UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

Facultatea de Matematică și Informatică

Disertație masterală

Étale stuff

Autor:
Andrei Sipoș

Profesor coordonator:
Lect. dr. Victor Vuletescu

București, 2014

Cuprins

Introducere

Acest text își propune să:

- enunțe cadrul de desfășurare al coomologiei étale
- prezinte versiuni étale ale unor rezultate fundamentale în topologie, precum dualitatea Poincaré sau formulele de tip Lefschetz
- aplice aceste rezultate la studiul funcțiilor zeta asociate varietăților peste corpuri finite

Capitolul 1

Situl étale

Capitolul 2

De la étale la ℓ-adic

Capitolul 3

Numărarea punctelor

Problema pe care urmează să o formulăm a pornit de la cea a studiului modului cum variază numărul de puncte de pe o curbă eliptică, în momentul când extindem corpul de bază. Ne este cunoscută din studiul acelor curbe inegalitatea Hasse-Weil, care spune că pentru orice curbă eliptică X definită peste un corp finit $\mathbb{F}_q$, dacă notăm $N_m(X) = \#X(\mathbb{F}_{q^m})$, are loc relația:

$$| N_m(X) - (q^m + 1) | \leq 2\sqrt{q^m}$$

Mai precis, există două numere algebrice α_1, α_2 de modul $\sqrt{q}$ astfel încât pentru orice m:

$$N_m(X) = 1 - \alpha_1^m - \alpha_2^m + q^m$$

André Weil a propus următoarea generalizare:

Teorema 3.1. *(Conjecturile Weil) Fie X o varietate proiectivă netedă definită peste $\mathbb{F}_q$ de dimensiune d. Atunci:*

1. *există $2d$ numere naturale $b_0, ..., b_{2d}$ și o familie de numere complexe $\{a_{j,u}\}_{\substack{j\in\overline{0,2d} \\ s\in\overline{1,b_j}}}$ astfel încât pentru orice m am:*
$$N_m(X) = \sum_{j=0}^{2d}(-1)^j(\sum_{u=1}^{b_j}\alpha_{j,u}^m)$$
Mai mult, $b_0 = b_{2d} = 1, \alpha_{0,1} = 1, \alpha_{2d,1} = q^d$. Numărul $\sum\limits_j(-1)^j b_j$ va fi notat cu χ.

2. *pentru orice j, b_j este egal cu b_{2d-j}, iar $(\frac{q^d}{\alpha_{2d-j,1}}, ..., \frac{q^d}{\alpha_{2d-j,b_j}})$ e o permutare a enumerării $(\alpha_{j,1}, ..., \alpha_{j,b_j})$.*

3. *pentru orice j, u, avem că $\alpha_{j,u}$ e număr algebric de modul $q^{\frac{j}{2}}$.*

Se observă că dacă X este curbă eliptică se reconstituie relația de mai devreme, cu $b_1 = 2 = \dim H^1(\mathbb{C}/\Lambda, \mathbb{Q})$ (pentru Λ o latice în planul complex).

Un mod mai pragmatic de a exprima conjecturile Weil este reprezentat de instrumentul funcțiilor generatoare.

Ne bazăm pe identitatea formală:

$$\log(\frac{1}{1-x}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

scrisă eventual

$$\frac{1}{1-x} = exp(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m})$$

ce se poate verifica via expansiune în serie Taylor în jurul lui zero.

Definind $Z_X(t) = exp(\sum_{m=1}^{\infty} N_m(X)\frac{t^m}{m})$, obținem din punctul 1 al conjecturilor:

$$\begin{aligned} Z_X(t) &= exp(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{2d}(-1)^j \sum_{u=1}^{b_j} \alpha_{j,u}^m \frac{t^m}{m}) \\ &= \prod_{j=0}^{2d}(\prod_{u=1}^{b_j} exp(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a_{j,u}t)^m}{m}))^{(-1)^j} \\ &= \prod_{j=0}^{2d}(\frac{1}{\prod_{u=1}^{b_j}(1-\alpha_{j,u}t)})^{(-1)^j} \\ &= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}} \end{aligned}$$

unde am notat $P_j(t) = \prod_{u=1}^{b_j}(1-\alpha_{j,u}t)$ (și am $P_0(t) = 1-t$, $P_{2d}(t) = 1-q^d t$).

Vom deriva acum din punctul 2 o relație pe care o va satisface $Z_X(t)$. Aplicăm relația de permutare între enumerări și obținem:

$$\begin{aligned} P_{2d-j}(t) &= \prod_u(1-\alpha_{2d-j,u}t) = \prod_u(1-\frac{q^d}{a_{j,u}}t) \\ &= (\prod_u \alpha_{j,u})^{-1}\prod_u(\alpha_{j,u}-q^d t) \\ &= (\prod_u \alpha_{j,u})^{-1}(-1)^{b_j}(q^d t)^{b_j}\prod_u(1-\frac{\alpha_{j,u}}{q^d t}) \\ &= (\prod_u \alpha_{j,u})^{-1}(-1)^{b_j}(q^d t)^{b_j} P_j(\frac{1}{q^d t}) \end{aligned}$$

Folosim acum atât simetria b_j-urilor cât și permutarea enumerărilor:

$$\begin{aligned}P_j(t)P_{2d-j}(t) &= (q^d t)^{2b_j}(q^d)^{-b_j}P_j(\frac{1}{q^d t})P_{2d-j}(\frac{1}{q^d t})\\ &= (q^d)^{\frac{b_j+b_{2d-j}}{2}}t^{b_j+b_{2d-j}}P_j(\frac{1}{q^d t})P_{2d-j}(\frac{1}{q^d t})\end{aligned}$$

Însă $(\prod_s \alpha_{d,u})^2 = (q^d)^{b_d}$, deci $\prod_s \alpha_{d,u} = \pm(q^d)^{\frac{b_d}{2}}$, și pot scoate relația (pentru indicele d):

$$P_d(t) = \pm(-1)^{b_d}(q^d t)^{b_d}(q^d)^{\frac{b_d}{2}}P_d(\frac{1}{q^d t})$$

Și obțin astfel formula pentru funcția Z_X:

$$\begin{aligned}Z_X(t) &= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}}\\ &= \pm\prod_{j=0}^{2d} P_j(\frac{1}{q^d t})^{(-1)^{j+1}}(q^d)^{-\frac{\sum_j (-1)^{j+1}b_j}{2}}t^{-\sum_j (-1)^{j+1}b_j}\\ &= \pm q^{\frac{d\chi}{2}}t^{\chi}Z_X(\frac{1}{q^d t})\end{aligned}$$

numită **ecuația funcțională** a lui Z_X.

O altă reformulare ne este dată de următoarea substituție:

$$\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s})$$

Notând pentru un punct închis $x \in X$ cu $\kappa(x)$ corpul rezidual al său, cu $deg(x)$ gradul extinderii $\kappa(x) : \mathbb{F}_q$ și cu

$$N_m(x) = \begin{cases} deg(x) & \text{dacă } deg(x) \mid m \\ 0 & \text{altfel}\end{cases}$$

avem din cele cunoscute de la teoria schemelor:

$$N_m(X) = \sum_x N_m(x)$$

Obținem rescrierile:

$$\begin{aligned}
Z_X(t) &= \exp(\sum_{m\geq 1} N_m(X)\frac{t^m}{m}) = \exp(\sum_{m\geq 1}\sum_x N_m(x)\frac{t^m}{m}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{\substack{m\geq 1\\ \deg(x)|m}} N_m(x)\frac{t^m}{m}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{n\geq 1} \deg(x)\frac{t^{n\cdot\deg(x)}}{n\cdot\deg(x)}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{n\geq 1} \frac{(t^{\deg(x)})^n}{n}) = \exp(\sum_x \log\frac{1}{1-t^{\deg(x)}}) \\
&= \exp\log\prod_x \frac{1}{1-t^{\deg(x)}} = \prod_x \frac{1}{1-t^{\deg(x)}}
\end{aligned}$$

și deci

$$\zeta_X(s) = \prod_x \frac{1}{1-(q^{\deg(x)})^{-s}} = \prod_x \frac{1}{1-(\#\kappa(x))^{-s}}$$

Ultima formulă are sens pentru o schemă oarecare, nu neapărat peste un corp finit. De pildă, înlocuind X cu Spec $\mathbb{Z}$, apare:

$$\zeta_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}(s) = \prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Max}\,\mathbb{Z}} \frac{1}{1-(\#(\frac{\mathbb{Z}}{\mathfrak{p}}))^{-s}} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

binecunoscuta funcție zeta a lui Riemann (punctele închise din Spec $\mathbb{Z}$ sunt precis idealele maximale ale lui $\mathbb{Z}$), ceea ce ne justifică notația.

Atenție, însă: funcția Z_X nu are sens decât pentru scheme definite peste un corp finit!

Este clar că $s \in \mathbb{C}$ este zerou, respectiv pol, pentru ζ_X dacă și numai dacă q^{-s} va avea aceeași calitate pentru Z_X (și orice $t \in \mathbb{C}^*$ se poate scrie ca q^{-s}, e drept, într-o infinitate de moduri). Iau un astfel de s. Din exprimarea rațională a lui Z_X rezultă că $q^{-s} = \frac{1}{\alpha_{j,u}}$ pentru anumite j și u, iar ultima afirmație din conjecturi implică $\mid q^{-s} \mid = q^{-\frac{j}{2}}$. Scriu $s = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, și am $q^{-s} = e^{-s\ \ln q} = e^{-a\ \ln q - bi\ \ln q}$. Deci $q^{-\frac{j}{2}} = \mid e^{-a\ \ln q - bi\ \ln q} \mid = q^{-a}$ și $\frac{j}{2} = a = \mathbb{R}e\ s$.

Invers, acum, dacă fac presupunerea că orice s zerou sau pol al lui ζ_X are proprietatea că $\mathbb{R}e\ s = \frac{j}{2}$ (cu $j \in \overline{0, 2d}$), pot face următorul raționament. Iau $t \in \mathbb{C}^*$ zerou sau pol pentru Z_X și fie s cu $t = q^{-s}$. Atunci s este zerou/pol pentru ζ_X și $\mathbb{R}e\ s = \frac{j}{2}$. Ca înainte, avem $\mid t \mid = \mid q^{-s} \mid = q^{-\mathbb{R}e\ s} = q^{-\frac{j}{2}}$. Deci zerourile și polii lui Z_X au modulul $q^{-\frac{j}{2}}$.

Rezultă că acea condiție 3 este echivalentă cu faptul că funcția zeta a varietății are zerourile și polii pe liniile $\mathbb{R}e\ s = \frac{j}{2}$, ceea ce justifică numele dat condiției de **ipoteză Riemann**.

Mai mult decât atât, această separare după modul a zerourilor și polilor lui Z_X ne permitm să extragem P_j-urile din Z_X și să obținem în mod reciproc din ecuația funcțională condiția 2 din conjecturile Weil.

Toate aceste manipulări de formule ne învață să apreciem modul cum coomologia étală conduce în mod natural măcar la expresia rațională și la ecuația funcțională a funcției Z_X.

Să vedem cum. Mai întâi, vom obține o altă descriere a lui $X(\mathbb{F}_{q^m})$ cu ajutorul aplicației Frobenius.

Orice $\mathbb{F}_q$-algebră A admite endomorfismul Frobenius $a \mapsto a^q$, ce se dualizează la o aplicație Spec A $\to$ Spec A. Această familie de aplicații se prelungește unic la o întreagă transformare naturală $\{F_X : X \to X\}_{X \in \mathbb{F}_q - Sch}$. Din naturalitate, rezultă că acționează pe varietăți afine sau proiective în modul firesc, prin ridicarea la puterea q a coordonatelor. În particular F_X are gradul $q^{\dim X}$, după cum se verifică ușor pe spațiile afine.

Rezultă deci $X(\mathbb{F}_{q^m}) = \mathrm{Fix}(F_X^m)$.

Lema 3.2. $\Gamma_{F^m} \cdot \Delta_X = \sum\limits_{P \in \mathrm{Fix}(F_X^m)} P$ *(în sensul că toate apar cu multiplicitate* 1*).*

Demonstrație. E suficient să arătăm pentru $m = 1$ (F^m este Frobeniusul lui $\mathbb{F}_{q^m}$). Notez $F = F_X$.

Fie $P \in \mathrm{Fix}(F)$. Înlocuiesc X cu o vecinătate afină a lui P, să zicem $U =$ Spec A, cu $A = \mathbb{F}_q[t_1, ..., t_n] = \frac{\mathbb{F}_q[T_1,...,T_n]}{a}$.

Atunci pentru orice i am $t_i \circ F = t_i^q$ și $(dt_i)_P \circ (dF)_P = (dt_i^q)_P = qt_i^{q-1}(dt_i)_P = 0$.

Ca urmare diferențiala lui F în P este zero, ca urmare graficul lui Frobenius nu este tangent la diagonală în (P, P), iar numărul de intersecție (multiplicitatea) este 1. □

Aplicând formula de punct fix a lui Lefschetz, rezultă (pentru $(\ell, q) = 1$):

$$N_m(X) = \sum_r (-1)^r \mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)})$$

Putem folosi formula pentru a prelucra funcția Z a lui X:

$$\begin{aligned} Z_X(t) &= \exp\Big(\sum_{m=1}^{\infty} N_m(X)\frac{t^m}{m}\Big) \\ &= \exp\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{r=0}^{2d}(-1)^r \mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)})\frac{t^m}{m}\Big) \\ &= \prod_{r=0}^{2d} \exp\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)})\frac{t^m}{m}\Big)^{(-1)^r} \end{aligned}$$

Scriem acum fiecare $F_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)}$ ca matrice pătratică superior triunghiulară (eventual peste o extindere a lui $\mathbb{F}_q$) cu numărul de linii egal cu $b_r = \dim H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Se observă atunci că dacă elementele de pe diagonală (valorile proprii) sunt $\alpha_{r,1}, ..., \alpha_{r,b_r}$, atunci $\mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)})$ va fi egal cu $\sum\limits_{i=1}^{b_r} \alpha_{r,i}^m$ și deci pot aplica exact același raționament ca mai devreme pentru a exprima rațional pe Z_X.

Vom avea $Z_X \in \mathbb{Q}_\ell(t) \cap \mathbb{Q}[[t]] \subseteq \mathbb{Q}(t)$, însă aceasta nu ne garantează că fiecare P_j este în $\mathbb{Q}[t]$ (altfel spus, că este „independent de ℓ") - aceasta se poate face doar presupunând ipoteza lui Riemann, care ne permite, după cum am spus și mai devreme, să separăm P_j-urile după modulul rădăcinilor.

Altă consecință a raționamentului precedent a fost că am identificat $\alpha_{j,u}$-urile ca fiind valorile proprii ale operatorilor induși de Frobenius pe spațiile de coomologie.

Aceasta ne arată în particular că $b_0 = b_{2d} = 1$.

Trecem acum la demonstrarea simetriei între valorile proprii pe spațiile de ordin r și $2d-r$, relație care după cum am observat ne implică o ecuație funcțională.

Avem biliniara nedegenerată dată de dualitatea Poincaré:

$$\langle , \rangle = \eta_X \circ \smile : H^{2d-r}(X, \mathbb{Q}_\ell) \times H^r(X, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell(-d)$$

ce din start ne indică $b_r = b_{2d-r}$.

Știm că $F_r^* = F_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)}$ are adjunct relativ la $\langle , \rangle$:

$$\langle F_{*2d-r}(x), x' \rangle = \langle x, F_r^*(x') \rangle, \forall\, x \in H^{2d-r}(X, \mathbb{Q}_\ell), x' \in H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

Din considerente de algebră liniară rezultă că valorile proprii ale lui F_r^* coincid cu ale lui F_{*2d-r}. Însă $F_{*r} \circ F_r^* = q^d (= deg\, F)$.

De aici rezultă că dacă $(\alpha_1, ..., \alpha_\nu)$ sunt valorile proprii ale lui F_r^*, $(\frac{q^d}{\alpha_1}, ..., \frac{q^d}{\alpha_\nu})$ sunt cele ale lui F_{*r}, deci (din cele anterioare) și ale lui F_{2d-r}^*, i.e. exact ce ni se cerea. Iar faptul că $\alpha_{0,1} = 1$ și $\alpha_{2d,1} = q^d$ rezultă din modul cum acționează operatorii Frobenius pe H^0, respectiv pe H^{2d}.

În acest moment, tot ce ne rămâne este să demonstrăm ipoteza lui Riemann.

Capitolul 4

«La conjecture de Weil»

Mai precis, ce avem de demonstrat este:

Teorema 4.1. *(Deligne, 1974) Fie* X *o varietate proiectivă* d*-dimensională absolut nesingulară și absolut ireductibilă definită peste* $\mathbb{F}_q$*;* α *o valoare proprie a lui* F_r^**;* τ *o scufundare a lui* $\mathbb{Q}_\ell$ *în* $\mathbb{C}$*.*

Atunci $\tau(\alpha)$ *(mai departe simbolul* τ *va fi subînțeles) este algebric și de modul* $q^{\frac{r}{2}}$*.*

În primul rând, se observă că este suficient să demonstrăm pentru varietatea obținută după o schimbare de bază spre o extindere finită a corpului de definiție - să zicem, de grad m. Asta deoarece operatorul Frobenius pe varietatea nouă va fi puterea m a celui de pe varietatea veche. Dacă α este valoare proprie pentru Frobenius-ul vechi, α^m este pentru cel nou. Din ipoteza noastră, α^m are modulul $(q^m)^{\frac{r}{2}}$. Ca urmare, α va avea modulul $q^{\frac{r}{2}}$. Aceasta ne va permite să facem un număr finit de extinderi finite de-a lungul demonstrației, fără a pierde din generalitatea enunțului.

În al doilea rând, se vede că pot demonstra doar pentru spațiile cu rangul cel mult d. Aceasta deoarece de la rangul $d+1$ încolo, valorile proprii au simetria implicată de dualitatea Poincaré pe care am văzut-o mai devreme.

În al treilea rând, vom arăta că este suficent să arătăm teorema doar pentru $r = d$. Iată de ce: din teorema lui Bertini, există $Z \subset X$ o secțiune hiperplană netedă (eventual extinzând corpul). Aplicând teorema Lefschetz slabă, aplicația canonică (ce este compatibilă cu Frobenius) $H^r(X, \mathbb{Q}_\ell) \to H^r(Z, \mathbb{Q}_\ell)$ este injectivă pentru $r \leq d-1$ și pot aplica un raționament prin inducție (pasul de bază fiind varietățile zero-dimensionale, pentru care clar este adevărat, din modul cum acționează Frobenius pe H^0).

În al patrulea rând, putem să arătăm chiar și numai pentru varietățile de dimensiune pară, iar pentru acelea, doar că valorile proprii α corespunzătoare spațiului de coomologie din mijloc satisfac inegalitatea

$$q^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} \leq \mid \alpha \mid \leq q^{\frac{d}{2}+\frac{1}{2}}$$

Presupunând că am arătat așa ceva, vreau să demonstrez teorema pentru o varietate oarecare X și α valoare proprie a lui F_d^*. Fie k număr natural. Iau Y ca fiind produsul lui X cu el însuși de 2k ori. Conform Künneth, $H^d(X, \mathbb{Q}_\ell)^{\otimes 2k}$ se scufundă în $H^{2kd}(Y, \mathbb{Q}_\ell)$, iar α^{2k} va fi valoare proprie a lui Frobenius aplicat pe spațiul de pe urmă. Ca urmare, va avea loc:

$$q^{\frac{2kd}{2}-\frac{1}{2}} \leq\mid \alpha \mid^{2k} \leq q^{\frac{2kd}{2}+\frac{1}{2}}$$

Scoțând radical de ordin 2k, obțin:

$$q^{\frac{d}{2}-\frac{1}{4k}} \leq\mid \alpha \mid\leq q^{\frac{d}{2}+\frac{1}{4k}}$$

Cum relația are loc pentru k arbitrar, trecându-l la infinit, obțin $\mid \alpha \mid= q^{\frac{d}{2}}$.

De acum înainte, prin urmare, d va fi par.

În acest moment, după ce am încheiat reducerile geometrice de mai devreme, putem trece la miezul problemei și să introducem tehnica numită *pencil Lefschetz*.

Alegem o scufundare a lui X într-un $\mathbb{P}^N$ și luăm L un subspațiu liniar proiectiv de codimensiune 2 ce intersectează transversal pe X. Mulțimea hiperplanelor din $\mathbb{P}^N$ ce conțin pe L are ca spațiu de moduli pe $\mathbb{P}^1$ și deci poate fi organizată ca o familie $\{H_d\}_{d\in\mathbb{P}^1}$. Iau apoi mulțimea:

$$\widetilde{X} = \{(x, d) \in X \times \mathbb{P}^1 \mid x \in H_d\}$$

ce are structură de varietate algebrică, anume este *eclatarea lui* X *în* $L\cap X$ (este netedă, din faptul că L intersectează transversal pe X). Ea este înzestrată cu două aplicații canonice:

$$X \leftarrow \widetilde{X} \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1$$

iar din teoria eclatării, aplicația $H^d(X, \mathbb{Q}_\ell) \to H^d(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ este injectivă. Putem trece deci de la X la $\widetilde{X}$ fără probleme.

Ceea ce caracterizează $\widetilde{X}$ este că este înzestrat cu aplicația $f : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^1$. Ea se numește **pencil Lefschetz** dacă numai un număr finit de fibre $f^{-1}(d)$, pentru d din $\mathbb{P}^1$ (fibre pe care le vom nota cu $\widetilde{X}_d$) sunt singulare, iar acelea care sunt au drept singularități numai câte un punct dublu ordinare. Presupun că fac o extindere a corpului astfel încât toate aceste singularități să fie definite de ecuații peste corpul nou.

Toată această construcție depinde de alegerea scufundării și a L-ului. Însă există un rezultat ce ne spune că există măcar o scufundare și un L corespunzător astfel încât f-ul rezultant să fie pencil Lefschetz (dacă lucram în caracteristică 0 exista un L în fiece scufundare).

Notăm cu U mulțimea d-urilor din $\mathbb{P}^1$ pentru care fibra e netedă, cu S complementara lui U și cu j aplicația de incluziune a lui U în $\mathbb{P}^1$.

Ne vom folosit în continuare de șirul spectral Leray, ale cărui aplicații sunt compatibile cu operatorii Frobenius:

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^1, R^q f_* \mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow H^{p+q}(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

Deci $H^d(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ admite o filtrare cu spațiile cât $\{E_\infty^{p,q}\}_{p+q=d}$, care la rândul lor sunt subcâturi ale $E_2^{p,q}$-uri, ca urmare e suficient să arăt pentru spațiile din stânga. Dintr-o teoremă de anulare, acestea sunt nenule doar pentru p între 0 și 2.

Notez $d-1$ cu n (număr impar). Astfel ne-am redus la a considera următoarele spații:

$$H^2(\mathbb{P}^1, R^{n-1}f_*\mathbb{Q}_\ell);\ H^0(\mathbb{P}^1, R^{n+1}f_*\mathbb{Q}_\ell);\ H^1(\mathbb{P}^1, R^n f_*\mathbb{Q}_\ell)$$

Ne va fi de folos următorul rezultat:

Teorema 4.2. *(a ciclilor evanescenți) Fie u din U. Există E subspațiu vectorial al lui $H^n(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)$ (spațiul ciclilor evanescenți) astfel încât:*

I. Când $E = 0$:

1. *Fasciculul $R^i f_*\mathbb{Q}_\ell$ este constant pentru $i \neq n+1$.*
2. *Există un șir exact scurt de fascicule pe $\mathbb{P}^1$:*

$$0 \to \bigoplus_{s\in S}(\mathbb{Q}_\ell(-\frac{n+1}{2}))_s \to R^{n+1}f_*\mathbb{Q}_\ell \to \underline{H^{n+1}(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)} \to 0$$

II. Când $E \neq 0$ (ceea ce se întâmplă mai frecvent):

1. *Fasciculul $R^i f_*\mathbb{Q}_\ell$ este constant pentru $i \neq n$.*
2. $R^n f_*\mathbb{Q}_\ell = j_* j^* R^n f_*\mathbb{Q}_\ell$.
3. *E este subspațiu stabil la acțiunea lui $\pi_1(U, u)$ iar acțiunea pe spațiul cât este trivială.*
4. *Notând cu $E^\perp$ subspațiul $H^n(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)^{\pi_1(U,u)}$, avem că acțiunea pe $\frac{E}{E\cap E^\perp}$ este absolut ireductibilă.*
5. *Notăm fasciculele constructibile pe U asociate lui E și $E^\perp$ cu $\mathcal{E}$, respectiv $\mathcal{E}^\perp$ (ambele sunt subfascicule ale lui $j^*R^n f_*\mathbb{Q}_\ell$, ce corespunde lui $H^n(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)$).*
   a) *dacă $E \subseteq E^\perp$, există șirul exact de fascicule pe $\mathbb{P}^1$:*

$$0 \to j_*\mathcal{E}^\perp \to R^n f_*\mathbb{Q}_\ell \to j_*(\frac{j^*R^n f_*\mathbb{Q}_\ell}{\mathcal{E}^\perp}) \to \bigoplus_{s\in S}(\mathbb{Q}_\ell(-\frac{n+1}{2}))_s \to 0$$

   b) *dacă $E \nsubseteq E^\perp$, există următoarele două șiruri exacte scurte de fascicule pe $\mathbb{P}^1$:*

$$0 \to j_*\mathcal{E} \to R^n f_*\mathbb{Q}_\ell \to j_*(\frac{j^*R^n f_*\mathbb{Q}_\ell}{\mathcal{E}}) \to 0$$

$$0 \to j_*(\mathcal{E}\cap\mathcal{E}^\perp) \to j_*\mathcal{E} \to j_*(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}\cap\mathcal{E}^\perp}) \to 0$$

6. *Produsul cup pe coomologia lui $\widetilde{X}_u$ induce o biliniară simplectică*

$$\psi : \frac{E}{E\cap E^\perp} \times \frac{E}{E\cap E^\perp} \to \mathbb{Q}_\ell(-n)$$

care este echivariantă relativ la acțiunea lui $\pi_1(U, u)$, iar aplicația canonică rezultantă:

$$\pi_1(U, u) \to Sp(\frac{E}{E\cap E^\perp}, \psi)$$

are imaginea deschisă și densă.

Mai departe, pot presupune că există u_0 punct al lui U definit peste $\mathbb{F}_q$ astfel încât $\widetilde{X}_{u_0}$ admite o secțiune hiperplană netedă Z_0, la rândul ei definită peste $\mathbb{F}_q$ (făcând eventual extinderi), de dimensiune, firește, $d-2$ (fiind tot pară, voi putea aplica un raționament prin inducție mai jos).

Demonstrăm mai întâi aserțiunea despre spațiile $H^2(\mathbb{P}^1, R^{n-1}f_*\mathbb{Q}_\ell)$ și $H^0(\mathbb{P}^1, R^{n+1}f_*\mathbb{Q}_\ell)$.

Dat fiind că fasciculul $R^{n-1}f_*\mathbb{Q}_\ell$ este constant în ambele cazuri, el are fibra $H^{n-1}(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)$, din teorema de schimbare proprie a bazei. Deci $H^2(\mathbb{P}^1, R^{n-1}f_*\mathbb{Q}_\ell) = H^2(\mathbb{P}^1, \underline{H^{n-1}(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)}) = H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^{n-1}(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell(-1) \otimes H^{n-1}(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell) = H^{n-1}(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)(-1)$. Pentru ultimul modul putem aplica ipoteza de inducție, deoarece se scufundă (din teorema Lefschetz slabă) în $H^{n-1}(Z, \mathbb{Q}_\ell)(-1)$, pentru care aplic ipoteza de inducție.

Pentru $H^0(\mathbb{P}^1, R^{n+1}f_*\mathbb{Q}_\ell)$, în cazul în care E e nenul, argumentul funcționează asemănător cu cel precedent, cu deosebirea că aplicăm surjectivitatea morfismului Gysin, care schimbă și rangul coomologiei de la $n+1$ la $n-1$ pentru Z pentru a putea funcționa inducția. Când E este nul, nu fac decât să trec de la șirul exact scurt din teoremă la șirul exact lung în coomologie și să aplic acolo inducția.

Ne-a rămas $H^1(\mathbb{P}^1, R^n f_*\mathbb{Q}_\ell)$. Când E este nul, $R^n f_*\mathbb{Q}_\ell$ este constant și cum $H^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell) = 0$, am și $H^1(\mathbb{P}^1, R^n f_*\mathbb{Q}_\ell) = 0$ și deci nu am nimic de demonstrat.

Când E este nenul, trec prin j_* incluziunea de fascicule de pe U într-una pe $\mathbb{P}^1$:

$$0 \subseteq j_*(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp) \subseteq j_*\mathcal{E} \subseteq R^n f_*\mathbb{Q}_\ell$$

(la ultimul am aplicat punctul 2 din cazul II al teoremei).

Subcazul simplu este $E \subseteq E^\perp$. Notând cu $\mathcal{F}$ conucleul morfismului $j_*\mathcal{E}^\perp \to R^n f_*\mathbb{Q}_\ell$, ce este izomorf cu nucleul morfismului $j_*(\frac{j^*R^n f_*\mathbb{Q}_\ell}{\mathcal{E}^\perp}) \to \bigoplus_{s\in S}(\mathbb{Q}_\ell(-\frac{n+1}{2}))_s$, putem sparge șirul exact din teoremă în două șiruri exacte scurte:

$$0 \to j_*\mathcal{E}^\perp \to R^n f_*\mathbb{Q}_\ell \to \mathcal{F} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{F} \to j_*(\frac{j^*R^n f_*\mathbb{Q}_\ell}{\mathcal{E}^\perp}) \to \bigoplus_{s\in S}(\mathbb{Q}_\ell(-\frac{n+1}{2}))_s \to 0$$

Cum $j_*(\frac{j^*R^n f_*\mathbb{Q}_\ell}{\mathcal{E}^\perp})$ e constant, are H^1 nul (suntem pe $\mathbb{P}^1$), și rezultă că în al doilea șir exact lung corespunzător, morfismul conectant de la H^0 la H^1 e surjectiv, și rezultă ce trebuie pentru $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{F})$. La fel, $j_*\mathcal{E}^\perp$ e constant și deci modulul nostru, $H^1(\mathbb{P}^1, R^n f_*\mathbb{Q}_\ell)$ se scufundă în $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{F})$ (considerând primul șir exact lung corespunzător). De aici rezultă concluzia.

Trecem la subcazul ce prezintă probleme, $E \nsubseteq E^\perp$. Din cele două șiruri exacte lungi corespunzătoare șirurilor exacte scurte din teoremă, obțin că este suficient să arăt aserțiunea pentru modulul $H^1(\mathbb{P}^1, j_*(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}\cap\mathcal{E}^\perp}))$ (am folosit că $j_*(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)$ și $j_*(\frac{j^*R^n f_*\mathbb{Q}_\ell}{\mathcal{E}})$ sunt constante).

În primul rând, pot arăta doar $|\alpha| \leq q^{\frac{d+1}{2}}$ (utilizând dualitatea și forma simplectică).

În al doilea rând, dat fiind că supp $\mathrm{coker}(j_!(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}\cap\mathcal{E}^\perp}) \to j_*(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}\cap\mathcal{E}^\perp})) = S$ (zero-dimensional și finit), am că $H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{coker}) = 0$, și ca urmare morfismul indus pe H^1 este surjectiv. Am redus la a studia problema pe $H^1(\mathbb{P}^1, j_!(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}\cap\mathcal{E}^\perp})) = H^1_c(U, \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}\cap\mathcal{E}^\perp})$. Vom refolosi notația $\mathcal{F}$ pentru a denota fasciculul $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}\cap\mathcal{E}^\perp}$ pe U, iar $\mathcal{F}_0$ va fi fasciculul corespunzător pe $U(\mathbb{F}_q)$. Notăm cu V $\pi_1(U_0, u)$-reprezentarea corespunzătoare. Reamintim că avem biliniara simplectică $\pi_1(U, u)$-echivariantă:

$$\psi : V \times V \to \mathbb{Q}_\ell(-n)$$

iar aplicația canonică rezultantă $\pi_1(U, u) \to Sp(\frac{E}{E\cap E^\perp}, \psi)$ are imaginea deschisă și densă.