

JULIHO CASTILLO COLMENARES

MATEMÁTICAS COMPUTACIONALES

WWW.ASIMOVIAN.ACADEMY

This work is licensed under the Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.



Índice general

<i>1</i>	<i>TEORÍA DE CONJUNTOS</i>	<i>5</i>
	<i>1.1 LÓGICA Y CÁLCULO PROPOSICIONAL</i>	<i>5</i>
	<i>1.2 TEORÍA DE CONJUNTOS</i>	<i>15</i>
	<i>1.3 INDUCCIÓN MATEMÁTICA</i>	<i>21</i>
	<i>1.4 RELACIONES</i>	<i>28</i>
<i>2</i>	<i>FUNDAMENTOS DE ARITMÉTICA</i>	<i>43</i>
	<i>2.1 LOS NÚMEROS ENTEROS</i>	<i>43</i>
	<i>2.2 LOS NÚMEROS RACIONALES</i>	<i>45</i>
	<i>2.3 RAZONES Y PROPORCIONES</i>	<i>49</i>
	<i>2.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA</i>	<i>51</i>
<i>3</i>	<i>TEORÍA DE GRÁFICAS</i>	<i>53</i>
	<i>3.1 MATRICES</i>	<i>53</i>
	<i>3.2 TEORÍA GENERAL DE GRAFOS</i>	<i>57</i>
	<i>3.3 DIGRAFOS</i>	<i>64</i>
<i>4</i>	<i>BIBLIOGRAFÍA</i>	<i>71</i>

1 Teoría de conjuntos

1.1 Lógica y Cálculo Proposicional

Muchos algoritmos y demostraciones usan expresiones lógicas tales como **si p entonces q**. Entonces es necesario conocer los casos en los cuales esas expresiones son **ciertas** o **falsas**. Discutiremos esto en esta unidad.

También investigamos el valor de verdad de enunciados cuantificados, que son aquellos que usan los cuantificadores lógicos **para todo...** y **existe...**

Proposiciones y Declaraciones Compuestas

Una proposición es un enunciado declarativo que puede ser cierto o falso, pero no ambos.

Problema 1.1. ¿Cuál de los siguientes enunciados es una proposición?

- | | |
|-------------------------------|------------------|
| 1. El hielo flota en el agua. | 4. $2 + 2 = 5$ |
| 2. China está en Europa. | 5. ¿A donde vas? |
| 3. $2 + 2 = 4$ | 6. Haz tu tarea. |

Proposiciones compuestas

Muchas proposiciones están **compuestas** de proposiciones más simples, llamadas *subproposiciones*, por medio de *conectores lógicos*. Una proposición se dice que es *primitiva* si no puede descomponerse en proposiciones más simples.

Por ejemplo, las siguientes proposiciones son compuestas

- “Las rosas son rojas y las violetas son azules”
- “Juan es inteligente y estudia hasta muy noche”

La propiedad fundamental de una proposición compuesta es que su valor de verdad está completamente determinado por los valores de

En este curso, usaremos el *sistema algebraico de computo SageMath*, el cual está escrito con base en el lenguaje de programación **Python** e incorpora diversos paquetes de **OpenSource**. Puede acceder a este sistema, a través de [HTTPS://CLOUD.SAGEMATH.COM/](https://cloud.sagemath.com/)

verdad de sus subproposiciones y la manera en la cual están conectadas para formar la proposición compuesta.

Operaciones Lógicas Básicas

En esta sección discutiremos las tres operaciones lógicas básicas: conjunción, disyunción y la negación.

Conjunción $p \wedge q$

Cualesquiera dos proposiciones p, q pueden ser combinadas por la palabra “y” para formar una proposición compuesta llamada *conjunción* que se escribe $p \wedge q$.

Definición 1.1. Si tanto p como q son ciertas, entonces $p \wedge q$ es cierta; en otro caso $p \wedge q$ es falsa. ¹

Observación 1.1. Para entender mejor como se conectan los valores de verdad, generalmente se utilizan *tablas de verdad*.

Por brevedad 1 representará el valor **cierto**, mientras que 0 representará **falso**

Disyunción $p \vee q$

Cualesquiera dos proposiciones p, q pueden ser combinadas por la palabra “o” para formar una proposición compuesta llamada *disyunción* que se escribe $p \vee q$.

Definición 1.2. Si tanto p como q son falsas, entonces $p \vee q$ es falsa; en otro caso $p \vee q$ es verdadera. ²

Observación 1.2. Algunas veces “ p o q ” se entiende en el sentido exclusivo: Puede ocurrir p o q , *pero no ambos*, que es diferente a la definición anterior. Sin embargo, existe un conector llamado de hecho **o exclusivo**, que cumple esta definición y consideraremos más adelante.

Negación $\neg p$

Dada cualquier proposición p , otra proposición llamada *negación* de p puede ser formada escribiendo “No es cierto que...” o “Es falso que...” antes de p .

De manera más sencilla, decimos **no** p y escribimos $\neg p$.

Definición 1.3 (Negación). Si p es cierta, entonces $\neg p$ es falsa; pero si p es falsa, $\neg p$ es cierta. ³

1

Tabla de Verdad 1 (Conjunción).

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Construimos la tabla de verdad de la conjunción en el siguiente script
[HTTPS://GOO.GL/HEF5OS](https://goo.gl/HEF5OS)

2

Tabla de Verdad 2 (disyunción).

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Construimos la tabla de verdad de la disyunción en el siguiente script
[HTTPS://GOO.GL/5kXzNI](https://goo.gl/5kXzNI)

3

Tabla de Verdad 3 (Negación).

p	$\neg p$
1	0
0	1

Construimos la tabla de verdad de la disyunción en el siguiente script
[HTTPS://GOO.GL/SGCFKC](https://goo.gl/SGCFKC)

Proposiciones y Tablas de Verdad

Sea $P(p, q, \dots)$ una expresión construida con variables lógicas p, q, \dots , que toman valores de **verdadero** "V" o **falso** "F", a través de conectores lógicos como \wedge, \vee, \neg y otros que discutiremos más adelante.

Tales expresiones $P(p, q, \dots)$ son llamadas *proposiciones*.

La propiedad principal de una proposición $P(p, q, \dots)$ es que sus valores de verdad sólo dependen del valor de sus variables.

Una manera simple y concisa de mostrar esta relación es a través de una *tabla de verdad*.

Problema 1.2. Contruir la tabla de verdad de la proposición $\neg(p \wedge \neg q)$.

Solución.

Tabla de Verdad 4 ($\neg(p \wedge \neg q)$).

p	q	not q	p and not q	not(p and not q)
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

Método alternativo de construir una tabla de verdad

p	q	\neg	(p	\wedge	\neg	q)
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

Problema 1.3. Construya las tablas de verdad de las siguientes proposiciones

1. $p \vee \neg p$
2. $p \wedge \neg p$
3. $\neg(p \vee q)$
4. $\neg p \wedge \neg q$
5. $\neg(p \wedge q)$
6. $\neg p \vee \neg q$

Algunas proposiciones $P(p, q, \dots)$ son siempre ciertas, no importa los valores de verdad de las variables p, q, \dots

Tales proposiciones se conocen como *tautologías*.

De manera similar, algunas proposiciones $P(p, q, \dots)$ son siempre falsas, no importa los valores de verdad de las variables p, q, \dots

Tales proposiciones se conocen como *contradicciones*.

Construimos la tabla de verdad de la proposición anterior con el siguiente script [HTTPS://GOO.GL/V2AXZI](https://goo.gl/V2AXZI)

Observación 1.3. Para evitar el uso excesivo de paréntesis, algunas veces adoptamos una jerarquía para los conectores lógicos.

De manera específica \neg tiene prioridad sobre \wedge , que a su vez tiene prioridad sobre \vee .

Por ejemplo, $\neg p \wedge q$ significa $(\neg p) \wedge q$ y no $\neg(p \wedge q)$.

Equivalencias Lógicas

Diremos que dos proposiciones $P(p, q, \dots)$ y $Q(p, q, \dots)$ son *lógicamente equivalentes* si tienen tablas de verdad idénticas.

En tal caso, escribimos

$$P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$$

Problema 1.4. Demostremos que

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Problema 1.5. Reescriba la frase “No es cierto que: las rosas son rojas y las violetas son azules”, usando la equivalencia anterior.

Por su utilidad, algunas equivalencias lógicas con llamadas *leyes para el álgebra de proposiciones*.

A continuación, enunciaremos algunas, pero es necesario verificar su validez a través de tablas de verdad.

Idempotent laws:	(1a) $p \vee p \equiv p$	(1b) $p \wedge p \equiv p$
Associative laws:	(2a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	(2b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Commutative laws:	(3a) $p \vee q \equiv q \vee p$	(3b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Distributive laws:	(4a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(4b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Identity laws:	(5a) $p \vee F \equiv p$ (6a) $p \vee T \equiv T$	(5b) $p \wedge T \equiv p$ (6b) $p \wedge F \equiv F$
Involution law:	(7) $\neg\neg p \equiv p$	
Complement laws:	(8a) $p \vee \neg p \equiv T$ (9a) $\neg T \equiv F$	(8b) $p \wedge \neg p \equiv F$ (9b) $\neg F \equiv T$
DeMorgan's laws:	(10a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	(10b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Figura 1.1: Leyes para el álgebra de proposiciones

Sentencias condicionales y bicondicionales

Muchas sentencias, particularmente en matemáticas, son de la forma “si p entonces q ”. Tales sentencias son llamadas *condicionales* y son denotadas por

$$p \rightarrow q.$$

El condicional $p \rightarrow q$ es frecuentemente leído como “ p implica q ” o “ p sólo si q ”.⁴

Otra sentencia común es de la forma “ p si y solo si q ”. Tales sentencias son llamadas *bicondicionales* y se denota por $p \iff q$.⁵

Problema 1.6. Demuestre que

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q.$$

Problema 1.7. Determine cuales de las siguientes sentencias son tautologías, construyendo las correspondientes tablas de verdad.

4

Tabla de Verdad 5 (Condicional).

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5

Tabla de Verdad 6 (Bicondicional).

p	q	$p \iff q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1. $\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg p$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
6. $(p \wedge q) \rightarrow p$
7. $q \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
8. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Argumentos

Un *argumento* es una afirmación de que un conjunto dado de proposiciones

$$P_1, P_2, \dots, P_n,$$

llamadas *premisas*, tiene como consecuencia otra proposición Q , llamada *conclusión*.⁶

En otras palabras, es una sentencia de la forma

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

Tal argumento se denota por

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q.$$

La noción de “*argumento lógico*” o “*argumento válido*” se formaliza de la manera siguiente:

Definición 1.4. Un argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ se dice que es *válido* si la proposición

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

es una tautología.

Si un argumento no es *válido*, diremos que es una *falacia*.

Problema 1.8. 1. Demuestre que $p, p \rightarrow q \vdash q$ es un argumento válido.

2. Demuestre que $p \rightarrow q, q \vdash p$ es una falacia.

3. Demuestre que $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$ es un argumento válido.

⁶ Por ejemplo

Si sube el dólar, sube la gasolina.
Si sube la gasolina, entonces hay inflación.
\therefore Si sube el dólar, entonces hay inflación.

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	\wedge	$(q \rightarrow r)$	\rightarrow	$(p \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T
Step			1	2	3	1	2

Figura 1.2: Un principio fundamental del razonamiento lógico nos dice que: Si p implica q y q implica r , entonces p implica r . En otras palabras, el siguiente argumento es válido

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r.$$

Funciones proposicionales y Cuantificadores

Una *función proposicional* (o *sentencia abierta* o *condición*) definida en un conjunto A es una expresión $p(x)$ que tiene la propiedad de que $p(a)$ es cierta o falsa para cada $a \in A$.

El conjunto A se conoce como dominio de $p(x)$, y el subconjunto de todos los elementos para los cuales $p(x)$ es cierto se conoce como el *conjunto de verdad* T_p de $p(x)$:

$$T_p = \{x \mid x \in A, p(x) = 1\},$$

o simplemente

$$T_p = \{x \mid p(x)\}.$$

Definición 1.5. El conjunto de los números naturales está dado por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Problema 1.9. Encuentre el conjunto de verdad para cada función en \mathbb{N} :

1. $p(x) : x + 2 > 7$
2. $p(x) : x + 5 < 3$
3. $p(x) : x + 5 > 1$

Cuantificador universal

Sea $p(x)$ una función proposicional definido en un conjunto A . La expresión

$$\forall x \in A : p(x) \tag{1.1}$$

se lee como "para todo $x \in A$, $p(x)$ es verdadero."

El símbolo \forall ("para todo") se llama cuantificador universal.

Mientras que $p(x)$ es una sentencia abierta (su valor de verdad depende de cada $x \in A$), la afirmación

$$\forall x \in A : p(x)$$

es verdadera si y solo si $p(x)$ se cumple para todo $x \in A$.

Por otro lado, si existe algún $x \in A$ tal que $p(x)$ es falso, entonces

$$\forall x \in A : p(x)$$

es falso.

Problema 1.10. Verifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : n + 4 > 3$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n + 2 > 8$.

Cuantificador existencial

Sea $p(x)$ una función proposicional definido en un conjunto A . La expresión

$$\exists x \in A : p(x) \tag{1.2}$$

se lee como "existe $x \in A$, tal que $p(x)$ es verdadero."

El símbolo \exists ("existe...") se llama cuantificador existencial.

Mientras que $p(x)$ es una sentencia abierta (su valor de verdad depende de cada $x \in A$), la afirmación

$$\exists x \in A : p(x)$$

es verdadera si y solo si $p(x)$ se cumple para algún elemento $x \in A$.

Por otro lado,

$$\exists x \in A : p(x)$$

es falso si y solo si para todo $x \in A$, se tiene que $p(x)$ es falso.

Verifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

1. $\exists n \in \mathbb{N} : n + 4 < 7$;
2. $\exists n \in \mathbb{N} : n + 6 < 4$.

Negación de Sentencias Cuantificadas

Considere la afirmación:

Todos los estudiantes de ingeniería saben programar.

¿Cómo podemos negar esta afirmación?

Al menos un estudiante de ingeniería no sabe programar.

De manera similar, la negación de la afirmación

Existe algún estudiante de ingeniería que sepa programar

es equivalente a afirmar que

Cada uno de los estudiantes de ingeniería no saben programar.

Estos son ejemplos de la siguiente proposición

Teorema 1.1 (DeMorgan).

$$\neg(\forall x \in M : p(x)) \equiv \exists x \in M : \neg p(x) \quad (1.3)$$

$$\neg(\exists x \in M : p(x)) \equiv \forall x \in M : \neg p(x). \quad (1.4)$$

Ejemplo 1.1. La negación de la siguiente afirmación

Para todo entero positivo n , tenemos que $n + 2 > 8$

es

Existe un entero positivo n tal que $n + 2 \leq 8$.

Ejemplo 1.2. La negación de la siguiente afirmación

Existe una persona viva con 150 años o más.

es

Toda persona viva tiene menos de 150 años.

Ejemplo 1.3. (a) Un contraejemplo para $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \neq 0$ es $x = 0$.

(b) Un contraejemplo para $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$ es $x = \frac{1}{2}$.

(c) Sin embargo, $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \leq x$ es siempre cierto.

Observación 1.4. Para negar una afirmación del tipo

$$\forall x \in A : p(x)$$

sólo necesitamos encontrar un elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x)$ sea *falso*.

A un elemento x_0 así se le conoce como *contraejemplo*.

Problematario

Problema 1.11. Sea p : "Hace frío" y q : "Está lloviendo".

Proponga un enunciado verbal simple que describa cada una de las siguientes proposiciones:

1. $\neg p$;
2. $p \wedge q$;
3. $p \vee q$;
4. $q \vee \neg p$.

Problema 1.12. Encuentre la tabla de verdad de $\neg p \wedge q$.

Problema 1.13. Demuestre que la propisición

$$p \vee \neg(p \wedge q)$$

es una tautología.

Problema 1.14. Muestre que las proposiciones $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ son lógicamente equivalentes.

Problema 1.15. Use las leyes en la tabla 1.1 para mostrar que

$$\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$$

Problema 1.16. Reescriba los siguientes enunciados sin usar el condicional:

1. Si hace frío, el usa sombrero.
2. Si la productividad se incrementa, entonces el salario aumenta.

Problema 1.17. Considere la proposición condicional $p \rightarrow q$. Las proposiciones

$$q \rightarrow p, \neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg p$$

son llamadas **conversa**, **inversa** y **contrapositiva**, respectivamente.

¿Cuáles de estas proposiciones son lógicamente equivalentes a $p \rightarrow q$?

Problema 1.18. Determine la contrapositiva de cada enunciado:

1. Si Erik es poeta, entonces es pobre.
2. Solo si Marcos estudia, pasará el examen.

Problema 1.19. Escriba la negación de cada enunciado, tan simple como sea posible:

1. Si ella trabaja, ganará dinero.
2. El nada si y solo si el agua está tibia.
3. Si neva, entonces no manejaré.

Problema 1.20. Muestre que el siguiente argumento es una falacia:

$$p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg q.$$

Problema 1.21. Muestre que el siguiente argumento es válido:

$$p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p.$$

Problema 1.22. Muestre que el siguiente argumento siempre es válido:

$$p \rightarrow \neg q, r \rightarrow q, r \vdash \neg p.$$

Problema 1.23. Determine la validez del siguiente argumento:

$$\begin{array}{l} \text{Si 7 es menor que 4, entonces 7 no es número primo} \\ \text{7 no es menor que 4} \\ \hline \text{7 no es número primo.} \end{array}$$

Problema 1.24. Determine la validez del siguiente argumento:

Si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los respectivos ángulos opuestos son iguales

Dos lados de un triángulo no son iguales

Los respectivos ángulos opuestos no son iguales.

Problema 1.25. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados:

1. $\exists x \in A : x + 3 = 10$;
2. $\forall x \in A : x + 3 < 10$;
3. $\exists x \in A : x + 3 < 5$;
4. $\forall x \in A : x + 3 \leq 7$.

Problema 1.26. Determine el valor de verdad de cada uno de las siguientes afirmaciones donde $U = \{1, 2, 3\}$ es el conjunto “*universo*” (de referencia):

1. $\exists x \forall y : x^2 < y + 1$;
2. $\forall x \exists y : x^2 + y^2 < 12$;
3. $\forall x \forall y : x^2 + y^3 < 12$.

Problema 1.27. Encuentre la negación de cada una de las siguientes afirmaciones:

1. $\exists x \forall y : p(x, y)$;
2. $\forall x \forall y : p(x, y)$;
3. $\exists x \exists y \forall z : p(x, y, z)$.

Problema 1.28. Sea

$$p(x) : x + 2 > 5.$$

Indique cuando $p(x)$ es una función proposicional o no en cada uno de los siguientes conjuntos:

1. \mathbb{N}
2. $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$
3. \mathbb{C}

Problema 1.29. Niegue cada uno de las siguientes afirmaciones:

1. Todos los estudiantes viven en los dormitorios.
2. A todos los estudiantes de ingeniería le gusta el fútbol.
3. Algunos estudiantes tienen 25 años o más.

Bibliografía

Las notas de esta sección están basadas en el capítulo 4 "Logic and Propositional Calculus" del libro

Lipschutz, S. and Lipson, M.; **Schaum's Outline of Discrete Mathematics**; McGraw-Hill, 3th Edition.

1.2 Teoría de Conjuntos

Conjuntos y Elementos. Subconjuntos

Un *conjunto* puede ser visto como un conjunto bien definido de objetos, llamados *elementos* o *miembros* de tal conjunto.

Usualmente, usaremos letras mayúsculas para denotar conjunto, y minúsculas para dlos elementos.

La pertenencia en un conjunto se denota de la siguiente manera:

$a \in S$ denota que a pertenece al conjunto S .

$a, b \in S$ denota que tanto a como b pertenecen al conjunto S .

El símbolo \in significa "es elemento de". Por el contrario, \notin significa "no es elemento de".

Especificación de Conjuntos

Básicamente, existen dos maneras de especificar un conjunto en particular. Por un lado, si es posible, enlistar todos los miembros. Por otro lado, caracterizando los elementos en el conjunto.

En cualquier caso, para declarar un conjunto se utilizan llaves:

$$A = \{\dots\}$$

Por ejemplo, el conjunto

$$A = \{1, 3, 5, 6, 9\}$$

también se puede especificar como

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10, 2 \nmid x\}$$

Un conjunto no depende del modo en que sus elementos se muestren. Este permanece igual si sus elementos se repiten o se reacomodan.

Problema 1.30.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\} \quad (1.5)$$

$$= \{1, 2, 2, 1\} \quad (1.6)$$

Subconjuntos

Supongamos que cada elemento en un conjunto A es también elemento del conjunto B , es decir,

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

En ese caso, decimos que A es subconjunto de B . También podemos decir que A está contenido en B o que B contiene a A .

Esta relación se escribe como

$$A \subset B$$

o en ocasiones como $B \supset A$. Por el contrario, si es necesario indicar que A *no* es subconjunto de B , escribimos $A \not\subset B$.

Diremos que dos conjuntos son iguales si poseen los mismos elementos, es decir,

$$x \in A \iff x \in B.$$

De manera equivalente

$$A = B \text{ si y solo si } A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

Problema 1.31. Determine la relación entre los siguientes conjuntos

$$A = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, C = \{1, 3\}.$$

Problema 1.32. Demuestre que

1. $A \not\subset B$ si y solo $\exists x \in A : x \notin B$.
2. $A \subset A$.
3. $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Símbolos especiales

Algunos conjuntos numéricos tienen una notación especial

- \mathbb{N} : números naturales (enteros positivos);
- \mathbb{Z} : números enteros;
- \mathbb{Q} : números racionales;
- \mathbb{R} : números reales;
- \mathbb{C} : números complejos.

Observe que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

pero en ningún caso los conjuntos son iguales.

Conjunto Universal y Conjunto Vacío

Todos los conjuntos bajo investigación en una aplicación de teoría de conjuntos se supone que pertenecen a un conjunto fijo más grande llamado *conjunto universo* \mathbb{U} , al menos que se indique otro caso.

Dado un conjunto universal \mathbb{U} y una propiedad P , es posible que no existan elemento de \mathbb{U} con la propiedad P .

Por ejemplo, el siguiente conjunto no tiene elementos

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 3\}.$$

A tal conjunto sin elementos $\{\}$ se le conoce como conjunto vacío y se denota como \emptyset .

Observación 1.5. Sólo existe un conjunto vacío. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto.

Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos A y B son *disjuntos* si no tienen elementos en común.

Problema 1.33. Considere

$$A = \{1, 2\}, B = \{4, 5, 6\}, C = \{5, 6, 7, 8\}.$$

Determine que pares de conjuntos son disjuntos.

Diagramas de Venn

Un diagrama de Venn es una representación gráfica de conjuntos en el que cada conjunto está representado por áreas encerradas en el plano.

El conjunto universo \mathbb{U} es representado por el interior de un rectángulo, y cualquier otro conjunto esta representado por discos que viven dentro del rectángulo.

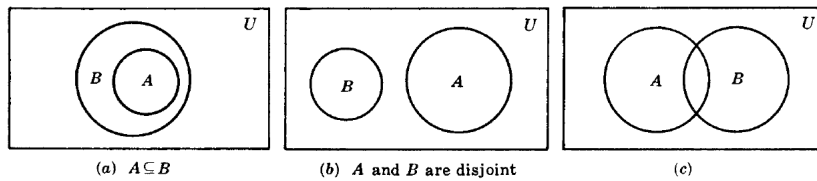


Figura 1.3: Representaciones con Diagramas de Venn

Operaciones con Conjuntos

En esta sección introduciremos la unión, la intersección y el complemento de conjuntos.

Unión e Intersección

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B , es decir

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B , es decir

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

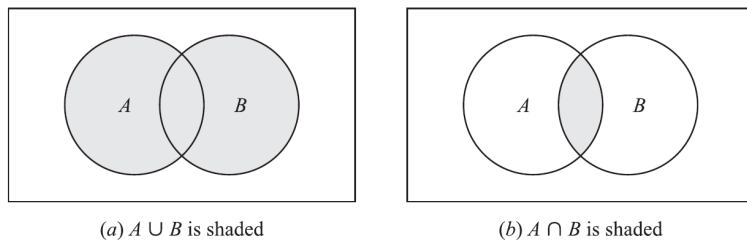


Figura 1.4: Unión e Intersección

Problema 1.34. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 8, 9\}$. Encuentre

1. $A \cup B =$
2. $A \cap B =$
3. $A \cup C =$
4. $A \cap C =$
5. $B \cup C =$
6. $B \cap C =$

Problema 1.35. Demuestre que para cualesquiera dos conjuntos A y B , tenemos:

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B.$$

Problema 1.36. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $A \subset B$
2. $A \cap B = A$
3. $A \cup B = B$

Dos conjuntos A y B se dicen *disjuntos* si no tienen elementos en común, es decir $A \cap B = \emptyset$.

Supongamos que

$$S = A \cup B, A \cap B = \emptyset.$$

Diremos que S es la unión disjunta de A y B y se denota por

$$S = A \sqcup B.$$

Complementos, Diferencias y Diferencias Simétricas

En esta sección, consideraremos conjuntos que sean subconjuntos de un conjunto universo fijo \mathbb{U} .

El *complemento* A^C de un conjunto A es el conjunto de elementos que no pertenecen a A , es decir

$$A^C = \{x \in \mathbb{U} \mid x \notin A\}.$$

Algunos textos denotan A^C también como A' o \bar{A} .

El *complemento relativo* de un conjunto B con respecto a un conjunto A se define como

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

El conjunto $A \setminus B$ se lee A menos B . Algunos textos lo denotan también como $A - B$.

La *diferencia simétrica* de los conjuntos A y B se define como

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

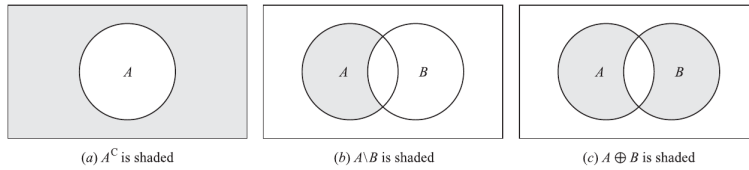


Figura 1.5: Complementos, diferencia y diferencia simétrica.

Problema 1.37. Definamos

$$p \vee\!\!\!\vee q \equiv (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$$

Demuestre que

1. $x \in A \oplus B \iff (x \in A) \vee\!\!\!\vee (x \in B)$
2. $p \vee\!\!\!\vee q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
3. $A \vee\!\!\!\vee B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Problema 1.38. Supongamos que \mathbb{N} es el conjunto universo. Definamos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 8, 9\}$, $E = \{2, 4, 6, \dots\}$.

Determine:

1. $A \oplus B$
2. $A \oplus C$
3. $B \oplus C$
4. $A \oplus E$

Conjuntos fundamentales

Dos conjuntos A y B se dicen *disjuntos* si no tienen elementos en común, es decir $A \cap B = \emptyset$.

Supongamos que

$$S = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Diremos que S es la unión disjunta de A y B y se denota por

$$S = A \sqcup B.$$

En general S es una unión disjunta de P_1, P_2, \dots, P_n si

- $S = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ y
- $P_i \cap P_j = \emptyset$ siempre y cuando $i \neq j$.

En este caso, escribimos

$$S = P_1 \sqcup P_2 \sqcup \dots \sqcup P_n.$$

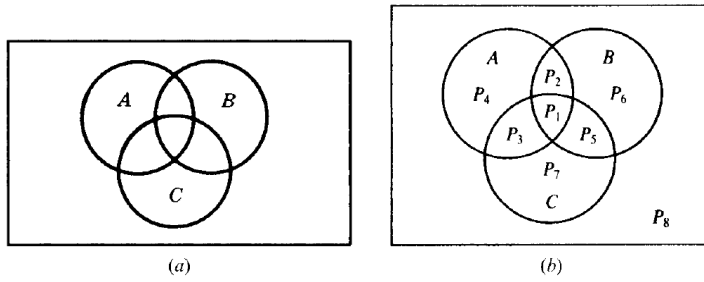
Diremos que P_1, P_2, \dots, P_n es sistema de conjuntos fundamentales para \mathbb{U} si

$$\mathbb{U} = P_1 \sqcup P_2 \sqcup \dots \sqcup P_n.$$

Problema 1.39. Contruya un sistema de conjuntos fundamentales a partir de tres conjunto A, B, C .

Álgebra de conjuntos, dualidad

Los conjuntos bajo las operaciones de unión, intersección y complemento satisface varias leyes o identidad, que se enuncian en la siguiente tabla, y son similares a las leyes de lógica.



Idempotent laws:	(1a) $A \cup A = A$	(1b) $A \cap A = A$
Associative laws:	(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Commutative laws:	(3a) $A \cup B = B \cup A$	(3b) $A \cap B = B \cap A$
Distributive laws:	(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identity laws:	(5a) $A \cup \emptyset = A$	(5b) $A \cap \mathbf{U} = A$
	(6a) $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$	(6b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
Involution laws:	(7) $(A^C)^C = A$	
Complement laws:	(8a) $A \cup A^C = \mathbf{U}$	(8b) $A \cap A^C = \emptyset$
	(9a) $\mathbf{U}^C = \emptyset$	(9b) $\emptyset^C = \mathbf{U}$
DeMorgan's laws:	(10a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	(10b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Figura 1.6: Leyes de Conjuntos

Cada ley de conjuntos se corresponde con una ley de lógica. Por ejemplo, la ley de DeMorgan:

$$\begin{aligned}
 (A \cup B)^C &= \{x \mid x \notin (A \cup B)\} \\
 &= \{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\} \\
 &= A^C \cap B^C
 \end{aligned}$$

Dualidad El *principio de dualidad* establece que la equivalencia E^* obtenida a partir de una ley de lógica E reemplazando

$$\cup, \cap, \mathbf{U}, \emptyset$$

por

$$\cap, \cup, \emptyset, \mathbf{U}$$

sigue siendo una ley de lógica.

A la proposición E^* se le conoce como dual E .

Problema 1.40. Encuentre el dual de

$$(\mathbf{U} \cap A) \cup (B \cap A) = A$$

1.3 Inducción Matemática

Introducción

Una propiedad esencial de los naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ es la siguiente

Axioma (Principio de Inducción Matemática, versión I). Sea P una proposición definida en \mathbb{N} , es decir, $P(n)$ toma valores de cierto o falso para cada $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que

1. $P(1)$ es cierto;
2. $\forall k \in \mathbb{N} : P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Entonces P es cierto para todo entero positivo $n \in \mathbb{N}$.

[t]

Problema 1.41. Sea $P(n) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Demostrar que $P(n)$ es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$.

Axioma (Principio de Inducción Matemática, versión II). Sea P una proposición definida en \mathbb{N} tal que :

1. $P(1)$ es cierta;
2. $P(k)$ es cierta siempre que $P(j)$ para toda $1 \leq j < k$.

Entonces $P(n)$ es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$.

Observación 1.6. Algunas veces, uno desea demostrar que una proposición es cierta para algún conjunto de enteros

$$\{a, a+1, a+2, \dots\}$$

donde a es un entero positivo, posiblemente cero. Esto puede hacerse simplemente reemplazando 1 por a en cualquier versión del Principio de Inducción Matemática.

Problema 1.42. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 1.43. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notación “Sigma”

La letra griega Σ denota adición repetida:

$$\sum_{i=a}^b f(i) = f(a) + f(a+1) + \dots + f(b),$$

siempre que $a \leq b$.

Problema 1.44. 1. $\sum_{j=1}^5 j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

2. $\sum_{i=0}^3 (2i + 1) = 1 + 3 + 5 + 7$

3. $\sum_{i=2}^{10} i^2 = 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$

4. $\sum_{j=1}^4 \cos(j\pi) = \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi.$

Linealidad

Propiedad 1.1.

$$\sum_{i=a}^b cf(i) = c \sum_{i=a}^b f(i) \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=a}^b f(i) + g(i) = \sum_{i=a}^b f(i) + \sum_{i=a}^b g(i) \quad (1.8)$$

Propiedades

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \sum_{j=a}^b f(j) \quad (1.9)$$

$$\sum_{j=a}^a f(j) = f(a) \quad (1.10)$$

$$\sum_{j=a}^c f(j) = \sum_{j=a}^b f(j) + \sum_{j=b}^c f(j) \quad (1.11)$$

$$\sum_{j=a}^{b+1} f(j) = \sum_{j=a}^b f(j) + f(b) \quad (1.12)$$

Problema 1.45. Si $f(n) = (2n - 1)$, entonces

$$\sum_{i=1}^n f(j) = 1 + 3 + \dots + (2n - 1)$$

es la suma hasta el n -ésimo natural impar. Observe que

1. $\sum_{j=1}^1 f(j) = 2(1) - 1 = 1.$

2. $\sum_{i=1}^{n+1} f(j) = (\sum_{i=1}^n f(j)) + (2n + 1)$

Problema 1.46. Si $f(n) = 2^{n-1}$, entonces

$$\sum_{i=1}^n f(j) = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1}$$

es la suma de las primeras n potencias de 2 (incluyendo $1 = 2^0$).

Observe que

1. $\sum_{i=1}^{n+1} f(j) = 1 + 2 + \dots + 2^n$

2. $\sum_{j=1}^1 f(j) = 2^{1-1} = 1.$

3. $\sum_{i=1}^{n+1} f(j) = (\sum_{i=1}^n f(j)) + 2^n.$

Ejemplos Resueltos

[t]

Problema 1.47. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

[t]

Problema 1.48. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.*Funciones definidas de manera recursiva*

Decimos que una función está *definida recursivamente* si la definición de la función se refiere a sí misma.

Para que la función esté bien definida, debe tener las siguientes dos propiedades:

1. Deben existir ciertos argumentos, llamados *valores base*, para los cuales la función no se refiera a sí misma.
2. Cada vez que la función se refiera a sí misma, el argumento de la función debe estar más cercano a un valor base.

La función factorial

El producto de enteros positivos de 1 hasta n (incluido) es llamado *n factorial*, $n!$

Es decir,

$$n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Por razones combinatorias, es conveniente definir $0! = 1$, y de esta manera la función factorial quedará definida para todos los enteros no negativos.

[t]

Observación 1.7. 1. $1! = 1 \cdot 0!$

$$2. \quad 2! = 2 \cdot 1!$$

$$3. \quad 3! = 3 \cdot 2!$$

$$4. \quad 4! = 4 \cdot 3!$$

Es fácil observar que para $n \in \mathbb{N}$:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Definición 1.6 (Función factorial).

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

Observación 1.8. 1. El valor de $n!$ factorial esta dado explicitamente para $n = 0$, de manera que 0 es el valor base.

2. El valor de $n!, n > 0$ está dado en términos de $n - 1$, que es más cercano al valor base 0.

Por tanto, $n!$ es una función recursiva bien definida.

[fragile] Implementación iterativa del *factorial* en Python

```
def factorial(n):
    result = 1
    for i in range(1, n+1):
        result *= i
    return result
```

[fragile] Implementación recursiva del *factorial* en Python

```
def factorial(n):
    z=1
    if n>1:
        z=n*factorial(n-1)
    return z
```

Para más implementaciones, visite ROSETTACODE.ORG/WIKI/FACTORIAL

Sucesión de Fibonacci

La celebre sucesión de Fibonacci (usualmente denotada por F_0, F_1, F_2, \dots) es como sigue:

$$0, 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Es decir, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y cada término sucesor es la suma de los dos precedentes.

Por ejemplo, los siguientes dos términos de la sucesión son

$$34 + 55 = 89 \text{ y } 55 + 89 = 144.$$

Definición 1.7 (Sucesión de Fibonacci).

$$F_n = \begin{cases} n & n = 0, 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

Este ejemplo es una función recursiva bien definida, ya que la función hace referencia a sí misma, cuando se usan F_{n-2} y F_{n-1} , y

1. los valores base son 0 y 1;
2. los valores de F_n están definidos en términos de valores más pequeños $n - 2$ y $n - 1$ que son más cercanos a los valores base.

[fragile] Implementación iterativa de *Fibonacci* en Python

```
def fibIter(n):
    if n < 2:
        return n
    fibPrev = 1
    fib = 1
    for num in xrange(2, n):
        fibPrev, fib = fib, fib + fibPrev
    return fib
```

[fragile] Implementación recursiva de *Fibonacci* en Python

```
def fibRec(n):
    if n < 2:
        return n
    else:
        return fibRec(n-1) + fibRec(n-2)
```

Para más implementaciones, visite ROSETTACODE.ORG/WIKI/FIBONACCI_SEQUENCE

La función de Ackermann

Definición 1.8 (Función (fallida) de Ackermann).

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & m = 0 \\ A(m - 1, n) & m \neq 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & m \neq 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Definición 1.9 (Función de Ackermann).

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & m = 0 \\ A(m - 1, 1) & m \neq 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & m \neq 0, n \neq 0 \end{cases}$$

[fragile] Implementación recursiva de *Ackermann* en Python

```
def ack2(M, N):
    if M == 0:
        return N + 1
    elif N == 0:
        return ack2(M - 1, 1)
    else:
        return ack2(M - 1, ack2(M, N - 1))
```

Para más implementaciones, visite ROSETTACODE.ORG/WIKI/ACKERMANN_FUNCTION

Ejemplos Resueltos

Problema 1.49. Sean a, b enteros positivos, y definamos la siguiente función de manera recursiva:

$$Q(a, b) = \begin{cases} 0 & a < b \\ Q(a - b, b) + 1 & b \leq a \end{cases}$$

1. Encuentre (i) $Q(2, 5)$; (ii) $Q(12, 5)$
2. ¿Qué es lo que hace esta función? Encuentre $Q(5861, 7)$

Problema 1.50. Use la definición de la función de Ackermann para calcular $A(1, 3)$.

Problema 1.51. Demuestre por inducción que $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

Problema 1.52. Demuestre por inducción que $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$

Problema 1.53. Demuestre por inducción que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

Problema 1.54. Demuestre por inducción que $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n - 1) \cdot (2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$

Problema 1.55. Demuestre por inducción que $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n - 3) \cdot (4n + 1)} = \frac{n}{4n + 1}$

Problema 1.56. Demuestre por inducción que $7^n - 2^n$ es divisible entre 5

Problema 1.57. Demuestre por inducción que $n^3 - 4n + 6$ es divisible entre 3

Problema 1.58. La función de Ackermann está definida de manera recursiva de la siguiente manera:

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & m = 0 \\ A(m - 1, 1) & m \neq 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & m \neq 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Encuentre $A(1, 1)$.

1.4 Relaciones

Ejemplos de relaciones

- “menor que”
- “es paralelo a”
- “es un subconjunto de”

Formalmente, definiremos una relación en términos de *pares ordenados*.

Definición 1.10. Un *par ordenado* de elementos a y b , donde a es el primer elemento y b es el segundo se denota por (a, b) .

Axioma. $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

En particular $(a, b) \neq (b, a)$, al menos que $a = b$.

Esto es muy diferente al caso de un conjunto, dónde el orden es irrelevante:

$$\{a, b\} = \{b, a\}.$$

Producto de conjuntos

Consideremos dos conjuntos arbitrarios A y B . El conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A, b \in B$ es llamado *producto (cartesiano)* de A con B , y se denota por $A \times B$, es decir,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Podemos construir el producto cartesiano de un conjunto A consigo mismo, y en ese caso denotaremos

$$A^2 = A \times A.$$

Problema 1.59. Sea $A = \{x, y\}$, $B = 0, 1$. Entonces

1. $A^2 = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$
2. $A \times B = \{(x, 0), (x, 1), (y, 0), (y, 1)\}$
3. $B \times A = \{(0, x), (0, y), (1, x), (1, y)\}$
4. $B^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

Observación 1.9. ■ En general, $A \times B \neq B \times A$.

- Si $n(A)$ denota el *número de elementos* en el conjunto A , entonces

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = a, b, c$. Determine $A \times B$, $B \times A$ y A^2 , y describa gráficamente estos productos.

Problema 1.60. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es llamado frecuentemente el *plano Cartesiano*.

Definición 1.11. Definimos el producto cartesiano de un número finito de conjuntos A_1, \dots, A_n como

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

Observación 1.10. De manera análoga al caso $n = 2$, definiremos

$$A^n = \prod_{i=1}^n A.$$

Por ejemplo, \mathbb{R}^3 denota el espacio tridimensional.

Relaciones

Definición 1.12. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Una *relación binaria* R , o simplemente relación, de A a B es un subconjunto de $A \times B$.

Para cada $(a, b) \in A \times B$ alguna de las siguientes condiciones (pero no ambas) es cierta:

1. $(a, b) \in R$; en cuyo caso diremos que a *está* R -relacionado con b , y escribiremos $a \mathbf{R} b$.
2. $(a, b) \notin R$; en cuyo caso diremos que a *no está* R -relacionado con b , y escribiremos $a \mathbf{\bar{R}} b$.

Si R es una relación de A en sí mismo, es decir $R \subset A^2$, entonces diremos que R es una *relación en* A .

Definición 1.13. Si $R \subset A \times B$ es una relación, el *dominio* de R es

$$\text{Dominio}(R) = \{a \in A \mid (a, b) \in R\},$$

mientras que la *imagen* de R es

$$\text{Imagen}(R) = \{b \in B \mid (a, b) \in R\}.$$

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$ y

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}.$$

Entonces R es una relación de A en B , porque $R \subset A \times B$.

Respecto a esta relación, por ejemplo,

$$1\mathbf{R}y, 1\mathbf{R}z, 3\mathbf{R}y,$$

pero

$$1\mathbf{R}x, 2\mathbf{R}x, 2\mathbf{R}y.$$

En este caso, $\text{Dominio}(R) = \{1, 3\}$ e $\text{Imagen}(R) = \{y, z\}$.

La propia inclusión \subset es una relación en una colección de conjuntos A_1, \dots, A_n .

Para cualquier par A_i, A_j en dicha colección $A \subset B$ o $A \not\subset B$.

Una relación en el conjunto \mathbb{Z} de número enteros es "*m divide a n*."

La notación convencional para esta relación es $m \mid n$.

Consideremos el conjunto de líneas L en el plano. La perpendicularidad \perp es una relación en L . De manera similar el paralelismo \parallel .

Sea A cualquier subconjunto. Una relación importante en A es la *igualdad*

$$\{(a, a) \mid a \in A\}$$

que usualmente se denota por

$$"="$$

En ocasiones, también se le llama *entidad* o *diagonal* y se denota por Δ_A , o simplemente por Δ .

Sea A un conjunto arbitrario. Entonces tanto $A \times A$ como \emptyset son subconjuntos de $A \times A$, y son llamados *relación universal* y *relación vacía*, respectivamente.

Relación inversa

Sea R una relación de A en B . La *relación inversa* de R , denotada por R^{-1} , es la relación de B en A que consiste en todos aquellos pares que al invertirlos, pertenecen a R .

En otras palabras

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Problema 1.61. Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$ y $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$. Entonces

$$R^{-1} = \{(y, 1), (z, 1), (y, 3)\}.$$

Observación 1.11. ■ $(R^{-1})^{-1} = R$.

■ $\text{Dominio}(R^{-1}) = \text{Imagen}(R)$

■ $\text{Imagen}(R^{-1}) = \text{Dominio}(R)$

Composición de Relaciones

Sean A, B, C conjuntos arbitrarios, R una relación de A en B y S una relación de B en C . Entonces podemos definir una nueva relación de A en C denotada por RS :

$aRS c$ si para alguna $b \in B$, aRb y bSc .

Esto es

$$RS = \{(a, c) \mid \exists b \in B : (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$$

Supongamos que R es una relación en A . Entonces, definimos R^n de manera recursiva

$$R^n = \begin{cases} R & n = 1 \\ R^{n-1}R & n > 1 \end{cases}$$

Problema 1.62. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y $C = \{x, y, z\}$ y definimos las relaciones:

$$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$$

$$S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}.$$

Encuentre RS .

Teorema 1.2. Supongamos que R es una relación de A en B , y S una relación de B en C . Entonces

$$(RS)T = R(ST).$$

Tipos de relaciones

Relaciones reflexivas

Una relación R en un conjunto A es *reflexiva* si aRa para todo $a \in A$, es decir, $\forall a \in A : (a, a) \in R$.

Entonces, R es *no-reflexiva* si...

Problema 1.63. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas:

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- $R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$
- $R_4 = \emptyset$
- $R_5 = A \times A$

Problema 1.64. Determine cuales de las siguientes relaciones son reflexivas:

- \leq en \mathbb{Z}
- \subset en 2^A Aquí A es un conjunto y 2^A es la colección de todos sus subconjuntos (incluyendo tanto a \emptyset como a A)
- \perp en el conjunto L de líneas en el plano
- \parallel en el conjunto L de líneas en el plano
- $|$ (divisibilidad) en \mathbb{N} . Aquí $a | b$ significa que a divide a b .

Relaciones simétricas y antisimétricas

Una relación R en un conjunto A es simétrica si: Siempre que aRb , entonces bRa . En otras palabras,

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R.$$

Entonces, una relación R no es simétrica si...

- Problema 1.65.** 1. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.63 son simétricas.
2. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.64 son simétricas.

Una relación R en un conjunto A es antisimétrica si: Siempre que aRb y bRa entonces $a = b$. En otras palabras,

$$a \neq b, aRb \Rightarrow b \not R a.$$

Entonces, una relación R no es simétrica si...

- Problema 1.66.** 1. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.63 son antisimétricas.
2. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.64 son antisimétricas.

Observación 1.12. Las propiedades de simetría y antisimetría no son excluyentes una de la otra.

Por ejemplo, la relación

$$R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$$

no es simétrica ni antisimétrica.

Por otro lado, la relación

$$S = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

es tanto simétrica como antisimétrica.

Relación transitiva

Una relación R en un conjunto A es transitiva si: Siempre que aRb y bRc , entonces aRc . En otras palabras,

$$(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$$

Entonces R no es transitiva si...

- Problema 1.67.** 1. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.63 son transitivas.
2. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo 1.64 son transitivas.

Relaciones de Equivalencia

Considere un conjunto no-vacío S . Una relación R en S es una *relación de equivalencia* si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

En otras palabras, R es una *relación de equivalencia* en S si satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada $a \in S : aRa$;
2. si aRb , entonces bRa ;
3. si aRb , bRc , entonces aRc .

La idea general detras de una relación de equivalencia que es una clasificación de objetos que son en cierto sentido *similares*.

Por ejemplo, la relación $=$ de igualdad en cualquier conjunto S es una relación de equivalencia, porque...

Problema 1.68. Sea L el conjunto de líneas en el plano cartesiano y T el conjunto de triangulos en el mismo plano.

1. La relación de paralelidad es una relación de equivalencia en L ;
2. La relación de congruencia o la de similaridad son relaciones de equivalencia en T .

Problema 1.69. La relación \subset no es una relación de equivalencia. Aunque es reflexiva y transitiva, no es simétrica...

Sea m un entero positivo fijo. Dos enteros a, b son llamados *congruentes módulo m* , si m divide la diferencia $a - b$, y en tal caso escribimos:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Por ejemplo $11 \equiv 3 \pmod{4}$ y $22 \equiv 6 \pmod{4}$.

La relación de congruencia módulo m es un relación de equivalencia.

Particiones y clases de equivalencia

Una partición P de un conjunto no-vacío S es una colección $\{A_j\}$ de subconjuntos no-vacíos de S con las siguientes propiedades de que cada $a \in S$ pertenece a uno y solo uno de los conjunto A_j de la partición.

En otras palabras,

1. Cada $a \in S$ pertenece a algún A_j ;
2. si $A_i \neq A_j$, entonces $A_i \cap A_j = \emptyset$.

De manera equivalente, una partición P de S es una subdivisión de S en conjuntos disjuntos no vacíos A_j tal que

$$S = \sqcup_j A_j.$$

Supontamos que R es una relación de equivalencia en el conjunto S . Para cada $a \in S$, denotemos por $[a]$ el conjunto de elementos de S tales que están R -relacionados con a .

En otras palabras,

$$[a] = \{x \in S \mid (a, x) \in R\}.$$

La colección de clases de equivalencia de elementos de S bajo una relación de de equivalencias R se denota por S/R , es decir,

$$S/R = \{[a] \mid a \in S\}.$$

Diremos que S/R es el conjunto cociente de S por R .

Teorema 1.3. *Sea R una relación de equivalencia en S . Entonces S/R es una partición de S . De manera específica:*

1. Para cada $a \in S : a \in [a]$;
2. $[a] = [b]$ si y solo si $(a, b) \in R$;
3. Si $[a] \neq [b]$, entonces $[a]$ y $[b]$ son conjuntos disjuntos.

De manera inversa, dada una partición $P = \{A_j\}$ de conjuntos S , existe una relación R en S tal que los conjuntos A_j son las clases de de equivalencia de R .

Problema 1.70. Sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ en $S = \{1, 2, 3\}$. Demuestre que R es una relación de equivalencia y calcule S/R .

Problema 1.71. Para cada relación, verifique que se trata de una relación de equivalencia, y calcule sus clases de equivalencia.

- $R_0 = [[a, a], [b, b], [c, c]]$

- $R_1 = [[a, a], [a, b], [b, a], [b, b], [c, c]]$
- $R_2 = [[a, a], [a, c], [b, b], [c, a], [c, c]]$
- $R_3 = [[a, a], [b, b], [b, c], [c, b], [c, c]]$
- $R_4 = [[a, a], [a, b], [a, c], [b, a], [b, b], [b, c], [c, a], [c, b], [c, c]]$

Problema 1.72. Describa las clases de equivalencia de \mathbb{Z} mód 5, y verifique que las operaciones

$$[a] + [b] = [a + b], [a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

están bien definidas.

Problema 1.73. Considere el conjunto $S = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid b \neq 0\}$ y la siguiente relación en este conjunto $(a, b) \mathbf{R}(c, d) \iff ad - bc = 0$.

1. Demuestre que R es una relación de equivalencia.
2. Demuestre que $[(a, b)] = [(c, d)]$ para todo $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$$[(a, b)] = [(n \cdot a, n \cdot b)]$$

3. Demuestre que las operaciones

$$\begin{cases} [(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)] \\ [(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(a \cdot c, b \cdot d)] \end{cases}$$

están bien definidas

4. Denote por $\frac{a}{b}$ la clase de equivalencia $[(a, b)]$ y reescriba los resultados anteriores usando esta notación.
5. ¿Qué conjunto de números representa el cociente S/R ?

Relaciones de orden parcial

Una relación R en un conjunto S es llamada *orden parcial* de S en R si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Un conjunto S con un orden parcial R es llamado *conjunto parcialmente ordenado* o *poset*.

Problema 1.74. Para cada una de las siguientes relaciones, verifique que es un orden parcial y dibuje su diagrama de Hasse.

- $R_1 = [[a, a], [b, b], [c, c]]$
- $R_2 = [[a, a], [a, b], [b, b], [c, c]]$
- $R_3 = [[a, a], [a, c], [b, b], [c, c]]$

- $R_4 = [[a, a], [a, b], [a, c], [b, b], [c, c]]$
- $R_6 = [[a, a], [b, b], [b, c], [c, c]]$
- $R_7 = [[a, a], [a, c], [b, b], [b, c], [c, c]]$
- $R_8 = [[a, a], [a, b], [a, c], [b, b], [b, c], [c, c]]$

Problema 1.75. Demuestre para cada par (S, R) , el conjunto S es parcialmente ordenado respecto a R :

1. $(2^A, \subset)$.
2. (\mathbb{R}, \leq)
3. $(\mathbb{N}, |)$. Muestre que esto no es cierto para $(\mathbb{Z}, |)$.

Funciones como relaciones

Funciones, gráficas y relaciones

Supongamos que para cada elemento de un conjunto A , asignamos un *único* elemento de un conjunto B ; diremos que la colección de tales asignaciones es una *función* de A en B .

En tal caso, denotamos escribimos

$$f : A \rightarrow B, a \mapsto f(a)$$

donde $f(a) \in B$ es la asignación correspondiente a $a \in A$.

La conexión entre *funciones* y *relaciones* es la siguiente:

Definimos la gráfica de una función $f : A \rightarrow B$ como el subconjunto de $A \times B$

$$\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}.$$

Observe que Γ_f es una relación en $A \times B$.

En este caso, diremos que $a \in A$ es la *variable independiente*, mientras que $b \in B$ es la *variable dependiente*.

De manera recíproca, una relación $R \subset A \times B$ induce una función si

$$(a, b), (a, b') \in R \Rightarrow b = b'.$$

En tal caso (abusando de la notación), la función está definida por

$$R : A \rightarrow B, a \mapsto b := R(a).$$

Entonces, una relación no induce una función si...

Problema 1.76. Considere las siguientes relaciones en $A = \{1, 2, 3\}$

(a) $f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$

(b) $g = \{(1, 2), (3, 1)\}$

(c) $h = \{(1, 3), (2, 1), (1, 2), (3, 1)\}$

y determine cuales inducen funciones.

El conjunto A es llamado *dominio* de la función, y al conjunto B se le conoce *codominio*.

La *imagen* de una función $f : A \rightarrow B$ se define como

$$\begin{aligned}\text{Imagen}(f) &= f(A) \\ &= \{b \in B \mid \exists a \in A : b = f(a)\} \\ &= \{f(a) \in B \mid a \in A\}\end{aligned}$$

Frecuentemente, una función puede expresarse por medio de una fórmula matemática.

Problema 1.77. Consideremos la función que asigna a cada número real su cuadrado. Podemos describir esta función escribiendo

$$f(x) = x^2 \text{ o } x \mapsto x^2 \text{ o } y = x^2.$$

En el ejemplo anterior, la gráfica de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esta dada por

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

y es una parábola.

Mientras que la imagen de f esta dada por

$$f(\mathbb{R}) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}.$$

Problema 1.78. La relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

no induce una función.

Problema 1.79. Sea A un conjunto arbitrario. La función $: A \rightarrow A$ que asigna a cada elemento $a \in A$ el mismo elemento es llamada *identidad*, usualmente denotada por Id_A o simplemente Id

En otras palabras, la identidad está definida por

$$\text{Id} : A \rightarrow A, a \mapsto \text{Id}(a) = a.$$

Observe que

$$\Gamma_{\text{Id}_A} = \triangle_A.$$

Composición de Funciones

Consideremos dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$. Podemeos definir una nueva función $: A \rightarrow C$ de la siguiente manera

$$a \mapsto b = f(a) \mapsto c = g(b) = g(f(a)).$$

La función anterior se conoce como *composición* g con f se describe de la siguiente manera

$$\begin{cases} g \circ f : A \rightarrow C \\ x \mapsto g(f(x)). \end{cases}$$

Problema 1.80. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$. Encuentre

(a) $f \circ g$

(b) $g \circ f$

Problema 1.81. Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2-x}$. Encuentre

(a) $f \circ g$

(b) $g \circ f$

(c) $f \circ f$

(d) $g \circ g$

Funciones inyectivas, suprayectivas e inversas

Definición 1.14. Consideremos una función $f : A \rightarrow B$. Diremos que

(a) f es *inyectiva* o *1:1* si $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.

(b) f es *suprayectiva* o *sobre* si $f(A) = B$.

(c) f es *biyectiva* o *invertible* si la relación inversa de la gráfica Γ_f induce una función.

Propiedad 1.2. La función $f : A \rightarrow B$ es invertible si y solo si es 1:1 y sobre.

En tal caso la relación inversa R^{-1} de $R = \Gamma_f$ induce una función denotada por $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que

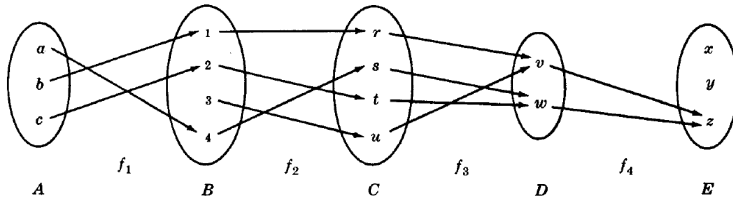
$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = \text{Id}_A \\ f \circ f^{-1} = \text{Id}_B \end{cases}$$

Problema 1.82. Considere las siguientes funciones y sus posibles composiciones, y determine si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas:

Como encontrar funciones inversas

Si $f : A \rightarrow B$ no es *sobre*, es decir, $f(A) \subset B$ pero $f(A) \neq B$, basta restringir su codominio a la imagen $f(A)$ para que se convierta en sobre:

$$f : A \rightarrow f(A).$$



Problema 1.83. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ no es sobre, pero como

$$f(A) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \{y \geq 0\}, x \mapsto x^2$ sí lo es.

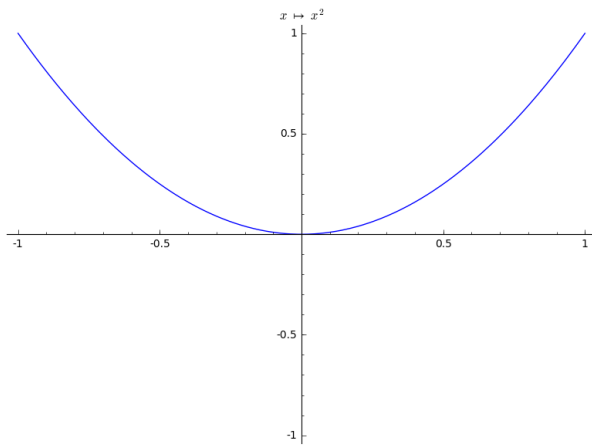


Figura 1.7: Gráfica de x^2

Propiedad 1.3. Si una función $f : A \rightarrow B$ es inyectiva, entonces

$$f : A \rightarrow f(A)$$

es invertible.

Como encontrar la inversa de $y = f(x)$

- Verifique que $f(x)$ es una función $1 : 1$.
- Despeje la variable independiente y en la ecuación $y = f(x)$ para obtener

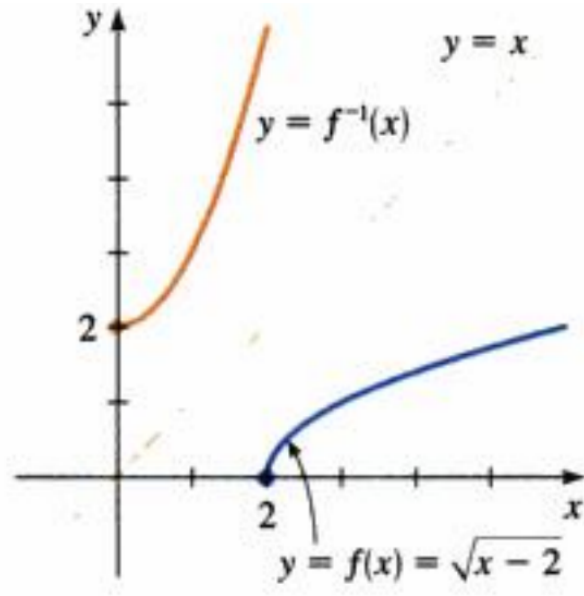
$$x = f^{-1}(y).$$

- Reescriba la ecuación anterior intercambiando las variables: $y = f^{-1}(x)$.

Problema 1.84. Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$,

Problema 1.85. Encuentre la inversa de $f(x) = \frac{x^5 - 3}{2}$.

Problema 1.86. Encuentre la inversa de $f(x) = \sqrt{x - 2}$.



Caracterización geométrica

Considere ahora una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Representemos su gráfica

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x))\}$$

en el plano.

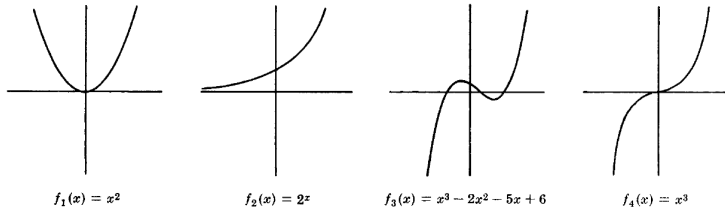
Observación 1.13. ■ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es 1 : 1 si cada línea *horizontal* intersecta la gráfica de f a lo más en un punto.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *sobre* si cada línea horizontal intersecta la gráfica de f al menos en un punto.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *invertible* si cada línea horizontal intersecta la gráfica de f ...

Problema 1.87. Considere las siguientes funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1. $x \mapsto x^2$
2. $x \mapsto 2^x$
3. $x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
4. $x \mapsto x^3$

y determine si son 1 : 1, sobre o invertibles.



Permutaciones

Consideremos un conjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, esto es, X tiene cardinalidad $n(X) = N < \infty$.

Una función biyectiva (invertible) $\sigma : X \rightarrow X$ es llamada *permutación* en X .

Observe que las composiciones e inversas de permutaciones, así como la identidad, son también permutaciones.

En este caso, diremos que la permutación σ *actúa* en X .

Supongamos que la permutación σ actúa en $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ de la siguiente manera:

$$\sigma(x_1) = x_2, \sigma(x_2) = x_3, \sigma(x_3) = x_1.$$

Entonces, podemos representar la permutación de la siguiente manera

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir, sólo nos fijamos de que manera actúa en el índice j del elemento x_j .

De manera general, numerando los elementos de $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, podemos identificar este conjunto con $A_N = \{1, \dots, N\}$ por medio de la biyección $x_i \mapsto i$.

Ahora, consideremos una permutación $\sigma : A_N \rightarrow A_N$, tal que $\sigma(i) = \sigma_i$. Entonces podemos representar σ por medio de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & N \\ \sigma_1 & \dots & \sigma_N \end{pmatrix}$$

El conjunto de todas las permutaciones $A_N \rightarrow A_N$ se denota por S_N y tiene una cardinalidad $n(S_N) = N!$.

2 Fundamentos de Aritmética

2.1 Los números enteros

En esta sección analizaremos algunos conjuntos numéricos. Los números naturales son el conjunto de números

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

mientras que los números enteros son el conjunto de números

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Máximo Común Divisor

Definición 2.1. Diremos que un entero n divide a otro entero $c \in \mathbb{Z}$ si existe un tercer entero $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = n \cdot p.$$

Definición 2.2. Diremos que el entero d es el *máximo común divisor* de dos enteros a, b o $\text{mcd}(a, b)$ si

- d divide tanto a a como a b y;
- d es el número entero más grande con esta propiedad.

Problema 2.1. Encontrar $\text{mcd}(6, 15)$.

Solución. Los divisores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, mientras que los de 15 son $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

Entonces, los divisores en común de 6 y 15 son $\pm 1, \pm 3$. El más grande de todos estos es $d = 3$ y por tanto es

$$\text{mcd}(6, 15) = 3.$$

Aunque este método para encontrar el mcd es útil cuando hay pocos divisores, puede resultar abrumador si ambos números tienen una gran cantidad de divisores.

Propiedad 2.1 (Teorema del Residuo). *Dados dos números enteros positivos a, b , existen otro par de enteros $q, r \geq 0$ tales que*

$$a = b \cdot q + r \quad (2.1)$$

$$r < b. \quad (2.2)$$

A q se le llama cociente, mientras que a r se le llama residuo.

Demostración. V. ¹, sección 7.2, teorema 1. □

¹ Cárdenas, H. (1973). *Álgebra superior*

Problema 2.2. Si $a = 7, b = 2$, entonces el cociente es $q = 3$ y el residuo es $r = 1$, porque

$$\begin{cases} 7 = 2 \cdot 3 + 1 \\ r = 1 < b = 2. \end{cases}$$

Observe que también podríamos tomar $q = 1, r = 5$ y escribir

$$7 = 2 \cdot 1 + 5,$$

pero como $5 > 2$, entonces $r = 5$ no satisface la condición del residuo (2.2), porque $r = 5 \geq b = 2$.

Algoritmo 2.1 (Algoritmo Euclidiano). *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ dos números enteros positivos. Consideremos la siguiente sucesión de operaciones, en la que iteramos el teorema del residuo:*

$$a = b \cdot q_0 + r_0$$

$$b = r_0 \cdot q_1 + r_1$$

$$r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2$$

...

$$r_{N-3} = r_{N-2} \cdot q_{N-1} + r_{N-1}$$

$$r_{N-2} = r_{N-1} \cdot q_N + 0.$$

Entonces el último cociente r_{N-1} es el *mcd* de a y b .

Demostración. V. ², sección 7.4, prop. 1. □

² Cárdenas, H. (1973). *Álgebra superior*

Como en el ejemplo 2.1, tenemos que

$$15 = 6 \cdot 2 + 3$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0,$$

Entonces $r = 3$ es igual a $\text{mcd}(15, 6)$.

Mínimo Común Múltiplo

Definición 2.3. Diremos que el entero positivo $m \in \mathbb{Z}$ es el *mínimo común múltiplo* o **mcm** de dos enteros positivos a, b si

- m es múltiplo tanto de $a \in \mathbb{Z}$ como $b \in \mathbb{Z}$ y;
- d es el número entero positivo más pequeño con esta propiedad.

Propiedad 2.2. Si a, b son dos enteros positivos, entonces

$$\text{mcm}(a, b) \text{mcd}(a, b) = a \cdot b$$

Demostración. V. ³, sección 7.5, ejercicios del 10 al 12.

□

³ Cárdenas, H. (1973). *Álgebra superior*

Problema 2.3. Encontrar el mcm de $a = 6$ y $b = 15$.

Solución. Como vimos anteriormente, $\text{mcd}(6, 15) = 3$. Entonces,

$$\text{mcm}(6, 15) = \frac{6 \cdot 15}{3} = 30$$

2.2 Los números racionales

Los números racionales son el conjunto de números

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

identificando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ siempre que la *razón cruzada* sea igual

$$ad = bc$$

¿Para que nos sirve \mathbb{Q} ?

Este conjunto de números nos sirve para *contar, sumar, restar, multiplicar y dividir*.

Definición 2.4. Dos números racionales $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ son equivalentes si

$$ad - bc = 0.$$

Problema 2.4. $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$ porque

$$(1)(4) - (2)(2) = 0.$$

Simplificación

Definición 2.5. 1. Diremos que dos enteros $p, q \in \mathbb{Z}$ son primos relativos si $\text{mcd}(p, q) = 1$.

2. Diremos que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es la forma *irreducible* de $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ si

- $\frac{p}{q}$ es equivalente a $\frac{a}{b}$ y
- p, q son primos relativos.

Por la definición 2.4, tenemos que para un número racional $\frac{a}{b}$:

$$\frac{n \cdot a}{n \cdot b} = \frac{a}{b},$$

siempre que $n \neq 0$.

Problema 2.5. $\frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Observación 2.1. Sean a, b dos enteros positivos. Si $d = \text{mcd}(a, b)$ y

$$a = d \cdot p, b = d \cdot q,$$

entonces podemos simplificar de la siguiente manera

$$\frac{a}{b} = \frac{d \cdot p}{d \cdot q} = \frac{p}{q}.$$

Observación 2.2. Si d es el máximo común divisor de los enteros $a, b \neq 0$, entonces tenemos que p, q son los cocientes en las operaciones

$$\begin{cases} a = d \cdot p \\ b = d \cdot q \end{cases}$$

Problema 2.6. Encuentre la forma irreducible de $\frac{15}{10}$.

Solución.

1. Primero, muestre que $\text{mcd}(15, 10) = 5$;

2. Como

$$\frac{15}{10} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{2},$$

entonces $\frac{3}{2}$ es equivalente a $\frac{15}{10}$

3. Finalmente muestre que 3 y 2 son primos relativos. Concluimos que $\frac{3}{2}$ es la forma irreducible de $\frac{15}{10}$.

Problema 2.7. Encuentre la forma irreducible de la fracción

$$\frac{182}{910}$$

Conversión y comparación

Supongamos que una pizza se parte en 12 rebanadas iguales, mientras que otra similar se parte en 8. ¿Qué cantidad de pizza es mayor, 7 rebanadas de la primera o 5 de la segunda?

Para comparar dos fracciones, debemos convertirlas de manera que tenga un común denominador.

Algoritmo 2.2 (Conversión a común denominador). *Para convertir dos fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ a común denominador:*

1. Encuentre $m = \text{mcm}(b, d)$
2. Encuentre un entero p tal que $m = b \cdot p$ y convierta la primera fracción

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot p}{b \cdot p} = \frac{ap}{m}$$

3. Encuentre un entero q tal que $m = d \cdot q$ y convierta la segunda fracción

$$\frac{c}{d} = \frac{c \cdot q}{d \cdot q} = \frac{cq}{m}$$

Observación 2.3. Si el común denominador m de dos fracciones

$$\frac{x}{m}, \frac{y}{m}$$

es positivo, entonces

$$\frac{x}{m} < \frac{y}{m} \iff x < y.$$

Problema 2.8. Compare cada uno de los siguientes pares de fracciones:

1. $\frac{15}{11}, \frac{28}{37}$
2. $-\frac{35}{36}, \frac{1}{6}$
3. $\frac{3}{10}, -\frac{23}{33}$
4. $-\frac{17}{31}, -\frac{12}{7}$

Operaciones

Algoritmo 2.3 (Suma de fracciones). *Para sumar dos fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$:*

1. Convierta a común denominador, de manera que

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{m}, \frac{c}{d} = \frac{y}{m};$$

2. *sume ambos numeradores*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{x}{m} + \frac{y}{m} = \frac{x+y}{m};$$

3. *simplifique.*

Problema 2.9.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} =$$

Observación 2.4. Cualquier suma se puede reescribir como una resta:

$$x + y = x - (-y),$$

y viceversa

$$x - y = x + (-y).$$

Por esta razón, en álgebra, no es muy útil distinguir entre estas dos operaciones. Utilizaremos el mismo algoritmo, para encontrar la resta de dos fracciones.

Problema 2.10.

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} =$$

Problema 2.11. Realice las siguientes y escriba el resultado en su forma irreducible:

1. $\frac{5}{3} + \frac{5}{9}$

2. $\frac{7}{3} + \frac{4}{7}$

3. $\frac{5}{4} + \frac{3}{2}$

4. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

5. $\frac{3}{5} - \frac{4}{9}$

La multiplicación entre dos números racionales se define como

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \quad (2.3)$$

Problema 2.12. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$

Observación 2.5. En ocasiones, la división de fracciones se conoce como regla del “sandwich”:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

La división entre dos números racionales se define como

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}. \quad (2.4)$$

siempre y cuando $c \neq 0$.

Problema 2.13. $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12}.$

2.3 Razones y proporciones

Proporciones entre números enteros La razón de dos números (enteros o racionales) a, b se escribe $a : b$ y se representa por la fracción $\frac{a}{b}$.

Problema 2.14. La razón de 4 a 6 se escribe $4 : 6$ y se representa por la fracción $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Proporciones entre fracciones

Problema 2.15. La razón de $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{5}$ se escribe

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$$

y se representa por la fracción

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{6}.$$

Diremos que dos razones $a : b$ y $c : d$ son equivalente si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

En ese caso, escribimos $a : b \sim c : d$.

Problema 2.16. ¿Cuál es el precio unitario de cada artículo?

- Una bote con 3 litros de aceite cuesta \$54.
- Una caja de cereales con 700 gramos cuesta \$63.

Problema 2.17. Expresa las siguientes razones por medio de una fracción simplificada

1. $96 : 128$

2. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$

Problema 2.18. Un segmento de 30 pulgadas se divide en dos partes cuyas longitudes están en razón de $2 : 3$. Encuentre las longitudes de ambos segmentos.

Problema 2.19. Las edades actuales de dos hermanos son 5 y 8 años respectivamente. ¿Al cabo de cuantos años, sus edades estarán en razón $3 : 4$?

Problema 2.20. Divida 253 en cuatro partes propocionales $2 : 5 : 7 : 9$.

Razones inversas

Cuando tratamos de conservar una proporción $a : b$, hablamos de una *razón directa*, y podemos representarla por una equivalencia de fracciones:

$$a : b \sim c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Por ejemplo, en una recete de hotcakes, tenemos una razón $1 : \frac{3}{4}$ entre tazas de harina y tazas de leche.

Para mantener la receta, podemos multiplicar las cantidades, pero manteniendo la proporción.

Por ejemplo, podemos ocupar 4 tazas de harina para 3 tazas de leche, porque $1 : \frac{3}{4} \sim 4 : 3$.

En cambio, en ocasiones lo que buscamos es mantener una cantidad total, y no proporción. Generalmente, es una cantidad de trabajo.

Por ejemplo, considere el trabajo de pintar una pared de dimensiones fijas. Supongamos que una persona puede pintarla en 8 horas; pero suponiendo que contratamos un pintor más con una experiencia similar,

1. ¿cuantas horas se requerirán para terminar el trabajo?
2. ¿Y si contratáramos 4 pintores?
3. ¿Y si fueran 8?

En el ejemplo anterior, la pared requiere 8 horas-trabajador; esta es la cantidad que debemos conservar, aunque no es permitido variar los trabajadores o las horas de trabajo por trabajador.

En este caso, hablamos de una *razón inversa*.

Problema 2.21. Sabiendo que 8 personas tardan 12 días en poner a punto 16 maquinas, encuentre el número de días que emplearán 16 personas en poner a punto 8 máquinas.

Problema 2.22. Sabiendo que 8 personas tardan 12 días en poner a punto 16 maquinas, encuentre el número de días que emplearán 15 personas en poner a punto 50 máquinas.

Ejemplos

Problema 2.23. ¿Cuál es la mejor compra entre 7 latas de sopas que cuestan \$22.50 y 3 latas del mismo producto, que cuestan \$9.50.

Problema 2.24. ¿Cuál es la mejor compra entre un paquete de 3 onzas de queso crema que cuesta \$4.30 y otro paquete de 8 onzas del mismo producto que cuesta \$8.70?

Problema 2.25. Si dos hombres pueden transportar 6 acres de tierra en 4 horas, ¿cuántos hombres se necesitan para transportar 18 acres en 8 horas?

Problema 2.26. Resuelva la proporción

$$\frac{x}{63} = \frac{5}{9}$$

Problema 2.27. Resuelva la siguiente ecuación usando productos cruzados

$$\frac{x-2}{5} = \frac{x+1}{3}$$

Problema 2.28. Enfermeras usan proporciones para determinar la cantidad de medicina a administrar, cuando la dosis es medida en miligramos (mg), pero la medicina es empacada en una forma diluida en milímetros (mL).

Por ejemplo, para encontrar los mililitros de fluido necesario para administrar 300mg de un medicamento de una medicina que viene empacada como 120mg en 2mL de un fluido, se plantean la proporción

$$\frac{120\text{mg}}{2\text{mL}} = \frac{300\text{mg}}{x \text{ mL}}$$

donde x representa la cantidad a administrar en mililitros.

Resuelva la proporción anterior.

2.4 Teorema Fundamental de la Aritmética

Un número primo p es aquel que tiene exactamente cuatro divisores

$$\pm 1, \pm p.$$

Problema 2.29. Encuentre los números primos (positivos) entre 2 y 100.

Los números enteros siempre se pueden escribir como una multiplicación de números primos:

- $36 = 2^2 3^2$
- $1400 = 2^3 5^2 7$
- $187 = 11 \times 7$

Teorema Fundamental de la Aritmética

Teorema 2.1. *Todo número entero a mayor que 1 se puede expresar en la forma*

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L} \quad (\text{FP})$$

donde $p_i, i = 1, \dots, L$ son números primos distintos y $n_i, i = 1, \dots, L$ son exponentes enteros positivos.

Observación 2.6. La expresión FP se conoce como *factorización prima* del entero a y es única excepto por el orden.

Encuentre la factorización prima de

- $14700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
- $1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

Propiedad 2.3. Si $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L}$ y $b = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_L^{m_L}$ son respectivas factorizaciones primas de los enteros a, b , entonces

$$\begin{aligned} \text{mcd}(a, b) &= p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_L^{r_L} \\ \text{mcm}(a, b) &= p_1^{R_1} p_2^{R_2} \cdots p_L^{R_L} \end{aligned}$$

donde $r_i = \min(n_i, m_i)$ y $R_i = \max(n_i, m_i)$.

Encuentre

- $\text{mcd}(14700, 1575) = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 525$
- $\text{mcm}(14700, 1575) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44100$

Propiedad 2.4. Si $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L}$ es la factorización prima de a , entonces a tiene

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_L + 1)$$

divisores positivos.

Algoritmo 2.4 (Como encontrar todos los divisores de un número entero). 1.

Factorice el número entero $n = p_1^{R_1} \cdots p_m^{R_m}$

2. Enliste cada posible m -tupla (r_1, \dots, r_m) con $0 \leq r_1 \leq R_1, \dots, 0 \leq r_m \leq R_m$

3. Enliste cada posible número entero de la forma

$$\pm p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m},$$

para cada elemento (r_1, \dots, r_m) de la lista anterior.

Cálculo de divisores

Problema 2.30. Encuentre todos los divisores positivos de 24.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, y 24.

Problema 2.31. Encuentre todos los divisores positivos de 72.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, y 72

Problema 2.32. Encuentre todos los divisores positivos de 600.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200, 300, y 600.

3 Teoría de gráficas

3.1 Matrices

Las matrices son arreglos rectangulares de número que nos ayudan a codificar información. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

puede ser útil para codificar los coeficientes del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y = b_2 \end{cases}$$

En general, una matriz tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad (\text{A})$$

Los subíndices de cada elemento $a_{i,j}$ denotan la posición del mismo: i es el número del *renglón* (contando de arriba a abajo), mientras que j es el número de la columna (contando de izquierda a derecha).

Podemos extraer renglones y columnas de la matrix (A): El i -ésimo renglón es

$$R_i = (a_{i,1} \quad \cdots \quad a_{i,n})$$

mientras que la j -ésima columna será

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{j,1} \\ \vdots \\ a_{j,m} \end{pmatrix}$$

Diremos que la matriz (A) tiene dimensión $m \times n$.

Si existe un conjunto de números F , tal que todos los elementos $a_{i,j}$ de la matriz pertenecen a dicho conjunto, diremos que la matriz tiene coeficientes en F .

Observación 3.1. Para que las operaciones entre matrices estén bien definidas, es necesario que la suma, resta y multiplicación entre elementos de F también estén bien definidas. Por esto generalmente F se elige como \mathbb{R} o \mathbb{Z} .

La colección de todas las matrices de dimensión $m \times n$ con coeficientes en F se denotará por

$$M_{m,n}(F).$$

Definición 3.1. Las matrices de dimensión $m \times 1$ se conocen como *vectores columna*, mientras que las de dimensión $1 \times n$ se conocen como *vectores renglón*.

La colección $M_{m,1}(F)$ de todos los vectores columna con coeficientes comúnmente se denota por F^m . Mientras que la colección $M_{1,n}(F)$ de todos los vectores renglón con coeficientes comúnmente se denota por F^{n*} .

Operaciones elementales

Por brevedad, la matriz (A) se denota por $A = [a_{i,j}]$.

En el caso de los vectores renglones y columnas, podemos omitir el subíndice fijo

$$R = [R_{1,j}] = [R_j], \quad C = [C_{i,1}] = [C_i].$$

Si $B = [b_{i,j}]$ es otra matriz de dimensión $m \times n$, la suma se define como

$$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}].$$

De manera similar, la resta se define como

$$A - B = [a_{i,j} - b_{i,j}].$$

Problema 3.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

Observe que para que la *suma y resta* tenga sentido, ambas matrices deben tener exactamente las *mismas dimensiones*.

Después de ver la facilidad para definir la suma y resta, uno se ve tentado a definir la multiplicación de la misma forma. Pero tal definición es poco útil en las aplicaciones.

Por esta razón, desarrollaremos el concepto de multiplicación, a fin de poder aplicar esta operación en la resolución de Ejemplos.

Multiplicación

Definición 3.2. Sean $R = [R_j]$ un vector renglón y $C = [C_i]$ un vector columna, ambos de longitud n .

El *producto renglón-columna* se define como

$$RC = \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & R_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n R_i C_i. \quad (\text{RC})$$

Problema 3.2. Considere

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calcule RC .

Problema 3.3. Reescriba la siguiente ecuación, utilizando el *producto renglón-columna*:

$$2x - 3y + z = 0.$$

Definición 3.3. Sea $A = [a_{i,j}] \in M_{m \times n}$ y $B = [b_{j,k}] \in M_{n \times l}$. Definimos su producto como

$$AB = \begin{pmatrix} R_i C_k \end{pmatrix} \quad (\text{AB})$$

donde R_i es el i -ésimo renglón de A y C_k es la k -ésima columna de B .

Observación 3.2. ■ Para que esta multiplicación tenga sentido, los renglones de A y las columnas de B deberán tener la misma longitud n .

- La matriz resultante tendrá dimensión $m \times l$.
- A menos que $m = l$, el producto BA podría no estar definido.
- Aun cuando BA estuviera bien definido, el producto de matrices no es *conmutativo*, es decir, generalmente tendremos que

$$AB \neq BA.$$

Problema 3.4. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3.5. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3.6. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3.7. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -30 \\ 45 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Problema 3.8. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Problema 3.9. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 19 \\ 53 \end{pmatrix}$$

Problema 3.10. Rescriba el siguiente sistema de ecuación en forma matricial y encuentre su solución:

$$\begin{cases} -x - 3y = 19 \\ -7x - y = 53 \end{cases}$$

3.2 Teoría general de grafos

En matemáticas, la *teoría de grafos* estudia estructuras matemáticas usadas para modelar relaciones por pares entre objetos.

Definición de grafo

Concepto de grafo Un *grafo* G consiste de:

- (a) Un conjunto V cuyos elementos son llamados *vértices*, puntos o nodos de G .
- (b) Un conjunto E de pares (no ordenados) de distintos vertices, a los que llamaremos *aristas* de G .

Denotaremos un grafo por $G(V, E)$ cuando querramos enfatizar los componentes del mismo.

Observación 3.3. Debido a una ambigüedad en la traducción del inglés al español, en ocasiones, a un grafo también se le conoce como *gráfica*, que se puede confundir con el concepto de teoría de conjuntos. En este material, a veces utilizaremos *gráfica*, pero debe entenderse como un grafo.

Multigrafos Consideremos la figura 3.1 (b). Las aristas e_4 y e_5 son llamadas *aristas múltiples* ya que conectan los mismos extremos, mientras que la arista e_6 es llamada *bucle* ya que conecta un vértice consigo mismo.

Tales diagramas son llamados *multigrafos*; la definición formal de grafo no admite aristas múltiples ni bucles.

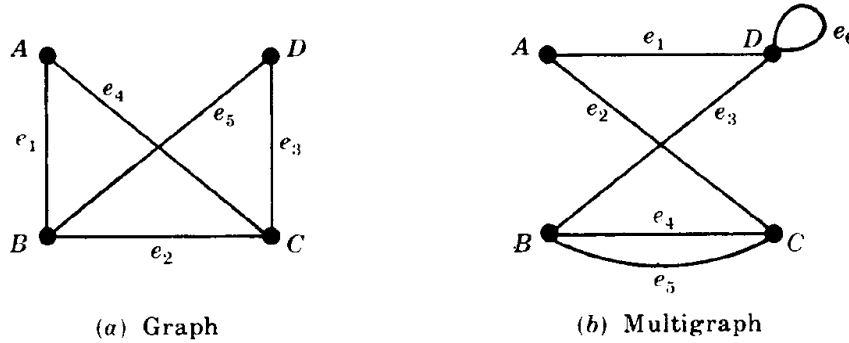


Figura 3.1: Grafos y multigrafos

Observación 3.4. Sin embargo, algunos textos utilizan “grafos” para referirse a lo que nosotros llamaremos multigrafos, mientras que ocupan “grafo simple” para lo que nosotros llamaremos grafos.

Grado de un vértice El *grado* de un vértice v en un grafo G , denotado por $\deg(v)$, es igual al número de aristas en G que contienen a v , es decir, que *inciden* en v .

Dado que cada arista incide en dos vértices diferentes, tenemos el siguiente resultado simple pero importante:

Teorema 3.1. *La suma de los grados de los vértices en un grafo G es el doble del número de aristas.*

Problema 3.11. En el grafo de la figura 3.1(a), tenemos que

$$\deg(A) = 2, \deg(B) = 3, \deg(C) = 3, \deg(D) = 2.$$

La suma de los grados es igual a 10, que es dos veces el número de aristas.

Definición 3.4. Diremos que un vértice es *par* o *impar* de acuerdo a la paridad de su grado.

En el ejemplo anterior, tanto A como D son vértices pares, mientras que B y C son impares.

Observación 3.5. Diremos que un vértice de grado cero está *aislado*.

Gráfos finitos y triviales Diremos que un grafo es *finito* si tiene un número finito de vértices y un número finito de aristas.

Observe que un número finito de vértices implica un número finito de aristas; pero no lo contrario no es necesariamente cierto.

Diremos que un grafo con un único vértice, sin aristas, es *trivial*.

Observación 3.6. A menos que se indique de otra manera, sólo trataremos con grafos finitos.

Subgrafos y grafos homeomorfos e isomorfos

Ahora, discutiremos relaciones de equivalencia entre grafos.

Subgrafos Consideremos un grafo $G(V, E)$. Diremos que otro grafo $H(V', E')$ es un *subgrafo* de G si los vértices y aristas de H están contenidos en los vértices y aristas de G , es decir,

$$V' \subset V, E' \subset E.$$

En particular:

- (a) Un subgrafo $H(V', E')$ de $G(V, E)$ es llamado subgrafo *inducido* por sus vértices V' si el conjunto de aristas E' contiene todas las aristas en G cuyo extremos pertenecen a los vértices en H .
- (b) Si v es un vértice en G , entonces $G - v$ es el subgrafo de G obtenido al borrar v de G y todas las aristas en G que inciden en v .
- (c) Si e es una arista en G , entonces $G - e$ es el subgrafo de G obtenido borrando la arista e en G .

Grafos isomorfos Dos grafos $G(V, E)$ y $G^*(V^*, E^*)$ son llamados *isomorfos* si existe una función biyectiva $f : V \rightarrow V^*$ tal que: $\{u, v\}$ es una arista de G si y solo si $\{f(u), f(v)\}$ es una arista de G^* .

La idea es que estos grafos son equivalentes, aún cuando sus representaciones pueden lucir muy diferentes.

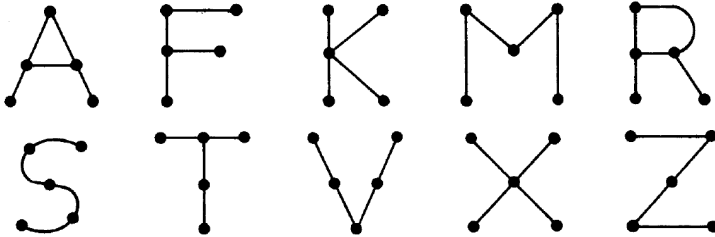


Figura 3.2: Grafos isomorfos.

Grafos homeomorfos Dado un grafo G , podemos obtener un nuevo grafo dividiendo una arista de G con vértices adicionales.

Dos grafos G y G^* son llamados *homeomorfos* si pueden obtenerse de gráficas isomorfas a través de este método.

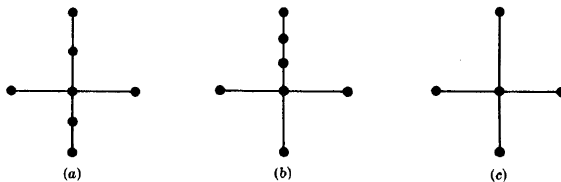


Figura 3.3: Grafos homomorfos

Los grafos (a) y (b) son homeomorfos, ya que se pueden obtener añadiendo vértices al grafo (c).

Caminos y conexidad

Un *camino* en un (multi)grafo G consiste en una sucesión alternante de vértices y arista de la forma

$$v_0, e_1, v_1, \dots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$$

donde cada arista e_i contiene los vértices v_{i-1} y v_i .

Observación 3.7. Observe que en grafo, podemos simplificar la notación para un camino, indicando sólo los vértices que recorre:

$$v_0, v_1, \dots, v_n.$$

Diremos que el camino es *cerrado* si $v_n = v_0$. En otro caso, diremos que el camino conecta v_0 con v_n .

Un *camino simple* es aquel en el cual todos los vértices son distintos. Mientras que un camino en el que todas las aristas son distintas se llama *paseo*.

La *longitud* de un camino es igual a número de aristas en la sucesión que lo define.

Un *ciclo* es un camino cerrado de *longitud* al menos 3, en el que todos los vértices son distintos, excepto el inicial v_0 y el final v_n .

Un ciclo de longitud k es llamado k -*ciclo*.

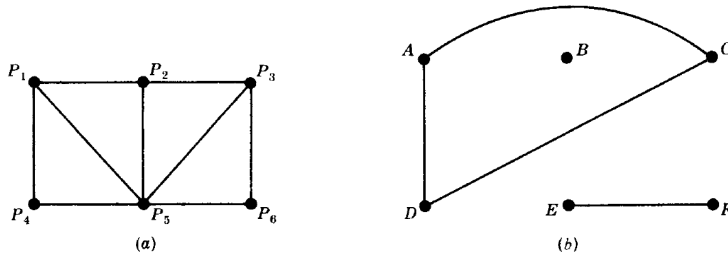


Figura 3.4: Conexidad en grafos

Problema 3.12. Consideremos el grafo 3.4(a). Considere las siguientes sucesiones

$$\alpha = (P_4, P_1, P_2, P_5, P_1, P_2, P_3, P_6),$$

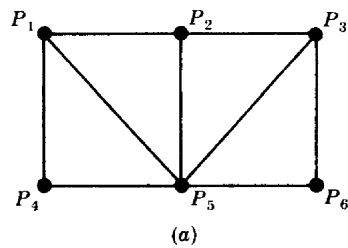
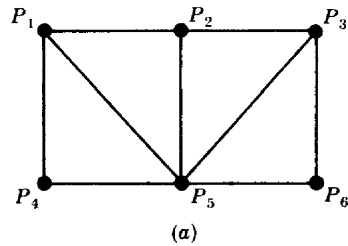
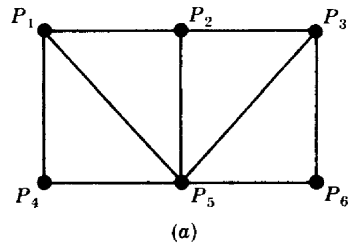
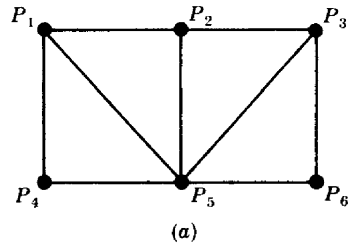
$$\beta = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_6)$$

$$\gamma = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_3, P_5, P_6)$$

$$\delta = (P_4, P_1, P_5, P_3, P_6).$$

α es un camino de P_4 a P_6 , pero no es un paseo.

β no es un camino, ya que no existe alguna arista $\{P_2, P_6\}$.



γ es un paseo, pero no es un camino simple.

δ es un camino simple de P_4 a P_6 , pero no es el camino más corto, es decir, con el menor número de aristas. ¿Cuál es el camino más corto?

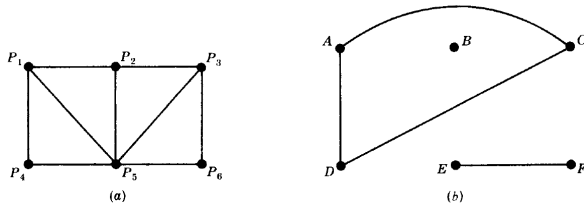
Eliminando aristas innecesarias, no es difícil ver que cualquier camino de u a v puede ser reemplazado por un camino simple.

Formalmente:

Teorema 3.2. *Existe un camino del vértice u a v si y solo si existe un camino simple de u a v .*

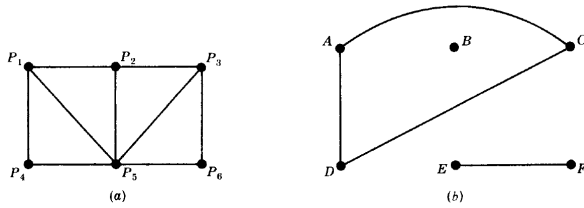
Conexidad y componentes conexas Un grafo G es conexo si existe un camino entre cualesquiera dos vértices. Por ejemplo, el grafo 3.4(a)

es conexo, pero no así el grafo 3.4(b).



Consideremos un grafo G . Un subgrafo conexo H de G es llamado *componente conexa* de G si H no está contenido de manera propia en cualquier otro grafo conexo de G .

Por ejemplo, el grafo 3.4(b) tiene tres componentes conexas.



Observación 3.8. Formalmente, permitiendo que un vértice u esté conectado consigo mismo, la relación

u está conectado con v

es una relación de equivalencia en el conjunto de vértices del grafo G , y las clases de equivalencia de esta relación son las componentes conexas de G .

Distancia y diámetro Consideremos un grafo conexo G . La distancia entre dos vértices u y v en G , denotada por $d(u, v)$, es la longitud del camino más corto entre u y v . El diámetro de G , escrito $diam(G)$, es la distancia máxima entre cualesquiera dos puntos en G .

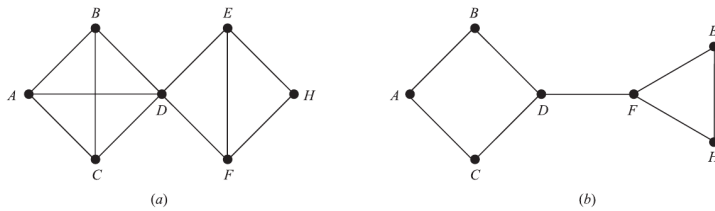


Figura 3.5: Distancia y diámetro

Por ejemplo, en el grafo 3.5(a), el diámetro es 3, mientras que en el (b), el diámetro es 4.

Puntos de corte y puentes Sea G un grafo conexo. Un vértice v en G es llamado *punto de corte* si $G - v$ es desconexo. Una arista e en G es llamada *punte* si $G - e$ es desconexo.

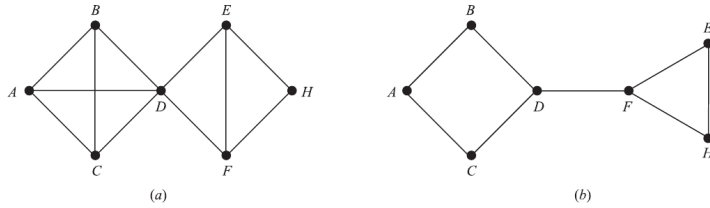


Figura 3.6: Puntos de corte y puentes

Grafos transitables y eulerianos

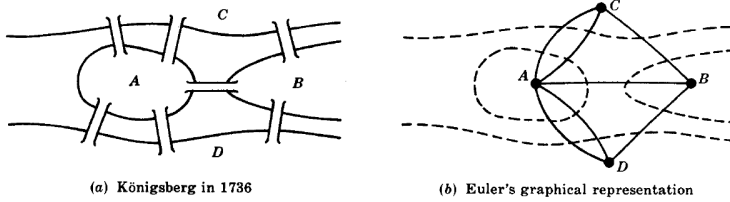


Figura 3.7: Puentes de Königsberg y su representación

Un multigrafo es llamado *transitable* si existe un *paseo* (un camino dónde todos las aristas son diferentes), que incluye *todos los vértices y todas las aristas*.

Tal paseo será llamado *paseo transitable*.

Observación 3.9. De manera equivalente, un paseo transitable es un camino en el que todos los vértices se transitan *al menos* una vez, pero las aristas *exactamente* una vez.

Propiedad 3.1. *Cualquier grafo conexo y finito con exactamente dos vértices impares es transitable. Un paseo transitable puede comenzar en alguno de los vértices impares y terminar en el otro vértice impar.*

Un grafo G es llamado *grafo Euleriano* si existe un *paseo transitable cerrado*.

A tal paseo le llamaremos *paseo Euleriano*.

Teorema 3.3 (Euler). *Un grafo conexo y finito es Euleriano si y solo si cada vértice tiene grado par.*

Grafos hamiltonianos En la definición de grafos Eulerianos se enfatizó pasar por todas las aristas.

Ahora, nos enfocaremos en visitar todos los vértices.

Un *circuito Hamiltoniano* es un grafo G es un camino cerrado que visita cada vértice en G *exactamente* una vez.

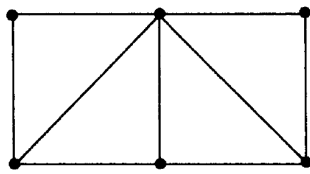
Si G admite un circuito Hamiltoniano, entonces G es llamado un *grafo Hamiltoniano*.

Observación 3.10. En la definición de circuito Hamiltoniano, cuando decimos que el camino *visita* cada vértice exactamente una vez signi-

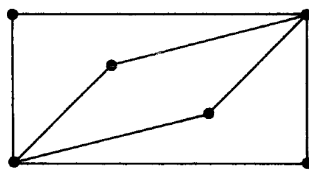
fica que, aunque el vértice inicial tiene que ser el mismo que el final, todos los demás vértices intermedios deben ser distintos.

Observación 3.11. Un **paseo Euleriano** atraviesa **cada una de las aristas** exactamente una vez, pero los vértices se pueden repetir, mientras que un **circuito Hamiltoniano** visita **cada uno de los vértices** exactamente una vez, pero las aristas pueden repetirse.

Teorema 3.4. Sea G un grafo conexo con n vértices. Entonces G es Hamiltoniano si $n \geq 3$ y $n \leq \deg(v)$ para cada vértice v en G .



(a) Hamiltonian and non-Eulerian



(b) Eulerian and non-Hamiltonian

Figura 3.8: Circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

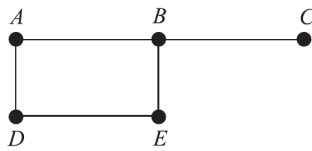
Matriz de adyacencia

Supongamos que G es un grafo con m vértices y que estos han sido ordenados:

$$v_1, v_2, \dots, v_m.$$

Entonces, la *matriz de adyacencia* $A = (a_{i,j})$ del grafo G es la matriz de dimensión $m \times m$ definida por:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



(a)

$$\begin{array}{c} A \quad B \quad C \quad D \quad E \\ A \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ D \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ E \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b)

Figura 3.9: Matriz de adyacencia

3.3 Digrafos

Los *grafos dirigidos* o *digrafos* son grafos en los que las aristas tienen una dirección.

Grafos dirigidos

Un grafo dirigido $G = G(V, E)$ consiste de:

1. Un conjunto $V = V(G)$ cuyos elementos son llamados *vértices*;
2. un conjunto $E = E(G)$ de *pares ordenados* ordenados de vértices llamados *arcos* o *aristas dirigidas*.

Supongamos que $e = (u, v)$ es un arco en el digrafo G . Entonces, la siguiente terminología es usada:

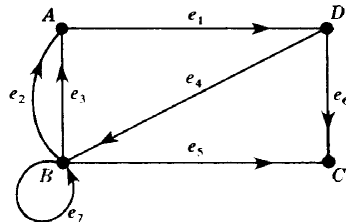
- e comienza en u y termina en v ;
- u es el origen o punto inicial de e , mientras que v es el destino o punto final de e .
- v es un sucesor de u ;
- u es adyacente a v y v es adyacente desde u .

Si $u = v$, e es llamado un *bucle*.

Si las aristas o los vértices de un digrafo están etiquetados con algún tipo de dato, diremos que es un *digrafo etiquetado*.

De manera similar a un grafo, un digrafo será finito si el conjunto de vértices y el de aristas es finito.

Problema 3.13. Consideremos el siguiente digrafo. Las aristas e_2 y



e_3 son llamados *paralelos*, ya que ambos comienzan en B y terminan en A . La arista e_7 es un *bucle*.

Matriz de adyacencia

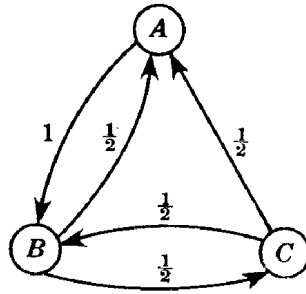
Ahora, sólo consideraremos *digrafos simples* $G(V, E)$, es decir, sin aristas paralelas. Entonces E es simplemente una relación en V .

De manera inversa, si R es una relación en V , entonces $G(V, R)$ es un digrafo simple.

En unidades anteriores, ya hemos construido digrafos asociados a relaciones de orden parcial, llamados diagramas de Hasse.

Problema 3.14.

Figura 3.10: Proceso estocástico



Supongamos que G es un digrafo simple con m vértices, y supongamos que los vértices de G han sido ordenados y son llamados v_1, v_2, \dots, v_m .

Entonces la *matriz de adyacencia* $A = (a_{i,j})$ de G es la una matriz de dimensión $m \times m$ definida de la siguiente manera

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \exists e \in E : e = (v_i, v_j) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observación 3.12. Las matrices de adyacencia de un mismo grafo dependen del orden en que se enumeren los vértices. Sin embargo, dos matrices de adyacencia de un mismo grafo están relacionadas por operaciones elementales: cambiar el orden de columnas y renglones.

Problema 3.15. Sea G el siguiente digrafo

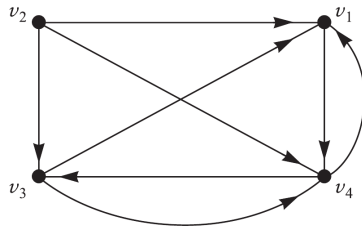


Figura 3.11: Construya su matriz de adyacencia del digrafo anterior.

La matriz identidad $I_m = (I_{i,j})$ de dimensión $m \times m$ se define como

$$I_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

es decir, es matriz cuadrangular con 1's en la *diagonal principal*, y ceros en cualquier otra entrada.

Problema 3.16.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La propiedad principal de una matriz identidad I_m es que es neutra respecto a la multiplicación de matrices, es decir, para cualquier otra matriz $A \in M_n$:

$$AI_n = I_n A = A.$$

La potencia n -ésima de una matriz $A \in M_n$ se define de manera recursiva como

$$A^n = \begin{cases} I_n & n = 0 \\ AA^{n-1} & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

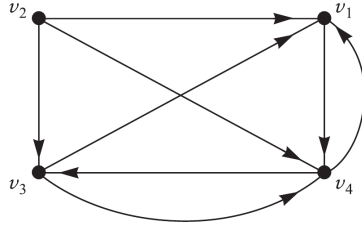
Es decir,

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = AA, \dots$$

Definamos $a_k(i, j)$ como la entrada en la posición i, j de A^k .

Propiedad 3.2. Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G . Entonces $a_k(i, j)$ es igual al número de caminos de longitud k que van de v_i a v_j .

Ejemplo Consideremos nuevamente el grafo



Recordemos que su matriz de adyacencia es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{AD})$$

Entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observe que $a_2(4, 1) = 1$, de manera que existe un solo camino de longitud 2 de v_4 a v_1 . De manera similar, como $a_3(2, 3) = 2$, entonces existen dos caminos de longitud 3 de v_2 a v_3 .

Observación 3.13. Si definimos

$$B_r = \sum_{i=1}^r A^i,$$

entonces la entrada i, j de esta matriz nos indicará el número de caminos de longitud a lo más r de v_i a v_j .

En nuestro ejemplo, considerando A dado por (AD), tenemos que

$$B_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 7 & 11 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

¿Existe alguna manera de llegar al vertice v_2 desde el vértice v_1 , sin importar la longitud del camino?

Matriz de accesibilidad

Sea $G = G(V, E)$ un grafo simple dirigido con m vértices v_1, \dots, v_m . La *matriz de accesibilidad* de G es la matriz m -cuadrangular $P = (p_{ij})$ definida de la siguiente manera:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{existe un camino de } v_i \text{ a } v_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Propiedad 3.3. Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G con m vértices. Entonces la matriz de accesibilidad y

$$B_m = \sum_{i=1}^m A^i \quad (3.2)$$

tienen exactamente las mismas entradas no nulas.

Definición 3.5. Un digrafo es *fuertemente conexo* si para cualquier par de vértices u, v existe al menos un camino de u a v y otro de v a u .

Propiedad 3.4. Sea $A \in M_m$ la matriz de adyacencia de un grafo G . Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. G es fuertemente conexo;
2. la matriz de accesibilidad P no tiene entradas nulas;
3. la matriz B_m , dada por (3.2), no tiene entradas nulas.

Problema 3.17. Para encontrar la matriz de accesibilidad asociada a la matriz de adyacencia A , dada por (AD), basta sustituir las entradas no nulas en la matriz B_4 , dada por (3.1), por 1's :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Bibliografía

Cárdenas, H. (1973). *Álgebra superior*.