

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI  
Facultatea de Matematică și Informatică

Disertație masterală

---

**Étale stuff**

---

*Autor:*  
Andrei Sipoș

*Profesor coordonator:*  
Lect. dr. Victor Vuletescu

București, 2014



# Cuprins

Introducere	v
1 Situl étale	1
2 De la étale la $\ell$ -adic	3
3 Numărarea punctelor	5
4 «La conjecture de Weil»	11



# Introducere

Acest text își propune să:

- enunțe cadrul de desfășurare al coomologiei étale
- prezinte versiuni étale ale unor rezultate fundamentale în topologie, precum dualitatea Poincaré sau formulele de tip Lefschetz
- aplice aceste rezultate la studiul funcțiilor zeta asociate varietăților peste corpuri finite



# Capitolul 1

## Situl étale

**Definiția 1.1.** Un morfism de inele  $A \rightarrow B$  se numește **plat** dacă functorul  $B \otimes_A \cdot : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  este exact.

**Definiția 1.2.** Un morfism de varietăți (sau scheme)  $\phi : Y \rightarrow X$  este **plat** dacă morfismele locale  $\mathcal{O}_{X, \phi(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$  sunt plate pentru orice  $y$  din  $Y$ .

**Definiția 1.3.** Un morfism local de inele locale  $f : A \rightarrow B$  se numește **neramificat** dacă  $A/\mathfrak{m}_A \hookrightarrow B/f(\mathfrak{m}_A)B$  este o extindere finită și separabilă.

**Definiția 1.4.** Un morfism de varietăți (sau scheme)  $\phi : Y \rightarrow X$  este **neramificat** dacă este de tip finit și morfismele locale  $\mathcal{O}_{X, \phi(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$  sunt neramificate pentru orice  $y$  din  $Y$ .

**Definiția 1.5.** Un morfism (regulat) între două varietăți este **étale** dacă este plat și neramificat.

Morfismele étale au următoarele proprietăți:

**Propoziția 1.6.** 1. Orice imersie deschisă este étală.

2. Compunerea a două morfisme étale este étală.

3. Un morfism care este schimbare de bază a unui morfism étale este étale.

4. Dacă  $\phi \circ \psi$  și  $\phi$  sunt étale, atunci și  $\psi$  este étale.

De acum încolo vom lucra cu o varietate  $X$  peste un corp algebric închis  $k$ .

O vecinătate étală a unui punct  $x$  din  $X$  este o aplicație étală  $\phi : U \rightarrow X$  împreună cu un punct  $u \in U$  cu  $\phi(u) = x$ . Un morfism de vecinătăți étale  $(V, v) \rightarrow (U, u)$  este o aplicație regulată de la  $V$  la  $U$  care duce pe  $v$  în  $u$  (dacă există, este unică, din anumite proprietăți ale morfismelor étale). Am obținut astfel o categorie index și putem defini **inelul local în  $x$  pentru topologia étală** ca fiind:

$$\mathcal{O}_{X, \bar{x}} = \varinjlim_{(U, u)} \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

Dat fiind că orice vecinătate Zariski, fiind imersie deschisă, este étală, din proprietatea limitei inductive avem un morfism natural

$$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$$



## Capitolul 2

### De la étale la $\ell$ -adic



## Capitolul 3

# Numărarea punctelor

Problema pe care urmează să o formulăm a pornit de la cea a aflării numărului de puncte de pe o curbă eliptică, în momentul când extindem corpul de bază. Ne este cunoscută din studiul acelor curbe inegalitatea Hasse-Weil, care spune că pentru orice curbă eliptică  $X$  definită peste un corp finit  $\mathbb{F}_q$ , dacă notăm  $N_m(X) = \#X(\mathbb{F}_{q^m})$ , are loc relația:

$$|N_m(X) - (q^m + 1)| \leq 2\sqrt{q^m}$$

Mai precis, există două numere algebrice  $\alpha_1, \alpha_2$  de modul  $\sqrt{q}$  astfel încât pentru orice  $m$ :

$$N_m(X) = 1 - \alpha_1^m - \alpha_2^m + q^m$$

André Weil a propus următoarea generalizare:

**Conjectura 3.1.** (Weil) Fie  $X$  o varietate proiectivă netedă definită peste  $\mathbb{F}_q$  de dimensiune  $d$ . Atunci:

1. există  $2d$  numere naturale  $b_0, \dots, b_{2d}$  și o familie de numere complexe  $\{\alpha_{j,u}\}_{\substack{j \in \overline{0, 2d} \\ u \in \overline{1, b_j}}}$  astfel încât pentru orice  $m$  am:

$$N_m(X) = \sum_{j=0}^{2d} (-1)^j \left( \sum_{u=1}^{b_j} \alpha_{j,u}^m \right)$$

Mai mult,  $b_0 = b_{2d} = 1, \alpha_{0,1} = 1, \alpha_{2d,1} = q^d$ . Numărul  $\sum_j (-1)^j b_j$  va fi notat cu  $\chi$ .

2. pentru orice  $j$ ,  $b_j$  este egal cu  $b_{2d-j}$ , iar  $(\frac{q^d}{\alpha_{2d-j,1}}, \dots, \frac{q^d}{\alpha_{2d-j,b_j}})$  e o permutare a enumerării  $(\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,b_j})$ .
3. pentru orice  $j, u$ , avem că  $\alpha_{j,u}$  e număr algebric de modul  $q^{\frac{j}{2}}$ .

Se observă că dacă  $X$  este curbă eliptică se reconstituie relația de mai devreme, cu  $b_1 = 2 = \dim H^1(\mathbb{C}/\Lambda, \mathbb{Q})$  (pentru  $\Lambda$  o latice în planul complex).

Un mod mai pragmatic de a exprima conjecturile Weil este reprezentat de instrumentul funcțiilor generatoare.

Ne bazăm pe identitatea formală:

$$\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

scrisă eventual

$$\frac{1}{1-x} = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}\right)$$

ce se poate verifica via expansiune în serie Taylor în jurul lui zero.

Definind  $Z_X(t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} N_m(X) \frac{t^m}{m}\right)$ , obținem din punctul 1 al conjecturilor:

$$\begin{aligned} Z_X(t) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2d} (-1)^j \sum_{u=1}^{b_j} \alpha_{j,u}^m \frac{t^m}{m}\right) \\ &= \prod_{j=0}^{2d} \left(\prod_{u=1}^{b_j} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{j,u} t)^m}{m}\right)\right)^{(-1)^j} \\ &= \prod_{j=0}^{2d} \left(\frac{1}{\prod_{u=1}^{b_j} (1 - \alpha_{j,u} t)}\right)^{(-1)^j} \\ &= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}} \end{aligned}$$

unde am notat  $P_j(t) = \prod_{u=1}^{b_j} (1 - \alpha_{j,u} t)$  (și am  $P_0(t) = 1 - t$ ,  $P_{2d}(t) = 1 - q^d t$ ).

Vom deriva acum din punctul 2 o relație pe care o va satisface  $Z_X(t)$ . Aplicăm relația de permutare între enumerări și obținem:

$$\begin{aligned} P_{2d-j}(t) &= \prod_u (1 - \alpha_{2d-j,u} t) = \prod_u \left(1 - \frac{q^d}{\alpha_{j,u}} t\right) \\ &= \left(\prod_u \alpha_{j,u}\right)^{-1} \prod_u (\alpha_{j,u} - q^d t) \\ &= \left(\prod_u \alpha_{j,u}\right)^{-1} (-1)^{b_j} (q^d t)^{b_j} \prod_u \left(1 - \frac{\alpha_{j,u}}{q^d t}\right) \\ &= \left(\prod_u \alpha_{j,u}\right)^{-1} (-1)^{b_j} (q^d t)^{b_j} P_j\left(\frac{1}{q^d t}\right) \end{aligned}$$

Folosim acum atât simetria  $b_j$ -urilor cât și permutarea enumerărilor:

$$\begin{aligned} P_j(t)P_{2d-j}(t) &= (q^d t)^{2b_j} (q^d)^{-b_j} P_j\left(\frac{1}{q^d t}\right) P_{2d-j}\left(\frac{1}{q^d t}\right) \\ &= (q^d)^{\frac{b_j + b_{2d-j}}{2}} t^{b_j + b_{2d-j}} P_j\left(\frac{1}{q^d t}\right) P_{2d-j}\left(\frac{1}{q^d t}\right) \end{aligned}$$

Însă  $(\prod_s \alpha_{d,u})^2 = (q^d)^{b_d}$ , deci  $\prod_s \alpha_{d,u} = \pm (q^d)^{\frac{b_d}{2}}$ , și pot scoate relația (pentru indicele  $d$ ):

$$P_d(t) = \pm (-1)^{b_d} (q^d t)^{b_d} (q^d)^{\frac{b_d}{2}} P_d\left(\frac{1}{q^d t}\right)$$

Și obțin astfel formula pentru funcția  $Z_X$ :

$$\begin{aligned} Z_X(t) &= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}} \\ &= \pm \prod_{j=0}^{2d} P_j\left(\frac{1}{q^d t}\right)^{(-1)^{j+1}} (q^d)^{-\frac{\sum_j (-1)^{j+1} b_j}{2}} t^{-\sum_j (-1)^{j+1} b_j} \\ &= \pm q^{\frac{d_X}{2}} t^X Z_X\left(\frac{1}{q^d t}\right) \end{aligned}$$

numită **ecuația funcțională** a lui  $Z_X$ .

O altă reformulare ne este dată de următoarea substituție:

$$\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s})$$

Notând pentru un punct închis  $x \in X$  cu  $\kappa(x)$  corpul rezidual al său, cu  $\deg(x)$  gradul extinderii  $\kappa(x) : \mathbb{F}_q$  și cu

$$N_m(x) = \begin{cases} \deg(x) & \text{dacă } \deg(x) \mid m \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

avem din cele cunoscute de la teoria schemelor:

$$N_m(X) = \sum_x N_m(x)$$

Obținem rescrierile:

$$\begin{aligned}
 Z_X(t) &= \exp\left(\sum_{m \geq 1} N_m(X) \frac{t^m}{m}\right) = \exp\left(\sum_{m \geq 1} \sum_x N_m(x) \frac{t^m}{m}\right) \\
 &= \exp\left(\sum_x \sum_{\substack{m \geq 1 \\ \deg(x) | m}} N_m(x) \frac{t^m}{m}\right) \\
 &= \exp\left(\sum_x \sum_{n \geq 1} \deg(x) \frac{t^{n \cdot \deg(x)}}{n \cdot \deg(x)}\right) \\
 &= \exp\left(\sum_x \sum_{n \geq 1} \frac{(t^{\deg(x)})^n}{n}\right) = \exp\left(\sum_x \log \frac{1}{1 - t^{\deg(x)}}\right) \\
 &= \exp \log \prod_x \frac{1}{1 - t^{\deg(x)}} = \prod_x \frac{1}{1 - t^{\deg(x)}}
 \end{aligned}$$

și deci

$$\zeta_X(s) = \prod_x \frac{1}{1 - (q^{\deg(x)})^{-s}} = \prod_x \frac{1}{1 - (\#k(x))^{-s}}$$

Ultima formulă are sens pentru o schemă oarecare, nu neapărat peste un corp finit. De pildă, înlocuind  $X$  cu  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , apare:

$$\zeta_{\text{Spec } \mathbb{Z}}(s) = \prod_{p \in \text{Max } \mathbb{Z}} \frac{1}{1 - (\#(\mathbb{Z}/p))^{-s}} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

binecunoscuta funcție zeta a lui Riemann (punctele închise din  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  sunt precis idealele maximale ale lui  $\mathbb{Z}$ ), ceea ce ne justifică notația.

Atenție, însă: funcția  $Z_X$  nu are sens decât pentru scheme definite pentru un corp finit!

Este clar că  $s \in \mathbb{C}$  este zerou, respectiv pol, pentru  $\zeta_X$  dacă și numai dacă  $q^{-s}$  va avea aceeași calitate pentru  $Z_X$  (și orice  $t \in \mathbb{C}^*$  se poate scrie ca  $q^{-s}$ , e drept, într-o infinitate de moduri). Iau un astfel de  $s$ . Din exprimarea rațională a lui  $Z_X$  rezultă că  $q^{-s} = \frac{1}{\alpha_{j,u}}$  pentru anumite  $j$  și  $u$ , iar ultima afirmație din coniecturi implică  $|q^{-s}| = q^{-\frac{j}{2}}$ . Scriu  $s = a + bi$ , cu  $a, b \in \mathbb{R}$ , și am  $q^{-s} = e^{-s \ln q} = e^{-a \ln q - bi \ln q}$ . Deci  $q^{-\frac{j}{2}} = |e^{-a \ln q - bi \ln q}| = q^{-a}$  și  $\frac{j}{2} = a = \text{Re } s$ .

Invers, acum, dacă fac presupunerea că orice  $s$  zerou sau pol al lui  $\zeta_X$  are proprietatea că  $\text{Re } s = \frac{j}{2}$  (cu  $j \in \overline{0, 2d}$ ), pot face următorul raționament. Iau  $t \in \mathbb{C}^*$  zerou sau pol pentru  $Z_X$  și fie  $s$  cu  $t = q^{-s}$ . Atunci  $s$  este zerou/pol pentru  $\zeta_X$  și  $\text{Re } s = \frac{j}{2}$ . Ca înainte, avem  $|t| = |q^{-s}| = q^{-\text{Re } s} = q^{-\frac{j}{2}}$ . Deci zerourile și polii lui  $Z_X$  au modulul  $q^{-\frac{j}{2}}$ .

Rezultă că acea condiție 3 este echivalentă cu faptul că funcția zeta a varietății are zerourile și polii pe liniile  $\text{Re } s = \frac{j}{2}$ , ceea ce justifică numele dat condiției de **ipoteză Riemann**.

Mai mult decât atât, această separare după modul a zerourilor și polilor lui  $Z_X$  ne permit să extragem  $P_j$ -urile din  $Z_X$  și să obținem în mod reciproc din ecuația funcțională condiția 2 din coniecturile Weil.

Toate aceste manipulări de formule ne învață să apreciem modul cum coomologia étală conduce în mod natural măcar la expresia rațională și la ecuația funcțională a funcției  $Z_X$ .

Să vedem cum. Mai întâi, vom obține o altă descriere a lui  $X(\mathbb{F}_{q^m})$  cu ajutorul aplicației Frobenius.

Orice  $\mathbb{F}_q$ -algebră  $A$  admite endomorfismul Frobenius  $a \mapsto a^q$ , ce se dualizează la o aplicație  $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A$ . Această familie de aplicații se prelungește unic la o întreagă transformare naturală  $\{F_X : X \rightarrow X\}_{X \in \mathbb{F}_q\text{-Sch}}$ . Din naturalitate, rezultă că acționează pe varietăți afine sau proiective în modul firesc, prin ridicarea la puterea  $q$  a coordonatelor. În particular  $F_X$  are gradul  $q^{\dim X}$ , după cum se verifică ușor pe spațiile afine.

Rezultă deci  $X(\mathbb{F}_{q^m}) = \text{Fix}(F_X^m)$ .

**Lema 3.2.**  $\Gamma_{F^m} \cdot \Delta_X = \sum_{P \in \text{Fix}(F_X^m)} P$  (în sensul că toate apar cu multiplicitate 1).

*Demonstrație.* E suficient să arătăm pentru  $m = 1$  ( $F^m$  este Frobeniusul lui  $\mathbb{F}_{q^m}$ ). Notez  $F = F_X$ .

Fie  $P \in \text{Fix}(F)$ . Înlocuiesc  $X$  cu o vecinătate afină a lui  $P$ , să zicem  $U = \text{Spec } A$ , cu  $A = \mathbb{F}_q[t_1, \dots, t_n] = \frac{\mathbb{F}_q[T_1, \dots, T_n]}{a}$ .

Atunci pentru orice  $i$  am  $t_i \circ F = t_i^q$  și  $(dt_i)_P \circ (dF)_P = (dt_i^q)_P = qt_i^{q-1}(dt_i)_P = 0$ .

Ca urmare diferențiala lui  $F$  în  $P$  este zero, ca urmare graficul lui Frobenius nu este tangent la diagonală în  $(P, P)$ , iar numărul de intersecție (multiplicitatea) este 1.  $\square$

Aplicând formula de punct fix a lui Lefschetz, rezultă (pentru  $(\ell, q) = 1$ ):

$$N_m(X) = \sum_r (-1)^r \text{Tr}(F_{|H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)}^m)$$

Putem folosi formula pentru a prelucra funcția  $Z$  a lui  $X$ :

$$\begin{aligned} Z_X(t) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} N_m(X) \frac{t^m}{m}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{2d} (-1)^r \text{Tr}(F_{|H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)}^m)\right) \frac{t^m}{m}\right) \\ &= \prod_{r=0}^{2d} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \text{Tr}(F_{|H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)}^m) \frac{t^m}{m}\right) (-1)^r \end{aligned}$$

Scriem acum fiecare  $F_{|H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)}$  ca matrice pătratică superior triunghiulară (eventual peste o extindere a lui  $\mathbb{F}_q$ ) cu numărul de linii egal cu  $b_r = \dim H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)$ . Se observă atunci că dacă elementele de pe diagonală (valorile proprii) sunt  $\alpha_{r,1}, \dots, \alpha_{r,b_r}$ , atunci  $\text{Tr}(F_{|H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)}^m)$  va fi egal cu  $\sum_{i=1}^{b_r} \alpha_{r,i}^m$  și deci pot aplica exact același raționament ca mai devreme pentru a exprima rațional pe  $Z_X$ .

Vom avea  $Z_X \in \mathbb{Q}_\ell(t) \cap \mathbb{Q}[[t]] \subseteq \mathbb{Q}(t)$ , însă aceasta nu ne garantează că fiecare  $P_j$  este în  $\mathbb{Q}[t]$  (altfel spus, că este „independent de  $\ell$ ”) - aceasta se poate face doar presupunând ipoteza lui Riemann, care ne permite, după cum am spus și mai devreme, să separăm  $P_j$ -urile după modulul rădăcinilor.

Altă consecință a raționamentului precedent a fost că am identificat  $\alpha_{j,u}$ -urile ca fiind valorile proprii ale operatorilor induși de Frobenius pe spațiile de coomologie.

Aceasta ne arată în particular că  $b_0 = b_{2d} = 1$ .

Trecem acum la demonstrarea simetriei între valorile proprii pe spațiile de ordin  $r$  și  $2d - r$ , relație care după cum am observat ne implică o ecuație funcțională.

Avem biliniara nedegenerată dată de dualitatea Poincaré:

$$\langle, \rangle = \eta_X \circ \smile : H^{2d-r}(X, \mathbb{Q}_\ell) \times H^r(X, \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell(-d)$$

ce din start ne indică  $b_r = b_{2d-r}$ .

Știm că  $F_r^* = F_{|H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)}$  are adjunct relativ la  $\langle, \rangle$ :

$$\langle F_{*2d-r}(x), x' \rangle = \langle x, F_r^*(x') \rangle, \forall x \in H^{2d-r}(X, \mathbb{Q}_\ell), x' \in H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

Din considerente de algebră liniară rezultă că valorile proprii ale lui  $F_r^*$  coincid cu ale lui  $F_{*2d-r}$ . Însă  $F_{*r} \circ F_r^* = q^d (= \deg F)$ .

De aici rezultă că dacă  $(\alpha_1, \dots, \alpha_v)$  sunt valorile proprii ale lui  $F_r^*$ ,  $(\frac{q^d}{\alpha_1}, \dots, \frac{q^d}{\alpha_v})$  sunt cele ale lui  $F_{*r}$ , deci (din cele anterioare) și ale lui  $F_{*2d-r}^*$ , i.e. exact ce ni se cerea. Iar faptul că  $\alpha_{0,1} = 1$  și  $\alpha_{2d,1} = q^d$  rezultă din modul cum acționează operatorii Frobenius pe  $H^0$ , respectiv pe  $H^{2d}$ .

În acest moment, tot ce ne rămâne este să demonstrăm ipoteza lui Riemann.



## Capitolul 4

### «La conjecture de Weil»

Mai precis, ce avem de demonstrat este:

**Teorema 4.1.** (Deligne, 1974) Fie  $X$  o varietate proiectivă  $d$ -dimensională absolut nesingulară și absolut ireductibilă definită peste  $\mathbb{F}_q$ ;  $\alpha$  o valoare proprie a lui  $F_q^*$ ;  $\tau$  o scufundare a lui  $\mathbb{Q}_\ell$  în  $\mathbb{C}$ .

Atunci  $\tau(\alpha)$  (vom subînțelege mai jos  $\tau$ ) este algebric și de modul  $q^{\frac{r}{2}}$ .

În primul rând, se observă că este suficient să demonstrăm pentru varietatea obținută după o schimbare de bază spre o extindere finită a corpului de definiție - să zicem, de grad  $m$ . Asta deoarece operatorul Frobenius pe varietatea nouă va fi puterea  $m$  a celui de pe varietatea veche. Dacă  $\alpha$  este valoare proprie pentru Frobenius-ul vechi,  $\alpha^m$  este pentru cel nou. Din ipoteza noastră,  $\alpha^m$  are modulul  $(q^m)^{\frac{r}{2}}$ . Ca urmare,  $\alpha$  va avea modulul  $q^{\frac{r}{2}}$ . Aceasta ne va permite să facem un număr finit de extinderi finite de-a lungul demonstrației, fără a pierde din generalitatea enunțului.

În al doilea rând, se vede că pot demonstra doar pentru spațiile cu rangul cel mult  $d$ . Aceasta deoarece de la rangul  $d + 1$  încolo, valorile proprii au simetria implicată de dualitatea Poincaré pe care am văzut-o mai devreme.

În al treilea rând, vom arăta că este suficient să arătăm teorema doar pentru  $r = d$ . Iată de ce: din teorema lui Bertini, există  $Z \subset X$  o secțiune hiperplană netedă (eventual extinzând corpul). Aplicând teorema slabă Lefschetz, aplicația canonică  $H^r(X, \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^r(Z, \mathbb{Q}_\ell)$  este injectivă pentru  $r \leq d - 1$  și pot aplica un raționament prin inducție (pasul de bază fiind varietățile zero-dimensionale, pentru care clar este adevărat, din modul cum acționează Frobenius pe  $H^0$ ).