Πρώτη Υποχρεωτική Εργασία

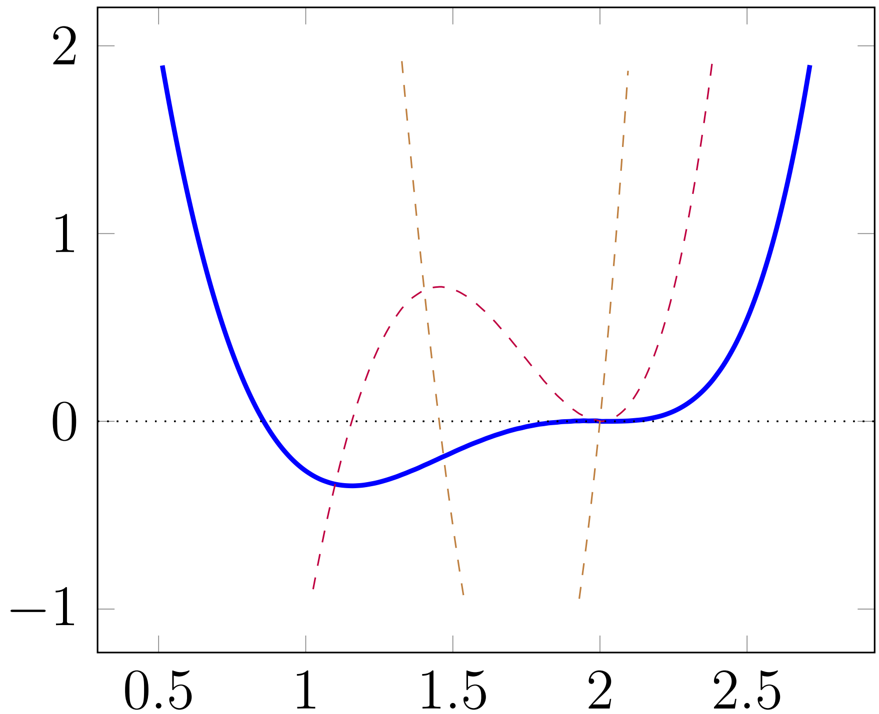
Ονοματεπώνυμο: Ασημάκης Κύδρος
ΑΕΜ: 3881

26 Δεκεμβρίου 2021

1 Πρώτη Άσκηση

Έχουμε να βρούμε τις ρίζες της παρακάτω συνάρτησης:

$f(x) = 14xe^{x-2} - 12e^{x-2} - 7x^3 + 20x^2 - 26x + 12, \quad x\epsilon[0,3]$



το γράφημα της f, με τις διακεκομμένες να παριστάνουν τις f', f''.
(Αναλυτικότερα γραφήματα σε GeoGebra στον αντίστοιχο φάκελο στο .rar)

Παρατηρούμε ότι οι θέσεις των ριζών είναι 2, άρα οι ρίζες είναι τουλάχιστον 2. Θα χρησιμοποιήσουμε επαναληπτικές μεθόδους για την προσέγγιση των ριζών αυτών.

- **Μέθοδος της διχοτόμησης:**
  Η μέθοδος απαιτεί διαστήματα όπου ικανοποιείται το θεώρημα Bolzano, επομένως σπάμε το πεδίο ορισμού σε [0,1], [1.5,3] και έχουμε:
  x = 0.85714 σε 19 επαναλήψεις
  x = 2.00001 σε 20 επαναλήψεις

- **Μέθοδος Newton-Raphson:**
  Με την ίδια λογική χρησιμοποιούμε τα ίδια υποδιαστήματα και έχουμε:
  x = 0.85714 σε 7 επαναλήψεις
  x = 1.99999 σε 26 επαναλήψεις

- **Μέθοδος της τέμνουσας:**
  Για ακόμα μια φορά παίρνουμε τα παραπάνω υποδιαστήματα και έχουμε:
  x = 0.85714 σε 7 επαναλήψεις
  x = 1.99999 σε 38 επαναλήψεις

Το υποδιάστημα [1,1.5] αγνοείται γιατί γνωρίζουμε από το γράφημα ότι εκεί δεν υπάρχει ρίζα της f και επίσης στο [0,1] ισχύει η προϋπόθεση σύγκλισης των Newton-Raphson (άρα και της τέμνουσας), δηλαδή

$$f', f'' \neq 0$$

Για την πρώτη ρίζα, γίνεται προφανής η τεράστια υπεροχή των N-R και τέμνουσας σε θέματα ταχύτητας. Στην δεύτερη όμως, οι μέθοδοι αυτοί φαίνεται να δυσκολεύονται, αν και συγκριτικά μεταξύ τους η Newton-Raphson διατηρεί την υπεροχή της. Αυτό συμβαίνει γιατί η N-R (και άρα και η τέμνουσα) συγκλίνει τετραγωνικά για την 0.85714 αλλά όχι για την 2, κάτι αναμενόμενο καθώς από το διάγραμμα φαίνεται οτι η 2 είναι τριπλή ρίζα της f, άρα:

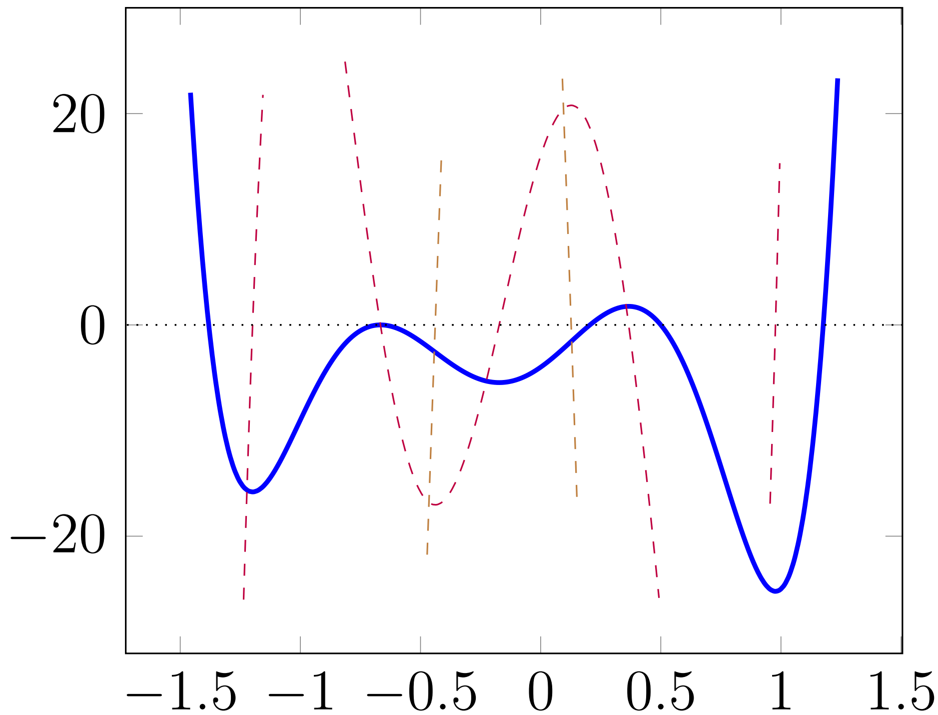
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x_{n+1} - 2}{(x_n - 2)^2} = \frac{f''(2)}{2f'(2)} \notin R \quad (\frac{0}{0})$$

και επομένως δεν συγκλίνει τετραγωνικά.

2 Δεύτερη Άσκηση

Έχουμε να βρούμε τις ρίζες της παρακάτω συνάρτησης:

$f(x) = 54x^6+45x^5-102x^4-69x^3+35x^2+16x-4, \quad x\epsilon[-2, 2]$



το γράφημα της f, με τις διακεκομμένες να παριστάνουν τις f', f''.
(Αναλυτικότερα γραφήματα σε GeoGebra στον αντίστοιχο φάκελο στο .rar)

Ζητούμενο 1)

Θα χρησιμοποιήσουμε τις παραλλαγμένες επαναληπτικές μεθόδους για την έυρεση των ριζών της. Παρατηρούμε ωστόσο ότι η ρίζα στο διάστημα [-0.8,-0.4] έιναι απροσέγγιστη με όλες τις μεθόδους, καθώς δεν υπάρχει υποδιάστημα που να την περιέχει στο οποίο να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano.

- **Randomized μέθοδος διχοτόμησης:**
  Παρ΄όλο παραλλαγμένες, όλες οι μέθοδοι συνεχίζουν να απαιτούν να ικανοποιείται το θ.Bolzano στα διαστήματα που μελετούν. Επομένως σπάμε το πεδίο ορισμού στα [-2,-1.3], [0.15,0.3], [0.4,0.7], [1,1.5], προκειμένου να ισχύουν και οι προϋποθέσεις σύγκλισης της N-R,και έχουμε:
  x = -1.38130 σε 30 επαναλήψεις
  x = 0.20518 σε 20 επαναλήψεις
  x = 0.49999 σε 22 επαναλήψεις
  x = 1.17610 σε 18 επαναλήψεις

- **Παραλλαγμένη μέθοδος Newton-Raphson:**
  Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω υποδιαστήματα:
  x = -1.38130 σε 5 επαναλήψεις
  x = 0.20518 σε 3 επαναλήψεις
  x = 0.50000 σε 4 επαναλήψεις
  x = 1.17612 σε 4 επαναλήψεις

- **Παραλλαγμένη μέθοδος τέμνουσας:**
  Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω υποδιαστήματα:
  x = -1.38130 σε 6 επαναλήψεις
  x = 0.20518 σε 4 επαναλήψεις

x = 0.50000 σε 5 επαναλήψεις
x = 1.17612 σε 6 επαναλήψεις

Ζητούμενο 2)

Τρέχοντας τον αλγόριθμο της randomized bisection 10 φορές για την ίδια ριζα βλέπουμε πως

```
b) Using randomized bisection for the same root 10 times:
 ->x ~= 0.20519 (took 15 cycles)
 ->x ~= 0.20518 (took 21 cycles)
 ->x ~= 0.20518 (took 17 cycles)
 ->x ~= 0.20519 (took 16 cycles)
 ->x ~= 0.20519 (took 17 cycles)
 ->x ~= 0.20517 (took 12 cycles)
 ->x ~= 0.20518 (took 19 cycles)
 ->x ~= 0.20517 (took 15 cycles)
 ->x ~= 0.20519 (took 22 cycles)
 ->x ~= 0.20519 (took 22 cycles)
```

δεν συγκλίνει πάντα σε ίδιο αριθμό επαναλήψεων.

Ζητούμενο 3)

Χρησιμοποιούμε τις κανονικές μεθόδους για την εύρεση των ίδιων ριζών:

- **Μέθοδος διχοτόμησης:**
  Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω υποδιαστήματα:
  x = -1.38130 σε 19 επαναλήψεις
  x = 0.20518 σε 16 επαναλήψεις
  x = 0.50000 σε 17 επαναλήψεις
  x = 1.17612 σε 18 επαναλήψεις

- **Μέθοδος Newton-Raphson:**
  Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω υποδιαστήματα:
  x = -1.38130 σε 8 επαναλήψεις

x = 0.20518 σε 4 επαναλήψεις
x = 0.50000 σε 5 επαναλήψεις
x = 1.17612 σε 6 επαναλήψεις

- **Μέθοδος τέμνουσας:**
  Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω υποδιαστήματα:
  x = -1.38130 σε 7 επαναλήψεις
  x = 0.20518 σε 5 επαναλήψεις
  x = 0.50000 σε 7 επαναλήψεις
  x = 1.17612 σε 10 επαναλήψεις

Από τα παραπάνω φαίνεται πώς οι τροποποιημένες μέθοδοι Newton-Raphson και τέμνουσας τείνουν να είναι γρηγορότερες, ενώ η τυχαία μέθοδος διχοτόμησης είναι συντριπτικά χειρότερη από την κανονική.

3 Τρίτη Άσκηση

Παρατηρούμε πως ο δοθήσας πίνακας Α ικανοποιεί τις προϋποθέσεις όλων των ζητούμενων μεθόδων, για κάθε μήκος πλευράς n. Για παράδειγμα, για n = 5:

1. **είναι τετραγωνικός**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

2. **είναι συμμετρικός**
   καθώς φαίνεται ότι

$$A(i,j) = A(j,i), \quad \forall i,j = 0,1,2,3,4$$

3. **έχει κυριαρχική διαγώνιο**

$$\sum_{j=0, j\neq i}^{4} |A(i,j)| \leq |A(i,i)| \quad i = 0,1,2,3,4$$

4. **είναι θετικά ορισμένος**

$$x^T A x = 5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) > 0 \quad \forall x \in R^5$$

Γνωρίζοντας αυτά, τρέχουμε τις τρεις ζητούμενες συναρτήσεις για τον Α.

- **Gauss:**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Gauss-Seidel:**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.9999 \\ 0.9999 \\ . \\ . \\ . \\ 0.9999 \end{bmatrix}$$

- **Cholesky του A** (για n=10):

```
Cholesky L of A:
2.23607   0   0   0   0   0   0   0   0   0
-0.894427   2.04939   0   0   0   0   0   0   0   0
0   -0.9759   2.01187   0   0   0   0   0   0   0
0   0   -0.9941   2.00294   0   0   0   0   0   0
0   0   0   -0.998533   2.00073   0   0   0   0   0
0   0   0   0   -0.999634   2.00018   0   0   0   0
0   0   0   0   0   -0.999908   2.00005   0   0   0
0   0   0   0   0   0   -0.999977   2.00001   0   0
0   0   0   0   0   0   0   -0.999994   2   0
0   0   0   0   0   0   0   0   -0.999999   2
```

4 Τέταρτη Άσκηση

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα γειτνίασης και θεωρώντας q = 0.15, αρχικοποιούμε τον πίνακα Google:

Google (q = 0.15)_____

0.01	0.01	0.01	0.01	0.435	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.435	0.01	0.293333	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.01	0.293333	0.01	0.435	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.435	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.01	0.293333	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.293333	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.01	0.01	0.293333	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.293333	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.01	0.293333	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.293333	0.01	0.01	0.01
0.01	0.01	0.293333	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.293333	0.01	0.01	0.01
0.435	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.435	0.01	0.01
0.01	0.01	0.01	0.01	0.435	0.435	0.435	0.01	0.293333	0.01	0.01	0.01	0.01	0.2225	0.01
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.435	0.435	0.435	0.01	0.01	0.01	0.293333	0.01	0.2225	0.01
0.01	0.01	0.01	0.435	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.435
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.86	0.01	0.01	0.01	0.2225	0.01
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.435	0.01	0.435
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.86	0.01	0.01	0.2225	0.01

Ζητούμενο α)

Αθροίζουμε όλες τις στήλες του πίνακα Google και διαπιστώνουμε ότι όλες δίνουν αποτέλεσμα 1. Επομένως ο Google είναι στοχαστικός.

Ζητούμενο β)

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των δυνάμεων για τυχαίο αρχικό διάνυσμα έως ότου

$$\left|\lambda^{(m+1)} - \lambda^{(m)}\right| < 0.5 * 10^{-7}$$

(για ακρίβεια 7 δεκαδικών ψηφίων),

έχουμε (κατά προσέγγιση) το ζητούμενο διάνυσμα:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.0268246 \\ 0.0298611 \\ 0.0298611 \\ 0.0268246 \\ 0.0395872 \\ 0.0395872 \\ 0.0395872 \\ 0.0395872 \\ 0.0745644 \\ 0.10632 \\ 0.10632 \\ 0.0745644 \\ 0.125092 \\ 0.116328 \\ 0.125092 \end{bmatrix}$$

Ζητούμενο γ)

Θα αυξήσουμε τον βαθμό σημαντικότητας της σελίδας 14. Καταργούμε την σύνδεση 14 προς 10 και προσθέτουμε τις 9,10,11,12 προς 14.
Έτσι, από βαθμό σημαντικότητας

$$0.116328$$

έχουμε μεταπήδηση σε

$$0.215643$$

δηλαδή σχεδόν διπλασιασμό της σημαντικότητας της σελίδας 14

Ζητούμενο δ)

Με την ίδια διαδικασία του ζητούμενου β) έχουμε τα καινούρια ιδιοδιανύσματα:

- $\mathbf{q = 0.02}$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.0109388 \\ 0.0104914 \\ 0.0116267 \\ 0.0140127 \\ 0.0196029 \\ 0.0199738 \\ 0.0255053 \\ 0.0258762 \\ 0.0605812 \\ 0.0480659 \\ 0.142132 \\ 0.0846726 \\ 0.109975 \\ 0.260478 \\ 0.156067 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{q = 0.6}$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.0508324 \\ 0.0578847 \\ 0.057887 \\ 0.050845 \\ 0.054162 \\ 0.0541623 \\ 0.0542249 \\ 0.0542252 \\ 0.0644403 \\ 0.0789539 \\ 0.0946076 \\ 0.065069 \\ 0.071369 \\ 0.116837 \\ 0.0744998 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι σελίδες με μεγάλη σημαντικότητα χάνουν βαθμό καθώς η πιθανότητα μεταπήδησης αυξάνεται και κερδίζουν βαθμό όταν μειώνεται, και το αντίθετο για τις σελίδες μικρής σημαντικότητας.

Αυτό το συμπέρασμα είναι λογικό, αφού αν ο χρήστης έχει τάση να αλλάζει σελίδες συχνά τότε η σημασία της σημαντικότητας της σελίδας πέφτει, ενώ αν του αρέσει να μένει πολύ ώρα σε συγκεκριμένες σελίδες τότε η σημασία της σημαντικότητας των σελιδών αυξάνεται, καθώς αυτές έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλεχτούν.

Θα λέγαμε τελικά πως η πιθανότητα μεταπήδησης q χαρακτηρίζει **τη συμπεριφορά του χρήστη στο Internet.**

Ζητούμενο ε)

Αυξάνουμε τις τιμές A(8,11), A(12,11) του πίνακα γειτνίασης σε 3.
Εφαρμόζοντας για ακόμα μια φορά την μέθοδο των δυνάμεων στον (νέο) πίνακα Google βλέπουμε πως η τάξη της σελίδας 11 μεταπηδά από

$$0.10632$$

σε

$$0.145776$$

Παρατηρούμε πως η τάξη όντως αυξάνεται, αλλά όχι δραστικά.

Κάτι τέτοιο είναι λογικό να συμβαίνει, καθώς και να προβάλλει μια σελίδα μια άλλη με εξαιρετικό τρόπο, ο χρήστης, αν την επιλέξει, θα την επιλέξει μια φορά. Άρα η αξία της τιμής δεν έχει μεγάλη σημασία, άλλωστε από μαθηματικής άποψης ο πίνακας γειτνίασης νοιάζεται μόνο αν μια τιμή είναι μηδενική ή όχι (είναι πίνακας Boole).

Μπορούμε να συμπεράνουμε πως η τακτική αυτή δεν είναι τόσο καλή, σε σύγκριση με την τακτική του ζητούμενου γ).

Ζητούμενο στ)

Διαγράφουμε τον κόμβο 10, μικραίνοντας τον A σε 14x14. Καθώς το ιδιοδιάνυσμα συνεχίζει να αθροίζει σε 1, όλες οι τάξεις αλλάζουν:

Ιδιοδιάνυσμα P	
Πριν	Μετά
0.0268246	0.0427553
0.0298611	0.0369473
0.0298611	0.028454
0.0268246	0.0171089
0.0395872	0.0376954
0.0395872	0.0352889
0.0395872	0.0324987
0.0395872	0.0300922
0.0745644	0.0582801
0.10632	N/A
0.10632	0.179915
0.0745644	0.0798776
0.125092	0.0691642
0.116328	0.206294
0.125092	0.145628

Παρατηρούμε πως στις σελίδες που έδειχναν προς την 10 αυξήθηκε η τάξη, ενώ σε αυτές που έδειχνε η 10 μειώθηκε η τάξη.

Αναμενόμενο αποτέλεσμα, καθώς στην πρώτη περίπτωση οι σελίδες αυτές προσφέρουν λιγότερες επιλογές στον χρήστη για να τις εγκαταλείψει, ενώ στην δεύτερη περίπτωση υπάρχουν λιγότερες διαδρομές που οδηγούν στις σελίδες αυτές, και άρα λιγότερο traffic.

5 Περιγραφές Κώδικα:

- **Ασκήσεις 1 και 2:**
  Σε όλες τις ζητούμενες μεθόδους γίνεται πρωτίστως έλεγχος του θεωρήματος Bolzano για το δοσμένο διάστημα. Στις διχοτομήσεις στην αρχή κάθε επανάληψης, στις υπόλοιπες μόνο μια φορά, στην αρχή της διαδικασίας. Μετ΄έπειτα εκτελείται η ανάλογη κάθε φορά επαναληπτική πράξη, έως ότου να βρεθεί ρίζα στα άκρα του δοσμένου διαστήματος ή το σφάλμα της προσέγγισης να γίνει ικανοποιητικά μικρό.

  Οι αρχικοποιήσεις των επαναληπτικών διαδικασιών γίνονται πάντα βάση του δωσμένου διαστήματος. Στις διχοτομήσεις ορίζουν τα όρια του δείγματος, στις Newton-Raphson επιλέγεται το κατάλληλο ώστε να ισχύει

  $$f''(x_0)f(x_0) > 0$$

  και στις μεθόδους τέμνουσας χρησιμοποιούνται και τα 2, συν το μέσο για την παραλλαγμένη της εκδοχή.

- **Ασκήσεις 3 και 4:**
  Για τις 2 αυτές ασκήσεις έχει δημιουργηθεί η κλάση matrix, μαζί με τις υποκλάσεις τις square_matrix και column. Οι κλάσεις αυτές στηρίζονται στην std::vector και διευκολύνουν τις διαδικασίες, αφού δεν χριάζεται έλεγχος αν ο πίνακας είναι πχ τετραγωνικός κλπ.

  Έχοντας χτίσει αυτή τη βάση:

  - **Άσκηση 3:**
    - **LU:** Δέχεται με αναφορά έναν τετραγωνικό πίνακα και επιστρέφει έναν πίνακα από matrices L,U,P,

οι αποσυνθέσεις του A με βάση τη λογική PA = LU

- **Gauss:** Δέχεται με αναφορά έναν τετραγωνικό πίνακα και μία στήλη. Έλεγχει αν ο τετραγωνικός και η στήλη έχουν ίδιο μήκος και αν όχι, επιστρέφει nullptr. Αν ναι, καλεί την LU και χρησιμοποιεί τα returns για να λύσει το σύστημα:

$$\begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

- **Cholesky:** Δέχεται με αναφορά έναν τετραγωνικό πίνακα, ο οποίος σύμφωνα με την εκφώνηση θεωρείται συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Βάση αυτού, χτίζει και επιστρέφει τον L, εκτελώντας τα παρακάτω:

$$\begin{cases} L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2} \\ L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}}(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k}) \quad i > j \end{cases}$$

- **Gauss-Seidel:** Δέχεται με αναφορά έναν τετραγωνικό πίνακα, μία στήλη και την ανοχή ε. Ελέγχει αν ο τετραγωνικός (A) έχει κυριαρχική διαγώνιο και αν ο A και η στήλη (b) έχουν ίδιο μήκος. Αν όχι, επιστρέφει nullptr. Αν ναι, αρχικοποιεί μια καινούρια στήλη x σε 0 και ξεκινά, από την θέση 0 και κάτω, να το ενημερώνει:

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}}(b_i - \sum_{j=0, j\neq i}^{n} A(i,j) * x_j)$$

επειδή η ανανέωση των xi γίνεται σε loop time, εξασφαλίζεται ότι χρησιμοποιούνται

$$\begin{cases} x_j^{(m+1)}, & j < i \\ x_j^{(m)}, & j > i \end{cases}$$

Η ενημέρωση σταματά όταν επιτευχθεί

$$\left|\left|x^{(m+1)} - x^{(m)}\right|\right|_\infty < \epsilon$$

οπότε και επιστρέφεται το τελικό x.

- **Άσκηση 4:**
  - **get_google_matrix:** Δέχεται με αναφορά τον πίνακα A και την πιθανότητα μεταπήδησης q και επιστρέφει τον συμπληρωμένο πίνακα Google με βάση τον τύπο της εκφώνησης.
  - **is_stochastic:** Δέχεται με αναφορά έναν τετραγωνικό πίνακα. Για κάθε στήλη του, αθροίζει τα στοιχεία της, και άν βρει το άθροισμα διάφορο του 1, τερματίζει με false . Αν τα βρεί όλα 1, επιστρέφει true.
  - **power_method:** Δέχεται με αναφορά έναν τετραγωνικό πίνακα (τον Google), την ανοχή ε και μια μεταβλητή όπου θα αποθηκευτεί η μέγιστη ιδιοτιμή για επιστροφή. Για να αποφευχθεί αρχικοποίηση σε ιδιοδιάνυσμα κάθετο στο κυρίαρχο, δημιουργεί p με τυχαίες συντεταγμένες. Έπειτα εκτελεί αλλεπάλληλα τα εξής

$$p = Gp \tag{1}$$

$$\lambda^{(m)} = p_1 \tag{2}$$

$$p^{(i)} = \frac{p}{\lambda^{(m)}} \tag{3}$$

έως ότου

$$\left|\lambda^{(m+1)} - \lambda^{(m)}\right| < \epsilon$$

όποτε και το τελικό p διαιρείται με το άθροισμα όλων των στοιχείων του για να κανονικοποιηθεί σε στοχαστικό και επιστρέφεται.