Δεύτερη Υποχρεωτική Εργασία

Ονοματεπώνυμο: Ασημάκης Κύδρος
AEM: 3881

26 Ιανουαρίου 2022

1 Πέμπτη Άσκηση

Για την προσέγγιση του ημιτόνου, χρησιμοποιήθηκαν τα εξής σημεία-δείγματα:

x (radians)	sin(x)
$-\pi$	0
$\frac{-\pi}{2}$	-1
$\frac{-\pi}{4}$	-0.707106
$\frac{-\pi}{8}$	-0.382683
0	0
1	0.841470
$\frac{\pi}{8}$	0.382683
$\frac{\pi}{4}$	0.707106
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0

(με την ακρίβεια που φαίνεται).

α) Μέθοδος Lagrange

Στην πρώτη εκτέλεση, ο αλγόριθμος καλεί τα σημεία και τα αποθηκεύει στην μνήμη για να μην καλούνται συνεχώς. Έπειτα χτίζει τον γνωστό τύπο:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

θεωρώντας όπου x την παράμετρο της συνάρτησης και ενημερώνει την (αρχικά 0) σούμα:

$$sum+ = y_i L_i(x)$$

Έφοσον χρησιμοποιούμε κατευθείαν την ζητούμενη τιμή στην κατασκευή του πολυωνύμου, η σούμα αυτή αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα-προσέγγιση του ημιτόνου για την περασμένη τιμή.

β) Μέθοδος splines(φυσικά κυβικά)

Θεωρώντας κάθε spline ως πολυώνυμο της μορφής

$$y = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^3$$

Ορίζουμε την πεντάδα (a, b, c, d, x_0) που θα αντιπροσωπεύει ένα spline. Αφού η θεωρητική μεθοδολογία απαιτεί αόριστη ολοκλήρωση, βρίσκουμε τα splines για τα σημεία μας μέσω του **εξής αλγορίθμου**.

Έχοντας βρει τα splines, η συνάρτηση-προσέγγιση τα αποθηκεύει στην μνήμη για να μην καλούνται συνεχώς. Καλεί με τον ίδιο τρόπο και τα ίδια τα σημεία για να τα χρησιμοποιήσει ως πεδία ορισμού των splines. Για κάθε παράμετρο, βρίσκει σε πιο πεδίο ορισμού ανήκει και επιστρέφει το αποτέλεσμα του αντίστοιχου spline για την συγκεκριμένη παράμετρο.

γ) Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Η συνάρτηση δέχεται ως ορίσματα το σημείο x για το οποίο ζητείται η τιμή του, καθώς και ο βαθμός του πολυωνύμου-προσέγγιση που απαιτείται. Στην προκειμένη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε τρίτου βαθμού πολυώνυμο.

Αρχικά η συνάρτηση καλεί τους συντελεστές του πολυωνύμου για να τους αποθηκεύσει στην μνήμη ώστε να μην καλούνται συνεχώς. Αυτή η διαδικασία καλεί τα σημεία-δείγματα και αρχικοποιεί με αυτά τους πίνακες A, b:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_i \\ \dots \end{bmatrix}$$

$i = 0, 1, ..., n-1$ n = αριθμός σημείων. Μετέπειτα υπολογίζει τους πίνακες $A^T A$, $A^T b$ χρησιμοποιώντας τις μεθόδους και τις κλάσεις των προηγούμενων ασκήσεων. Η λύση του

$$(A^T A)c = A^T b$$

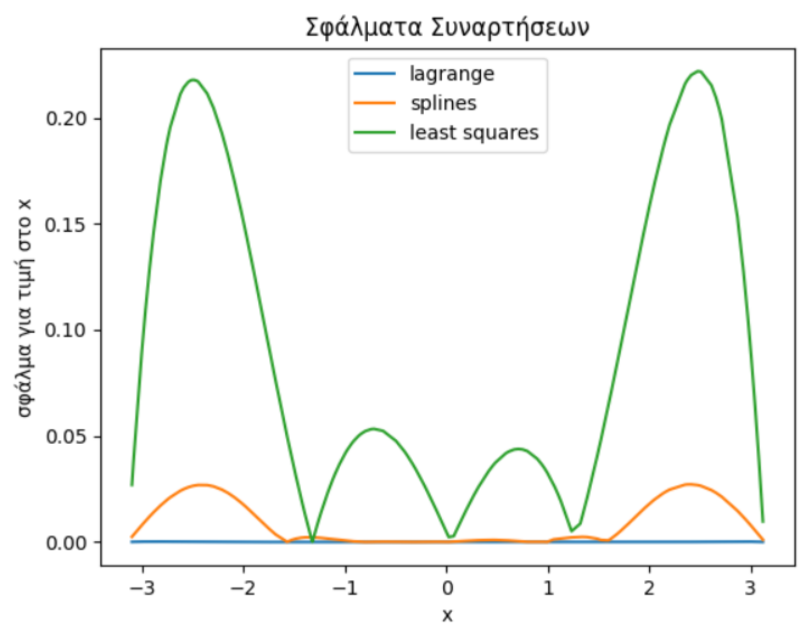
μέσω Gauss περιγράφει τους συντελεστές.

Έχοντας κάνει αυτά, η συνάρτηση-προσέγγιση επιστρέφει την τιμή

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

για κάθε παράμετρο x.

Τρέχουμε τις παραπάνω προσομοιώσεις για διακόσιες τυχαίες τιμές στο $[-\pi, \pi]$. Προβάλλοντας τις αποκλίσεις τους για κάθε μέθοδο σε διάγραμμα, βλέπουμε το εξής:



Παρατηρούμε ότι, από άποψη ελαχιστοποίησης σφάλματος, η lagrange είναι κατά πολύ η καλύτερη μέθοδος. Ακολουθεί η splines και τελευταία είναι η ελάχιστων τετραγώνων, με μεγάλο σφάλμα, κάτι αναμενόμενο, καθώς από την φύση του το πολυώνυμο που παράγει δεν περνάει από κανένα από τα δωσμένα σημεία.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα, μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος lagrange πετυγχαίνει τουλάχιστον 3 δεκαδικά ψηφία ακρίβειας, η μέθοδος των splines πετυγχαίνει τουλάχιστον 1 και τα ελάχιστα τετράγωνα το πολύ 2.

2 Έκτη Άσκηση

Καλούμαστε να βρούμε προσεγγιστικά την τιμή του

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)dx$$

Προτού αρχίσουμε την προσεγγιστική διαδικασία, λύνουμε χειροκίνητα το ολοκλήρωμα για να βρούμε ότι η πραγματική τιμή του είναι 1, κάτι που θα χρησιμεύσει αργότερα.

Τόσο η μέθοδος τραπεζίου όσο και του Simpson απαιτούν ομοιόμορφη κατανομή του πεδίου ορισμού. Μέσω της συνάρτησης divide_domain_equal(), χωρίζουμε το $[0, \frac{\pi}{2}]$ σε 10 ίσα τμήματα. Δηλαδή τα 11 σημεία είναι:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{20} \\ \frac{\pi}{10} \\ \frac{3\pi}{20} \\ \frac{\pi}{5} \\ \frac{\pi}{4} \\ \frac{6\pi}{20} \\ \frac{7\pi}{20} \\ \frac{2\pi}{5} \\ \frac{9\pi}{20} \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

α) Μέθοδος τραπεζίου

Η συνάρτηση δέχεται ως παραμέτρους το πεδίο ορισμού και τον αριθμό των σημείων. Διαχωρίζει το πεδίο με τον προαναφερώμενο τρόπο και, με τα 11 σημεία που πήρε, εκτελεί την γνωστή πράξη:

$$I = \frac{b-a}{2N}(f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i))$$

για b-a = $\frac{\pi}{2}$, N = 10.
Αυτό, για πεδίο $[0, \frac{\pi}{2}]$ με 11 σημεία επιστρέφει τιμή 0.997943. Έχουμε δηλαδή αριθμητικό σφάλμα 0.00205701, το οποίο συμφωνεί με τα όρια του θεωρητικού σφάλματος, καθώς μέσω του τύπου

$$|e| \leq \frac{(b-a)^3}{12N} max_{[0,\frac{\pi}{2}]}|f''(x)|$$

βρήσκουμε $|e| \leq 0.002669$ (το μέγιστο της $|f''|$ είναι 1).

β) Μέθοδος Simpson

Με παρόμοιο τρόπο, η συνάρτηση αποκτά τα 11 σημεία, με τα οποία εκτελεί την γνωστή διαδικασία:

$$S_{odds} = \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} f(x_{2i-1}) \tag{1}$$

$$S_{evens} = \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} f(x_{2i}) \tag{2}$$

$$I = \frac{b-a}{3N}(f(x_i) + f(x_N) + 4S_{odds} + 2S_{evens}) \tag{3}$$

που για πεδίο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και 11 σημεία επιστρέφει τιμή 1.000003. Έχουμε δηλαδή αριθμητικό σφάλμα 0.000003, πολύ μικρότερο από αυτό της μεθόδου του τραπεζίου, όπως ήταν αναμενόμενο, και είναι επίσης σύμφωνο με την θεωρία, αφού υπολογίζοντας

$$|e| \leq \frac{(b-a)^5}{180N^4} max_{[0,\frac{\pi}{2}]}|f^{(4)}(x)|$$

βρήσκουμε θεωρητικό σφάλμα $|e| \leq 0.000004$ (το μέγιστο της $|f^{(4)}|$ είναι επίσης 1).

3 Έβδομη Άσκηση

Καλούμαστε να προβλέψουμε τις τιμές κλεισίματος των CENER και CNLCAP για τις 6 επόμενες συνεδριάσεις από αυτήν που έλαβε χώρα στις 15/01/2021. Το προσεγγίζουμε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων από την άσκηση 5).

Χρησιμοποιούμε ως δεδομένα-σημεία τα στοιχεία των 10 προηγουμένων συνεδριάσεων από τότε, σε μορφή (YYMMDD, CLOSING_VALUE) (πχ αν στις 14/01/2021 η τιμή κλεισίματος ήταν 1.710000 τότε θεωρούμε το αντίστοιχο σημείο ως (210114, 1.710000)).

Ο αλγόριθμος επιστρέφει τα παρακάτω αποτελέσματα:

```
Predictions for CENER:
    ->at 18/1/21:
        actual: 1.714000
        power-2 polynomial: 1.740039
        power-3 polynomial: -2272455213303.125000
        power-4 polynomial: -323051177329557504.000000

    ->at 19/1/21:
        actual: 1.714000
        power-2 polynomial: 1.740044
        power-3 polynomial: -2517553000677.750000
        power-4 polynomial: -356920677082595328.000000

    ->at 20/1/21:
        actual: 1.726000
        power-2 polynomial: 1.740050
        power-3 polynomial: -2762708469323.375000
        power-4 polynomial: -390629835757584384.000000

    ->at 21/1/21:
        actual: 1.700000
        power-2 polynomial: 1.740055
        power-3 polynomial: -3007921620405.250000
        power-4 polynomial: -424178648648515584.000000

    ->at 22/1/21:
        actual: 1.690000
        power-2 polynomial: 1.740060
        power-3 polynomial: -3253192455088.750000
        power-4 polynomial: -457567097946374144.000000

    ->at 25/1/21:
        actual: 1.650000
        power-2 polynomial: 1.740075
        power-3 polynomial: -3989351066901.125000
        power-4 polynomial: -556769211536375808.000000
```

```
Predictions for CNLCAP:
    ->at 18/1/21:
        actual: 8.750000
        power-2 polynomial: 8.705722
        power-3 polynomial: 4160803346944.000000
        power-4 polynomial: 279693287047036928.000000

    ->at 19/1/21:
        actual: 8.750000
        power-2 polynomial: 8.709238
        power-3 polynomial: 4536852619776.000000
        power-4 polynomial: 308910406225625088.000000

    ->at 20/1/21:
        actual: 8.750000
        power-2 polynomial: 8.712754
        power-3 polynomial: 4895063779328.000000
        power-4 polynomial: 337634376772747264.000000

    ->at 21/1/21:
        actual: 8.750000
        power-2 polynomial: 8.716271
        power-3 polynomial: 5235426663936.000000
        power-4 polynomial: 365864873990553600.000000

    ->at 22/1/21:
        actual: 8.750000
        power-2 polynomial: 8.719789
        power-3 polynomial: 5557937401344.000000
        power-4 polynomial: 393601553535074304.000000

    ->at 25/1/21:
        actual: 8.750000
        power-2 polynomial: 8.730348
        power-3 polynomial: 6418296644096.000000
        power-4 polynomial: 473848191100387328.000000
```

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο 2ου βαθμού δίνει μια ικανοποιητική (για ελάχιστα τετράγωνα) προσέγγιση της πραγματικής τιμής για κάθε συνεδρίαση, ενώ τα πολυώνυμα 3ου και 4ου βαθμού εξωστρακίζονται πλήρως, επιστρέφοντας παράλογα νούμερα με εξωφρενικά σφάλματα.

Το ίδιο συμβαίνει και για τις τιμές των συνεδριάσεων που χρησιμοποιήσαμε για να χτίσουμε τα πολυώνυμα των ελάχιστων τετραγώνων:

```
Predictions of conferences used to build the polynomial (CENER):
    ->at 14/1/21:
        actual: 1.710000
        power-2 polynomial: 1.740019
        power-3 polynomial: -1292640862531.750000
        power-4 polynomial: -185971503131525120.000000

    ->at 13/10/2:
        actual: 1.736000
        power-2 polynomial: 1.736000
        power-3 polynomial: 13504352.170410
        power-4 polynomial: 2509348473856.000000

    ->at 12/1/21:
        actual: 1.720000
        power-2 polynomial: 1.740009
        power-3 polynomial: -803079753541.500000
        power-4 polynomial: -116471453016129536.000000

    ->at 11/1/21:
        actual: 1.710000
        power-2 polynomial: 1.740004
        power-3 polynomial: -558385712924.125000
        power-4 polynomial: -81481562230620160.000000

    ->at 8/1/21:
        actual: 1.768000
        power-2 polynomial: 1.739989
        power-3 polynomial: 175350365837.625000
        power-4 polynomial: 24446805135589376.000000

    ->at 7/1/21:
        actual: 1.760000
        power-2 polynomial: 1.739984
        power-3 polynomial: 419813713671.375000
        power-4 polynomial: 60075592254488576.000000

    ->at 5/1/21:
        actual: 1.748000
        power-2 polynomial: 1.739973
        power-3 polynomial: 908567397570.625000
        power-4 polynomial: 131811974127288320.000000
```

```
->at 4/1/21:
    actual: 1.764000
    power-2 polynomial: 1.739968
    power-3 polynomial: 1152857734545.125000
    power-4 polynomial: 167919333035474944.000000

->at 31/12/20:
    actual: 1.730000
    power-2 polynomial: 1.697030
    power-3 polynomial: 115278176571.250000
    power-4 polynomial: 372187761416863744.000000

->at 30/12/20:
    actual: 1.664000
    power-2 polynomial: 1.697025
    power-3 polynomial: -117774565334.750000
    power-4 polynomial: -372519710488526848.000000
```

```
Predictions of conferences used to build the polynomial (CNLCAP):
    ->at 14/1/21:
        actual: 8.750000
        power-2 polynomial: 8.691668
        power-3 polynomial: 2478320867328.000000
        power-4 polynomial: 157894205945937920.000000

    ->at 13/1/21:
        actual: 8.750000
        power-2 polynomial: 8.688156
        power-3 polynomial: 2013163784192.000000
        power-4 polynomial: 126212939140038656.000000

    ->at 12/1/21:
        actual: 8.750000
        power-2 polynomial: 8.684646
        power-3 polynomial: 1530197704704.000000
        power-4 polynomial: 94039129007849472.000000

    ->at 11/1/21:
        actual: 8.550000
        power-2 polynomial: 8.681136
        power-3 polynomial: 1029433840128.000000
        power-4 polynomial: 61373173932752896.000000

    ->at 8/1/21:
        actual: 8.550000
        power-2 polynomial: 8.670610
        power-3 polynomial: -579578888704.000000
        power-4 polynomial: -39575919584608256.000000

    ->at 7/1/21:
        actual: 8.550000
        power-2 polynomial: 8.667104
        power-3 polynomial: -1151474448896.000000
        power-4 polynomial: -74208918644981760.000000

    ->at 5/1/21:
        actual: 8.750000
        power-2 polynomial: 8.660092
        power-3 polynomial: -2348554958336.000000
        power-4 polynomial: -144948451837214720.000000
```

```
->at 4/1/21:
    actual: 8.750000
    power-2 polynomial: 8.656588
    power-3 polynomial: -2973734987776.000000
    power-4 polynomial: -181054967522525184.000000

->at 31/12/20:
    actual: 8.750000
    power-2 polynomial: 8.748237
    power-3 polynomial: -40008511705088.000000
    power-4 polynomial: -1144699195467235328.000000

->at 30/12/20:
    actual: 8.750000
    power-2 polynomial: 8.751762
    power-3 polynomial: 40010753565184.000000
    power-4 polynomial: 1144968267073323008.000000
```

Καταλήγουμε πως σε περίπτωση που χρειάζεται να προβλέψουμε αυξομειούμενη, volatile τιμή, όπως αυτές του χρηματιστηρίου ή των κρυπτονομισμάτων, είναι καλύτερο να καταφεύγουμε σε ελάχιστα τετράγωνα βαθμού 2.