

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI  
Facultatea de Matematică și Informatică

Disertație masterală

---

**Étale stuff**

---

*Autor:*  
Andrei Sipoș

*Profesor coordonator:*  
Lect. dr. Victor Vuletescu

București, 2014



# Cuprins



# Introducere

Acest text își propune să:

- enunțe cadrul de desfășurare al coomologiei étale
- prezinte versiuni étale ale unor rezultate fundamentale în topologie, precum dualitatea Poincaré sau formulele de tip Lefschetz
- aplice aceste rezultate la studiul funcțiilor zeta asociate varietăților peste corpuri finite



# Capitolul 1

## Situl étale

Pîs pîs pîs

### 1.1 Morfisme étale

**Definiția 1.1.1.** Un morfism de inele  $A \rightarrow B$  se numește **plat** dacă functorul  $B \otimes_A \cdot : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  este exact.

**Definiția 1.1.2.** Un morfism de varietăți (sau scheme)  $\phi : Y \rightarrow X$  este **plat** dacă morfismele locale  $\mathcal{O}_{X,\phi(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$  sunt plate pentru orice  $y$  din  $Y$ .

**Definiția 1.1.3.** Un morfism local de inele locale  $f : A \rightarrow B$  se numește **neramificat** dacă  $A/\mathfrak{m}_A \hookrightarrow B/f(\mathfrak{m}_A)B$  este o extindere finită și separabilă.

**Definiția 1.1.4.** Un morfism de varietăți (sau scheme)  $\phi : Y \rightarrow X$  este **neramificat** dacă este de tip finit și morfismele locale  $\mathcal{O}_{X,\phi(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$  sunt neramificate pentru orice  $y$  din  $Y$ .

**Definiția 1.1.5.** Un morfism (regulat) între două varietăți este **étale** dacă este plat și neramificat.

Morfismele étale au următoarele proprietăți:

**Propoziția 1.1.6.** 1. Orice imersie deschisă este étală.

2. Compunerea a două morfisme étale este étală.

3. Un morfism care este schimbare de bază a unui morfism étale este étale.

4. Dacă  $\phi \circ \psi$  și  $\phi$  sunt étale, atunci și  $\psi$  este étale.

De acum încolo vom lucra cu o varietate  $X$  peste un corp algebric închis  $k$ .

O vecinătate étală a unui punct  $x$  din  $X$  este o aplicație étală  $\phi : U \rightarrow X$  împreună cu un punct  $u \in U$  cu  $\phi(u) = x$ . Un morfism de vecinătăți étale  $(V, v) \rightarrow (U, u)$  este o aplicație

regulată de la  $V$  la  $U$  care duce pe  $v$  în  $u$  (dacă există, este unică, din anumite proprietăți ale morfismelor étale). Am obținut astfel o categorie index și putem defini **inelul local în  $x$  pentru topologia étală** ca fiind:

$$\mathcal{O}_{X,\bar{x}} = \varinjlim_{(U,u)} \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

Dat fiind că orice vecinătate Zariski, fiind imersie deschisă, este étală, din proprietatea limitei inductive avem un morfism natural

$$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$$

## 1.2



## Capitolul 2

### De la étale la $\ell$ -adic



## Capitolul 3

# Numărarea punctelor

Problema pe care urmează să o formulăm a pornit de la cea a numărării punctelor de pe o curbă eliptică. Ne este cunoscută din studiul acelor curbe inegalitatea Hasse-Weil, care spune că pentru orice curbă eliptică  $X$  definită peste un corp finit  $\mathbb{F}_q$ , dacă notăm  $N_m(X) = \#X(\mathbb{F}_{q^m})$ , are loc relația:

$$|N_m(X) - (q^m + 1)| \leq 2\sqrt{q^m}$$

Mai precis, există două numere algebrice  $\alpha_1, \alpha_2$  de modul  $\sqrt{q}$  astfel încât pentru orice  $m$ :

$$N_m(X) = 1 - \alpha_1^m - \alpha_2^m + q^m$$

André Weil a propus următoarea generalizare:

**Teorema 3.0.1.** (Conjecturile Weil) Fie  $X$  o varietate proiectivă netedă definită peste  $\mathbb{F}_q$  de dimensiune  $d$ . Atunci:

1. există  $2d$  numere naturale  $b_0, \dots, b_{2d}$  și  $\{\alpha_{j,s}\}_{\substack{j \in \overline{0, 2d} \\ s \in \overline{1, b_j}}}$  numere complexe astfel încât pentru orice  $m$  am:

$$N_m(X) = \sum_{j=0}^{2d} (-1)^j \left( \sum_{s=1}^{b_j} \alpha_{j,s}^m \right)$$

Mai mult,  $b_0 = b_{2d} = 1, \alpha_{0,1} = 1, \alpha_{2d,1} = q^d$ .

2. pentru orice  $j, b_j = b_{2d-j}$ , iar  $(\frac{q^d}{\alpha_{2d-j,1}}, \dots, \frac{q^d}{\alpha_{2d-j,b_j}})$  e o permutare a enumerării  $(\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,b_j})$ .
3. pentru orice  $j, s$ ,  $\alpha_{j,s}$  e număr algebric de modul  $q^{\frac{1}{2}}$ .

**Observația 3.0.2.** Se observă că dacă  $X$  este curbă eliptică se reconstituie relația de mai de-  
vreme, cu  $b_1 = 2 = \dim H^1(\mathbb{C}/\Lambda, \mathbb{Q})$  (pentru  $\Lambda$  o latice în planul complex).

Un mod mai pragmatic de a exprima conjecturile Weil este reprezentat de instrumentul funcțiilor generatoare.

Ne bazăm pe identitatea formală:

$$\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

sau

$$\frac{1}{1-x} = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}\right)$$

ce se poate verifica via expansiune în serie Taylor în jurul lui zero.

Definind  $Z_X(t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{t^m}{m}\right)$ , obținem din punctul 1 al conjecturilor:

$$\begin{aligned} Z_X(t) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2d} (-1)^j \sum_{s=1}^{b_j} \alpha_{j,s}^m \frac{t^m}{m}\right) \\ &= \prod_{j=0}^{2d} \left(\prod_{s=1}^{b_j} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{j,s} t)^m}{m}\right)\right) (-1)^j \\ &= \prod_{j=0}^{2d} \left(\frac{1}{\prod_{s=1}^{b_j} (1 - \alpha_{j,s} t)}\right) (-1)^j \\ &= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}} \end{aligned}$$

unde am notat  $P_j(t) = \prod_{s=1}^{b_j} (1 - \alpha_{j,s} t)$  (și am  $P_0(t) = 1 - t$ ,  $P_{2d}(t) = 1 - q^d t$ ).

Vom deriva acum din punctul 2 o relație pe care o va satisface  $Z_X(t)$ . Aplicăm relația de permutare între enumerări și obținem:

$$\begin{aligned} P_{2d-j}(t) &= \prod_s (1 - \alpha_{2d-j,s} t) = \prod_s \left(1 - \frac{q^d}{\alpha_{j,s}} t\right) \\ &= \left(\prod_s \alpha_{j,s}\right)^{-1} \prod_s (\alpha_{j,s} - q^d t) \\ &= \left(\prod_s \alpha_{j,s}\right)^{-1} (-1)^{b_j} (q^d t)^{b_j} \prod_s \left(1 - \frac{\alpha_{j,s}}{q^d t}\right) \\ &= \left(\prod_s \alpha_{j,s}\right)^{-1} (-1)^{b_j} (q^d t)^{b_j} P_j\left(\frac{1}{q^d t}\right) \end{aligned}$$

Folosim acum atât simetria  $b_j$ -urilor cât și permutarea enumerărilor:

$$\begin{aligned} P_j(t) P_{2d-j}(t) &= (q^d t)^{2b_j} (q^d)^{-b_j} P_j\left(\frac{1}{q^d t}\right) P_{2d-j}\left(\frac{1}{q^d t}\right) \\ &= (q^d)^{\frac{b_j + b_{2d-j}}{2}} t^{b_j + b_{2d-j}} P_j\left(\frac{1}{q^d t}\right) P_{2d-j}\left(\frac{1}{q^d t}\right) \end{aligned}$$

Însă  $(\prod_s \alpha_{d,s})^2 = (q^d)^{b_d}$ , deci  $\prod_s \alpha_{d,s} = \pm (q^d)^{\frac{b_d}{2}}$ .

Deci pentru indicele  $d$  am relația:

$$P_d(t) = \pm (-1)^{b_d} (q^d t)^{b_d} (q^d)^{\frac{b_d}{2}} P_d\left(\frac{1}{q^d t}\right)$$

Și obțin astfel formula pentru funcția  $Z_X$ :

$$\begin{aligned} Z_X(t) &= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}} \\ &= \pm \prod_{j=0}^{2d} P_j\left(\frac{1}{q^d t}\right)^{(-1)^{j+1}} (q^d)^{-\frac{\sum_j (-1)^{j+1} b_j}{2}} t^{-\sum_j (-1)^{j+1} b_j} \\ &= \pm q^{\frac{d\chi(X)}{2}} t^{\chi(X)} Z_X\left(\frac{1}{q^d t}\right) \end{aligned}$$

numită **ecuația funcțională** a lui  $Z_X$  (unde am notat  $\chi(X) = \sum_j (-1)^j b_j$ ).

O altă reformulare ne este dată de următoarea substituție:

$$\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s})$$

Notând pentru un punct închis  $x \in X$  cu  $\kappa(x)$  corpul rezidual al său, cu  $\deg(x)$  gradul extinderii  $\kappa(x) : \mathbb{F}_q$  și cu

$$N_m(x) = \begin{cases} \deg(x) & \text{dacă } \deg(x) \mid m \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

avem din cele cunoscute de la teoria schemelor:

$$N_m = \sum_x N_m(x)$$

Obținem rescrierile:

$$\begin{aligned} Z_X(t) &= \exp\left(\sum_{m \geq 1} N_m \frac{t^m}{m}\right) = \exp\left(\sum_{m \geq 1} \sum_x N_m(x) \frac{t^m}{m}\right) \\ &= \exp\left(\sum_x \sum_{\substack{m \geq 1 \\ \deg(x) \mid m}} N_m(x) \frac{t^m}{m}\right) \\ &= \exp\left(\sum_x \sum_{n \geq 1} \deg(x) \frac{t^{n \cdot \deg(x)}}{n \cdot \deg(x)}\right) \\ &= \exp\left(\sum_x \sum_{n \geq 1} \frac{(t^{\deg(x)})^n}{n}\right) = \exp\left(\sum_x \log \frac{1}{1 - t^{\deg(x)}}\right) \\ &= \exp \log \prod_x \frac{1}{1 - t^{\deg(x)}} = \prod_x \frac{1}{1 - t^{\deg(x)}} \end{aligned}$$

și deci

$$\zeta_X(s) = \prod_x \frac{1}{1 - (q^{\deg(x)})^{-s}} = \prod_x \frac{1}{1 - (\#k(x))^{-s}}$$

Ultima formulă are sens pentru o schemă oarecare, nu neapărat peste un corp finit. De pildă, înlocuind  $X$  cu  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , apare:

$$\zeta_{\text{Spec}(\mathbb{Z})}(s) = \prod_{p \in \text{Max}(\mathbb{Z})} \frac{1}{1 - (\#(\frac{\mathbb{Z}}{p}))^{-s}} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

binecunoscuta funcție zeta a lui Riemann (punctele închise din  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  sunt precis idealele maximale ale lui  $\mathbb{Z}$ ).

Atenție, însă: funcția  $Z_X$  nu are sens decât pentru scheme definite peste un corp finit!

Este clar că  $s \in \mathbb{C}$  este zerou, respectiv pol, pentru  $\zeta_X$  dacă și numai dacă  $q^{-s}$  va avea aceeași calitate pentru  $Z_X$ , proprietate ce va avea loc și invers (AICI TREBUIE REFORMULAT!!).