Matemáticas Aplicadas

Juliho Castillo Colmenares

Índice general

Capítulo 1

Matemáticas Discretas

1. Lógica y Cálculo Proposicional

Muchos algoritmos y demostraciones usan expresiones lógicas tales como `si p entonces q`. Entonces es necesario conocer los casos en los cuales esas expresiones son `ciertas` o `falsas`. Discutiremos esto en esta unidad.

También investigamos el valor de verdad de enunciados cuantificados, que son aquellos que usan los cuantificadores lógicos `para todo...` y `existe...`

1.1. Proposiciones y Declaraciones Compuestas. Una proposición es un enunciado declarativo que puede ser cierto o falso, pero no ambos.

Ejemplo 1.1. ¿Cuál de los siguientes enunciados es una proposición?

1. El hielo flota en el agua.
2. China está en Europa.
3. $2 + 2 = 4$
4. $2 + 2 = 5$
5. ¿A donde vas?
6. Haz tu tarea.

1.2. Proposiciones compuestas. Muchas proposiciones están `compuestas` de proposiciones más simples, llamadas *subproposiciones*, por medio de *conectores lógicos*. Una proposición se dice que es *primitiva* si no puede descomponerse en proposiciones más simples.

Por ejemplo, las siguientes proposiciones son compuestas

- "Las rosas son rojas y las violetas son azules"
- "Juan es inteligente y estudía hasta muy noche"

La propiedad fundamental de una proposición compuesta es que su valor de verdad está completamente deteminado por los valores de verdad de sus subproposiciones y la manera en la cual están conectadas para formar la proposición compuesta.

1.3. Operaciones Lógicas Básicas. En esta sección discutiremos las tres operaciones lógical básicas: conjunción , disjunción y la negación.

1.4. Conjunción $p \wedge q$. Cualesquiera dos proposiciones p, q pueden ser combinadas por la palabra "y" para formar una proposición compuesta llamada *conjunción* que se escribe $p \wedge q$.

Definición 1.1. Si tanto p como q son ciertas, entonces $p \wedge q$ es cierta; en otro caso $p \wedge q$ es falsa.

Observación 1.1. Para entender mejor como se conectan los valores de verdad, generalmente se utilizan *tablas de verdad.*

Por brevedad 1 representará el valor `cierto`, mientras que 0 representará `falso`

Tabla de Verdad 1 (Conjunción).

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

En este curso, usaremos el *sistema algebráico de computo* `SageMath`, el cuál está escrito con base en el lenguaje de programación `Python` e incorpora diversos paquetes de `OpenSource`.

Puede acceder a este sistema, a través de https://cloud.sagemath.com/

Construimos la tabla de verdad de la conjunción en el siguiente scritp https://goo.gl/hEF5os

Ejemplo 1.2. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es cierta?

1. El hielo flota y $2 + 2 = 4$
2. El hielo flota y $2 + 2 = 5$
3. China está en Europa y $2 + 2 = 4$
4. China está en Europa y $2 + 2 = 5$

1.5. Disjunción $p \vee q$**.** Cualesquiera dos proposiciones p, q pueden ser combinadas por la palabra “o” para formar una proposición compuesta llamada *disjunción* que se escribe $p \vee q$.

Definición 1.2. Si tanto p como q son falsas, entonces $p \vee q$ es falsa; en otro caso $p \vee q$ es verdadera.

Tabla de Verdad 2 (Disjunción).

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Construimos la tabla de verdad de la disjunción en el siguiente scritp https://goo.gl/5kXzNI

Observación 1.2. Algunas veces `‘‘p o q’’` se entiende en el sentido exclusivo: Puede ocurrir `p` o `q`, *pero no ambos,* que es diferente a la definición anterior. Sin embargo, existe un conector llamado de hecho `o exclusivo,` que cumple esta definición y consideraremos más adelante.

1.6. Negación $\neg p$. Dada cualquier proposición p, otra proposición llamada *negación* de p puede ser formada escribien *“No es cierto que...”* o *“Es falso que...”* antes de `p`.

De manera más sencilla, decimos `no` p y escribimos $\neg p$.

Definición 1.3 (Negación). Si p es cierta, entonces $\neg p$ es falsa; pero si p es falsa, $\neg p$ es cierta.

Tabla de Verdad 3 (Negación).

p	$\neg p$
1	0
0	1

Construimos la tabla de verdad de la disjunción en el siguiente scritp https://goo.gl/sgCfkC

1.7. Proposiciones y Tablas de Verdad. Sea $P(p, q, ...)$ una expresión construida con variables lógicas $p, q, ...$, que toman valores de `verdadero ‘‘V’’` o `falso ‘‘F’’`, a través de conectores lógicos como $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y otros que discutiremos más adelante.

Tales expresiones $P(p, q, ...)$ son llamadas *proposiciones.*

La propiedad principal de una proposición $P(p, q, ...)$ es que sus valores de verdad sólo dependen del valor de sus varibles.

Una manera simple y concisa de mostrar esta relación es a través de una *tabla de verdad.*

Ejemplo 1.3. Contruir la tabla de verdad de la proposición

$$\neg\left(p \wedge \neg q\right).$$

Construimos la tabla de verdad de la proposición anterior con el siguiente script https://goo.gl/V2Axzi

Tabla de Verdad 4 ($\neg\left(p \wedge \neg q\right)$).

p	q	not q	p and not q	not(p and not q)
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

Observación 1.3. Para evitar el uso excesivo de parentesis, algunas veces adoptamos una jerarquía para los conectores lógicos.

De manera especifica $\neg$ tiene prioridad sobre $\wedge$, que a su vez tiene prioridad sobre $\vee$.

Por ejemplo,

$$\neg p \wedge q$$

significa

$$(\neg p) \wedge q$$

y no

$$\neg(p \wedge q).$$

1.8. Método alternativo de construir una tabla de verdad.

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	q)
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

Ejemplo 1.4. Construya las tablas de verdad de las siguientes proposiciones

1. $p \vee \neg p$
2. $p \wedge \neg p$
3. $\neg\left(p \vee q\right)$
4. $\neg p \wedge \neg q$

Idempotent laws:	(1a) $p \vee p \equiv p$	(1b) $p \wedge p \equiv p$
Associative laws:	(2a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	(2b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Commutative laws:	(3a) $p \vee q \equiv q \vee p$	(3b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Distributive laws:	(4a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(4b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Identity laws:	(5a) $p \vee F \equiv p$	(5b) $p \wedge T \equiv p$
	(6a) $p \vee T \equiv T$	(6b) $p \wedge F \equiv F$
Involution law:	(7) $\neg\neg p \equiv p$	
Complement laws:	(8a) $p \vee \neg p \equiv T$	(8b) $p \wedge \neg p \equiv T$
	(9a) $\neg T \equiv F$	(9b) $\neg F \equiv T$
DeMorgan's laws:	(10a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	(10b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

FIGURA 1. Leyes para el álgebra de proposiciones

5. $\neg\,(p \wedge q)$
6. $\neg p \vee \neg q$

1.9. Tautologías y Contradicciones. Algunas proposiciones $P(p, q, ...)$ son siempre ciertas, no importa los valores de verdad de las variables $p, q, ...$

Tales proposiciones se conocen como *tautologías.*

De manera similar, algunas proposiciones $P(p, q, ...)$ son siempre falsas, no importa los valores de verdad de las variables $p, q, ...$

Tales proposiciones se conocen como *contradicciones.*

EJEMPLO 1.5. Construya las tablas de verdad de $p \wedge \neg p$ y $p \vee \neg p$.

1.10. Equivalencias Lógicas. Diremos que dos proposiciones $P(p, q, ...)$ y $Q(p, q, ...)$ son *lógicamente equivalentes* si tienen tablas de verdad identidas.

En tal caso, escribimos

$$P(p, q, ..) \equiv Q(p, q, ...)$$

EJEMPLO 1.6. Demostremos que

$$\neg\,(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

EJEMPLO 1.7. Reescriba la frase "No es cierto que: las rosas son rojas y las violetas son azules", usando la equivalencia anterior.

Por su utilidad, algunas equivalencias lógias con llamadas *leyes para el álgebra de proposiciones.*

A continuación, enunciaremos algunas, pero es necesario verificar su validez a través de tablas de verdad.

1.11. Sentencias condicionales y bicondicionales. Muchas sentencias, particularmente en matemáticas, son de la forma `‘‘si` p `entonces` q`’’`. Tales sentencias son llamdas *condicionales* y son denotadas por

$$p \to q.$$

El condicional $p \to q$ es frecuentemente leído como *"p implica q"* o *"p sólo si q".*

Otra sentencia común es de la forma *"p si y solo si q".* Tales sentencias son llamadas *bicondicionales* y se denota por

$$p \iff q.$$

Tabla de Verdad 5 (Condicional).

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabla de Verdad 6 (Bicondicional).

p	q	$p \longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ejemplo 1.8. Demuestre que

$$p \to q \equiv \neg p \vee q.$$

Ejemplo 1.9. Determine cuales de las siguientes sentencias son tautologías, construyendo las correspondientes tablas de verdad.

1. $\neg (p \vee \neg q) \to \neg p$
2. $p \to (q \to r)$
3. $(p \to q) \to r$
4. $(p \to q) \to (q \to p)$
5. $(p \wedge (p \to q)) \to q$
6. $(p \wedge q) \to p$
7. $q \to (\neg p \vee \neg q)$
8. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

1.12. Argumentos. Un *argumento* es una afirmación de que un conjunto dado de proposiciones

$$P_1, P_2, ..., P_n,$$

llamadas *premisas*, tiene como consecuencia otra proposicion Q, llamada *conclusión.*

En otras palabras, es una sentencia de la forma

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \to Q$$

Tal argumento se denota por

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q.$$

La noción de *"argumento lógico"* o *"argumento válido"* se formaliza de la manera siguiente:

Definición 1.4. Un argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ se dice que es *válido* si la proposición

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \to Q$$

es una tautología.

Si un argumento no es *válido,* diremos que es una *falacia.*

Ejemplo 1.10.
1. Demuestre que $p, p \to q \vdash q$ es un argumento válido.
2. Demuestre que $p \to q, q \vdash p$ es una falacia.
3. Demuestre que $p \to q, \neg q \vdash \neg p$ es un argumento válido.

Ejemplo 1.11. Un principio fundamental del razonamiento lógico nos dice que:

Si p implica q y q implica r, entonces p implica r.

p	q	r	$[(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$r)]$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
Step			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

Figura 2.

En otras palabras, el siguiente argumento es válido

$$p \rightarrow, q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r.$$

Ejemplo 1.12.

Si sube el dólar, sube la gasolina.
Si sube la gasolina, entonces hay inflación.
___
$\therefore$ Si sube el dólar, entonces hay inflación.

1.13. Funciones proposicionales y Cuantificadores. Una *función proposicional* (o *sentencia abierta* o *condición*) definida en un conjunto A es una expresión $p(x)$ que tiene la propiedad de que $p(a)$ es cierta o falsa para cada $a \in A$.

El conjunto A se conoce como dominio de $p(x)$, y el subconjunto de todos los elementos para los cuales $p(x)$ es cierto se conoce como el *conjunto de verdad* T_p de $p(x)$:

$$T_p = \{x \mid x \in A, p(x) = 1\},$$

o simplemente

$$T_p = \{x \mid p(x)\}.$$

Ejemplo 1.13. Encuentre el conjunto de verdad para cada función en el conjunto $\mathbb{N}$ de los enteros positivos:

1. $p(x) : x + 2 > 7$
2. $p(x) : x + 5 < 3$
3. $p(x) : x + 5 > 1$

1.14. Cuantificador universal. Sea $p(x)$ una función proposicional definido en un conjunto A. La expresión

$$\forall x \in A : p(x) \tag{1}$$

se lee como `‘‘para todo` $x \in A$, $p(x)$ `es verdadero.’’`

El símbolo $\forall$ (`‘‘para todo’’`) se llama cuantificador universal.

Mientras que $p(x)$ es una sentencia abierta (su valor de verdad depende de cada $x \in A$), la afirmación

$$\forall x \in A : p(x)$$

es verdadera si y solo si $p(x)$ se cumple para todo $x \in A$.

Por otro lado, si existe algún $x \in A$ tal que $p(x)$ es falso, entonces

$$\forall x \in A : p(x)$$

es falso.

Ejemplo 1.14. Verifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : n + 4 > 3$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n + 2 > 8$.

1.15. Cuantificador existencial. Sea $p(x)$ una función proposicional definido en un conjunto A. La expresión

$$\exists x \in A : p(x) \tag{2}$$

se lee como `‘‘existe` $x \in A$, `tal que` $p(x)$ `es verdadero.’’`

El símbolo $\exists$ (`‘‘existe...’’`) se llama cuantificador existencial.

Mientras que $p(x)$ es una sentencia abierta (su valor de verdad depende de cada $x \in A$), la afirmación

$$\exists x \in A : p(x)$$

es verdadera si y solo si $p(x)$ se cumple algún $x \in A$.

Por otro lado, si para todo $x \in A$, $p(x)$ es falso, entonces

$$\exists x \in A : p(x)$$

es falso.

Verifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

1. $\exists n \in \mathbb{N} : n + 4 < 7$;
2. $\exists n \in \mathbb{N} : n + 6 < 4$.

1.16. Negación de Sentencias Cuantificadas. Considere la afirmación:

Todos los estudiantes de ingeniería saben programar.

¿Cómo podemos negar esta afirmación?

Al menos un estudiante de ingeniería no sabe programar.

De manera simbólica, si M de ntoa el conjunto de estudiantes de ingeniería, la negación anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\neg\left(\forall x \in M : \texttt{x sabe programar}\right) \\ &\equiv \exists x \in M : \texttt{x no sabe programar.} \end{aligned}$$

Si en el ejercicio anterior definimos

$$p(x) : \texttt{x sabe programar},$$

entonces podemos reescribir la equivalencia anterior como

$$\begin{aligned} &\neg\left(\forall x \in M : p(x)\right) \\ &\equiv \exists x \in M : \neg p(x). \end{aligned}$$

De manera similar

No hay estudiante de ingeniería que sepa programar

se puede reescribir como

Cada uno de los estudiantes de ingeniería no saben programar.

De manera simbólica, podemos reescribir

$$\begin{aligned} &\neg\left(\exists x \in M : p(x)\right) \\ &\equiv \forall x \in M : \neg p(x). \end{aligned}$$

Teorema 1.1 (DeMorgan).

$$\neg\left(\forall x \in M : p(x)\right) \equiv \exists x \in M : \neg p(x) \tag{3}$$

$$\neg\left(\exists x \in M : p(x)\right) \equiv \forall x \in M : \neg p(x). \tag{4}$$

Ejemplo 1.15. La negación de la siguiente afirmación

Para todo entero positivo n, tenemos que $n + 2 > 8$

es

Existe un entero positivo n tal que $n + 2 \leq 8$.

Ejemplo 1.16. La negación de la siguiente afirmación

Existe una persona viva con 150 años o más.

es

Toda persona viva tiene menos de 150 años.

Observación 1.4. Para negar una afirmación del tipo

$$\forall x \in A : p(x)$$

sólo necesitamos encontrar un elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x)$ sea *falso.*
A un elemento x_0 así se le conoce como *contraejemeplo.*

Ejemplo 1.17. (a) Un contraejemplo para $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \neq 0$ es $x = 0$.
(b) Un contraejemplo para $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$ es $x = \frac{1}{2}$.
(c) Sin embargo, $\forall x \in \mathbb{N} :: x^2 \leq x$ es siempre cierto.

1.17. Ejemplos Resueltos.

1.18. Proposiones y Tablas de Verdad.

Ejemplo 1.18. Sea p : `‘‘Hace frío’’` y q : `‘‘Está lloviendo’’.` Proponga un enunciado verbal simple que describa cada una de las siguientes proposiciones:

1. $\neg p$;
2. $p \wedge q$;
3. $p \vee q$;
4. $q \vee \neg p$.

Ejemplo 1.19. Encuentre la tabla de verdad de $\neg p \wedge q$.

Ejemplo 1.20. Demuestre que la propisición

$$p \vee \neg\left(p \wedge q\right)$$

es una tautología.

Ejemplo 1.21. Muestre que las proposiciones $\neg\left(p \wedge q\right)$ y $\neg p \vee \neg q$ son lógicamente equivalentes.

Ejemplo 1.22. Use las leyes en la tabla **??** para mostrar que

$$\neg\left(p \wedge q\right) \vee \left(\neg p \wedge q\right) \equiv \neg p$$

1.19. Sentencias condicionales.

Ejemplo 1.23. Reescriba los siguientes enunciados sin usar el condicional:

1. Si hace frío, el usa sombrero.
2. Si la productividad se incrementa, entonces el salario aumenta.

Ejemplo 1.24. Considere la proposición condicional $p \to q$. La proposiones

$$q \to p, \neg p \to \neg q, \neg q \to \neg p$$

son llamadas conversa, inversa y contrapositiva, respectivamente.

¿Cuáles de estas proposiciones son lógicamente equivalente s a $p \to q$?

Ejemplo 1.25. Determine la contrapositiva de cada enunciado:

1. Si Erik es poeta, entonces es pobre.
2. Solo si Marcos estudia, pasará el examen.

Ejemplo 1.26. Escriba la negación de cada enunciado, tan simple como sea posible:

1. Si ella trabaja, ganará dinero.
2. El nada si y solo si el agua está tibia.
3. Si neva, entonce no manejaré.

1.20. Argumentos.

Ejemplo 1.27. Muestre que el siguiente argumento es una falacia:

$$p \to q, \neg p \vdash \neg q.$$

Ejemplo 1.28. Muestre que el siguiente argumento es válido:

$$p \to q, \neg q \vdash \neg p.$$

Ejemplo 1.29. Muestre que el siguiente argumentos siempre es válido:

$$p \to \neg q, r \to q, r \vdash \neg p.$$

Ejemplo 1.30. Determine la validez del siguiente argumento:

Si 7 es menor que 4, entonces 7 no es número primo
7 no es menor que 4

---

7 no es número primo.

Ejemplo 1.31. Determine la validez del siguiente argumento:

Si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los respectivos ángulos opuestos son iguales
Dos lados de un triángulo no son iguales

Los respectivos ángulos opuestos no son iguales.

1.21. Cuantificadores y Funciones Proposicionales.

Ejemplo 1.32. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados:

1. $\exists x \in A : x + 3 = 10$;
2. $\forall x \in A : x + 3 < 10$;
3. $\exists x \in A : x + 3 < 5$;
4. $\forall x \in A : x + 3 \leq 7$.

Ejemplo 1.33. Determine el valor de verdad de cada uno de las siguientes afirmaciones donde $U = \{1, 2, 3\}$ es el conjunto *"universo"* (de referencia):

1. $\exists x \forall y : x^2 < y + 1$;
2. $\forall x \exists y : x^2 + y^2 < 12$;
3. $\forall x \forall y : x^2 + y^3 < 12$.

Ejemplo 1.34. Encuentre la negación de cada una de las siguientes afirmaciones:

1. $\exists x \forall y : p(x, y)$;
2. $\forall x \forall y : p(x, y)$;
3. $\exists x \exists y \forall z : p(x, y, z)$.

Ejemplo 1.35. Sea

$$p(x) : x + 2 > 5.$$

Indique cuando $p(x)$ es una función proposicional o no en cada uno de los siguientes conjuntos:

1. $\mathbb{N}$
2. $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, ...\}$
3. $\mathbb{C}$

Ejemplo 1.36. Niegue cada uno de las siguientes afirmaciones:

1. Todos los estudiantes viven en los dormitorios.
2. A todos los estudiantes de ingeniería le gusta el futbol.
3. Algunos estudiantes tienen 25 años o más.

1.22. Bibliografía. Las notas de esta sección están basadas en el capítulo 4 `‘‘Logic and Propositional Calculus’’` del libro

`Lipschutz, S. and Lipson, M.;` **`Schaum’s Outline of Discrete Mathematics`**`; McGraw-Hill, 3th Edition.`

2. Teoría de Conjuntos

2.1. Conjuntos y Elementos. Subconjuntos. Un *conjunto* puede ser visto como un conjunto bien definido de objetos, llamados *elementos* o *miembros* de tal conjunto.

Usualmente, usaremos letras mayúsculas para denotar conjunto, y minúsculas para dlos elementos.

La pertenencia en un conjunto se denota de la siguiente manera:

$a \in S$ *denota que* a *pertenece al conjunto* S.
$a, b \in S$ *denota que tanto* a *como* b *pertenecen al conjunto* S.

El símbolo $\in$ significa `‘‘es elemento de’’`. Por el contrario, $\notin$ significa `‘‘no es elemento de’’`.

2.2. Especificación de Conjuntos. Básicamente, existen dos maneras de especificar un conjunto en particular. Por un lado, si es posible, enlistar todos los miembros. Por otro lado, caracterizando los elementos en el conjunto.

En cualquier caso, para declarar un conjunto se utilizan llaves:

$$A = \{\cdots\}$$

Por ejemplo, el conjunto

$$A = \{1, 3, 5, 6, 9\}$$

también se puede especificar como

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10, 2 \nmid x\}$$

Un conjunto no depende del modo en que sus elementos se muestren. Este permanece igual si sus elementos se repiten o se reacomodan.

Ejemplo 2.1.

$$\left\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x + 2 = 0\right\} = \{1, 2\} \tag{5}$$

$$= \{1, 2, 2, 1\} \tag{6}$$

2.3. Subconjuntos. Supongamos que cada elemento en un conjunto A es también elemento del conjunto B, es decir,

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

En ese caso, decimos que A es subconjunto de B. También podemos decir que A está contenido en B o que B contiene a A.

Esta relación se escribe como

$$A \subset B$$

o en ocasiones como $B \supset A$. Por el contrario, si es necesario indicar que A *no* es subconjunto de B, escribimos $A \not\subset B$.

Diremos que dos conjuntos son iguales si poseen los mismos elementos, es decir,

$$x \in A \iff x \in B.$$

De manera equivalente

$$A = B \text{ si y solo si } A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

Ejemplo 2.2. Determine la relación entre los siguientes conjuntos

$$A = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}, \; B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \; C = \{1, 3\}.$$

Ejemplo 2.3. Demuestre que

1. $A \not\subset B$ si y solo $\exists x \in A : x \notin B$.
2. $A \subset A$.
3. $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

2.4. Símbolos especiales. Algunos conjuntos numéricos tienen una notación especial

- $\mathbb{N}$: números naturales (enteros positivos);
- $\mathbb{Z}$: números enteros;
- $\mathbb{Q}$: números racionales;
- $\mathbb{R}$: números reales;
- $\mathbb{C}$: números complejos.

Observe que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

pero en ningún caso los conjuntos son iguales.

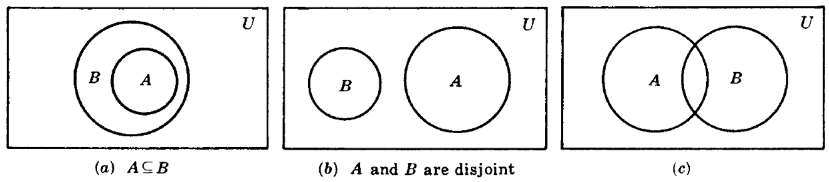


FIGURA 3. Representaciones con Diagramas de Venn

2.5. Conjunto Universal y Conjunto Vacío. Todos los conjuntos bajo investigación en una apliación de teoría de conjuntos se supone que pertenecen a un conjunto fijo más grande llamado *conjunto universo* $\mathbb{U}$, al menos que se indique otro caso.

Dado un conjunto universal $\mathbb{U}$ y una propiedad P, es posible que no existan elemento de $\mathbb{U}$ con la propiedad P.

Por ejemplo, el siguiente conjunto no tiene elementos

$$S = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 3\right\}.$$

A tal conjunto sin elementos $\{\}$ se le conoce como conjunto vacío y se denota como $\emptyset$.

OBSERVACIÓN 2.1. *Sólo existe un conjunto vacío.* El conjunto vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto.

2.6. Conjuntos disjuntos. Dos conjuntos A y B son *disjuntos* si no tienen elementos en común.

EJEMPLO 2.4. Considere

$$A = \{1, 2\}, \; B = \{4, 5, 6\}, \; C = \{5, 6, 7, 8\}.$$

Determine que pares de conjuntos son disjuntos.

2.7. Diagramas de Venn. Un diagrama de Venn es una representación gráfica de conjuntos en el que cada conjunto está representado por áreas encerradas en el plano.

El conjunto universo $\mathbb{U}$ es representado por el interior de un rectángulo, y cualquier otro conjunto esta representado por discos que viven dentro del rectángulo.

2.8. Operaciones con Conjuntos. En esta sección introduciremos la unión, la intersección y el complemento de conjuntos.

2.9. Unión e Intersección. La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B, es decir

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B, es decir

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

EJEMPLO 2.5. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 8, 9\}$. Encuentre

1. $A \cup B =$

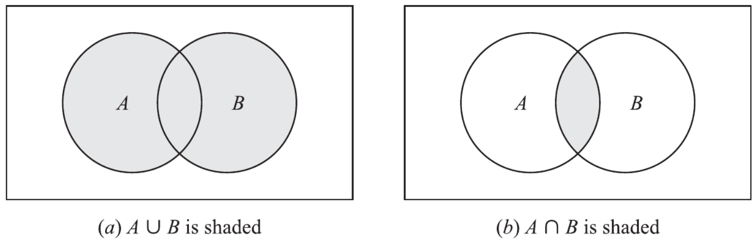


Figura 4. Unión e Intersección

2. $A \cap B =$
3. $A \cup C =$
4. $A \cap C =$
5. $B \cup C =$
6. $B \cap C =$

Ejemplo 2.6. Demuestre que para cualesquiera dos conjuntos A y B, tenemos:

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B.$$

Ejemplo 2.7. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $A \subset B$
2. $A \cap B = A$
3. $A \cup B = B$

Dos conjuntos A y B se dicen *disjuntos* si no tienen elementos en común, es decir $A \cap B = \emptyset$.

Supongamos que

$$S = A \cup B, \ A \cap B = \emptyset.$$

Diremos que S es la unión disjunta de A y B y se denota por

$$S = A \sqcup B.$$

2.10. Complementos, Diferencias y Diferencias Simétricas. En esta sección, consideraremos conjuntos que sean subconjuntos de un conjunto universo fijo $\mathbb{U}$.

El *complemento* A^C de un conjunto A es el conjunto de elementos que no pertenecen a A, es decir

$$A^C = \{x \in \mathbb{U} \mid x \notin A\}.$$

Algunos textos denotan A^C también como A' o $\bar{A}$.

El *complemento relativo* de un conjunto B con respecto a un conjunto A se define como

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

El conjunto $A \backslash B$ se lee A `menos` B. Algunos textos lo denotan también como $A - B$.

La *diferencia simétrica* de los conjuntos A y B se define como

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

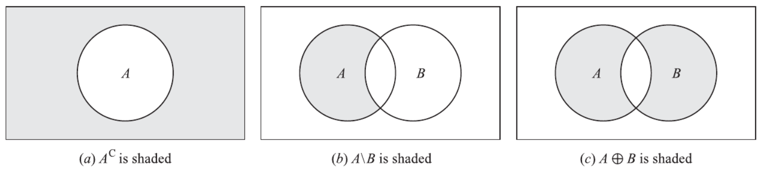


FIGURA 5. Complementos, diferencia y diferencia simétrica.

EJEMPLO 2.8. Definamos

$$p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$$

Demuestre que

1. $x \in A \oplus B \iff (x \in A) \veebar (x \in B)$
2. $p \veebar q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
3. $A \veebar B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

EJEMPLO 2.9. Supongamos que $\mathbb{N}$ es el conjunto universo. Definamos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 8, 9\}$, $E = \{2, 4, 6, ...\}$.

Determine:

1. $A \oplus B$
2. $A \oplus C$
3. $B \oplus C$
4. $A \oplus E$

2.11. Conjuntos fundamentales. Dos conjuntos A y B se dicen *disjuntos* si no tienen elementos en común, es decir $A \cap B = \emptyset$.

Supongamos que

$$S = A \cup B, \; A \cap B = \emptyset.$$

Diremos que S es la unión disjunta de A y B y se denota por

$$S = A \sqcup B.$$

En general S es una unión disjunta de $P_1, P_2, ..., P_n$ si

- $S = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n$ y
- $P_i \cap P_j = \emptyset$ siempre y cuando $i \neq j$.

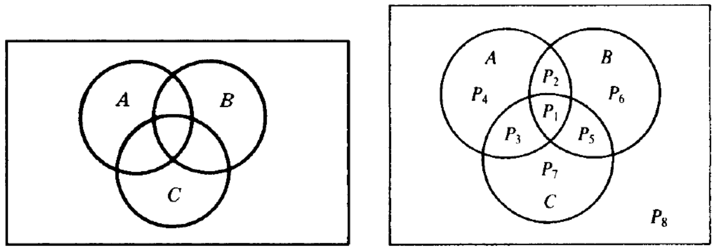
En este caso, escribimos

$$S = P_1 \sqcup P_2 \sqcup ... \sqcup P_n.$$

Diremos que $P_1, P_2, ..., P_n$ es sistema de conjuntos fundamentales para $\mathbb{U}$ si

$$\mathbb{U} = P_1 \sqcup P_2 \sqcup ... \sqcup P_n.$$

EJEMPLO 2.10. Contruya un sistema de conjuntos fundamentales a partir de tres conjunto A, B, C.



(a) (b)

Idempotent laws:	(1a) $A \cup A = A$	(1b) $A \cap A = A$
Associative laws:	(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Commutative laws:	(3a) $A \cup B = B \cup A$	(3b) $A \cap B = B \cap A$
Distributive laws:	(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identity laws:	(5a) $A \cup \emptyset = A$	(5b) $A \cap \mathbf{U} = A$
	(6a) $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$	(6b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
Involution laws:	(7) $(A^C)^C = A$	
Complement laws:	(8a) $A \cup A^C = \mathbf{U}$	(8b) $A \cap A^C = \emptyset$
	(9a) $\mathbf{U}^C = \emptyset$	(9b) $\emptyset^C = \mathbf{U}$
DeMorgan's laws:	(10a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	(10b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

FIGURA 6. Leyes de Conjuntos

2.12. Álgebra de conjuntos, dualidad. Los conjuntos bajo las operaciones de unión, intersección y complemento satisface varias leyes o identidad, que se enuncian en la siguiente tabla, y son similares a las leyes de lógica.

Cada ley de conjuntos se corresponde con una ley de lógica. Por ejemplo, la ley de DeMorgan:

$$\begin{aligned}(A \cup B)^C &= \{x \mid x \notin (A \cup B)\}\\ &= \{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\}\\ &= A^C \cap B^C\end{aligned}$$

Dualidad El *principio de dualidad* establece que la equivalencia E^* obtenida a partir de una ley de lógica E reemplazando

$$\cup, \cap, \mathbb{U}, \emptyset$$

por

$$\cap, \cup, \emptyset, \mathbb{U}$$

sigue siendo una ley de lógica.

A la proposición E^* se le conoce como dual E.

EJEMPLO 2.11. Encuentre el dual de

$$(\mathbb{U} \cap A) \cup (B \cap A) = A$$

2.13. Inducción Matemática. Una propiedad esencial de los naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ es la siguiente

AXIOMA (Principio de Inducción Matemática, versión I). Sea P una proposición definida en $\mathbb{N}$, es decir, $P(n)$ toma valores de cierto o falso para cada $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que

1. $P(1)$ es cierto;
2. $\forall k \in \mathbb{N} : P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Entonces P es cierto para todo entero positivo $n \in \mathbb{N}$.

[t]

EJEMPLO 2.12. Sea $P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$. Demostrar que $P(n)$ es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$.

AXIOMA (Principio de Inducción Matemática, versión II). Sea P una proposición definida en $\mathbb{N}$ tal que :

1. $P(1)$ es cierta;
2. $P(k)$ es cierta siempre que $P(j)$ para toda $1 \leq j < k$.

Entonces $P(n)$ es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$.

OBSERVACIÓN 2.2. Algunas veces, uno desea demostrar que una proposición es cierta para algún conjunto de enteros

$$\{a, a+1, a+2, ...\}$$

donde a es un entero positivo, posiblemente cero. Esto puede hacerse simplemente reemplazando 1 por a en cualquier versión del Principio de Inducción Matemática.

[t]

EJEMPLO 2.13. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} n\,(n+1)$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

[t]

EJEMPLO 2.14. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Inducción Matemática

3.1. Introducción. Una propiedad esencial de los naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ es la siguiente

AXIOMA (Principio de Inducción Matemática, versión I). Sea P una proposición definida en $\mathbb{N}$, es decir, $P(n)$ toma valores de cierto o falso para cada $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que

1. $P(1)$ es cierto;
2. $\forall k \in \mathbb{N} : P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Entonces P es cierto para todo entero positivo $n \in \mathbb{N}$.

[t]

EJEMPLO 3.1. Sea $P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$. Demostrar que $P(n)$ es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$.

AXIOMA (Principio de Inducción Matemática, versión II). Sea P una proposición definida en $\mathbb{N}$ tal que :

1. $P(1)$ es cierta;
2. $P(k)$ es cierta siempre que $P(j)$ para toda $1 \leq j < k$.

Entonces $P(n)$ es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$.

Observación 3.1. Algunas veces, uno desea demostrar que una proposición es cierta para algún conjunto de enteros

$$\{a, a+1, a+2, ...\}$$

donde a es un entero positivo, posiblemente cero. Esto puede hacerse simplemente reemplazando 1 por a en cualquier versión del Principio de Inducción Matemática.

3.2. Notación "Sigma". La letra griega Σ denota adición repetida:

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = f(a) + f(a+1) + ... + f(b),$$

siempre que $a \leq b$.

Ejemplo 3.2.
1. $\sum_{j=1}^{5} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
2. $\sum_{i=0}^{3} (2i+1) = 1 + 3 + 5 + 7$
3. $\sum_{i=2}^{10} i^2 = 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$
4. $\sum_{j=1}^{4} \cos(j\pi) = \cos\pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi$.

Linealidad

Propiedad 3.1.

$$\sum_{i=a}^{b} cf(i) = c\sum_{i=a}^{b} f(i) \tag{7}$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) + g(i) = \sum_{i=a}^{b} f(i) + \sum_{i=a}^{b} g(i) \tag{8}$$

Propiedades

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{j=a}^{b} f(j) \tag{9}$$

$$\sum_{j=a}^{a} f(j) = f(a) \tag{10}$$

$$\sum_{j=a}^{c} f(j) = \sum_{j=a}^{b} f(j) + \sum_{j=b}^{c} f(j) \tag{11}$$

$$\sum_{j=a}^{b+1} f(j) = \sum_{j=a}^{b} f(j) + f(b) \tag{12}$$

Ejemplo 3.3. Si $f(n) = (2n-1)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f(j) = 1 + 3 + ... + (2n-1)$$

es la suma hasta el $n-$ésimo natural impar. Observe que

1. $\sum_{j=1}^{1} f(j) = 2(1) - 1 = 1.$
2. $\sum_{i=1}^{n+1} f(j) = (\sum_{i=1}^{n} f(j)) + (2n+1)$

EJEMPLO 3.4. Si $f(n) = 2^{n-1}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f(j) = 1 + 2 + ... + 2^{n-1}$$

es la suma de las primeras n potencias de 2 (incluyendo $1 = 2^0$). Observe que

1. $\sum_{i=1}^{n+1} f(j) = 1 + 2 + ... + 2^n$
2. $\sum_{j=1}^{1} f(j) = 2^{1-1} = 1.$
3. $\sum_{i=1}^{n+1} f(j) = (\sum_{i=1}^{n} f(j)) + 2^n.$

3.3. Ejemplos Resueltos. [t]

EJEMPLO 3.5. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n\,(n+1)$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

[t]

EJEMPLO 3.6. Demostrar que

$$P(n) : 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.4. Funciones definidas de manera recursiva. Decimos que una función está *definida recursivamente* si la definición de la función se refiere a sí misma.

Para que la función esté bien definida, debe tener las siguientes dos propiedades:

1. Deben existir ciertos argumentos, llamados *valores base,* para los cuales la función no se refiera a sí misma.
2. Cada vez que la función se refiera a sí misma, el argumento de la función debe estár más cercano a un valor base.

3.5. La función factorial. El producto de enteros positivos de 1 hasta n (incluído) es llamado *n factorial,* $n!$

Es decir,

$$n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Por razones combinatorias, es conveniente definir $0! = 1$, y de esta manera la función factorial quedará definida para todos los enteros no negativos.

[t]

OBSERVACIÓN 3.2. 1. $1! = 1 \cdot 0!$
2. $2! = 2 \cdot 1!$
3. $3! = 3 \cdot 2!$
4. $4! = 4 \cdot 3!$

Es fácil observar que para $n \in \mathbb{N}$:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Definición 3.1 (Función factorial).

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

Observación 3.3. 1. El valor de $n!$ factorial esta dado explicitamente para $n = 0$, de manera que 0 es el valor base.
2. El valor de $n!, n > 0$ está dado en términos de $n-1$, que es más cercano al valor base 0.

Por tanto, $n!$ es una función recursiva bien definida.

[fragile] Implentación iterativa del *factorial* en `Python`

```
def factorial(n):
result = 1
for i in range(1, n+1):
result *= i
return result
```

[fragile] Implentación recursiva del *factorial* en `Python`

```
def factorial(n):
z=1
if n>1:
z=n*factorial(n-1)
return z
```

Para más implementaciones, visite rosettacode.org/wiki/Factorial

3.6. Suceción de Fibonacci. La celebre sucesión de Fibonacci (usualmente denotada por $F_0, F_1, F_2, ...$) es como sigue:

$$0, 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

Es decir, $F_0 = 0$ $F_1 = 1$ y cada término sucesor es la suma de los dos precedentes.

Por ejemplo, los siguientes dos términos de la sucesión son

$$34 + 55 = 89 \text{ y } 55 + 89 = 144.$$

Definición 3.2 (Sucesión de Fibonacci).

$$F_n = \begin{cases} n & n = 0, 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

Este ejemplo es una función recursiva bien definida, ya que la función hace referencia a sí misma, cuando se usan F_{n-2} y F_{n-1}, y

1. los valores base son 0 y 1;
2. los valores de F_n están definidos en términos de valores más pequeños $n-2$ y $n-1$ que son más cercanos a los valores base.

[fragile] Implentación iterativa de *Fibonacci* en `Python`

```
def fibIter(n):
if n < 2:
return n
fibPrev = 1
fib = 1
```

```
for num in xrange(2, n):
fibPrev, fib = fib, fib + fibPrev
return fib
```

[fragile] Implentación recursiva de *Fibonacci* en `Python`

```
def fibRec(n):
if n < 2:
return n
else:
return fibRec(n-1) + fibRec(n-2)
```

Para más implementaciones, visite rosettacode.org/wiki/Fibonacci_sequence

3.7. La función de Ackermann.

DEFINICIÓN 3.3 (Función (fallida) de Ackermann).

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & m=0 \\ A(m-1,n) & m \neq 0, n=0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & m \neq 0, n \neq 0 \end{cases}$$

DEFINICIÓN 3.4 (Función de Ackermann).

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & m=0 \\ A(m-1,1) & m \neq 0, n=0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & m \neq 0, n \neq 0 \end{cases}$$

[fragile] Implentación recursiva de *Ackermann* en `Python`

```
def ack2(M, N):
if M == 0:
return N + 1
elif N == 0:
return ack2(M - 1, 1)
else:
return ack2(M - 1, ack2(M, N - 1))
```

Para más implementaciones, visite rosettacode.org/wiki/Ackermann_function

3.8. Ejemplos Resueltos.

EJEMPLO 3.7. Sean a, b enteros positivos, y definamos la siguiente función de manera recursiva:

$$Q(a,b) = \begin{cases} 0 & a < b \\ Q(a-b,b)+1 & b \leq a \end{cases}$$

1. Encuentre (i) $Q(2,5)$; (ii) $Q(12,5)$
2. ¿Qué es lo que hace esta función? Encuentre $Q(5861,7)$

EJEMPLO 3.8. Use la definición de la función de Ackermann para calcular $A(1,3)$.

3.9. Ejemplos.

Ejemplo 3.9. Demuestre por inducción que $2+4+6+...+2n = n(n+1)$

Ejemplo 3.10. Demuestre por inducción que $1+4+7+...+(3n-2) = \dfrac{n\,(3n-1)}{2}$

Ejemplo 3.11. Demuestre por inducción que $1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ejemplo 3.12. Demuestre por inducción que $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

Ejemplo 3.13. Demuestre por inducción que $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+...+\dfrac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$

Ejemplo 3.14. Demuestre por inducción que $7^n - 2^n$ es divisible entre 5

Ejemplo 3.15. Demuestre por inducción que $n^3 - 4n + 6$ es divisible entre 3

Ejemplo 3.16. La función de Ackermann está definida de manera recursiva de las siguiente manera:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & m=0 \\ A(m-1,1) & m \neq 0, n=0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & m \neq 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Encuentre $A(1,1)$.

4. Relaciones

Ejemplos de relaciones

- "menor que"
- "es paralelo a"
- "es un subconjunto de"

Formalmente, definiremos una relación en términos de *pares ordenados.*

Definición 4.1. Un *par ordenado* de elementos a y b, donde a es el primer elemento y b es el segundo se denota por (a,b).

Axioma. $(a,b) = (c,d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

En particular $(a,b) \neq (b,a)$, al menos que $a = b$.
Esto es muy diferente al caso de un conjunto, dónde el orden es irrelevante:

$$\{a,b\} = \{b,a\}\,.$$

4.1. Producto de conjuntos. Consideremos dos conjuntos arbitrarios A y B. El conjunto de todos los pares ordenadors (a, b) donde $a \in A, b \in B$ es llamado *producto(cartesiano)* de A con B, y se denota por $A \times B$, es decir,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Podemos construir el producto cartesiano de un conjunto A consigo mismo, y en ese caso denotaremos

$$A^2 = A \times A.$$

Ejemplo 4.1. Sea $A = \{x, y\}$, $B = 0, 1$. Entonces

1. $A^2 = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$
2. $A \times B = \{(x, 0), (x, 1), (y, 0), (y, 1)\}$
3. $B \times A = \{(0, x), (0, y), (1, x), (1, y)\}$
4. $B^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

Observación 4.1.
- En general, $A \times B \neq B \times A$.
- Si $n(A)$ denota el *número de elementos* en el conjunto A, entonces

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = a, b, c$. Determine $A \times B$, $B \times A$ y A^2, y describa gráficamente estos productos.

Ejemplo 4.2. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es llamado frecuentemente el *plano Cartesiano.*

Definición 4.2. Definimos el producto cartesiano de un número finito de conjuntos $A_1, ..., A_n$ como

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Observación 4.2. De manera análoga al caso $n = 2$, definiremos

$$A^n = \prod_{i=1}^{n} A.$$

Por ejemplo, $\mathbb{R}^3$ denota el espacio tridimensional.

4.2. Relaciones.

Definición 4.3. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Una *relación binaria R,* o simplemente relación, de A a B es un subconjunto de $A \times B$.

Para cada $(a, b) \in A \times B$ alguna de las siguientes condiciones (pero no ambas) es cierta:

1. $(a, b) \in R$; en cuyo caso diremos que *a está $R-$relacionado con b,* y escribiremos $a \boxed{\mathbf{R}} b$.
2. $(a, b) \notin R$; en cuyo caso diremos que *a no está $R-$relacionado con b,* y escribiremos $a \boxed{\not R} b$.

Si R es una relación de A en sím mismo, es decir $R \subset A^2$, entonces diremos que R es una *relación en A.*

DEFINICIÓN 4.4. Si $R \subset A \times B$ es una relación, el *domino de* R es

$$\mathrm{Dom}\,(R) = \{a \in A \mid (a,b) \in R\},$$

mientras que la *imagen de* R es

$$\Im R = \{b \in B \mid (a,b) \in R\}.$$

4.3. Ejemplos. Sean $A = \{1,2,3\}$, $B = \subset x, y, z$ y

$$R = \{(1,y),(1,z),(3,y)\}.$$

Entonce R es una relación de A en B, porque $R \subset A \times B$.

Respecto a esta relación, por ejemplo,

$$1 \boxed{\mathbf{R}} y,\ 1 \boxed{\mathbf{R}} z,\ 3 \boxed{\mathbf{R}} y,$$

pero

$$1 \boxed{\not R} x, 2 \boxed{\not R} x, 2 \boxed{\not R} y.$$

En este caso, $\mathrm{Dom}\,(R) = \{1,3\}$ e $\Im R = \{y,z\}$.

La propia inclusión $\subset$ es una relación en una colección de conjuntos $A_1, ..., A_n$.

Para cualquier par A_i, A_j en dicha colección $A \subset B$ o $A \not\subset B$.

Una relación en el conjunto $\mathbb{Z}$ de número enteros es *‘‘m divide a n.’’*

La notación convencional para esta relación es $m \mid n$.

Consideremos el conjunto de lineas L en el plano. La perpendicularidad $\perp$ es una relación en L. De manera similar el paralelismo $\|$.

Sea A cualquier subconjunto. Una relación importante en A es la *igualdad*

$$\{(a,a) \mid a \in A\}$$

que usualmente se denota por

$$“=.”$$

En ocasiones, también se le llama *entidad* o *diagonal* y se denota por $\triangle_A$, o simplemente por $\triangle$.

Sea A un conjunto arbitrario. Entonces tanto $A \times A$ como $\emptyset$ son subconjuntos de $A \times A$, y son llamados *relación universal* y *relación vacía,* respectivamente.

Relación inversa

Sea R una relación de A en B. La *relación inversa* de R, denotada por R^{-1}, es la relación de B en A que consiste en todos aquellos pares que al invertirlos, pertenecen a R.

En otras palabras

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}.$$

EJEMPLO 4.3. Sea $A = \{1,2,3\}, B = \{x,y,z\}$ y $R = \{(1,y),(1,z),(3,y)\}$. Entonces

$$R^{-1} = \{(y,1),(z,1),(y,3)\}.$$

OBSERVACIÓN 4.3.
- $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R.$
- $\mathrm{Dom}\left(R^{-1}\right) = \Im R$
- $\Im R^{-1} = \mathrm{Dom}\,(R)$

4.4. Composición de Relaciones. Sean A, B, C conjuntos arbitrarios, R una relación de A en B y S una relación de B en S. Entonces podemos definir una nueva relación de A en C denotada por *RS:*

$$a\boxed{\mathbf{RS}}c \text{ si para alguna } b \in B,\ a\boxed{\mathbf{R}}b \text{ y } b\boxed{\mathbf{S}}c.$$

Esto es

$$RS = \{(a, c) \mid \exists b \in B : (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$$

Supongamos que R es una relación en A. Entonces, definimos R^n de manera recursiva

$$R^1 = \begin{cases} R & n = 1 \\ R^{n-1}R & n > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 4.4. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y $C = \{x, y, z\}$ y definimos las relaciones:

$$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$$
$$S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\} .$$

Encuentre RS.

Teorema 4.1. *Supongamos que R es uan relación de A en B, y S una relación de B en C. Entonces*

$$(RS)T = R(ST).$$

4.5. Tipos de relaciones.

4.6. Relaciones reflexivas. Una relación R es un conjunto A es *reflexiva* si $a\boxed{\mathbf{R}}a$ para todo $a \in A$, es decir, $\forall a \in A : (a, a) \in \mathbb{R}$.

Entonces, R es *no-reflexiva* si...

Ejemplo 4.5. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine cuales de las siguientes relaciones son reflexivas:

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- $R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$
- $R_4 = \emptyset$
- $R_5 = A \times A$

Ejemplo 4.6. Determine cuales de las siguientes relaciones son reflexivas:

- $\leq$ en $\mathbb{Z}$
- $\subset$ en 2^A Aquí A es un conjunto y 2^A es la colección de todos sus subconjuntos (incluyendo tanto a $\emptyset$ como A)
- $\perp$ en el conjunto L de líneas en el plano
- $\|$ en el conjunto L de líneas en el plano
- $|$ (divisivilidad) en $\mathbb{N}$. Aquí $a \mid b$ significa que *a divide a b.*

4.7. Relaciones simétricas y antisimétricas. Una relación R en un conjunto A es simétrica si: Siempre que $a\boxed{\mathbf{R}}b$, entonces $b\boxed{\mathbf{R}}a$. En otras palabras,

$$(a, b) \in \mathbb{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathbb{R}.$$

Entonces, una relación R no es simétrica si...

Ejemplo 4.7.
1. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo **??** son simétricas.

2. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo **??** son simétricas.

Una relación R en un conjunto A es antisimétrica si: Siempre que $a\boxed{\mathbf{R}}b$ y $b\boxed{\mathbf{R}}a$ entonces $a = b$. En otras palabras,

$$a \neq b, a\boxed{\mathbf{R}}b \Rightarrow b\boxed{\not\mathbf{R}}a.$$

Entonces, una relación R no es simétrica si...

Ejemplo 4.8. 1. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo **??** son antisimétricas.
2. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo **??** son antisimétricas.

Observación 4.4. Las propiedades de simetría y antisimetría no son excluyentes una de la otra.

Por ejemplo, la relación

$$R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$$

no es simétrica ni antisimétrica.

Por otro lado, la relación

$$S = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

es tanto simétrica como antisimétrica.

4.8. Relación transitiva. Una relación R en un conjunto A es transitiva si: Siempre que $a\boxed{\mathbf{R}}b$ y $b\boxed{\mathbf{R}}c$, entonces $a\boxed{\mathbf{R}}c$. En otras palabras,

$$(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in \mathbb{R}.$$

Entonces R no es transitiva si...

Ejemplo 4.9. 1. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo **??** son transitivas.
2. Determine cuales de las relaciones en el ejemplo **??** son transitivas.

4.9. Relaciones de Equivalencia. Considere un conjunto no-vacío S. Una relación R en S es una *relación de equivalencia* si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

En otras palabras, R es una *relación de equivalencia* en S si satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada $a \in S : a\boxed{\mathbf{R}}a$;
2. si $a\boxed{\mathbf{R}}b$, entonces $b\boxed{\mathbf{R}}a$;
3. si $a\boxed{\mathbf{R}}b$, $b\boxed{\mathbf{R}}c$, entonces $a\boxed{\mathbf{R}}c$.

La idea general detras de una relación de equivalencia que es una clasificación de objetos que son en cierto sentido *similares.*

Por ejemplo, la relación $=$ de igualdad en cualquier conjunto S es una relación de equivalencia, porque...

Ejemplo 4.10. Sea L el conjunto de líneas en el plano cartesiano y T el conjunto de triangulos en el mismo plano.

1. La relación de paralelidad es una relación de equivalencia en L;
2. La relación de congruencia o la de similaridad son relaciones de equivalencia en T.

EJEMPLO 4.11. La relación $\subset$ no es una relación de equivalencia. Aunque es reflexiva y transitiva, no es simétrica...

Sea m un entero positivo fijo. Dos enteros a, b son llamados *congruentes módulo* m, si m divide la diferencia $a - b$, y en tal caso escribimos:

$$a \equiv b \mod m.$$

Por ejemplo $11 \equiv 3 \mod 4$ y $22 \equiv 6 \mod 4$.

La relación de congruencia módulo m es un relación de equivalencia.

4.10. Particiones y clases de equivalencia. Una paritición P de un conjunto no-vacío S es una colección $\{A_j\}$de subconjuntos no-vaciós de S con las siguientes propiedades de que cada $a \in S$ pertenece a uno y solo uno de los conjunto A_j de la partición.

En otras palabras,

1. Cada $a \in S$ pertenece a algún A_j;
2. si $A_i \neq A_j$, entonces $A_j \cap A_j = \emptyset$.

De manera equivalente, una partición P de S es una subdivisión de S en conjuntos disjuntos no vacíos A_j tal que

$$S = \sqcup_j A_j.$$

Supontamos que R es una relación de equivalencia en el conjunto S. Para cada $a \in S$, denotemos por $[a]$ el conjunto de elementos de S tales que están $R-$relacionados con a.

En otras palabras,

$$[a] = \{x \in S \mid (a, x) \in R\}.$$

La colección de clases de equivalencia de elementos de S bajo una relación de de equivalencias R se denota por S/R, es decir,

$$S/R = \{[a] \mid a \in S\}.$$

Diremos que S/R es el conjunto cociente de S por R.

TEOREMA 4.2. *Sea R una* relación de equivalencia en S. *Entonces* S/R es una partición de S. *De manera especifica:*

1. *Para cada $a \in S : a \in [a]$;*
2. *$[a] = [b]$ si y solo si $(a, b) \in R$;*
3. *Si $[a] \neq [b]$, entonces $[a]$ y $[b]$ son conjuntos disjuntos.*

De manera inversa, dada una partición $P = \{A_j\}$ de conjuntos S, existe una relación R en S tal que los conjuntos A_j son las clases de de equivalencia de R.

EJEMPLO 4.12. Sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ en $S = \{1, 2, 3\}$. Demuestre que R es una relación de equivalencia y calcule S/R.

EJEMPLO 4.13. Para cada relación, verifique que se trata de una relación de equivalencia, y calcule sus clases de equivalencia.

- $R_0 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_1 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_2 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{a}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_3 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{c}], [\mathtt{c}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_4 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{b}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{c}], [\mathtt{c}, \mathtt{a}], [\mathtt{c}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$

Ejemplo 4.14. Describa las clases de equivalencia de $\mathbb{Z} \mod 5$, y verifique que las operaciones

$$[a] + [b] = [a + b], \; [a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

están bien definidas.

Ejemplo 4.15. Considere el conjunto $S = \left\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid b \neq 0\right\}$ y la siguiente relación en este conjunto $(a, b)\boxed{\mathbf{R}}(c, d) \iff ad - bc = 0$.

1. Demuestre que R es una relación de equivalencia.
2. Demuestre que $[(a, b)] = [(c, d)]$ para todo $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$$[(a, b)] = [(n \cdot a, n \cdot b)]$$

3. Demuestre que las operaciones

$$\begin{cases} [(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)] \\ [(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(a \cdot c, b \cdot d)] \end{cases}$$

   están bien definidas
4. Denote por $\frac{a}{b}$ la clase de equivalencia $[(a, b)]$ y reescriba los resultados anteriores usando esta notación.
5. ¿Qué conjunto de números representa el cociente S/R.?

4.11. Relaciones de orden parcial. Una relación R en un conjunto S es llamada *orden parcial* de S en R si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Un conjunto S con un orden parcial R es llamado *conjunto parcialmente ordenado* o *poset*.

Ejemplo 4.16. Para cada una de las siguientes relaciones, verifique que es un orden parcial y dibuje su diagrama de Hasse.

- $R_1 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_2 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_3 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_4 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{b}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_6 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{c}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_7 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{c}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$
- $R_8 = [[\mathtt{a}, \mathtt{a}], [\mathtt{a}, \mathtt{b}], [\mathtt{a}, \mathtt{c}], [\mathtt{b}, \mathtt{b}], [\mathtt{b}, \mathtt{c}], [\mathtt{c}, \mathtt{c}]]$

Ejemplo 4.17. Demuestre para cada par (S, R), el conjunto S es parcialmente ordenado respecto a R :

1. $(2^A, \subset)$.
2. $(\mathbb{R}, \leq)$
3. $(\mathbb{N}, |)$. Muestre que esto no es cierto para $(\mathbb{Z}, |)$.

4.12. Funciones como relaciones.

4.13. Funciones, gráficas y relaciones. Supongamos que para cada elemento de un conjunto A, asignamos un *único* elemento de un conjunto B; diremos que la colección de tales asignaciones es una *función* de A en B.

En tal caso, denotamos escribimos

$$f : A \to B, \; a \mapsto f(a)$$

donde $f(a) \in B$ es la asignación correspondiente a $a \in A$.

La conexión entre *funciones* y *relaciones* es la siguiente:

Definimos la gráfica de una función $f : A \to B$ como el subconjunto de $A \times B$

$$\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}.$$

Observe que Γ_f *es una relación en* $A \times B$.

En este caso, diremos que $a \in A$ es la *varible independiente,* mientras que $b \in B$ es la *variable dependiente.*

De manera reciproca, una relación $R \subset A \times B$ induce una función si

$$(a, b), (a, b') \in R \Rightarrow b = b'.$$

En tal caso (abusando de la notación), la función está definida por

$$R : A \to B,\ a \mapsto b := R(a).$$

Entonce, una relación no induce una función si...

Ejemplo 4.18. Considere las siguientes relaciones en $A = \{1, 2, 3\}$

(a) $f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$
(b) $g = \{(1, 2), (3, 1)\}$
(c) $h = \{(1, 3), (2, 1), (1, 2), (3, 1)\}$

y determine cuales inducen funciones.

El conjunto A es llamado *dominio* de la función, y al conjunto B se le conoce *codominio.*

La *imagen* de una función $f : A \to B$ se define como

$$\begin{aligned}\Im f &= f(A)\\ &= \{b \in B \mid \exists a \in A : b = f(a)\}\\ &= \{f(a) \in B \mid a \in A\}\end{aligned}$$

Frecuentemente, una función puede expresarse por medio de una fórmula matemática.

Ejemplo 4.19. Consideremos la función que asigna a cada número real su cuadrado. Podemos describir esta función escribiendo

$$f(x) = x^2 \ \text{ o } \ x \mapsto x^2 \ \text{ o } \ y = x^2.$$

En el ejemplo anterior, la gráfica de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta dada por

$$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\right\}$$

y es una parábola.

Mientras que la imagen de f esta dada por

$$f(\mathbb{R}) = \left\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}.$$

Ejemplo 4.20. La relación

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

no induce una función.

Ejemplo 4.21. Sea A un conjunto arbitrario. La función $: A \to A$ que asigna a cada elemento $a \in A$ el mismo elemento es llamada *identidad,* usualmente denotada por Id_A o simplemente Id

En otras palabras, la identidad está definida por

$$\mathrm{Id} : A \to A,\ a \mapsto \mathrm{Id}(a) = a.$$

Observe que

$$\Gamma_{\mathrm{Id}_A} = \triangle_A.$$

4.14. Composición de Funciones. Consideremos dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Podemeos definir una nueva función : $A \to C$ de la siguiente manera

$$a \mapsto b = f(a) \mapsto c = g(b) = g(f(a)).$$

La función anterior se conoce como *composición* g con se f se describe de la siguiente manera

$$\begin{cases} g \circ f : A \to C \\ x \mapsto g(f(x)). \end{cases}$$

Ejemplo 4.22. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$. Encuentre

(a) $f \circ g$
(b) $g \circ f$

Ejemplo 4.23. Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$. Encuentre

(a) $f \circ g$
(b) $g \circ f$
(c) $f \circ f$
(d) $g \circ g$

4.15. Funciones inyectivas, suprayectivas e inversas.

Definición 4.5. Consideremos una función $f : A \to B$. Diremos que

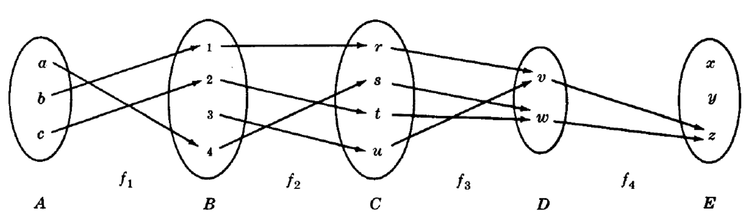
(a) f es *inyectiva* o *1:1* si $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.
(b) f es *suprayectiva* o *sobre* si $f(A) = B$.
(c) f es *biyectiva* o *invertible* si la relación inversa de la gráfica Γ_f induce una función.

Propiedad 4.1. *La función $f : A \to B$ es invertible si y solo si es $1 : 1$ y sobre.*

En tal caso la relación inversa R^{-1} de $R = \Gamma_f$ induce una función denotada por $f^{-1} : B \to A$ tal que

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A \\ f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B \end{cases}$$

Ejemplo 4.24. Considere las siguientes funciones y sus posibles composiciones, y determine si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas:



4.16. Como encontrar funciones inversas. Si $f : A \to B$ no es *sobre,* es decir, $f(A) \subset B$ pero $f(A) \neq B$, basta restringir su codominio a la imagen $f(A)$ para que se convierta en sobre:

$$f : A \to f(A).$$

EJEMPLO 4.25. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ no es sobre, pero como

$$f(A) = \left\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

la función $f : \mathbb{R} \to \{y \geq 0\}, x \mapsto x^2$ sí lo es.

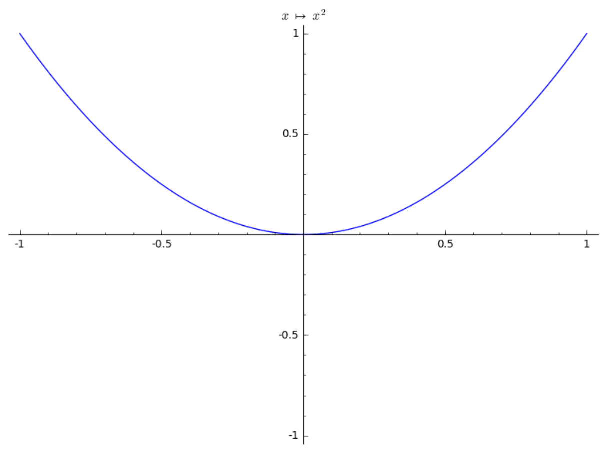


FIGURA 7. Gráfica de x^2

PROPIEDAD 4.2. *Si una función $f : A \to B$ es inyectiva, entonces*

$$f : A \to f(A)$$

es invertible.

Como encontrar la inversa de $y = f(x)$

(a) Verifique que $f(x)$ es un función $1:1$.
(b) Despeje la variable independiente y en la ecuación $y = f(x)$ para obtener

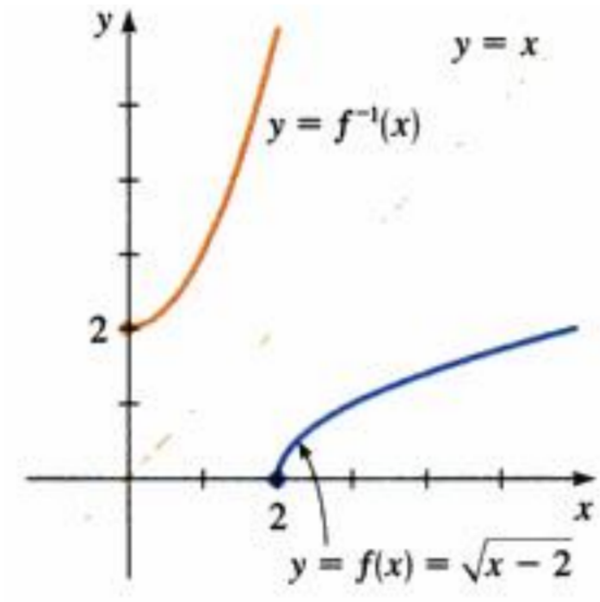
$$x = f^{-1}(y).$$

(c) Reescriba la ecuación anterior intercambiando las variables: $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 4.26. Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$,

EJEMPLO 4.27. Encuentre la inversa de $f(x) = \dfrac{x^5 - 3}{2}$.

EJEMPLO 4.28. Encuentre la inversa de $f(x) = \sqrt{x - 2}$.



4.17. Caracterización geométrica. Consiere ahora una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Representemos su gráfica

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x))\}$$

en el plano.

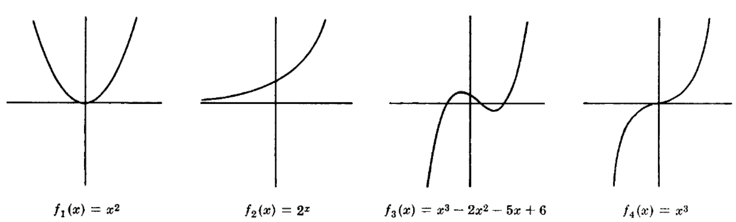
OBSERVACIÓN 4.5.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $1 : 1$ si cada línea *horizontal* intersecta la gráfica de f a lo más en un punto.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *sobre* si cada línea horizontal intersecta la gráfica de f al menos en un punto.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *invertible* si cada línea horizontal intersecta la gráfica de f...

EJEMPLO 4.29. Considere las siguientes funciones $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. $x \mapsto x^2$
2. $x \mapsto 2^x$
3. $x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
4. $x \mapsto x^3$

y determine si son $1 : 1$, sobre o invertibles.



4.18. Permutaciones. Consideremos un conjunto finito $X = \{x_1, ..., x_N\}$, esto es, X tiene *cardinalidad* $n(X) = N < \infty$.

Una función biyectiva (invertible) $\sigma : X \to X$ es llamada *permutación* en X.

Observe que las composiciones e inversas de permutaciones, así como la identidad, son también permutaciones.

En este caso, diremos que la permutación σ *actua* en X.

Supongamos que la permutación σ actua en $X = x_1, x_2, x_3$ de la siguiente manera:

$$\sigma(x_1) = x_2,\ \sigma(x_2) = x_3,\ \sigma(x_3) = x_1.$$

Entonces, podemos representar la permitación de la siguiente manera

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1, \end{pmatrix},$$

es decir, sólo nos fijamos de que manera actua en el índice j del elemento x_j.

De manera general, numerando los elemenos de $X = \{x_1, ..., x_N\}$, podemos identificar este conjunto con $A_N = \{1, ..., N\}$ por medio de la biyección $x_i \mapsto i$.

Ahora, consideremos una permutación $\sigma : A_N \to A_N$, tal que $\sigma(i) = \sigma_i$. Entonces podemos representa σ por medio de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & ... & N \\ \sigma_1 & ... & \sigma_N. \end{pmatrix}$$

El conjunto de todas las permutaciones : $A_N \to A_N$ se denota por S_N y tiene una cardinalidad $n(S_N) = N!$.

Capítulo 2

Teoría de gráficos

1. Matrices

Las matrices son arreglos rectangulares de número que nos ayudan a codificar información. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

puede ser útil para codificar los coeficientes del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y = b_2 \end{cases}$$

En general, una matriz tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{A}$$

Los subíndices de cada elemento $a_{i,j}$ denotan la posición del mismo: i es el número del *renglón* (contando de arriba a abajo), mientras que j es el número de la columna (contanto de izquierda a derecha).

Podemos extraer renglones y columnas de la matrix (A): El $i-$esímo renglón es

$$R_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}$$

mientras que la $j-$ésima columna será

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{j,1} \\ \vdots \\ a_{j,m} \end{pmatrix}$$

Diremos que la matriz (A) tiene dimensión $m \times n$.

Si existe un conjunto de números F, tal que todos los elementos $a_{i,j}$ de la matriz pertenecen a dicho conjunto, diremos que la matriz tiene coeficientes en F.

Observación 1.1. Para que las operaciones entre matrices estén bien definidas, es necesario que la suma, resta y multiplicación entre entre elementos de F también este bien definida. Por esto generalmente F se elige como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$.

La colección de todas las matrices de dimensión $m \times n$ con coeficientes en F se denotará por

$$M_{m,n}(F).$$

Definición 1.1. Las matrices de dimensión $m \times 1$ se conocen como *vectores columna,* mientras que las de dimensión $1 \times n$ se conocen como *vectores renglón.*

La colección $M_{m,1}(F)$ de todos los vectores columna con coeficientes comunmente se denota por F^m. Mientras que la colección $M_{1,n}(F)$ de todos los vectores columna con coeficientes comunmente se denota por F^{n*}.

1.1. Operaciones elementales. Por brevedad, la matriz (A) se denota por $A = [a_{i,j}]$.

En el caso de los vectores renglones y columnas, podemos omitir el subíndice fijo

$$R = [R_{1,j}] = [R_j], \; C = [C_{i,1}] = [C_i].$$

Si $B = [b_{i,j}]$ es otra matriz de dimensión $m \times n$, la suma se define como

$$A + B = [a_{i.j} + b_{i,j}].$$

De manera similar, la resta se define como

$$A - B = [a_{i,j} - b_{i,j}].$$

EJEMPLO 1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

Observe que para que la *suma y resta* tenga sentido, ambas matrices deben tener exactamente las *mismas dimensiones*.

Después de ver la facilidad para definir la suma y resta, uno se ve tentado a definir la multiplicación de la misma forma. Pero tal definición es poco útil en las aplicaciones.

Por esta razón, desarrollaremos el concepto de multiplicación, a fin de poder aplicar esta operación en la resolución de Ejemplos.

1.2. Multiplicación.

DEFINICIÓN 1.2. Sean $R = [R_j]$ un vector renglón y $C = [C_i]$ un vector columna, ambos de longitud n.

El *producto renglón-columna* se define como

$$RC = \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & R_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} R_j C_i. \tag{RC}$$

EJEMPLO 1.2. Considere

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calcule RC.

EJEMPLO 1.3. Reescriba la siguiente ecuación, utilizando el *producto renglón-columna*:

$$2x - 3y + z = 0.$$

DEFINICIÓN 1.3. Sea $A = [a_{i,j}] \in M_{m\times n}$ y $B = [b_{j,k}] \in M_{n\times l}$. Definimos su producto como

$$AB = \big(R_i C_k\big) \tag{AB}$$

donde R_i es el $i-$ésimo renglón de A y C_k es la $k-$ésima columna de B.

OBSERVACIÓN 1.2.

- Para que esta multiplicación tenga sentido, los renglones de A y las columnas de B deberán tener la misma longitud n.
- La matriz resultante tendrá dimensión $m \times l$.
- A menos que $m = l$, el producto BA podría no estar definido.
- Aun cuando BA estuviera bien definido, el producto de matrices no es *conmutativo,* es decir, generalmente tendremos que

$$AB \neq BA.$$

EJEMPLO 1.4. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 1.5. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 1.6. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 1.7. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -30 \\ 45 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.8. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.9. Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 19 \\ 53 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10. Rescriba el siguiente sistema de ecuación en forma matricial y encuentre su solución:

$$\begin{cases} -x - 3y = 19 \\ -7x - y = 53 \end{cases}$$

2. Teoría general de grafos

En matemáticas, la *teoría de grafos* estudia estructuras matemáticas usadas para modelar relaciones por pares entre objetos.

2.1. Definición de grafo. Concepto de gráfo Un *grafo* G consiste de:

(a) Un conjunto V cuyos elementos son llamados *vértices,* puntos o nodos de G.
(b) Un conjunto E de pares (no ordenados) de distintos vertices, a los que llamaremos *aristas* de G.

Denotaremos un grafo por $G(V, E)$ cuando querramos enfatizar los componentes del mismo.

Observación 2.1. Debido a una ambigüedad en la traducción del inglés al español, en ocasiones, a un grafo también se le conoce como *gráfica,* que se puede confundir con el concepto de teoría de conjuntos. En este material, a veces utilizaremos *gráfica,* pero debe entenderse como un grafo.

Multigrafos Consideremos la figura 1 (b). Las aristas e_4y e_5 son llamadas *aristas multiples* ya que conectan los mismos extremos, mientras que la arista e_6 es llamada *bucle* ya que conecta un vértice consigo mismo.

Tales diagramas son llamados *multigrafos;* la definición formal de grafo no admite aristas multiples ni bucles.

Observación 2.2. Sin embargo, algunos textos utilizan “grafos” para referirse a lo que nosotros llamaremos multigrafos, mientras que ocupan “grafo simple” para lo que nosotros llamaremos grafos.

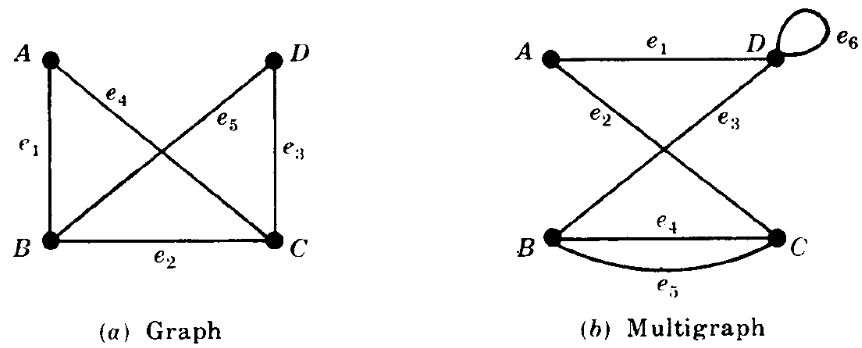


FIGURA 1. Grafos y multigrafos

Grado de un vértice El *grado* de un vértice v es un grafo G, denotado por $\deg(v)$, es igual al número de aristas in G que contienen a v, es decir, que *inciden* en v.

Dado que cada arista incide en dos vértices diferentes, tenemos el siguiente resultado simple pero importante:

TEOREMA 2.1. *La suma de los grados de los vértices en un grafo G es el doble del número de aristas.*

EJEMPLO 2.1. En el grafo de la figura 1(a), tenemos que

$$\deg(A) = 2, \ \deg(B) = 3, \ \deg(C) = 3, \ \deg(D) = 2.$$

La suma de los grados es igual a 10, que es dos veces el número de aristas.

DEFINICIÓN 2.1. Diremos que un vértice es *par* o *impar* de acuerdo a la paridad de su grado.

En el ejemplo anterior, tanto A com D son vértices pares, mientras que B y C son impares.

OBSERVACIÓN 2.3. Diremos que un vertice de grado cero está *aislado.*

Gráfos finitos y triviales Diremos que un grafo es *finito* si tiene un número finito de vértices y un número finito de aristas.

Observe que un número finito de vértices implica un número finito de aristas; pero no lo contrario no es necesariamente cierto.

Diremos que un grafo con un único vértice, sin aristas, es *trivial.*

OBSERVACIÓN 2.4. A menos que se indique de otra manera, sólo trataremos con grafos finitos.

2.2. Subgrafos y grafos homeomorfos e isomorfos. Ahora, discutiremos relaciones de equivalencia entre grafos.

Subgrafos Consideremos un grafo $G(V, E)$. Diremos que otro grafo $H(V', E')$ es un *subgrafo* de G si los vértices y aristas de H están contenidos en los vértices y aristas de G, es decir,

$$V' \subset V, \ E' \subset E.$$

En particular:

(a) Un subgrafo $H(V', E')$ de $G(V, E)$ es llamado subgrafo *inducido* por sus vértices V' si el conjunto de aristas E' contiene todas las aristas en G cuyo extremos pertenecen a los vértices en H.
(b) Si v es un vértice en G, entonces $G - v$ es el subgrafo de G ontenido al borrar v de G y todas las aristas en G que inciden en v.
(c) Si e es una arista en G, entonces $G - e$ es el subgrafo de G obtenido borrando la arista e en G.

Grafos isomorfos Dos grafos $G(V, E)$ y $G^*(V^*, E^*)$ son llamados *isomorfos* si existe una función biyectiva $f : V \to V^*$ tal que: $\{u, v\}$ es una arista de G si y solo si $\{f(u), f(v)\}$ es una arista de G^*.

La idea es que estos grafos son equivalentes, aún cuando sus representaciones pueden lucir muy diferentes.

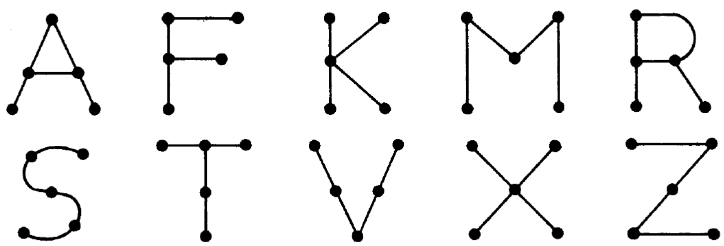


FIGURA 2. Grafos isomorfos.

Grafos homeomorfos Dado un grafo G, podemos obtener un nuevo grafo dividiendo una arista de G con vértices adicionales.

Dos grafos G y G^* son llamados *homeomorfos* si pueden obtenerse de gráficas isomorfas a través de este método.

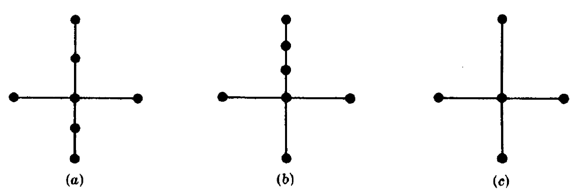


FIGURA 3. Grafos homomorfos

Los grafos (a) y (b) son homeomorfos, ya que se pueden obtener añadiendo vértices al grafo (c).

2.3. Caminos y conexidad. Un *camino* en un (multi)grafo G consiste en una sucesión alternante de vértices y arista de la forma

$$v_0, e_1, v_1, ..., e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$$

donde cada arista e_i contiene los vértices v_{i-1} y v_i.

OBSERVACIÓN 2.5. Observe que en grafo, podemos simplificar la notación para un camino, indicando sólo los vértices que recorre:

$$v_0, v_1, ..., v_n.$$

Diremos que el camino es *cerrado* si $v_n = v_0$. En otro caso, diremos que el camino conecta v_0 con v_n.

Un *camino simple* es aquel en el cual todos los vértices son distintos. Mientras que un camino en el que todas las aristas son distintas se llama *paseo.*

La *longitud* de un camino es igual a número de aristas en la sucesión que lo define.

Un *ciclo* es un camino cerrado de *longitud* al menos 3, en el que todos los vértices son distintos, excepto el inicial v_0 y el final v_n.

Un ciclo de longitud k es llamado $k-$*ciclo.*

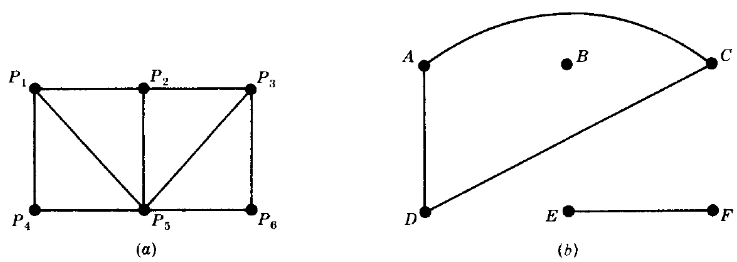
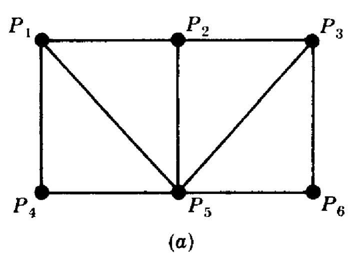


FIGURA 4. Conexidad en grafos

EJEMPLO 2.2. Consideremos el grafo 4(a). Considere las siguientes sucesiones

$$\begin{aligned}
\alpha &= (P_4, P_1, P_2, P_5, P_1, P_2, P_3, P_6)\,, \\
\beta &= (P_4, P_1, P_5, P_2, P_6) \\
\gamma &= (P_4, P_1, P_5, P_2, P_3, P_5, P_6) \\
\delta &= (P_4, P_1, P_5, P_3, P_6)\,.
\end{aligned}$$



α es un camino de P_4 a P_6, pero no es un paseo.

β no es un camino, ya que no existe alguna arista $\{P_2, P_6\}$.

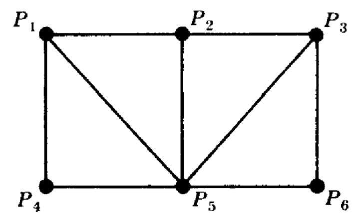
γ es un paseo, pero no es un camino simple.

δ es un camino simple de P_4 a P_6, pero no es el camino más corto, es decir, con el meno número de aristas. ¿Cuál es el camino más corto?

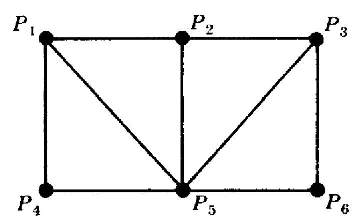
Eliminando aristas innecesarias, no es difícil ver que cualquier camino de u a v puede ser reemplazado por un camino simple.

Formalmente:

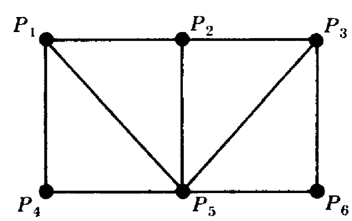
TEOREMA 2.2. *Existe un camino del vértice u a v si y solo si existe un camino simple de u a v.*



(a)

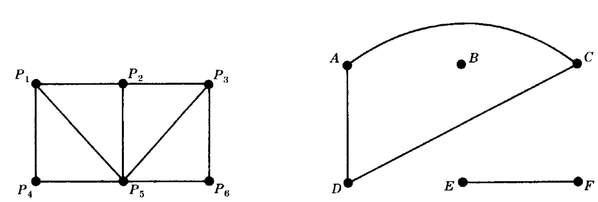


(a)



(a)

Conexidad y componentes conexas Un grafo G es conexo si existe un camino entre cualesquiera dos vértices. Por ejemplo, el grafo 4(a) es conexo, pero no así el grafo 4(b).



(a) (b)

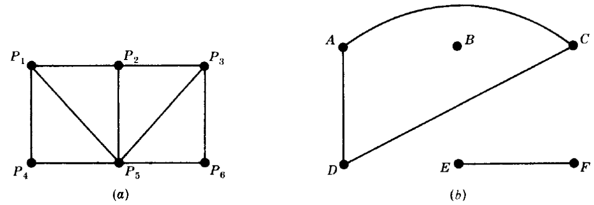
Consideremos un grafo G. Un subgrafo conexo H de G es llamado *componente conexa* de G si H no está contenido de manera propia en cualquier otro grafo conexo de G.

Por ejemplo, el grafo 4(b) tiene tres componentes conexas.

Observación 2.6. Formalmente, permitiendo que un vértice u esté conectado consigo mismo, la relación

$$u \ \texttt{está conectado con} \ v$$

es una relación de equivalencia en el conjunto de vértices del grafo G, y las clases de equivalencia de esta relación son las componentes conexas de G.



Distancia y diametro Consideremos un grafo conexo G. La distancia entre dos vértices u y v en G, denotada por $d(u, v)$, es la longitud del camino más corto entre u y v. Eñ diametro de G, escrito $diam(G)$, es la distancia máxima entre cualesquiera dos puntos en G.

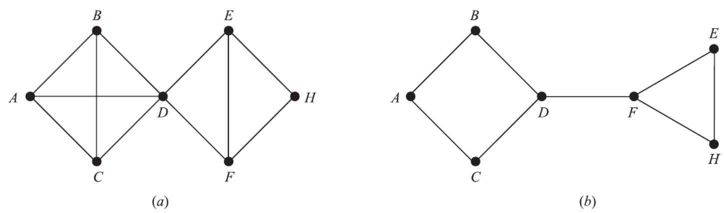


Figura 5. Distancia y diametro

Por ejemplo, en el grafo 5(a), el diamtero es 3, mientras que en el (b), el diametro es 4.

Puntos de corte y puentes Sea G un grafo conexo. Un vértice v en G es llamado *punto de corte* si $G - v$ es disconexo. Una arista e en G es llamada *puente* si $G - e$ es disconexo.

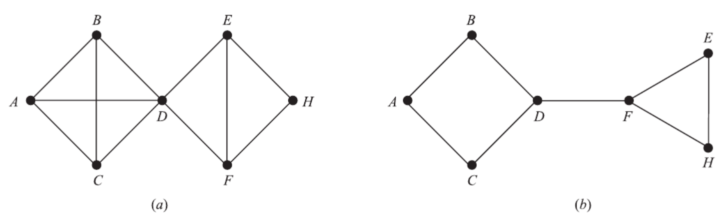


Figura 6. Puntos de corte y puentes

2.4. Grafos transitables y eulerianos. Un multigrafo es llamado *transitable* si existe un *paseo* (un camino dónde todos las aristas son diferentes), que incluye *todos los vértices y todas las aristas.*

Tal paseo será llamado *paseo transitable.*

Observación 2.7. De manera equivalente, un paseo transitable es un camino en el que todos los vértices se transitan *al menos* una vez, pero las aristas *exactamente* una vez.

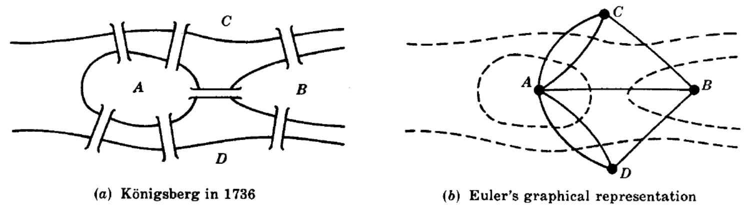


FIGURA 7. Puentes de Königsberg y su representación

PROPIEDAD 2.1. *Cualquier grafo conexo y finito con exactamente dos vértices impares es transitable. Un paseo transitable puede comenzar en alguno de los vértices impares y terminar en el otro vértice impar.*

Un grafo G es llamado *grafo Euleriano* si existe un *paseo transitable cerrado.*

A tal paseo le llamaremos *paseo Euleriano.*

TEOREMA 2.3 (Euler). *Un grafo conexo y finito es Euleriano si y solo si cada vértice tiene grado par.*

Grafos hamiltonianos En la definición de grafos Eulerianos se enfatizó pasar por todas las aristas.

Ahora, nos enfocaremos en visitar todos los vértices.

Un *circuito Hamiltoniano* es un grafo G es un camino cerrado que visita cada vértice en G *exactamente* una vez.

Si G admite un circuito Hamiltoniano, entonces G es llamado un *grafo Hamiltoniano.*

OBSERVACIÓN 2.8. En la definición de circuito Hamiltoniano, cuando decimos que el camino *visita* cada vértice exactamente una vez significa que, aunque el vértice inicial tiene que ser el mismo que el final, todos los demás vértices intermedios deben ser distintos.

OBSERVACIÓN 2.9. Un paseo Euleriano atraviesa cada una de las aristas exactamente una vez, pero los vértices se pueden repetir, mientras que un circuito Hamiltoniano visita cada uno de los vértices exactamente una vez, pero las aristas pueden repetirse.

TEOREMA 2.4. *Sea G un grafo conexo con n vértices. Entonces G es Hamiltoniano si $n \geq 3$ y $n \leq \deg(v)$ para cada vértice v en G.*

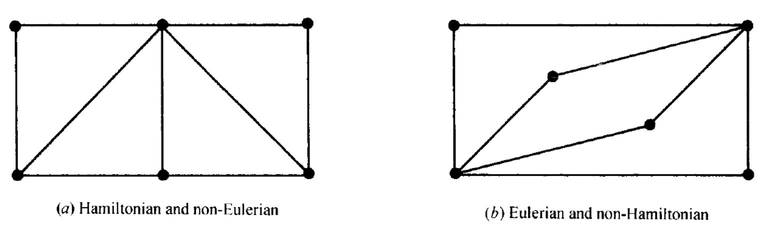


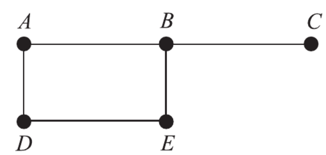
FIGURA 8. Circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

2.5. Matriz de adyacencia. Supongamos que G es un gráfo con m vértices y que estos han sido ordenados:

$$v_1, v_2, ..., v_m.$$

Entonces, la *matriz de adyacencia* $A = (a_{i,j})$ del grafo G es la matriz de dimensión $m \times m$ definida por:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i \texttt{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \texttt{en otro caso} \end{cases}$$



(*a*)

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(*b*)

FIGURA 9. Matriz de adyacencia

3. Digrafos

Los *grafos dirigidos* o *digrafos* son grafos en los que las aristas tienen una dirección.

3.1. Grafos dirigidos. Un grafo dirigido $G = G(V, E)$ consiste de:

1. Un conjunto $V = V(G)$ cuyos elementos son llamados *vértices*;
2. un conjunto $E = E(G)$ de *pares ordenados* ordenados de vértices llamados *arcos* o *aristas dirigidas.*

Supongamos que $e = (u, v)$ es un arco en el digrafo G. Entonces, la siguiente terminología es usada:

- e comienza en v y termina en v;
- u es el origen o punto inicial de e, mientras que v es el destino o punto final de e.
- v es un sucesor de u;
- u es adyacente a v y v es adyacente desde u.

Si $u = v$, e es llamado un *bucle.*

Si las aristas o los vértices de un digrafo están etiquetas con algún tipo de dato, diremos que es un *digrafo etiquetado.*

De manera similar a un grafo, un digrafo será finito si el conjunto de vértices y el de aristas es finito.

EJEMPLO 3.1. Consideremos el siguiente digrafo. Las aristas e_2 y e_3 son llamados *paralelos,* ya que ambos comienzan en B y terminan en A. La arista e_7 es un *bucle.*

EJEMPLO 3.2.

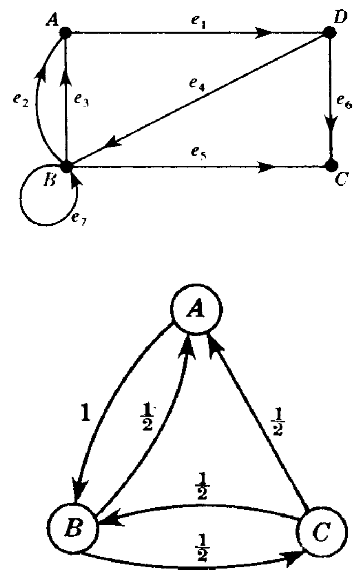


FIGURA 10. Proceso estocástico

3.2. Matriz de adyacencia. Ahora, sólo consideraremos *digrafos simples* $G(V, E)$, es decir, sin aristas paralelas. Entonces E es simplemente una relación en V.

De manera inversa, si R es una relación en V, entonces $G(V, R)$ es un digrafo simple.

En unidades anteriores, ya hemos construido digrafos asociados a relaciones de orden parcial, llamados diagramas de Hasse.

Supongamos que G es un digrafo simple con m vértices, y supongamos que los vértices de G han sido ordenados y son llamados $v_1, v_2, ..., v_m$.

Entonces la *matrix de adyacencia* $A = (a_{i,j})$ de G es la una matriz de dimensión $m \times m$ definida de la siguiente manera

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \exists e \in E : e = (v_i, v_j) \\ 0 & \texttt{en otro caso} \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 3.1. Las matrices de adyacencia de un mismo grafo dependen del orden en que se enumeren los vértices. Sin embargo, dos matrices de adyacencia de un mismo grafo están relacionadas por operaciones elementales: cambiar el orden de columnas y renglones.

EJEMPLO 3.3. Sea G el siguiente digrafo

La matriz identidad $I_m = (I_{i,j})$ de dimensión $m \times m$ se define como

$$I_{i,j} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

es decir, es matriz cuadrangular con $1's$ en la *diagonal principal*, y ceros en cualquier otra entrada.

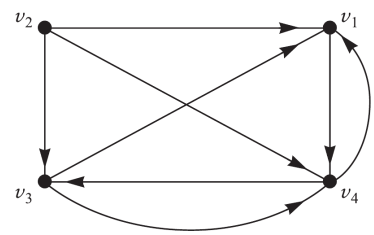


FIGURA 11. Construya su matriz de adyacencia del digrado anterior.

EJEMPLO 3.4.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La propiedad principal de una matriz identidad I_m es que es nuestra respecto a la multiplicación de matrices, es decir, para cualquier otra matriz $A \in M_n$:

$$AI_n = I_n A = A.$$

La potencia $n-$ésima de una matriz $A \in M_n$ se define de manera recursiva como

$$A^n = \begin{cases} I_n & n = 0 \\ AA^{n-1} & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

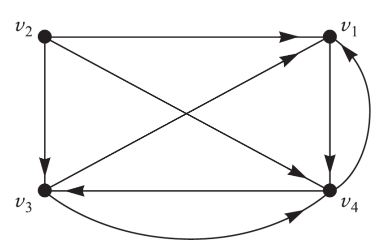
Es decir,

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = AA, ...$$

Definamos $a_k(i,j)$ como la entrada en la posición i,j de A^k.

PROPIEDAD 3.1. *Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G. Entonces $a_k(i,j)$ es igual al número de caminos de longitud k que van de v_i a v_j.*

Ejemplo Consideremos nuevamente el grafo



Recordemos que su matriz de adyacencia es

(AD)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observe que $a_2(4,1) = 1$, de manera que existe un solo camino de longitud 2 de v_4 a v_1. De manera similar, como $a_3(2,3) = 2$, entonces existen dos caminos de longitud 3 de v_2 a v_3.

Observación 3.2. Si definimos

$$B_r = \sum_{i=1}^{r} A^i,$$

entonces la entrada i, j de esta matriz nos indicará el número de caminos de longitud a lo más r de v_i a v_j.

En nuestro ejemplo, considerando A dado por (AD), tenemos que

$$B_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 7 & 11 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \tag{13}$$

¿Existe alguna manera de llegar al vertice v_2 desde el vértice v_1, sin importar la longitud del camino?

3.3. Matriz de accesibilidad. Sea $G = G(V, E)$ un grafo simple dirigido con m vértices $v_1, ..., v_m$. La *matriz de accesibilidad* de G es la matriz $m-$cuadrangular $P = (p_{ij})$ definida de la siguiente manera:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \texttt{existe un camino de } v_i \texttt{ a } v_j \\ 0 & \texttt{en otro caso} \end{cases}$$

Propiedad 3.2. *Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G con m vértices. Entonces la matriz de accesibilidad y*

$$B_m = \sum_{i=1}^{m} A^i \tag{14}$$

tienen exactamente las mismas entradas no nulas.

Definición 3.1. Un digrafo es *fuertemente conexo* si para cualquier par de vértices u, v existe al menos un camino de u a v y otro de v a u.

Propiedad 3.3. *Sea $A \in M_m$ la matriz de adyacencia de un grafo G. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *G es fuertemente conexo;*
2. *la matriz de accesibilidad P no tiene entradas nulas;*
3. *la matriz B_m, dada por (2), no tiene entradas nulas.*

EJEMPLO 3.5. Para encontrar la matriz de accesibilidad asociada a la matriz de adyacencia A, dada por (AD), basta sustitur las entradas no nulas en la matriz B_4, dada por (1), por $1's$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$