UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

Facultatea de Matematică și Informatică

Disertație masterală

Étale stuff

Autor:
Andrei Sipoș

Profesor coordonator:
Lect. dr. Victor Vuletescu

București, 2014

Cuprins

Introducere

Acest text își propune să:

- enunțe cadrul de desfășurare al coomologiei étale
- prezinte versiuni étale ale unor rezultate fundamentale în topologie, precum dualitatea Poincaré sau formulele de tip Lefschetz
- aplice aceste rezultate la studiul funcțiilor zeta asociate varietăților peste corpuri finite

Capitolul 1

Situl étale

Pîs pîs pîs

1.1 Morfisme étale

Definiția 1.1. Un morfism de inele $A \to B$ se numește **plat** dacă functorul $B \otimes_A \cdot : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ este exact.

Definiția 1.2. Un morfism de varietăți (sau scheme) $\phi : Y \to X$ este **plat** dacă morfismele locale $\mathcal{O}_{X,\phi(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ sunt plate pentru orice y din Y.

Definiția 1.3. Un morfism local de inele locale $f : A \to B$ se numește **neramificat** dacă $A/\mathfrak{m}_A \hookrightarrow B/f(\mathfrak{m}_A)B$ este o extindere finită și separabilă.

Definiția 1.4. Un morfism de varietăți (sau scheme) $\phi : Y \to X$ este **neramificat** dacă este de tip finit și morfismele locale $\mathcal{O}_{X,\phi(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ sunt neramificate pentru orice y din Y.

Definiția 1.5. Un morfism (regulat) între două varietăți este **étale** dacă este plat și neramificat.

Morfismele étale au următoarele proprietăți:

Propoziția 1.6.
1. *Orice imersie deschisă este étală.*
2. *Compunerea a două morfisme étale este étală.*
3. *Un morfism care este schimbare de bază a unui morfism étale este étale.*
4. *Dacă $\phi \circ \psi$ și ϕ sunt étale, atunci și ψ este étale.*

De acum încolo vom lucra cu o varietate X peste un corp algebric închis k.

O vecinătate étală a unui punct x din X este o aplicație étală $\phi : U \to X$ împreună cu un punct $u \in U$ cu $\phi(u) = x$. Un morfism de vecinătăți étale $(V, v) \to (U, u)$ este o aplicație regulată de la V la U care duce pe v în u (dacă există, este unică, din anumite proprietăți ale morfismelor étale). Am obținut astfel o categorie index și putem defini **inelul local în** x **pentru topologia étală** ca fiind:

$$\mathcal{O}_{X,\bar{x}} = \varinjlim_{(U,u)} \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

Dat fiind că orice vecinătate Zariski, fiind imersie deschisă, este étală, din proprietatea limitei inductive avem un morfism natural

$$\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$$

1.2

Capitolul 2

De la étale la ℓ-adic

Capitolul 3

Numărarea punctelor

Problema pe care urmează să o formulăm a pornit de la cea a numărării punctelor de pe o curbă eliptică. Ne este cunoscută din studiul acelor curbe inegalitatea Hasse-Weil, care spune că pentru orice curbă eliptică X definită peste un corp finit $\mathbb{F}_q$, dacă notăm $N_m(X) = \#X(\mathbb{F}_{q^m})$, are loc relația:

$$|N_m(X) - (q^m + 1)| \leq 2\sqrt{q^m}$$

Mai precis, există două numere algebrice α_1, α_2 de modul $\sqrt{q}$ astfel încât pentru orice m:

$$N_m(X) = 1 - \alpha_1^m - \alpha_2^m + q^m$$

André Weil a propus următoarea generalizare:

Teorema 3.1. *(Conjecturile Weil) Fie X o varietate proiectivă netedă definită peste $\mathbb{F}_q$ de dimensiune d. Atunci:*

1. *există $2d$ numere naturale $b_0, ..., b_{2d}$ și o familie de numere complexe $\{a_{j,u}\}_{\substack{j\in\overline{0,2d} \\ s\in\overline{1,b_j}}}$ astfel încât pentru orice m am:*

$$N_m(X) = \sum_{j=0}^{2d} (-1)^j (\sum_{u=1}^{b_j} \alpha_{j,u}^m)$$

   Mai mult, $b_0 = b_{2d} = 1, \alpha_{0,1} = 1, \alpha_{2d,1} = q^d$. Numărul $\sum_j (-1)^j b_j$ va fi notat cu χ.

2. *pentru orice j, b_j este egal cu b_{2d-j}, iar $(\frac{q^d}{\alpha_{2d-j,1}}, ..., \frac{q^d}{\alpha_{2d-j,b_j}})$ e o permutare a enumerării $(\alpha_{j,1}, ..., \alpha_{j,b_j})$.*

3. *pentru orice j, u, avem că $\alpha_{j,u}$ e număr algebric de modul $q^{\frac{j}{2}}$.*

Se observă că dacă X este curbă eliptică se reconstituie relația de mai devreme, cu $b_1 = 2 = \dim H^1(\mathbb{C}/\Lambda, \mathbb{Q})$ (pentru Λ o latice în planul complex).

Un mod mai pragmatic de a exprima conjecturile Weil este reprezentat de instrumentul funcțiilor generatoare.

Ne bazăm pe identitatea formală:

$$\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

scrisă eventual

$$\frac{1}{1-x} = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}\right)$$

ce se poate verifica via expansiune în serie Taylor în jurul lui zero.

Definind $Z_X(t) = \exp(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{t^m}{m})$ (fixând pe X), obținem din punctul 1 al conjecturilor:

$$\begin{aligned}
Z_X(t) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{2d}(-1)^j \sum_{u=1}^{b_j} \alpha_{j,u}^m \frac{t^m}{m}\right) \\
&= \prod_{j=0}^{2d}\left(\prod_{u=1}^{b_j} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a_{j,u}t)^m}{m}\right)\right)^{(-1)^j} \\
&= \prod_{j=0}^{2d}\left(\frac{1}{\prod_{u=1}^{b_j}(1-\alpha_{j,u}t)}\right)^{(-1)^j} \\
&= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}}
\end{aligned}$$

unde am notat $P_j(t) = \prod_{u=1}^{b_j}(1-\alpha_{j,u}t)$ (și am $P_0(t) = 1-t$, $P_{2d}(t) = 1-q^d t$).

Vom deriva acum din punctul 2 o relație pe care o va satisface $Z_X(t)$. Aplicăm relația de permutare între enumerări și obținem:

$$\begin{aligned}
P_{2d-j}(t) &= \prod_u (1-\alpha_{2d-j,u}t) = \prod_u \left(1-\frac{q^d}{a_{j,u}}t\right) \\
&= \left(\prod_u \alpha_{j,u}\right)^{-1} \prod_u (\alpha_{j,u} - q^d t) \\
&= \left(\prod_u \alpha_{j,u}\right)^{-1} (-1)^{b_j} (q^d t)^{b_j} \prod_u \left(1-\frac{\alpha_{j,u}}{q^d t}\right) \\
&= \left(\prod_u \alpha_{j,u}\right)^{-1} (-1)^{b_j} (q^d t)^{b_j} P_j\left(\frac{1}{q^d t}\right)
\end{aligned}$$

Folosim acum atât simetria b_j-urilor cât și permutarea enumerărilor:

$$\begin{aligned}P_j(t)P_{2d-j}(t) &= (q^d t)^{2b_j}(q^d)^{-b_j}P_j(\frac{1}{q^d t})P_{2d-j}(\frac{1}{q^d t})\\ &= (q^d)^{\frac{b_j+b_{2d-j}}{2}}t^{b_j+b_{2d-j}}P_j(\frac{1}{q^d t})P_{2d-j}(\frac{1}{q^d t})\end{aligned}$$

Însă $(\prod_s \alpha_{d,u})^2 = (q^d)^{b_d}$, deci $\prod_s \alpha_{d,u} = \pm(q^d)^{\frac{b_d}{2}}$, și pot scoate relația (pentru indicele d):

$$P_d(t) = \pm(-1)^{b_d}(q^d t)^{b_d}(q^d)^{\frac{b_d}{2}}P_d(\frac{1}{q^d t})$$

Și obțin astfel formula pentru funcția Z_X:

$$\begin{aligned}Z_X(t) &= \prod_{j=0}^{2d} P_j(t)^{(-1)^{j+1}}\\ &= \pm\prod_{j=0}^{2d} P_j(\frac{1}{q^d t})^{(-1)^{j+1}}(q^d)^{-\frac{\sum_j (-1)^{j+1}b_j}{2}}t^{-\sum_j (-1)^{j+1}b_j}\\ &= \pm q^{\frac{d\chi}{2}}t^{\chi}Z_X(\frac{1}{q^d t})\end{aligned}$$

numită **ecuația funcțională** a lui Z_X.

O altă reformulare ne este dată de următoarea substituție:

$$\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s})$$

Notând pentru un punct închis $x \in X$ cu $\kappa(x)$ corpul rezidual al său, cu $deg(x)$ gradul extinderii $\kappa(x) : \mathbb{F}_q$ și cu

$$N_m(x) = \begin{cases} deg(x) & \text{dacă } deg(x) \mid m \\ 0 & \text{altfel}\end{cases}$$

avem din cele cunoscute de la teoria schemelor:

$$N_m = \sum_x N_m(x)$$

Obținem rescrierile:

$$\begin{aligned}
Z_X(t) &= \exp(\sum_{m\geq 1} N_m \frac{t^m}{m}) = \exp(\sum_{m\geq 1}\sum_x N_m(x)\frac{t^m}{m}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{\substack{m\geq 1\\ deg(x)|m}} N_m(x)\frac{t^m}{m}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{n\geq 1} deg(x)\frac{t^{n\cdot deg(x)}}{n\cdot deg(x)}) \\
&= \exp(\sum_x \sum_{n\geq 1} \frac{(t^{deg(x)})^n}{n}) = \exp(\sum_x \log\frac{1}{1-t^{deg(x)}}) \\
&= \exp\log\prod_x \frac{1}{1-t^{deg(x)}} = \prod_x \frac{1}{1-t^{deg(x)}}
\end{aligned}$$

și deci

$$\zeta_X(s) = \prod_x \frac{1}{1-(q^{deg(x)})^{-s}} = \prod_x \frac{1}{1-(\#\kappa(x))^{-s}}$$

Ultima formulă are sens pentru o schemă oarecare, nu neapărat peste un corp finit. De pildă, înlocuind X cu Spec $\mathbb{Z}$, apare:

$$\zeta_{\text{Spec}\,\mathbb{Z}}(s) = \prod_{\mathfrak{p}\in\text{Max}\,\mathbb{Z}} \frac{1}{1-(\#(\frac{\mathbb{Z}}{\mathfrak{p}}))^{-s}} = \prod_{p\text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

binecunoscuta funcție zeta a lui Riemann (punctele închise din Spec $\mathbb{Z}$ sunt precis idealele maximale ale lui $\mathbb{Z}$), ceea ce ne justifică notația.

Atenție, însă: funcția Z_X nu are sens decât pentru scheme definite pentru un corp finit!

Este clar că $s \in \mathbb{C}$ este zerou, respectiv pol, pentru ζ_X dacă și numai dacă q^{-s} va avea aceeași calitate pentru Z_X (și orice $t \in \mathbb{C}^*$ se poate scrie ca q^{-s}, e drept, într-o infinitate de moduri). Iau un astfel de s. Din exprimarea rațională a lui Z_X rezultă că $q^{-s} = \frac{1}{\alpha_{j,u}}$ pentru anumite j și u, iar ultima afirmație din conjecturi implică $|q^{-s}| = q^{-\frac{j}{2}}$. Scriu $s = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, și am $q^{-s} = e^{-s\ \ln q} = e^{-a\ \ln q - bi\ \ln q}$. Deci $q^{-\frac{j}{2}} = |e^{-a\ \ln q - bi\ \ln q}| = q^{-a}$ și $\frac{j}{2} = a = \mathbb{R}e\ s$.

Invers, acum, dacă fac presupunerea că orice s zerou sau pol al lui ζ_X are proprietatea că $\mathbb{R}e\ s = \frac{j}{2}$ (cu $j \in \overline{0, 2d}$), pot face următorul raționament. Iau $t \in \mathbb{C}^*$ zerou sau pol pentru Z_X și fie s cu $t = q^{-s}$. Atunci s este zerou/pol pentru ζ_X și $\mathbb{R}e\ s = \frac{j}{2}$. Ca înainte, avem $|t| = |q^{-s}| = q^{-\mathbb{R}e\ s} = q^{-\frac{j}{2}}$. Deci zerourile și polii lui Z_X au modulul $q^{-\frac{j}{2}}$.

Rezultă că acea condiție 3 este echivalentă cu faptul că funcția zeta a varietății are zerourile și polii pe liniile $\mathbb{R}e\ s = \frac{j}{2}$, ceea ce justifică numele dat condiției de **ipoteză Riemann**.

Mai mult decât atât, această separare după modul a zerourilor și polilor lui Z_X ne permitm să extragem P_j-urile din Z_X și să obținem în mod reciproc din ecuația funcțională condiția 2 din conjecturile Weil.

Toate aceste manipulări de formule ne învață să apreciem modul cum coomologia étală conduce în mod natural măcar la expresia rațională și la ecuația funcțională a funcției Z_X.

Să vedem cum. Mai întâi, vom obține o altă descriere a lui $X(\mathbb{F}_{q^m})$ cu ajutorul aplicației Frobenius.

Orice $\mathbb{F}_q$-algebră A admite endomorfismul Frobenius $a \mapsto a^q$, ce se dualizează la o aplicație $\mathrm{Spec}\, A \to \mathrm{Spec}\, A$. Această familie de aplicații se prelungește unic la o întreagă transformare naturală $\{F_X : X \to X\}_{X \in \mathbb{F}_q - \mathrm{Sch}}$. Din naturalitate, rezultă că acționează pe varietăți afine sau proiective în modul firesc, prin ridicarea la puterea q a coordonatelor. În particular F_X are gradul $q^{\dim X}$, după cum se verifică ușor pe spațiile afine.

Rezultă deci $X(\mathbb{F}_{q^m}) = \mathrm{Fix}(F_X^m)$.

Lema 3.2. $\Gamma_{F^m} \cdot \Delta_X = \sum\limits_{P \in \mathrm{Fix}(F_X^m)} P$ *(în sensul că toate apar cu multiplicitate* 1*).*

Demonstrație. E suficient să arătăm pentru $m = 1$ (F^m este Frobeniusul lui $\mathbb{F}_{q^m}$). Notez $F = F_X$.

Fie $P \in \mathrm{Fix}(F)$. Înlocuiesc X cu o vecinătate afină a lui P, să zicem $U = \mathrm{Spec}\, A$, cu $A = \mathbb{F}_q[t_1, ..., t_n] = \frac{\mathbb{F}_q[T_1,...,T_n]}{a}$.

Atunci pentru orice i am $t_i \circ F = t_i^q$ și $(dt_i)_P \circ (dF)_P = (dt_i^q)_P = q t_i^{q-1} (dt_i)_P = 0$.

Ca urmare diferențiala lui F în P este zero, ca urmare graficul lui Frobenius nu este tangent la diagonală în (P, P), iar numărul de intersecție (multiplicitatea) este 1. $\square$

Aplicând formula de punct fix a lui Lefschetz, rezultă (pentru $(\ell, q) = 1$):

$$N_m = \sum_r (-1)^r \mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)})$$

Putem folosi formula pentru a prelucra funcția Z a lui X:

$$\begin{aligned} Z_X(t) &= \exp(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{t^m}{m}) \\ &= \exp(\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{r=0}^{2d} (-1)^r \mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)}) \frac{t^m}{m}) \\ &= \prod_{r=0}^{2d} \exp(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)}) \frac{t^m}{m})^{(-1)^r} \end{aligned}$$

Scriem acum fiecare $F_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)}$ ca matrice pătratică superior triunghiulară (eventual peste o extindere a lui $\mathbb{F}_q$) cu numărul de linii egal cu $b_r = \dim H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Se observă atunci că dacă elementele de pe diagonală (valorile proprii) sunt $\alpha_{r,1}, ..., \alpha_{r,b_r}$, atunci $\mathrm{Tr}(F^m_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)})$ va fi egal cu $\sum\limits_{i=1}^{b_r} \alpha_{r,i}^m$ și deci pot aplica exact același raționament ca mai devreme pentru a exprima rațional pe Z_X.

Vom avea $Z_X \in \mathbb{Q}_\ell(t) \cap \mathbb{Q}[[t]] \subseteq \mathbb{Q}(t)$, însă aceasta nu ne garantează că fiecare P_j este în $\mathbb{Q}[t]$ (că este „independent de ℓ") - aceasta se poate face doar presupunând ipoteza lui Riemann, care ne permite, după cum am spus și mai devreme, să separăm P_j-urile după modulul rădăcinilor.

Altă consecință a raționamentului precedent a fost că am identificat $\alpha_{j,u}$-urile ca fiind valorile proprii ale operatorilor induși de Frobenius pe spațiile de coomologie.

Aceasta ne arată în particular că $b_0 = b_{2d} = 1$. (FCKGW DE CE??? trebuie văzut cum merge Frobeniusul)

Trecem acum la demonstrarea simetriei între valorile proprii pe spațiile de ordin r și $2d-r$, relație care după cum am observat ne implică o ecuație funcțională.

Avem biliniara nedegenerată dată de dualitatea Poincaré:

$$\langle , \rangle = \eta_X \circ \cup : H^{2d-r}(X, \mathbb{Q}_\ell) \times H^r(X, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell(-d)$$

ce din start ne indică $b_r = b_{2d-r}$.

Știm că $F_r^* = F_{|H^r(X,\mathbb{Q}_\ell)}$ are adjunct relativ la $\langle , \rangle$:

$$\langle F_{*2d-r}(x), x' \rangle = \langle x, F_r^*(x') \rangle, \forall\, x \in H^{2d-r}(X, \mathbb{Q}_\ell), x' \in H^r(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

Din considerente de algebră liniară rezultă că valorile proprii ale lui F_r^* coincid cu ale lui F_{*2d-r}. Însă $F_{*r} \circ F_r^* = q^d (= deg\, F)$.

De aici rezultă că dacă $(\alpha_1, ..., \alpha_\nu)$ sunt valorile proprii ale lui F_r^*, $(\frac{q^d}{\alpha_1}, ..., \frac{q^d}{\alpha_\nu})$ sunt cele ale lui F_{*r}, deci (din cele anterioare) și ale lui F_{2d-r}^*, i.e. exact ce ni se cerea. Iar faptul că $\alpha_{0,1} = 1$ și $\alpha_{2d,1} = q^d$ rezultă din modul cum acționează operatorii Frobenius pe H^0, respectiv pe H^{2d}.

În acest moment, tot ce ne rămâne este să demonstrăm ipoteza lui Riemann.