Лекция 1

Тема: Линейное подпространтсво

Пусть $\underline{V, \mathbb{P}}$ - некоторое линейное пространство над полем $\mathbb{P}$
Тогда в нем выполняются законы композиции: $\forall a, b \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}$

1. $a + b \in V \quad V \times V \to V$
2. $\alpha * a \in V \quad \mathbb{P} \times V \to V$

Линейные пространства $\underline{\mathbb{C}, \mathbb{C}}$ и $\underline{\mathbb{C}, \mathbb{R}}$ отличаются размерностью

Пусть $b, a_1, \ldots, a_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{P}$, где и b $= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_2 a_2$ Тогда вектор b называется линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_n$

Линейная комбинация называется нетривиальной, если хотя бы один коэффициент не равен нулю
Линейная оболочка векторов $a_1, \ldots, a_n \in V$ - множество всевозможных линейных комбинаций этих веторов. Обозначается как $L(a_1, \ldots, a_n)$
Линейное пространство $W \neq \varnothing$ называется линейным подпространством пространства V, если

- $W \subset V$
- оно само является линейным пространством относительно операций композиции из V

Вектора $a_1, \ldots, a_n \in V$ называют линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору

Линейное пространство называется бесконечномерным, если $\forall n \in \mathbb{N}$ найдется набор из n линейнонезависимых векторов. Примеры:

- Множество функций, непрерывных на некотором промежутке
- Множество всех многочленов

Рассмотрим линейное пространство многочленов $\underline{\mathbb{M}_{\ltimes}, \mathbb{R}}$ *Народ, а что Панф с ним сделал в итоге, используя факт непредставимости трансцендентных чисел в виде корня полинома? Я забыл*

Пусть есть такое натуральное число m, что любые m + 1 векторов из V линейно зависимы. Очевидно, что любые m+1 векторов также линейно зависимы. Мы можем взять минимальное число из всех m (т.к ограниченное снизу подмножество натуральных чисел имеет минимум). Назовем его n. Это число- dim V. Взяв n линейно независимых векторов, мы получаем базис V $e_1, \ldots, e_n \in V$
Базисные вектора

- Линейно независимы
- Упорядоченные *Я забыл, для чего оно требуется, Панф про это отдельно говорил*
- $\forall a \in V \quad e_1, \ldots, e_n, a$ линейно зависимы

$V = L(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ по свойствам базисных векторов (любой вектор выражается из базисных)

Теорема 1 *Пусть есть $\underline{V, \mathbb{P}}$ (конечномерное), W- подпространство. Тогда $dimW \leqslant dimV$*

Доказательство: Очевидно, ибо базисные вектора в W так же будут базисными векторами в V

Теорема 2 *Пусть есть $\underline{V, \mathbb{P}}$ (конечномерное) , W- подпространство. $dimW = dimV \iff W = V$*

Доказательство: Базисные вектора V будут так же базисными векторами в V, и наоборот. Значит, они совпадают. Если определить V и W как линейные оболочки этих векторов, их равенство очевидно

Теорема 3 *Пусть есть* $\underline{V, \mathbb{P}}$ *(конечномерное). Тогда набор векторов* $e_1, \ldots, e_k$ *либо базис, либо существует набор векторов* $e_{k+1}, \ldots, e_n$ *такой, что* $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ *- базис*

Доказательство: Есть два случая

- $L(e_1, \ldots, e_k) = V$. Тогда $(e_1, \ldots, e_k)$ - базис
- $\exists e_{k+1} \in V \setminus L(e_1, \ldots, e_k)$. В таком случае мы последовательно 'добираем' вектора до базиса

Пусть $\begin{matrix} e_1, \ldots, e_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{matrix}$ - базисы в V
Тогда некоторую координату x можно выразить как $x = ex_e$, или $x = fx_f$, где

$$x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_f = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, $\begin{cases} f_1 = C_{11}e_1 + C_{12}e_2 + \cdots + C_{1n}e_n \\ \ldots \\ f_n = C_{n1}e_1 + C_{n2}e_2 + \cdots + C_{nn}e_n \end{cases}$

Т.е $f = e\,C$
$C = (C_{i,j})$ называют матрицей перехода. По построению, ее определитель не равен нулю, ибо ее столбцы состоят из базисных векторов, которые линейно независимы. Знак определителя задает ориентацию

Пусть есть $\underline{V, \mathbb{P}}$, W_1, W_2- подпространства V. Введем следующие понятия

- $W_1 \cup W_2$ - объединение подпространств
- $W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 \quad \forall x_1 \in W_1,\ \forall x_2 \in W_2\}$ - сумма подпространств

Утверждение: $W_1 \cup W_2$ и $W_1 + W_2$ - подпространства V
В качестве примера подпространство можно привести множество решений однородной системы уравнений Ax $= 0$ ($A \in \mathbb{P}^{m*n}$). Как доказывалось ранее, оно образует подпространство линейного пространства $\mathbb{P}^n$

Теорема 4 (Грассмана) *Пусть есть* $\underline{V, \mathbb{P}}$, W_1, W_2*- подпространства V.*
Тогда $\{\theta\} \subset W_1 \cup W_2 \subset \begin{matrix} W_1 \\ W_2 \end{matrix} \subset W_1 + W_2 \subset V$

Доказательство: Завтра добавлю