Project II
Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

Ασημάκης Κύδρος
ΑΕΜ: 3881
asimakis@csd.auth.gr

30 Μαΐου 2023

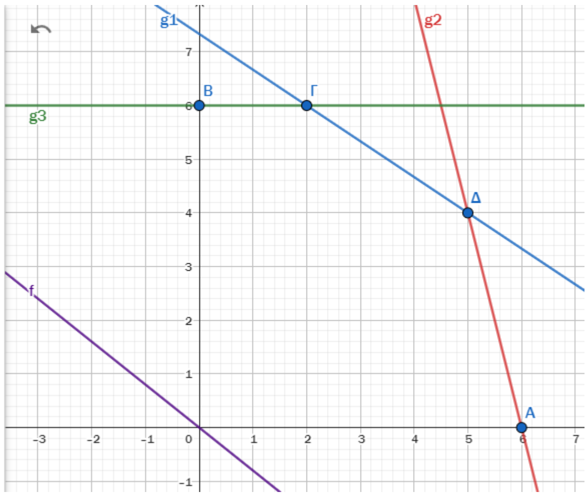
Άσκηση 1:
Ένας αγρότης παράγει 22 γαλόνια γάλα τη βδομάδα, με τα οποία παρασκευάζει και πουλάει βούτυρο και παγωτό. Για την παραγωγή 1 κιλού βουτύρου απαιτούνται 2 γαλόνια γάλα, ενώ για 1 γαλόνι παγωτό απαιτούνται 3. Ο αγρότης έχει κάθε βδομάδα 6 ώρες να παράξει ό,τι παράξει, και του παίρνει 1 ώρα να παρασκευάσει 1 κιλό βούτυρο ή 4 γαλόνια παγωτό. Θεωρείστε πως ο αγρότης πουλάει ό,τι παράξει, μπορεί να αποθηκεύσει άπειρη ποσότητα βουτύρου αλλά έως 6 γαλόνια παγωτό, και ότι έχει καθαρό κέρδος €4/κιλό βουτύρου και €5/γαλόνι παγωτό. Στόχος του η μεγιστοποίηση του κέρδους του κάθε βδομάδα. Διατυπώστε το παραπάνω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με σχέσεις και δώστε τη γραφική λύση.

Έστω πως με x_1 συμβολίζεται η παραγόμενη ποσότητα βουτύρου σε κιλά και με x_2 η παραγόμενη ποσότητα παγωτού σε γαλόνια. Τότε το πρόβλημα γράφεται:

$$\begin{aligned} maximize \;\; & f = 4x_1 + 5x_2 \\ subject\;\; to \;\; & g_1 = 2x_1 + 3x_2 \leq 22 \\ & g_2 = x_1 + \frac{x_2}{4} \leq 6 \\ & g_3 = x_2 \leq 6 \\ & g_4 = x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

όπου f η συνάρτηση κέρδους.

Κάνοντας τη γραφική παράσταση των παραπάνω έχουμε



όπου η μωβ γραμμή είναι ο αντιπρόσωπος της συνάρτησης κέρδους. Όσο η τιμή της f αυξάνει, η ευθεία θα ανεβαίνει, και θα περάσει από τα άκρα του πεντάγωνου του πεδίου ορισμού ΟΒΓΔΑ, τα οποία είναι:

$$\begin{aligned}
&\text{O} : (0,0) \text{ με } f(\text{O}) = €0\\
&\text{B} : (0,6) \text{ με } f(\text{B}) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 6 = €30\\
&\Gamma : (2,6) \text{ με } f(\Gamma) = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = €38\\
&\Delta : (5,4) \text{ με } f(\Delta) = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = €40\\
&\text{A} : (6,0) \text{ με } f(\text{A}) = 4 \cdot 6 + 5 \cdot 0 = €24
\end{aligned}$$

Άρα η f μεγιστοποιείται στην κορυφή Δ και ο αγρότης θα έχει μέγιστο κέρδος €40/βδομάδα άν παράγει 5 κιλά βούτυρο και 4 γαλόνια παγωτό.

Άσκηση 2:
Λύστε το ακόλουθο πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex:

$$\begin{aligned} &maximize \;\; f = x_1 + x_2 \\ &subject\;\; to \;\; 4x_1 + 2x_2 \leq 28 \\ &\qquad x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ &\qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Εισάγουμε δύο νέες (ψευδο)μεταβλητές, έστω $x_3, x_4 \geq 0$ έτσι ώστε οι ανισοϊσότητες να γίνουν ισότητες. Άρα το πρόβλημα μετατρέπεται στο

$$\begin{aligned} &maximize \;\; f = 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ &subject\;\; to \;\; 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 28 \\ &\qquad x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 14 \\ &\qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως η εισαγωγή των ψευδομεταβλητών στους περιορισμούς σχηματίζει τον επιθυμητό 2×2 μοναδιαίο πίνακα, επομένως δεν απαιτείται η εισαγωγή περαιτέρω τεχνιτών μεταβλητών.

Έχοντας όλες τις σχέσεις παρουσιασμένες συναρτήσει των x_1, x_2, x_3, x_4, σχηματίζουμε τον πίνακα βάσης του προβλήματος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	Δ.Μ.
x_3	4	2	1	0	28
x_4	1	3	0	1	14
$-f$	1	1	0	0	0

Καταλαβαίνουμε πως θα επιλέξουμε την στήλη x_1 για εισαγωγή στη βάση, καθώς είναι η πρώτη με μέγιστη τιμή στην $-f$ γραμμή (τιμή 1).

Άρα έχουμε

$$x_3 : \frac{28}{4} = 7 \leftarrow smallest$$
$$x_4 : \frac{14}{1} = 14$$

και επομένως καταλαβαίνουμε πως θα επιλέξουμε την γραμμή x_3 για εξαγωγή από την βάση. Άρα έχουμε ως pivot την διασταύρωσή τους 4.

Έτσι έχουμε:

- Νέα γραμμή pivot:

$$x_1 : \frac{x_3}{pivot} = \frac{<4, 2, 1, 0, 28>}{4} = <1, 0.5, 0.25, 0, 7>$$

- Νέα γραμμή x_4:

$$\begin{aligned} x_4 :\ & x_{4old} - driver_{x_4} \cdot row_{pivot} = \\ & <1, 3, 0, 1, 14> -1 \cdot <1, 0.5, 0.25, 0, 7> = \\ & <0, 2.5, -0.25, 1, 7> \end{aligned}$$

- Νέα γραμμή $-f$:

$$\begin{aligned} -f :\ & -f_{old} - driver_{-f} \cdot row_{pivot} = \\ & <1, 1, 0, 0, 0> -1 \cdot <1, 0.5, 0.25, 0, 7> = \\ & <0, 0.5, -0.25, 0, -7> \end{aligned}$$

Άρα κατασκευάζουμε τον καινούριο πίνακα βάσης του προβλήματος:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	Δ.Μ.
x_1	1	0.5	0.25	0	7
x_4	0	2.5	-0.25	1	7
$-f$	0	0.5	-0.25	0	-7

Η γραμμή $-f$ έχει και θετικά στοιχεία επομένως συνεχίζουμε. Επιλέγουμε τώρα την στήλη x_2 για εισαγωγή καθώς έχει το μέγιστο στοιχείο στην προαναφερόμενη γραμμή (τιμή 0.5).

Άρα έχουμε

$$x_1 : \frac{7}{0.5} = 14$$
$$x_4 : \frac{7}{2.5} = 2.8 \leftarrow smallest$$

και άρα τώρα θα επιλέξουμε την γραμμή x_4 για εξαγωγή απο την βάση. Επομένως έχουμε καινούριο pivot την νέα διασταύρωση 2.5.

Έχουμε:

- Νέα γραμμή pivot:

$$x_2 : \frac{< 0, 2.5, -0.25, 1, 7 >}{2.5} =< 0, 1, -0.1, 0.4, 2.8 >$$

- Νέα γραμμή x_1:

$$x_1 : \quad < 1, 0.5, 0.25, 0, 7 > -0.5\cdot < 0, 1, -0.1, 0.4, 2.8 >=$$
$$< 1, 0, 0.3, -0.2, 5.6 >$$

- Νέα γραμμή $-f$:

$$-f: \quad < 0, 0.5, -0.25, 0, -7 > -0.5\cdot < 0, 1, -0.1, 0.4, 2.8 >=$$
$$< 0, 0, -0.2, -0.2, -8.4 >$$

άρα

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	Δ.Μ.
x_1	1	0	0.3	-0.2	5.6
x_2	0	1	-0.1	0.4	2.8
$-f$	0	0	-0.2	-0.2	-8.4

όπου και παρατηρούμε πως η γραμμή $-f$ έχει μόνο μη θετικά στοιχεία και άρα σταματάμε.

Από την παραπάνω διαδικασία συλλέγουμε πως η βέλτιστη λύση είναι

$$x_1 = 5.6$$
$$x_2 = 2.8$$
$$x_3 = x_4 = 0$$

και με το μάτι επιβεβαιώνουμε πως οι τιμές αυτές όντως μεγιστοποιούν τους αρχικούς περιορισμούς.

Άσκηση 3:
Μια εταιρία κατασκευάζει κονσερβοποιημένα φασόλια, τα οποία ετοιμάζονται σε 3 κονσερβοποιία σε διαφορετικές περιοχές (Κ1, Κ2, Κ3) και διανέμονται σε 4 αποθήκες (Α1,Α2, Α3, Α4). Απαιτείται η μεταφορά 300 φορτίων τους. Δίνεται ο πίνακας της δυνατότητας παραγωγής, χωρητικότητας και κόστους μεταφοράς για κάθε κονσερβοποιίο και αποθήκη.

1. Δώστε μια αρχική λύση που ελαχιστοποιεί το κόστος με τη μέθοδο του ελάχιστου κόστους.

2. Ελέγξτε αν αυτή η λύση είναι η βέλτιστη.

Ο αρχικός πίνακας είναι ο εξής

1	Α1	Α2	Α3	Α4	Π
Κ1	464	513	654	867	75
Κ2	352	416	690	791	125
Κ3	995	682	388	685	100
Χ	80	65	70	85	300

1. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του ελάχιστου κόστους. Κάθε φορά επιλέγουμε το ελάχιστο στοιχείο-κόστος του πίνακα και ορίζουμε την αντίστοιχη x_{ij} μεταβλητή ως

$$x_{ij} = min\{\Pi_i, \mathrm{X}_j\}$$

Αφαιρούμε αυτή την τιμή από τα Π_i, X_j. Όποιο μηδενιστεί ορίζει και την γραμμή ή στήλη που θα διαγράψουμε στο βήμα.

Άρα:

min cost: $c_{21} = 352 \Rightarrow x_{21} = min\{125, 80\} = 80$
$\Rightarrow \Pi_2 = 45, X_1 = 0 \Rightarrow$ διαγραφή στήλης 1

2	A2	A3	A4	Π
K1	513	654	867	75
K2	416	690	791	45
K3	682	388	685	100
X	65	70	85	300

min cost: $c_{33} = 388 \Rightarrow x_{33} = min\{100, 70\} = 70$
$\Rightarrow \Pi_3 = 30, X_3 = 0 \Rightarrow$ διαγραφή στήλης 3

3	A2	A4	Π
K1	513	867	75
K2	416	791	45
K3	682	685	30
X	65	85	300

min cost: $c_{22} = 416 \Rightarrow x_{22} = min\{45, 65\} = 45$
$\Rightarrow \Pi_2 = 0, X_2 = 20 \Rightarrow$ διαγραφή γραμμής 2

4	A2	A4	Π
K1	513	867	75
K3	682	685	30
X	20	85	300

min cost: $c_{12} = 513 \Rightarrow x_{12} = min\{75, 20\} = 20$
$\Rightarrow \Pi_1 = 55, X_2 = 20 \Rightarrow$ διαγραφή στήλης 2

5	A4	Π
K1	867	55
K3	685	30
X	85	300

min cost: $c_{34} = 685 \Rightarrow x_{34} = min\{30, 85\} = 30$
$\Rightarrow \Pi_3 = 0, X_4 = 55 \Rightarrow$ διαγραφή γραμμής 3

6	A4	Π
K1	867	55
X	55	300

min cost: $c_{14} = 867 \Rightarrow x_{14} = min\{55, 55\} = 55$
$\Rightarrow \Pi_1 = 0, X_4 = 0 \Rightarrow$ διαγραφή στήλης 4

Τερματισμός καθώς δεν ορίζεται πλέον πίνακας.

Άρα έχουμε την αρχική λύση

K1 αποθηκεύει 20 κονσέρβες στην A2 και 55 στην A4
K2 αποθηκεύει 80 κονσέρβες στην A1 και 45 στην A2
K3 αποθηκεύει 70 κονσέρβες στην A3 και 30 στην A4
με συνολικό κόστος μεταφοράς

$$C = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$= c_{12}x_{12} + c_{14}x_{14} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{33}x_{33} + c_{34}x_{34}$$

$$= 513 \cdot 20 + 867 \cdot 55 + 352 \cdot 80 + 416 \cdot 45 + 388 \cdot 70 + 685 \cdot 30$$

$$= 152535$$

2. Ελέγχουμε την λύση εφαρμόζοντας τη μέθοδο Modi (U/V):

   Χτίζουμε τον πίνακα U,V ο οποίος έχει τιμές τα κόστη του αρχικού πίνακα για τα οποία ορίστηκε x_{ij}.

Δηλαδή:

1	V1	V2	V3	V4
U1		513		867
U2	352	416		
U3			388	685

Υπολογίζουμε τα U_i, V_j με τον κανόνα $U_i + V_j = c_{ij}$, άρα:

$$\left.\begin{aligned} U_1 + V_2 &= 513 \\ U_1 + V_4 &= 867 \\ U_2 + V_1 &= 352 \\ U_2 + V_2 &= 416 \\ U_3 + V_3 &= 388 \\ U_3 + V_4 &= 685 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{U_1=0} \begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = -97 \\ U_3 = -182 \\ V_1 = 449 \\ V_2 = 513 \\ V_3 = 570 \\ V_4 = 867 \end{cases}$$

Με αυτές τις τιμές χτίζουμε τον καινούριο πίνακα U, V:

2	449	513	570	867
0	x_{11}	β	x_{13}	β
-97	β	β	x_{23}	x_{24}
-182	x_{31}	x_{32}	β	β

Ό,τι ακολουθεί πρέπει να γίνει επαναληπτικά έως ότου τα x_{ij}, που ορίζονται ως

$$x_{ij} = c_{ij} - U_i - V_j$$

να είναι όλα μη-αρνητικά.

Υπολογίζουμε τα x_{ij}:

$$
\begin{aligned}
x_{11} &= 464 - 0 - 449 = 15 > 0 \\
x_{13} &= 654 - 0 - 570 = 84 > 0 \\
x_{23} &= 690 - (-97) - 570 = 217 > 0 \\
x_{24} &= 791 - (-97) - 867 = 21 > 0 \\
x_{31} &= 995 - (-182) - 449 = 728 > 0 \\
x_{32} &= 682 - (-182) - 513 = 351 > 0
\end{aligned}
$$

Άρα είμαστε τυχεροί και δεν χρειάζεται να συνεχίσουμε.

Το γεγονός ότι δεν κάναμε καμία αλλαγή στον πίνακα της αρχικής λύσης υποδεικνύει ότι τελικά αυτή η λύση είναι και η <u>βέλτιστη</u>.

Άσκηση 4:

Δίνεται ο πίνακας του κόστους ανάθεσης εργασιών (E1-E5) στους τεχνίτες (T1-T5). Ένας τεχνίτης μπορεί να αναλάβει μόνο μια εργασία και κάθε εργασία μπορεί να καλυφθεί από μόνο έναν τεχνίτη. Βρείτε την βέλτιστη ανάθεση ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος.

Ο αρχικός πίνακας είναι ο εξής

1	T1	T2	T3	T4	T5
E1	8	7	5	3	4
E2	5	4	4	0	3
E3	8	2	7	4	4
E4	5	6	5	4	4
E5	8	3	7	9	4

Θέλουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Köning, επομένως θέλουμε να εξολοθρεύουμε συνεχώς τα (κατάλληλα) ελάχιστα στοιχεία του πίνακα έως ώστε να καλύψουμε όλα τα παραγόμενα μηδενικά με ακριβώς 5 ανεξάρτητες ευθείες (όσες και η διάσταση του πίνακα).

Εντοπίζουμε τα ελάχιστα στοιχεία κάθε γραμμής και τα αφαιρούμε από όλη την γραμμή

1	T1	T2	T3	T4	T5
E1	8	7	5	3	4
E2	5	4	4	0	3
E3	8	2	7	4	4
E4	5	6	5	4	4
E5	8	3	7	9	4

→

2	T1	T2	T3	T4	T5
E1	5	4	2	0	1
E2	5	4	4	0	3
E3	6	0	5	2	2
E4	1	2	1	0	0
E5	5	0	4	6	1

Κάνουμε το ίδιο και για τις καινούριες στήλες, άρα

2	T1	T2	T3	T4	T5
E1	5	4	2	0	1
E2	5	4	4	0	3
E3	6	0	5	2	2
E4	1	2	1	0	0
E5	5	0	4	6	1

→

3	T1	T2	T3	T4	T5
E1	4	4	1	0	1
E2	4	4	3	0	3
E3	5	0	4	2	2
E4	0	2	0	0	0
E5	4	0	3	6	1

Η κάλυψη όλων των μηδενικών γίνεται με 3 ευθείες:

3	T1	T2	T3	T4	T5
E1	4	4	1	0	1
E2	4	4	3	0	3
E3	5	0	4	2	2
E4	0	2	0	0	0
E5	4	0	3	6	1

επομένως δεν τελειώσαμε. Στον τελευταίο πίνακα, επιλέγουμε το ελάχιστο στοιχείο εκτός των ευθειών. Εδώ είναι το 1. Αυτό το αφαιρούμε από τα μαύρα στοιχεία και το προσθέτουμε στις διασταυρώσεις των ευθειών (μωβ στοιχεία).

Έτσι έχουμε

3	T1	T2	T3	T4	T5
E1	4	4	1	0	1
E2	4	4	3	0	3
E3	5	0	4	2	2
E4	0	2	0	0	0
E5	4	0	3	6	1

$\rightarrow$

4	T1	T2	T3	T4	T5
E1	3	4	0	0	0
E2	3	4	2	0	2
E3	4	0	3	2	1
E4	0	3	0	1	0
E5	3	0	2	6	0

Πλέον η κάλυψη γίνεται με ακριβώς 5 ευθείες:

4	T1	T2	T3	T4	T5
E1	3	4	0	0	0
E2	3	4	2	0	2
E3	4	0	3	2	1
E4	0	3	0	1	0
E5	3	0	2	6	0

και άρα σταματάμε. Για να σχηματίσουμε τώρα την κατανομή, στοχεύουμε στο να δημιουργήσουμε τον μοναδιαίο πίνακα επιλέγοντας μηδενικά έτσι ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη να έχει ακριβώς ένα.

Εύκολα φαίνεται πως αυτός είναι ο

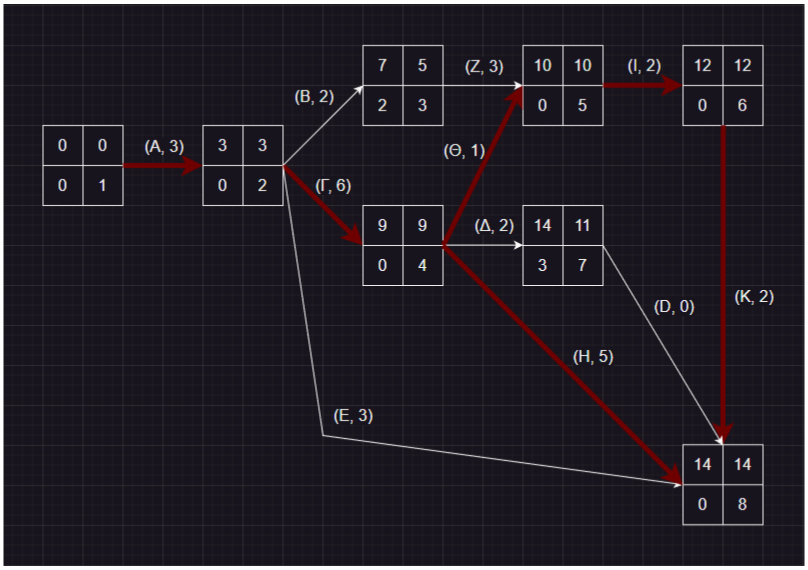
5	T1	T2	T3	T4	T5
E1	0	0	1	0	0
E2	0	0	0	1	0
E3	0	1	0	0	0
E4	1	0	0	0	0
E5	0	0	0	0	1

και άρα η βέλτιστη κατανομή είναι η

$$T1 \rightarrow E4, \;\; T2 \rightarrow E3, \;\; T3 \rightarrow E1, \;\; T4 \rightarrow E2, \;\; T5 \rightarrow E5$$

Άσκηση 5:
Δίνεται πίνακας των διαδικασιών που απαιτούνται για το ανέβασμα μιας παράστασης. Σχεδιάστε το δίκτυο και βρείτε την κρίσιμη διαδρομή.

Το παραγόμενο διάγραμμα είναι αυτό που φαίνεται παρακάτω



όπου:

- Κόκκινο βέλος αποτελεί κομμάτι της Κρίσιμης Διαδρομής
- Πάνω δεξιά στην κατάσταση i καταγράφεται ο νωρίτερος χρόνος $N(i)$
- Πάνω αριστερά καταγράφεται ο αργότερος χρόνος $A(i)$
- Κάτω αριστερά η διαφορά $|A(i) - N(i)|$
- Κάτω δεξιά ο δείκτης της κατάστασης i

Τα σημειωμένα νούμερα βρίσκονται με τον εξής τρόπο

$$N(i) = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ max\{N(j) + t(i,j) \ \ \forall j < i \ni \exists t(i,j)\}, & else \end{cases}$$

$$A(i) = \begin{cases} N(n), & i = n \\ min\{A(j) - t(i,j) \ \ \forall j > i \ni \exists t(i,j)\}, & else \end{cases}$$

άρα:

$$\begin{aligned}
N(1) &= 0 \\
N(2) &= N(1) + 3 = 3 \\
N(3) &= N(2) + 2 = 5 \\
N(4) &= N(2) + 6 = 9 \\
N(5) &= max \begin{cases} N(3) + 3 = 8 \\ N(4) + 1 = 10 \end{cases} = 10 \\
N(6) &= N(5) + 2 = 12 \\
N(7) &= N(4) + 2 = 11 \\
N(8) &= max \begin{cases} N(2) + 3 = 6 \\ N(4) + 5 = 14 \\ N(6) + 2 = 14 \\ N(7) + 0 = 11 \end{cases} = 14
\end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
&A(8) = 14\\
&A(7) = A(8) - 0 = 14\\
&A(6) = A(8) - 2 = 12\\
&A(5) = A(6) - 2 = 10\\
&A(4) = min \begin{cases} A(8) - 5 = 9\\ A(7) - 2 = 12\\ A(5) - 1 = 9 \end{cases} = 9\\
&A(3) = A(5) - 3 = 7\\
&A(2) = min \begin{cases} A(8) - 3 = 11\\ A(4) - 6 = 3\\ A(3) - 2 = 5 \end{cases} = 3\\
&A(1) = A(2) - 3 = 0
\end{aligned}
$$

Για να βρούμε την Κρίσιμη Διαδρομή, αντιστοιχίζουμε σε κάθε διαδικασία την τιμή

$$\Sigma(i, j) = A(j) - N(i) - t(i, j), \quad j > i$$

για τις καταστάσεις i, j που συνδέει η εκάστοτε διαδικασία. Αυτές που αντιστοιχούν σε μηδέν ανήκουν στην Κ.Δ. Επομένως:

$Task$	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ
(i, j)	(1, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(4, 7)	(2, 8)	(3, 5)	(4, 8)	(4, 5)	(5, 6)	(6, 8)
$\Sigma(i, j)$	0*	2	0*	3	8	2	0*	0*	0*	0*

και άρα η Κρίσιμη Διαδρομή είναι αυτή που φαίνεται στο διάγραμμα.