UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

Facultatea de Matematică și Informatică

Disertație masterală

# Étale stuff

*Autor:*
Andrei Sipoș

*Profesor coordonator:*
Lect. dr. Victor Vuletescu

București, 2014

# Cuprins

# Introducere

Acest text își propune să:

- enunțe cadrul de desfășurare al coomologiei étale
- prezinte versiuni étale ale unor rezultate fundamentale în topologie, precum dualitatea Poincaré sau formulele de tip Lefschetz
- aplice aceste rezultate la studiul funcțiilor zeta asociate varietăților peste corpuri finite

# Capitolul 1

# Situl étale

Pîs pîs pîs

## 1.1 Morfisme étale

**Definiția 1.1.** Un morfism de inele $A \to B$ se numește **plat** dacă functorul $B \otimes_A \cdot : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ este exact.

**Definiția 1.2.** Un morfism de varietăți (sau scheme) $\phi : Y \to X$ este **plat** dacă morfismele locale $\mathcal{O}_{X,\phi(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ sunt plate pentru orice $y$ din $Y$.

**Definiția 1.3.** Un morfism local de inele locale $f : A \to B$ se numește **neramificat** dacă $A/\mathfrak{m}_A \hookrightarrow B/f(\mathfrak{m}_A)B$ este o extindere finită și separabilă.

**Definiția 1.4.** Un morfism de varietăți (sau scheme) $\phi : Y \to X$ este **neramificat** dacă este de tip finit și morfismele locale $\mathcal{O}_{X,\phi(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ sunt neramificate pentru orice $y$ din $Y$.

**Definiția 1.5.** Un morfism (regulat) între două varietăți este **étale** dacă este plat și neramificat.

Morfismele étale au următoarele proprietăți:

**Propoziția 1.6.**

1. *Orice imersie deschisă este étală.*
2. *Compunerea a două morfisme étale este étală.*
3. *Un morfism care este schimbare de bază a unui morfism étale este étale.*
4. *Dacă $\phi \circ \psi$ și $\phi$ sunt étale, atunci și $\psi$ este étale.*

De acum încolo vom lucra cu o varietate $X$ peste un corp algebric închis $k$.

O vecinătate étală a unui punct $x$ din $X$ este o aplicație étală $\phi : U \to X$ împreună cu un punct $u \in U$ cu $\phi(u) = x$. Un morfism de vecinătăți étale $(V, v) \to (U, u)$ este o aplicație regulată de la $V$ la $U$ care duce pe $v$ în $u$ (dacă există, este unică, din anumite proprietăți ale morfismelor étale). Am obținut astfel o categorie index și putem defini **inelul local în** $x$ **pentru topologia étală** ca fiind:

$$\mathcal{O}_{X,\bar{x}} = \varinjlim_{(U,u)} \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

Dat fiind că orice vecinătate Zariski, fiind imersie deschisă, este étală, din proprietatea limitei inductive avem un morfism natural

$$\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$$

## 1.2

# Capitolul 2

# De la étale la $\ell$-adic

# Capitolul 3

# Numărarea punctelor

Problema pe care urmează să o formulăm a pornit de la cea a numărării punctelor de pe o curbă eliptică. Ne este cunoscută din studiul acelor curbe inegalitatea Hasse-Weil, care spune că pentru orice curbă eliptică $X$ definită peste un corp finit $\mathbb{F}_q$, dacă notăm $N_m(X) = \#X(\mathbb{F}_{q^m})$, are loc relația:

$$|N_m(X) - (q^m + 1)| \leq 2\sqrt{q^m}$$

Mai precis, există două numere algebrice $\alpha_1, \alpha_2$ de modul $\sqrt{q}$ astfel încât pentru orice $m$:

$$N_m(X) = 1 - \alpha_1^m - \alpha_2^m + q^m$$

André Weil a propus următoarea generalizare:

**Teorema 3.1.** *(Conjecturile Weil) Fie $X$ o varietate proiectivă netedă definită peste $\mathbb{F}_q$ de dimensiune $d$. Atunci:*

1. *există $2d$ numere naturale $b_0, ..., b_{2d}$ și o familie de numere complexe $\{a_{j,u}\}_{\substack{j\in\overline{0,2d}\\ s\in\overline{1,b_j}}}$ astfel încât pentru orice $m$ am:*

$$N_m(X) = \sum_{j=0}^{2d}(-1)^j(\sum_{u=1}^{b_j}\alpha_{j,u}^m)$$

   *Mai mult, $b_0 = b_{2d} = 1, \alpha_{0,1} = 1, \alpha_{2d,1} = q^d$. Numărul $\sum_j(-1)^j b_j$ va fi notat cu $\chi$.*

2. *pentru orice $j$, $b_j$ este egal cu $b_{2d-j}$, iar $(\frac{q^d}{\alpha_{2d-j,1}}, ..., \frac{q^d}{\alpha_{2d-j,b_j}})$ e o permutare a enumerării $(\alpha_{j,1}, ..., \alpha_{j,b_j})$.*

3. *pentru orice $j, u$, avem că $\alpha_{j,u}$ e număr algebric de modul $q^{\frac{j}{2}}$.*

Se observă că dacă $X$ este curbă eliptică se reconstituie relația de mai devreme, cu $b_1 = 2 = \dim H^1(\mathbb{C}/\Lambda, \mathbb{Q})$ (pentru $\Lambda$ o latice în planul complex).

Un mod mai pragmatic de a exprima conjecturile Weil este reprezentat de instrumentul funcțiilor generatoare.

Ne bazăm pe identitatea formală:

$$\log(\frac{1}{1-x}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

scrisă eventual

$$\frac{1}{1-x} = exp(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m})$$

ce se poate verifica via expansiune în serie Taylor în jurul lui zero.

Definind $Z_X(t) = exp(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{t^m}{m})$ (fixând pe X), obținem din punctul 1 al conjecturilor:

$$\begin{aligned}
Z_X(t) &= exp(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2d} (-1)^j \sum_{u=1}^{b_j} \alpha_{j,u}^m \frac{t^m}{m}) \\
&= \prod_{j=0}^{2d} (\prod_{u=1}^{b_j} exp(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a_{j,u}t)^m}{m}))^{(-1)^j} \\
&= \prod_{j=0}^{2d} (\frac{1}{\prod_{u=1}^{b_j} (1-\alpha_{j,u}t)})^{(-1)^j} \\
&= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}}
\end{aligned}$$

unde am notat $P_j(t) = \prod_{u=1}^{b_j} (1-\alpha_{j,u}t)$ (și am $P_0(t) = 1-t$, $P_{2d}(t) = 1-q^d t$).

Vom deriva acum din punctul 2 o relație pe care o va satisface $Z_X(t)$. Aplicăm relația de permutare între enumerări și obținem:

$$\begin{aligned}
P_{2d-j}(t) &= \prod_u (1-\alpha_{2d-j,u}t) = \prod_u (1-\frac{q^d}{a_{j,u}}t) \\
&= (\prod_u \alpha_{j,u})^{-1} \prod_u (\alpha_{j,u} - q^d t) \\
&= (\prod_u \alpha_{j,u})^{-1} (-1)^{b_j} (q^d t)^{b_j} \prod_u (1-\frac{\alpha_{j,u}}{q^d t}) \\
&= (\prod_u \alpha_{j,u})^{-1} (-1)^{b_j} (q^d t)^{b_j} P_j(\frac{1}{q^d t})
\end{aligned}$$

Folosim acum atât simetria $b_j$-urilor cât și permutarea enumerărilor:

$$\begin{aligned} P_j(t)P_{2d-j}(t) &= (q^d t)^{2b_j}(q^d)^{-b_j} P_j(\frac{1}{q^d t}) P_{2d-j}(\frac{1}{q^d t}) \\ &= (q^d)^{\frac{b_j+b_{2d-j}}{2}} t^{b_j+b_{2d-j}} P_j(\frac{1}{q^d t}) P_{2d-j}(\frac{1}{q^d t}) \end{aligned}$$

Însă $(\prod_s \alpha_{d,u})^2 = (q^d)^{b_d}$, deci $\prod_s \alpha_{d,u} = \pm(q^d)^{\frac{b_d}{2}}$, și pot scoate relația (pentru indicele d):

$$P_d(t) = \pm(-1)^{b_d}(q^d t)^{b_d}(q^d)^{\frac{b_d}{2}} P_d(\frac{1}{q^d t})$$

Și obțin astfel formula pentru funcția $Z_X$:

$$\begin{aligned} Z_X(t) &= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}} \\ &= \pm \prod_{j=0}^{2d} P_j(\frac{1}{q^d t})^{(-1)^{j+1}} (q^d)^{-\frac{\sum_j (-1)^{j+1} b_j}{2}} t^{-\sum_j (-1)^{j+1} b_j} \\ &= \pm q^{\frac{d\chi}{2}} t^{\chi} Z_X(\frac{1}{q^d t}) \end{aligned}$$

numită **ecuația funcțională** a lui $Z_X$.

O altă reformulare ne este dată de următoarea substituție:

$$\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s})$$

Notând pentru un punct închis $x \in X$ cu $\kappa(x)$ corpul rezidual al său, cu $deg(x)$ gradul extinderii $\kappa(x) : \mathbb{F}_q$ și cu

$$N_m(x) = \begin{cases} deg(x) & \text{dacă } deg(x) \mid m \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

avem din cele cunoscute de la teoria schemelor:

$$N_m = \sum_x N_m(x)$$

Obținem rescrierile:

$$\begin{aligned}
Z_X(t) &= \exp(\sum_{m\geq 1} N_m \frac{t^m}{m}) = \exp(\sum_{m\geq 1}\sum_x N_m(x)\frac{t^m}{m}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{\substack{m\geq 1\\ deg(x)\mid m}} N_m(x)\frac{t^m}{m}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{n\geq 1} deg(x)\frac{t^{n\cdot deg(x)}}{n\cdot deg(x)}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{n\geq 1} \frac{(t^{deg(x)})^n}{n}) = \exp(\sum_x \log\frac{1}{1-t^{deg(x)}}) \\
&= \exp\log\prod_x \frac{1}{1-t^{deg(x)}} = \prod_x \frac{1}{1-t^{deg(x)}}
\end{aligned}$$

și deci

$$\zeta_X(s) = \prod_x \frac{1}{1-(q^{deg(x)})^{-s}} = \prod_x \frac{1}{1-(\#\kappa(x))^{-s}}$$

Ultima formulă are sens pentru o schemă oarecare, nu neapărat peste un corp finit. De pildă, înlocuind X cu Spec $\mathbb{Z}$, apare:

$$\zeta_{\text{Spec}\,\mathbb{Z}}(s) = \prod_{\mathfrak{p}\in\text{Max}\,\mathbb{Z}} \frac{1}{1-(\#(\frac{\mathbb{Z}}{\mathfrak{p}}))^{-s}} = \prod_{p\text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

binecunoscuta funcție zeta a lui Riemann (punctele închise din Spec $\mathbb{Z}$ sunt precis idealele maximale ale lui $\mathbb{Z}$), ceea ce ne justifică notația.

Atenție, însă: funcția $Z_X$ nu are sens decât pentru scheme definite pentru un corp finit!

Este clar că $s \in \mathbb{C}$ este zerou, respectiv pol, pentru $\zeta_X$ dacă și numai dacă $q^{-s}$ va avea aceeași calitate pentru $Z_X$ (și orice $t \in \mathbb{C}^*$ se poate scrie ca $q^{-s}$, e drept, într-o infinitate de moduri). Iau un astfel de s. Din exprimarea rațională a lui $Z_X$ rezultă că $q^{-s} = \frac{1}{\alpha_{j,u}}$ pentru anumite j și u, iar ultima afirmație din conjecturi implică $|q^{-s}| = q^{-\frac{j}{2}}$. Scriu $s = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, și am $q^{-s} = e^{-s\ \ln q} = e^{-a\ \ln q - bi\ \ln q}$. Deci $q^{-\frac{j}{2}} = |e^{-a\ \ln q - bi\ \ln q}| = q^{-a}$ și $\frac{j}{2} = a = \mathbb{R}e\ s$.

Invers, acum, dacă fac presupunerea că orice s zerou sau pol al lui $\zeta_X$ are proprietatea că $\mathbb{R}e\ s = \frac{j}{2}$ (cu $j \in \overline{0, 2d}$), pot face următorul raționament. Iau $t \in \mathbb{C}^*$ zerou sau pol pentru $Z_X$ și fie s cu $t = q^{-s}$. Atunci s este zerou/pol pentru $\zeta_X$ și $\mathbb{R}e\ s = \frac{j}{2}$. Ca înainte, avem $|t| = |q^{-s}| = q^{-\mathbb{R}e\ s} = q^{-\frac{j}{2}}$. Deci zerourile și polii lui $Z_X$ au modulul $q^{-\frac{j}{2}}$.

Rezultă că acea condiție 3 este echivalentă cu faptul că funcția zeta a varietății are zerourile și polii pe liniile $\mathbb{R}e\ s = \frac{j}{2}$, ceea ce justifică numele dat condiției de **ipoteză Riemann**.

Mai mult decât atât, această separare după modul a zerourilor și polilor lui $Z_X$ ne permitm să extragem $P_j$-urile din $Z_X$ și să obținem în mod reciproc din ecuația funcțională condiția 2 din conjecturile Weil.

Toate aceste manipulări de formule ne învață să apreciem modul cum coomologia étală conduce în mod natural măcar la expresia rațională și la ecuația funcțională a funcției $Z_X$.

Să vedem cum. Mai întâi, vom obține o altă descriere a lui $X(\mathbb{F}_{q^m})$ cu ajutorul aplicației Frobenius.

Orice $\mathbb{F}_q$-algebră A admite endomorfismul Frobenius $a \mapsto a^q$, ce se dualizează la o aplicație Spec $A \to$ Spec $A$. Această familie de aplicații se prelungește unic la o întreagă transformare naturală $\{F_X : X \to X\}_{X \in \mathbb{F}_q - \mathrm{Sch}}$. Din naturalitate, rezultă că acționează pe varietăți afine sau proiective în modul firesc, prin ridicarea la puterea $q$ a coordonatelor. În particular $F_X$ are gradul $q^{\dim X}$, după cum se verifică ușor pe spațiile afine.

Rezultă deci $X(\mathbb{F}_{q^m}) = \mathrm{Fix}(F_X^m)$.

**Lema 3.2.** $\Gamma_{F^m} \cdot \Delta_X = \sum_{P \in \mathrm{Fix}(F_X^m)} P$ *(în sensul că toate apar cu multiplicitate* 1*).*

*Demonstrație.* E suficient să arătăm pentru $m = 1$ ($F^m$ este Frobeniusul lui $\mathbb{F}_{q^m}$). Notez $F = F_X$.

Fie $P \in \mathrm{Fix}(F)$. Înlocuiesc $X$ cu o vecinătate afină a lui $P$, să zicem $U =$ Spec $A$, cu $A = \mathbb{F}_q[t_1, ..., t_n] = \frac{\mathbb{F}_q[T_1,...,T_n]}{a}$.

Atunci pentru orice $i$ am $t_i \circ F = t_i^q$ și $(dt_i)_P \circ (dF)_P = (dt_i^q)_P = qt_i^{q-1}(dt_i)_P = 0$.

Ca urmare diferențiala lui $F$ în $P$ este zero, ca urmare graficul lui Frobenius nu este tangent la diagonală în $(P, P)$, iar numărul de intersecție (multiplicitatea) este 1. □

Aplicând formula de punct fix a lui Lefschetz, rezultă (pentru $(\ell, q) = 1$):

$$N_m = \sum_r (-1)^r \mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)})$$

Putem folosi formula pentru a prelucra funcția $Z$ a lui $X$:

$$\begin{aligned} Z_X(t) &= \exp(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{t^m}{m}) \\ &= \exp(\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{r=0}^{2d} (-1)^r \mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)}) \frac{t^m}{m}) \\ &= \prod_{r=0}^{2d} \exp(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)}) \frac{t^m}{m})^{(-1)^r} \end{aligned}$$

Scriem acum fiecare $F_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)}$ ca matrice pătratică superior triunghiulară (eventual peste o extindere a lui $\mathbb{F}_q$) cu numărul de linii egal cu $b_r = \dim H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Se observă atunci că dacă elementele de pe diagonală (valorile proprii) sunt $\alpha_{r,1}, ..., \alpha_{r,b_r}$, atunci $\mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)})$ va fi egal cu $\sum_{i=1}^{b_r} \alpha_{r,i}^m$ și deci pot aplica exact același raționament ca mai devreme pentru a exprima rațional pe $Z_X$.

Vom avea $Z_X \in \mathbb{Q}_\ell(t) \cap \mathbb{Q}[[t]] \subseteq \mathbb{Q}(t)$, însă aceasta nu ne garantează că fiecare $P_j$ este în $\mathbb{Q}[t]$ (că este „independent de $\ell$”) - aceasta se poate face doar presupunând ipoteza lui Riemann, care ne permite, după cum am spus și mai devreme, să separăm $P_j$-urile după modulul rădăcinilor.

Altă consecință a raționamentului precedent a fost că am identificat $\alpha_{j,u}$-urile ca fiind valorile proprii ale operatorilor induși de Frobenius pe spațiile de coomologie.

Aceasta ne arată în particular că $b_0 = b_{2d} = 1$.

Trecem acum la demonstrarea simetriei între valorile proprii pe spațiile de ordin $r$ și $2d-r$, relație care după cum am observat ne implică o ecuație funcțională.

Avem biliniara nedegenerată dată de dualitatea Poincaré:

$$\langle , \rangle = \eta_X \circ \smile : H^{2d-r}(X, \mathbb{Q}_\ell) \times H^r(X, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell(-d)$$

ce din start ne indică $b_r = b_{2d-r}$.

Știm că $F_r^* = F_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)}$ are adjunct relativ la $\langle , \rangle$:

$$\langle F_{*2d-r}(x), x' \rangle = \langle x, F_r^*(x') \rangle, \forall\, x \in H^{2d-r}(X, \mathbb{Q}_\ell), x' \in H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

Din considerente de algebră liniară rezultă că valorile proprii ale lui $F_r^*$ coincid cu ale lui $F_{*2d-r}$. Însă $F_{*r} \circ F_r^* = q^d (= deg\, F)$.

De aici rezultă că dacă $(\alpha_1, ..., \alpha_\nu)$ sunt valorile proprii ale lui $F_r^*$, $(\frac{q^d}{\alpha_1}, ..., \frac{q^d}{\alpha_\nu})$ sunt cele ale lui $F_{*r}$, deci (din cele anterioare) și ale lui $F_{2d-r}^*$, i.e. exact ce ni se cerea. Iar faptul că $\alpha_{0,1} = 1$ și $\alpha_{2d,1} = q^d$ rezultă din modul cum acționează operatorii Frobenius pe $H^0$, respectiv pe $H^{2d}$.

În acest moment, tot ce ne rămâne este să demonstrăm ipoteza lui Riemann.

## Capitolul 4

# «La conjecture de Weil»