Rovithakis, "Prescribed Performance Control for Discontinuous Output Reference Tracking," in *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 9, pp. 4409-4416, Sept. 2021, doi: 10.1109/TAC.2020.3046216.
- [14] A. P. Kechagias and G. A. Rovithakis, "On Visual Servoing under Field-of-View Limits and Impulsive Perturbations*," *2023 European Control Conference (ECC)*, Bucharest, Romania, 2023, pp. 1-6, doi: 10.23919/ECC57647.2023.10178365.

- [15] Y. Shi, Y. Huang and Y. Chen, "Trajectory Planning of Autonomous Trucks for Collision Avoidance With Rollover Prevention," in *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 23, no. 7, pp. 8930-8939, July 2022, doi: 10.1109/TITS.2021.3088293.
- [16] J. Ji, A. Khajepour, W. W. Melek and Y. Huang, "Path Planning and Tracking for Vehicle Collision Avoidance Based on Model Predictive Control With Multiconstraints," in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 66, no. 2, pp. 952-964, Feb. 2017, doi: 10.1109/TVT.2016.2555853.
- [17] A. Nakamura, Y. -C. Liu and B. Kim, "Short-Term Multi-Vehicle Trajectory Planning for Collision Avoidance," in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 69, no. 9, pp. 9253-9264, Sept. 2020, doi: 10.1109/TVT.2020.3004752.
- [18] J. Ji, A. Khajepour, W. W. Melek and Y. Huang, "Path Planning and Tracking for Vehicle Collision Avoidance Based on Model Predictive Control With Multiconstraints," in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 66, no. 2, pp. 952-964, Feb. 2017, doi: 10.1109/TVT.2016.2555853.
- [19] D. González, J. Pérez, V. Milanés and F. Nashashibi, "A Review of Motion Planning Techniques for Automated Vehicles," in *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 17, no. 4, pp. 1135-1145, April 2016, doi: 10.1109/TITS.2015.2498841.
- [20] D. Madás *et al.*, "On path planning methods for automotive collision avoidance," *2013 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, Gold Coast, QLD, Australia, 2013, pp. 931-937, doi: 10.1109/IVS.2013.6629586.
- [21] Yi Liang and Ho-Hoon Lee, "Decentralized formation control and obstacle avoidance for multiple robots with nonholonomic constraints," *2006 American Control Conference*, Minneapolis, MN, 2006, pp. 6 pp.-, doi: 10.1109/ACC.2006.1657615.
- [22] C. P. Bechlioulis and G. A. Rovithakis, "Decentralized Robust Synchronization of Unknown High Order Nonlinear Multi-Agent Systems With Prescribed Transient and Steady State Performance," in *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 1, pp. 123-134, Jan. 2017, doi: 10.1109/TAC.2016.2535102.
- [23] S. Mastellone, D. M. Stipanovic and M. W. Spong, "Remote Formation Control and Collision Avoidance for Multi-Agent Nonholonomic Systems," *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Rome, Italy, 2007, pp. 1062-1067, doi: 10.1109/ROBOT.2007.363125.
- [24] Mastellone S, Stipanović DM, Graunke CR, Intlekofer KA, Spong MW. Formation Control and Collision Avoidance for Multi-agent Non-holonomic Systems: Theory and Experiments. *The International Journal of Robotics Research*. 2008;27(1):107-126. doi:10.1177/0278364907084441