UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

Facultatea de Matematică și Informatică

Disertație masterală

Étale stuff

Autor:
Andrei Sipoș

Profesor coordonator:
Lect. dr. Victor Vuletescu

București, 2014

Cuprins

Introducere

Acest text își propune să:

- enunțe cadrul de desfășurare al coomologiei étale
- prezinte versiuni étale ale unor rezultate fundamentale în topologie, precum dualitatea Poincaré sau formulele de tip Lefschetz
- aplice aceste rezultate la studiul funcțiilor zeta asociate varietăților peste corpuri finite

Capitolul 1

Situl étale

Pîs pîs pîs

1.1 Morfisme étale

Definiția 1.1.1. Un morfism de inele $A \to B$ se numește **plat** dacă functorul $B \otimes_A \cdot : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ este exact.

Definiția 1.1.2. Un morfism de varietăți (sau scheme) $\phi : Y \to X$ este **plat** dacă morfismele locale $\mathcal{O}_{X,\phi(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ sunt plate pentru orice y din Y.

Definiția 1.1.3. Un morfism local de inele locale $f : A \to B$ se numește **neramificat** dacă $A/\mathfrak{m}_A \hookrightarrow B/f(\mathfrak{m}_A)B$ este o extindere finită și separabilă.

Definiția 1.1.4. Un morfism de varietăți (sau scheme) $\phi : Y \to X$ este **neramificat** dacă este de tip finit și morfismele locale $\mathcal{O}_{X,\phi(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ sunt neramificate pentru orice y din Y.

Definiția 1.1.5. Un morfism (regulat) între două varietăți este **étale** dacă este plat și neramificat.

Morfismele étale au următoarele proprietăți:

Propoziția 1.1.6.

1. *Orice imersie deschisă este étală.*
2. *Compunerea a două morfisme étale este étală.*
3. *Un morfism care este schimbare de bază a unui morfism étale este étale.*
4. *Dacă $\phi \circ \psi$ și ϕ sunt étale, atunci și ψ este étale.*

De acum încolo vom lucra cu o varietate X peste un corp algebric închis k.

O vecinătate étală a unui punct x din X este o aplicație étală $\phi : U \to X$ împreună cu un punct $u \in U$ cu $\phi(u) = x$. Un morfism de vecinătăți étale $(V, v) \to (U, u)$ este o aplicație regulată de la V la U care duce pe v în u (dacă există, este unică, din anumite proprietăți ale morfismelor étale). Am obținut astfel o categorie index și putem defini **inelul local în** x **pentru topologia étală** ca fiind:

$$\mathcal{O}_{X,\bar{x}} = \varinjlim_{(U,u)} \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

Dat fiind că orice vecinătate Zariski, fiind imersie deschisă, este étală, din proprietatea limitei inductive avem un morfism natural

$$\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$$

1.2

Capitolul 2

De la étale la ℓ-adic

Capitolul 3

Numărarea punctelor

Problema pe care urmează să o formulăm a pornit de la cea a numărării punctelor de pe o curbă eliptică. Ne este cunoscută din studiul acelor curbe inegalitatea Hasse-Weil, care spune că pentru orice curbă eliptică X definită peste un corp finit $\mathbb{F}_q$, dacă notăm $N_m(X) = \#X(\mathbb{F}_{q^m})$, are loc relația:

$$|N_m(X) - (q^m + 1)| \leq 2\sqrt{q^m}$$

Mai precis, există două numere algebrice α_1, α_2 de modul $\sqrt{q}$ astfel încât pentru orice m:

$$N_m(X) = 1 - \alpha_1^m - \alpha_2^m + q^m$$

André Weil a propus următoarea generalizare:

Teorema 3.0.1. *(Conjecturile Weil) Fie X o varietate proiectivă netedă definită peste $\mathbb{F}_q$ de dimensiune d. Atunci:*

1. *există $2d$ numere naturale $b_0, ..., b_{2d}$ și $\{\alpha_{j,s}\}_{\substack{j\in\overline{0,2d} \\ s\in\overline{1,b_j}}}$ numere complexe astfel încât pentru orice m am:*

$$N_m(X) = \sum_{j=0}^{2d} (-1)^j (\sum_{s=1}^{b_j} \alpha_{j.s}^m)$$

   Mai mult, $b_0 = b_{2d} = 1, \alpha_{0,1} = 1, \alpha_{2d,1} = q^d$.

2. *pentru orice j, $b_j = b_{2d-j}$, iar $(\frac{q^d}{\alpha_{2d-j,1}}, ..., \frac{q^d}{\alpha_{2d-j,b_j}})$ e o permutare a enumerării $(\alpha_{j,1}, ..., \alpha_{j,b_j})$.*

3. *pentru orice j, s, $\alpha_{j,s}$ e număr algebric de modul $q^{\frac{j}{2}}$.*

Observația 3.0.2. Se observă că dacă X este curbă eliptică se reconstituie relația de mai devreme, cu $b_1 = 2 = \dim H^1(\mathbb{C}/\Lambda, \mathbb{Q})$ (pentru Λ o latice în planul complex).

Un mod mai pragmatic de a exprima conjecturile Weil este reprezentat de instrumentul funcțiilor generatoare.

Ne bazăm pe identitatea formală:

$$\log(\frac{1}{1-x}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

sau

$$\frac{1}{1-x} = \exp(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m})$$

ce se poate verifica via expansiune în serie Taylor în jurul lui zero.

Definind $Z_X(t) = \exp(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{t^m}{m})$, obținem din punctul 1 al conjecturilor:

$$\begin{aligned}
Z_X(t) &= \exp(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2d} (-1)^j \sum_{s=1}^{b_j} \alpha_{j,s}^m \frac{t^m}{m}) \\
&= \prod_{j=0}^{2d} (\prod_{s=1}^{b_j} \exp(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a_{j,s}t)^m}{m}))^{(-1)^j} \\
&= \prod_{j=0}^{2d} (\frac{1}{\prod_{s=1}^{b_j} (1-\alpha_{j,s}t)})^{(-1)^j} \\
&= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}}
\end{aligned}$$

unde am notat $P_j(t) = \prod_{s=1}^{b_j} (1-\alpha_{j,s}t)$ (și am $P_0(t) = 1-t$, $P_{2d}(t) = 1-q^d t$).

Vom deriva acum din punctul 2 o relație pe care o va satisface $Z_X(t)$. Aplicăm relația de permutare între enumerări și obținem:

$$\begin{aligned}
P_{2d-j}(t) &= \prod_s (1-\alpha_{2d-j,s}t) = \prod_s (1-\frac{q^d}{a_{j,s}}t) \\
&= (\prod_s \alpha_{j,s})^{-1} \prod_s (\alpha_{j,s} - q^d t) \\
&= (\prod_s \alpha_{j,s})^{-1} (-1)^{b_j} (q^d t)^{b_j} \prod_s (1-\frac{\alpha_{j,s}}{q^d t}) \\
&= (\prod_s \alpha_{j,s})^{-1} (-1)^{b_j} (q^d t)^{b_j} P_j(\frac{1}{q^d t})
\end{aligned}$$

Folosim acum atât simetria b_j-urilor cât și permutarea enumerărilor:

$$\begin{aligned}
P_j(t)P_{2d-j}(t) &= (q^d t)^{2b_j} (q^d)^{-b_j} P_j(\frac{1}{q^d t}) P_{2d-j}(\frac{1}{q^d t}) \\
&= (q^d)^{\frac{b_j+b_{2d-j}}{2}} t^{b_j+b_{2d-j}} P_j(\frac{1}{q^d t}) P_{2d-j}(\frac{1}{q^d t})
\end{aligned}$$

Însă $(\prod_s \alpha_{d,s})^2 = (q^d)^{b_d}$, deci $\prod_s \alpha_{d,s} = \pm(q^d)^{\frac{b_d}{2}}$.

Deci pentru indicele d am relația:

$$P_d(t) = \pm(-1)^{b_d}(q^d t)^{b_d}(q^d)^{\frac{b_d}{2}} P_d(\frac{1}{q^d t})$$

Și obțin astfel formula pentru funcția Z_X:

$$\begin{aligned}
Z_X(t) &= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}} \\
&= \pm \prod_{j=0}^{2d} P_j(\frac{1}{q^d t})^{(-1)^{j+1}} (q^d)^{-\frac{\sum_j (-1)^{j+1} b_j}{2}} t^{-\sum_j (-1)^{j+1} b_j} \\
&= \pm q^{\frac{d\chi(X)}{2}} t^{\chi(X)} Z_X(\frac{1}{q^d t})
\end{aligned}$$

numită **ecuația funcțională** a lui Z_X (unde am notat $\chi(X) = \sum_j (-1)^j b_j$).

O altă reformulare ne este dată de următoarea substituție:

$$\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s})$$

Notând pentru un punct închis $x \in X$ cu $\kappa(x)$ corpul rezidual al său, cu $deg(x)$ gradul extinderii $\kappa(x) : \mathbb{F}_q$ și cu

$$N_m(x) = \begin{cases} deg(x) & \text{dacă } deg(x) \mid m \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

avem din cele cunoscute de la teoria schemelor:

$$N_m = \sum_x N_m(x)$$

Obținem rescrierile:

$$\begin{aligned}
Z_X(t) &= \exp(\sum_{m\geq 1} N_m \frac{t^m}{m}) = \exp(\sum_{m\geq 1}\sum_x N_m(x)\frac{t^m}{m}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{\substack{m\geq 1 \\ deg(x)\mid m}} N_m(x)\frac{t^m}{m}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{n\geq 1} deg(x)\frac{t^{n\cdot deg(x)}}{n\cdot deg(x)}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{n\geq 1} \frac{(t^{deg(x)})^n}{n}) = \exp(\sum_x \log\frac{1}{1-t^{deg(x)}}) \\
&= \exp\log\prod_x \frac{1}{1-t^{deg(x)}} = \prod_x \frac{1}{1-t^{deg(x)}}
\end{aligned}$$

și deci

$$\zeta_X(s) = \prod_x \frac{1}{1 - (q^{\deg(x)})^{-s}} = \prod_x \frac{1}{1 - (\#\kappa(x))^{-s}}$$

Ultima formulă are sens pentru o schemă oarecare, nu neapărat peste un corp finit. De pildă, înlocuind X cu $Spec(\mathbb{Z})$, apare:

$$\zeta_{Spec(\mathbb{Z})}(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in Max(\mathbb{Z})} \frac{1}{1 - (\#(\frac{\mathbb{Z}}{\mathfrak{p}}))^{-s}} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

binecunoscuta funcție zeta a lui Riemann (punctele închise din $Spec(\mathbb{Z})$ sunt precis idealele maximale ale lui $\mathbb{Z}$).

Atenție, însă: funcția Z_X nu are sens decât pentru scheme definite pentru un corp finit!

Este clar că $s \in \mathbb{C}$ este zerou, respectiv pol, pentru ζ_X dacă și numai dacă q^{-s} va avea aceeași calitate pentru Z_X, proprietate ce va avea loc și invers (AICI TREBUIE REFORMULAT!!).