

# Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

## Εργασία 2023-2024 \*

Η εργασία προσδίδει έναν επιπλέον βαθμό (bonus) στον τελικό βαθμό, εφόσον ο βαθμός της τελικής εξέτασης είναι προβιβάσιμος.

Δώστε απαντήσεις για τις παρακάτω ασκήσεις, κάποιες από το βασικό σύγγραμμα του μαθήματος (Σχεδιασμός Αλγορίθμων, των Kleinberg, Tardos). Τεκμηριώστε τις απαντήσεις σας με σαφήνεια.

Σύνολο 100 μονάδες

### 1. Κεφάλαιο 8 (30 μονάδες)

(α') 8.13

(β') Στο Κεφάλαιο 8 αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή TSP είναι NP-πλήρες. Μπορείτε να τροποποιήσετε αυτήν την απόδειξη ώστε να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει  $\rho$ -προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα, για οποιοδήποτε  $\rho > 1$ .

(γ') Έχουμε ένα σύνολο  $m$  αντικειμένων που θέλουμε να διαμοιράσουμε με δίκαιο τρόπο σε  $n$  συμμετέχοντες. Μια ανάθεση αντικειμένων  $S$ , είναι μια διαμέριση  $S = (S_1, \dots, S_n)$  των αντικειμένων στην οποία ο συμμετέχων  $i$  λαμβάνει το υποσύνολο αντικειμένων  $S_i$ . Κατά την ανάθεση  $S$  ο  $i$  λαμβάνει ικανοποίηση  $v_i(S_i)$  που περιγράφεται από μια συνάρτηση αποτίμησης  $v_i$  η οποία είναι θετική και μονότονη: δηλαδή  $v_i(T) \geq 0$  για κάθε υποσύνολο αντικειμένων  $T$  και επιπλέον  $v_i(S) \leq v_i(T)$  αν  $S \subseteq T$ . Ένα πολυμελετημένο κριτήριο δικαιοσύνης είναι η μεγιστοποίηση της κατά Nash ευημερίας, σύμφωνα με το οποίο στόχος είναι να επιλέξουμε ανάθεση που μεγιστοποιεί το γινόμενο των ικανοποιήσεων των συμμετεχόντων, δηλαδή να βρεθεί η ανάθεση  $S$  που μεγιστοποιεί την  $\prod_{i=1}^n v_i(S_i)$ . Περιγράψτε την εκδοχή του προβλήματος απόφασης του παραπάνω προβλήματος. Δείξτε ότι το πρόβλημα απόφασης είναι NP-complete. (Υπόδειξη: Μπορείτε να αποδείξετε μέρος της άσκησης με αναγωγή από το πρόβλημα Partition).

### 2. Κεφάλαιο 9 (20 μονάδες)

(α') 9.3 (Δείτε 9.2 για τον ορισμό του Προβλήματος της Γεωγραφίας)

### 3. Κεφάλαιο 10 (20 μονάδες)

(α') 10.2

### 4. Κεφάλαιο 11 (30 μονάδες)

(α') 11.6

(β') Ένα αγαθό είναι διαθέσιμο σε δεδομένη ποσότητα  $B \geq 0$ . Καθένας από  $n$  αγοραστές,  $j = 1, \dots, n$ , προτίθεται να πληρώσει  $b_j \geq 0$ , ανά μονάδα του αγαθού που του εκχωρείται. Ζητείται να υπολογισθεί η ποσότητα αγαθού που θα λάβει ο κάθε αγοραστής, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η ελάχιστη πληρωμή μεταξύ όλων των αγοραστών. Να γράψετε ένα γραμμικό πρόγραμμα και το δυϊκό του.

(γ') Ερωτήματα των διαφανειών για τον Αλγόριθμο του Χριστοφίδη (διαφάνεια 21)

---

\* Διδάσκων: Γεώργιος Χριστοδούλου