

# Лекция 1

## Тема: Линейное подпространство

Пусть  $V, \mathbb{P}$  - некоторое линейное пространство над полем  $\mathbb{P}$

Тогда в нем выполняются законы композиции:  $\forall a, b \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}$

1.  $a + b \in V \quad V \times V \rightarrow V$
2.  $\alpha * a \in V \quad \mathbb{P} \times V \rightarrow V$

Линейные пространства  $\mathbb{C}, \mathbb{C}$  и  $\mathbb{C}, \mathbb{R}$  отличаются размерностью

Пусть  $b, a_1, \dots, a_n \in V, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{P}$ , где  $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$ . Тогда вектор  $b$  называется линейной комбинацией векторов  $a_1, \dots, a_n$ .

Линейная комбинация называется нетривиальной, если хотя бы один коэффициент не равен нулю. Линейная оболочка векторов  $a_1, \dots, a_n \in V$  - множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов. Обозначается как  $L(a_1, \dots, a_n)$ .

Линейное пространство  $W \neq \emptyset$  называется линейным подпространством пространства  $V$ , если

- $W \subset V$
- оно само является линейным пространством относительно операций композиции из  $V$

Вектора  $a_1, \dots, a_n \in V$  называют линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

Линейное пространство называется бесконечномерным, если  $\forall n \in \mathbb{N}$  найдется набор из  $n$  линейно независимых векторов. Примеры:

- Множество функций, непрерывных на некотором промежутке
- Множество всех многочленов

Рассмотрим линейное пространство многочленов  $M_n, \mathbb{R}$ . \*Народ, а что Панф с ним сделал в итоге, используя факт непредставимости трансцендентных чисел в виде корня полинома? Я забыл\*

Пусть есть такое натуральное число  $m$ , что любые  $m + 1$  векторов из  $V$  линейно зависимы.

Очевидно, что любые  $m+1$  векторов также линейно зависимы. Мы можем взять минимальное число из всех  $m$  (т.к. ограниченное снизу подмножество натуральных чисел имеет минимум). Назовем его  $n$ . Это число -  $\dim V$ . Взяв  $n$  линейно независимых векторов, мы получаем базис  $V$   $e_1, \dots, e_n \in V$ . Базисные вектора

- Линейно независимы
- Упорядоченные \*Я забыл, для чего оно требуется, Панф про это отдельно говорил\*
- $\forall a \in V \quad e_1, \dots, e_n, a$  линейно зависимы

$V = L(e_1, e_2, \dots, e_n)$  по свойствам базисных векторов (любой вектор выражается из базисных)

**Теорема 1** Пусть есть  $V, \mathbb{P}()$ ,  $W$ - подпространство. Тогда  $\dim W \leq \dim V$

**Доказательство:** Очевидно, ибо базисные вектора в  $W$  так же будут базисными векторами в  $V$

**Теорема 2** Пусть есть  $V, \mathbb{P}()$ ,  $W$ - подпространство.  $\dim W = \dim V \iff W = V$

**Доказательство:** Базисные вектора  $V$  будут так же базисными векторами в  $W$ , и наоборот. Значит, они совпадают. Если определить  $V$  и  $W$  как линейные оболочки этих векторов, их равенство очевидно.

**Теорема 3** Пусть есть  $V, \mathbb{P}()$ . Тогда набор векторов  $e_1, \dots, e_k$  либо базис, либо существует набор векторов  $e_{k+1}, \dots, e_n$  такой, что  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  - базис

**Доказательство:** Есть два случая

- $L(e_1, \dots, e_k) = V$ . Тогда  $(e_1, \dots, e_k)$  - базис
- $\exists e_{k+1} \in V \setminus L(e_1, \dots, e_k)$ . В таком случае мы последовательно ‘добираем’ вектора до базиса