**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова»**

**Казахстанский филиал
Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»**

Ковшов Илья Владимирович

Нелинейная модель межотраслевого баланса с учётом ограниченности ресурсов и замещения производственных факторов. Приложения для анализа экономики Республики Казахстан

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор, А. А. Шананин

Допустить к защите:
заведующий кафедрой
Л.В. Крицков

____
(подпись зав кафедрой)

«_____» __________________ 2025 г.

Астана, 2025

Содержание

Введение

Развитие современной экономики характеризуется усложнением взаимосвязей между различными отраслями и увеличением влияния факторов ограниченности ресурсов на производственные процессы. Классические линейные модели межотраслевого баланса, впервые предложенные В. Леонтьевым [1], позволяют исследовать структурные взаимосвязи экономики, однако обладают рядом ограничений, связанных с предположением о линейности производственных функций и отсутствием учета возможностей замещения производственных факторов.

В условиях динамично развивающейся экономики Республики Казахстан, характеризующейся ресурсозависимостью и необходимостью структурных преобразований, разработка и применение нелинейных моделей межотраслевого баланса представляет особую актуальность. Экономика Казахстана, обладающая значительными запасами природных ресурсов, но стремящаяся к диверсификации и устойчивому развитию, требует адекватных инструментов анализа и прогнозирования, учитывающих как межотраслевые связи, так и возможности оптимального использования и замещения различных производственных факторов.

Настоящая работа является продолжением идеи о нелинейной модели межотраслевого баланса, а также демонстрации её приложений для анализа экономики Республики Казахстан. В отличие от классических линейных моделей, предлагаемый подход позволяет более реалистично описать производственные процессы, учитывая эффекты масштаба, возможности технологического замещения и оптимизации использования ограниченных ресурсов.

Задачи исследования:

1. Разработка нелинейной модели межотраслевого баланса с учетом ограниченности ресурсов и возможностей замещения производственных факторов.

2. Сбор и обработка статистических данных по структуре экономики Республики Казахстан.

3. Идентификация и верификация разработанной модели на основе данных об экономике Казахстана. Анализ эластичности рынка в целом.

4. Анализ влияния структурных ограничений на адаптивность экономической систе-

мы и выявление критических точек перехода от гибкой модели с замещением к жестко детерминированной Леонтьевской структуре.

Значимость работы состоит в разработке инструментария для анализа структурных особенностей экономики Казахстана, оценки эффективности использования ресурсов.

Структура работы включает введение, три главы, заключение, приложения и библиографический список.

- В первой главе рассматривается небольшая историческая справка и теоретические основы межотраслевого баланса.
- Вторая глава состоит из описания математической постановки задачи.
- В третьей главе представлены результаты применения разработанной модели для анализа экономики Республики Казахстан.

1 Описание используемых данных

1.1 Модель Леонтьева

Модель позволяет описывать структуру национальной экономики через систему линейных уравнений, отражающих взаимозависимость между различными отраслями, и прогнозировать изменения в экономической системе при изменении конечного спроса.

Традиционная линейная модель межотраслевого баланса В. Леонтьева [2] с середины прошлого века являлась основным инструментом освоения данных I квадранта СТЗВ.

Пусть в экономике выделено m чистых отраслей. Обозначим через $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ вектор валовых выпусков отраслей в некотором году, где Y_j – валовый выпуск j-й отрасли в стоимостном выражении. Введем Z_i^j – финансовый поток из отрасли j в отрасль i, являющийся платой за промежуточные ресурсы, поступившие из отрасли i в отрасль j. В совокупности эти потоки образуют I квадрант таблицы межотраслевого баланса. Обозначим через $Z^0 = (Z_1^0, \dots, Z_m^0)$ вектор конечного потребления продукции отраслей, где Z_i^0 – стоимость продукции отрасли i, идущей на конечное потребление, которые составляют II квадрант таблицы.

Ключевыми параметрами модели являются коэффициенты $a_i^j = \frac{Z_i^j}{Y_j}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ которые определяют норму затрат продукта отрасли i на выпуск единицы продукта отрасли j. Базовым предположением модели В. Леонтьева является допущение о постоянстве во времени величин a_i^j, которые принято называть коэффициентами прямых затрат. Эти коэффициенты формируют матрицу Леонтьева A, которая является неотрицательной квадратной матрицей.

Формальная запись модели В. Леонтьева представляет собой линейное соотношение между векторами валового выпуска Y и конечного потребления Z^0:

$$Y = AY + Z^0. \tag{Leontief}$$

Данное выражение имеет прозрачный экономический смысл: валовой выпуск каждой отрасли состоит из промежуточного потребления другими отраслями (первое слагаемое AY) и конечного потребления (Z^0).

Опишем несколько ключевых определений, которые можно найти в [3].

Определение 1.1 (Продуктивная матрица)**.** *Неотрицательная квадратная матрица*

$A \geq 0$ размерности $m \times m$ называется продуктивной, если существует неотрицательный вектор $Y \geq 0$ такой, что $Y - AY > 0$, то есть для всех компонент выполняется строгое неравенство $(Y - AY)_i > 0, i = 1, \ldots, m$.

Определение 1.2 (Экономическая интерпретация продуктивности). *В экономическом смысле продуктивность матрицы A означает возможность реализовать в модели межотраслевого баланса $Y = AY + Z^0$ строго положительный по всем компонентам вектор конечного потребления $Z^0 > 0$ при некотором неотрицательном векторе валового выпуска $Y \geq 0$.*

Определение 1.3 (Критерий продуктивности). *Неотрицательная матрица $A \geq 0$ является продуктивной тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и является неотрицательной, то есть $(E - A)^{-1} \geq 0$.*

Как уже упоминалось в других исследованиях, результаты теории неотрицательных матриц [4], [5] позволяют строить, в рамках гипотезы о постоянстве матрицы A, оценку валового выпуска отраслей Y, обеспечивающую заданное конечное потребление Z^0 в экономике. Такую оценку дает обратное к Leontief преобразование:

$$Y = (I - A)^{-1} Z^0, \tag{1}$$

где I – единичная матрица размерности $m \times m$.

Это выражение применимо при условии, что матрица $(I - A)^{-1} \geq 0$ корректно определена и является неотрицательной. Необходимым и достаточным условием существования $(I - A)^{-1} \geq 0$ является продуктивность матрицы $A \geq 0$.

Матрица $(I - A)^{-1} \geq 0$ называется обратным преобразованием Леонтьева, а ее элементы – экономическими мультипликаторами. Элемент (i, j) этой матрицы показывает, на сколько единиц должен измениться валовой выпуск отрасли i при увеличении конечного спроса на продукцию отрасли j на одну единицу.

Следует отметить, что модель В. Леонтьева оперирует товарными потоками, фактически игнорируя влияние ценовых пропорций и не предполагает замещения производственных факторов.

В последние десятилетия появились работы, демонстрирующие важность учёта сетевой структуры и динамики межотраслевых связей, игнорирование которых может привести к недооценке системных рисков. В частности, [6], [7] показали, что учёт сложных производственных сетей и микроструктуры существенно меняет прогнозы макроэкономических моделей. [8] "выявили на свет"проблемы "узких горлышек которые существенно влияют на темпы экономического развития и уязвимости экономики к внешним воздействиям.

1.2 СТЗВ

Модели межотраслевого баланса имеют огромную историю, также известные как модели "затраты-выпуск разработанные Василием Леонтьевым в середине XX века, ставшие одним из фундаментальных инструментов макроэкономического анализа, за которые позднее был удостоен Нобелевской премии по экономике за разработку метода "затраты-выпуск".

Симметричная таблица "затраты-выпуск"(СТЗВ) отражает все экономические операции между различными секторами национальной экономики, она является ключевым инструментом для изучения структурных взаимосвязей в экономике и основой для принятия стратегических экономических решений. СТЗВ состоит из трех взаимосвязанных квадрантов:

1. **Первый квадрант** (матрица A) – отражает межотраслевые потоки товаров и услуг, используемых в качестве промежуточного потребления. Показывает, как выпуск одной отрасли используется в производственном процессе другой отрасли.

2. **Второй квадрант** – представляет конечное использование товаров и услуг домашними хозяйствами, государственными органами, некоммерческими организациями, обслуживающими домашние хозяйства (НКООДХ), а также включает валовое накопление основного капитала, изменение запасов материальных оборотных средств и экспорт.

3. **Третий квадрант** – показывает структуру добавленной стоимости по отраслям, включая оплату труда, чистые налоги на производство, потребление основного капитала, прибыль и смешанный доход, а также импорт товаров и услуг.

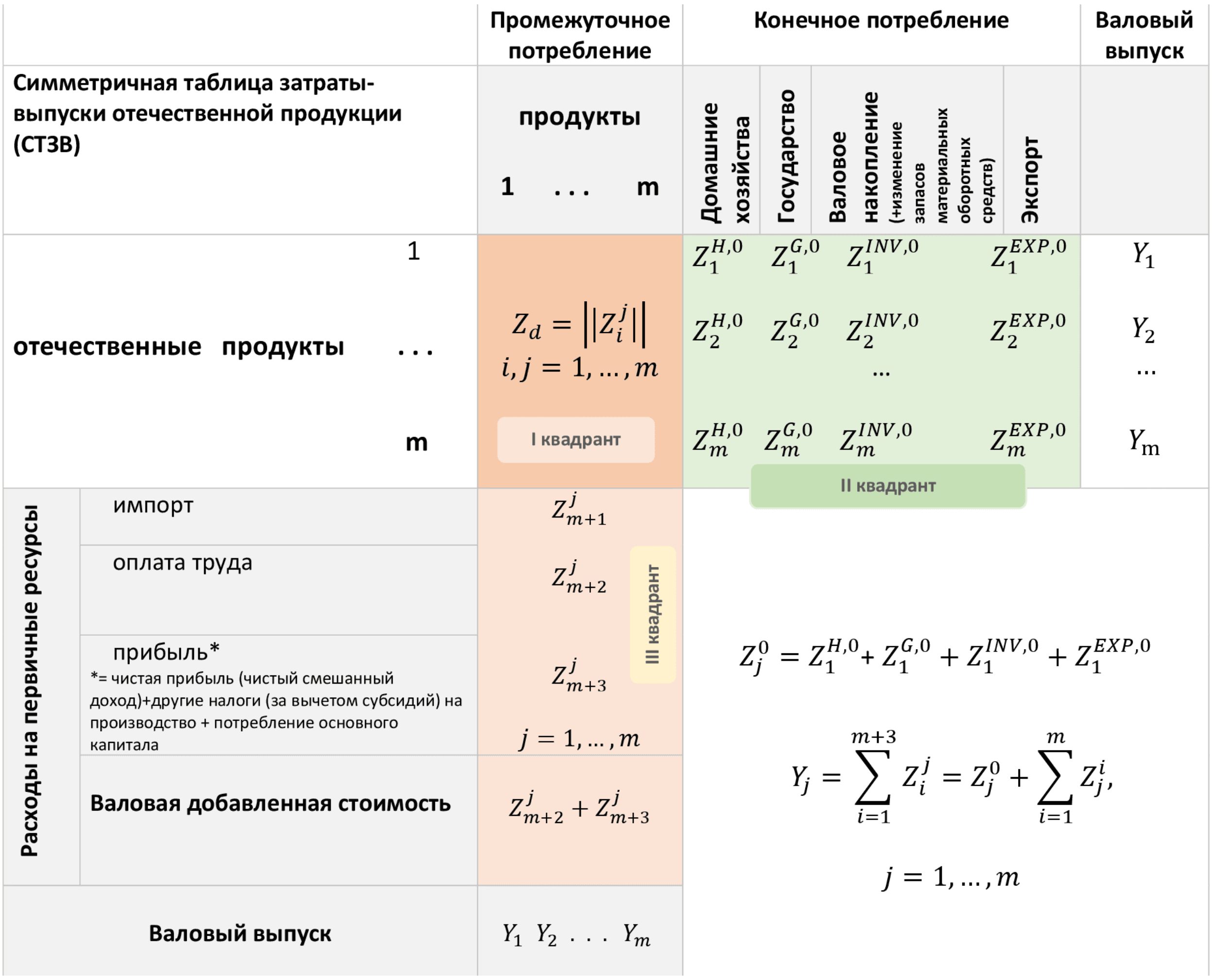

Рис. 1: Пример таблицы затраты-выпуск с обозначениями из статьи.

В данном подходе мы выделяем m чистых отраслей.

Стоит обратить внимание на причину такого названия для таблицы. Если мы взглянем на таблицу, то может заметить, что сумма в столбце и сумма в строке будет равна одному и тому же числу, а именно валовому выпуску. Экономический смысл этого в том, что можно по-разному посчитать выпуск отраслей, либо через затраты (промежуточное потребление из других отраслей и расходы на первичные ресурсы), либо через выпуск (использование другими отраслями товаров и конечное потребление). В строгом математическом выражении для каждой отрасли это можно записать вот так:

$$Y_j = \sum_{i=1}^{m+3} Z_i^j = Z_j^0 + \sum_{i=1}^{m} Z_j^i. \tag{2}$$

Несмотря на широкое применение модели Леонтьева, с середины 1980-х годов стали проявляться существенные ограничения данного подхода. Главным недостатком классической модели стала гипотеза о постоянстве технологических коэффициентов (норм затрат на выпуск единицы продукции), которая перестала соответствовать экономической реальности в условиях роста номенклатуры товаров и услуг в производственных сетях. Современные экономические системы характеризуются высокой степенью заменяемости производственных факторов, что делает традиционный линейный аппарат модели Леонтьева недостаточным для адекватного описания межотраслевых связей. Поэтому дальше опишем используемую модель.

2 Математическая постановка задачи

В данном исследовании в качестве ключевого предположения принимается гипотеза о рациональном поведении конечного потребителя. Согласно этой гипотезе, потребитель стремится к максимизации своей полезности, то есть выбирает такие наборы благ, которые при существующих ограничениях по доходу и ценам позволяют ему достичь наибольшей степени удовлетворения своих потребностей. Рациональное поведение предполагает, что каждый потребитель действует осознанно, сопоставляя получаемую полезность с затратами, и выбирает оптимальные решения исходя из индивидуальной системы предпочтений и ограниченных ресурсов.

Для формализации этого поведения в рамках математической постановки задачи используются производственные функции, которые в данном контексте интерпретируются как функции полезности для чистых отраслей. Такой подход позволяет описать количественную зависимость между используемыми ресурсами и получаемым результатом, а также моделировать процесс принятия решений потребителем на основе принципа максимизации полезности. Производственные функции служат инструментом для анализа эффективности распределения ресурсов и позволяют перейти от качественного описания рационального выбора к строгой математической модели поведения потребителя в экономической системе.

Мной будет использована нелинейная модель межотраслевого баланса с учетом ограничений производственных мощностей, описанная в статье [12].

2.1 Предположения модели:

- Экономика является открытой, т.е. спрос на первичные ресурсы (III квадрант СТЗВ) удовлетворяется при заданных ценах $s_1, \ldots, s_n$.
- Производственная технология в каждой отрасли описывается производственной функцией с постоянной эластичностью замещения (CES), допускающими замещение производственных факторов:
- Производственные мощности отрасли $j = 1, \ldots, m$ экономики ограничены значениями $M_j > 0$;
- Задан вектор конечного спроса в текущих ценах $\hat{Z}^0 = \left(\hat{Z}_1^0, \ldots, \hat{Z}_m^0\right)$ - сумма векторов спроса конечных потребителей II квадранта СТЗВ: домашних хозяйств, государства, НКООДХ, валового накопления, экспорта (см. таблицу 1).

2.2 Используемые обозначения:

- $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m) \geq 0$ - вектор равновесных цен, по которым производители продают произведенную продукцию;
- $v = (v_1, \ldots, v_m) \geq 0$ - вектор наценок на произведенную продукцию связанных с ограничением на мощность производства;
- $\hat{p} = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m)$ - вектор равновесных цен, по которым покупается продукция отраслей, $\hat{p} = \hat{p} + v$

- $s = (s_1, \cdots s_n) \geq 0$ – индексы цены на первичные факторы производства.
- $X^j = \left(X_1^j, \ldots, X_m^j\right)$ - вектор промежуточного потребления продукции отраслей
- $l^j = \left(l_1^j, \ldots, l_n^j\right)$ - вектор затрат первичных производственных факторов $1, \ldots, n$ которые не производятся в сети.
- $F_j\left(X^j, l^j\right) \in \Phi_{m+n}$ - производственные функции отраслей
- $F_0\left(X^0\right) \in \Phi_m, X^0 = (X_1^0, \ldots, X_m^0)$ - функция полезности агрегированного рационального конечного потребителя продукции отраслей.
- Класс функций Φ_k представляет собой вогнутые, ненулевые, монотонно неубывающие, непрерывные и положительно однородные порядка 1 функции на $\mathbb{R}_+^k$, удовлетворяющие условию $F_j(0,0) = 0$.
- Агрегированный конечный потребитель характеризуется функцией полезности $F_0(X^0) \in \Phi_m$, где $X^0 = (X_1^0, \ldots, X_m^0)$ – вектор конечного потребления продукции отраслей. Класс функций Φ_k представляет собой вогнутые, ненулевые, монотонно неубывающие, непрерывные и положительно однородные порядка 1 функции на $\mathbb{R}_+^k$, удовлетворяющие условию $F_j(0,0) = 0$.
- Производственные мощности отраслей ограничены вектором $M = (M_1, \ldots, M_m) > 0$, а суммарное потребление каждого первичного ресурса k ограничено величиной l_k, где $l = (l_1, \ldots, l_n) > 0$.
- $p_0 > 0$ – масштабирующий коэффициент, переводящий полезность в денежное выражение.

2.3 Экономическое равновесие в нелинейной модели межотраслевого баланса

В соответствии с [12] задача оптимального распределения ресурсов с учетом ограничений на мощность отраслей формулируется следующим образом:

$$p_0F_0(X^0) \ \to \max \tag{3}$$

$$F_j(X^j, l^j) \ \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i, \quad j = 1, \ldots, m \tag{4}$$

$$M_j \ \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i, \quad j = 1, \ldots, m \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{m} l_k^j \ \leq l_k, \quad k = 1, \ldots, n \tag{6}$$

$$X^0 \geq 0, X^1 \ \geq 0, \ldots, X^m \geq 0, \ l^1 \geq 0, \ldots, l^m \geq 0 \tag{7}$$

2.4 Преобразование Янга и поиск равновесия

Работа с преобразованием Янга была проделана в работах [9], [10], [11].

Равновесные цены $\hat{p}$ при заданных ценах на первичные ресурсы $\hat{s}$ являются решением задачи:

$$\Pi_A(\hat{s}) = \min_{\hat{p} \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^{m} M_j(\hat{p}_j - q_j(\hat{p}, \hat{s}))^+ \mid q_0(\hat{p}) \geq p_0 \right\}, \tag{8}$$

где функции себестоимости производства отрасли $j = 1, \ldots, m$ определяются как:

$$q_j(p, s) = \inf \left\{ \frac{pX^j + sl^j}{F_j(X^j, l^j)} \mid X^j \geq 0, l^j \geq 0, F_j(X^j, l^j) > 0 \right\} \in \Phi_{m+n}, \tag{9}$$

а индекс потребительских цен как:

$$q_0(q) = \inf \left\{ \frac{qX^0}{F_0(X^0)} \mid X^0 \geq 0, F_0(X^0) > 0 \right\} \in \Phi_m. \tag{10}$$

Величина $\Pi_A(\hat{s})$ представляет агрегированную прибыль экономической системы при ценах на первичные ресурсы $\hat{s}$. Равновесные наценки на продукты из-за дефицита мощностей равны $v_j = (\hat{p}_j - q_j(\hat{p}, \hat{s}))^+$.

При этом, если $F_0(X^0) > 0$, то $q_0(\hat{p}) = p_0$.

2.5 Нахождение равновесия в модели

Продублируем результаты [12], [13], которые лягут в основу дальнейшего алгортима.

Предложение 2.1. *В случае, когда выпуск всех отраслей строго положителен, т.е. для всех $j = 1, \ldots, m$ верно $F_j > 0$ (все отрасли существенны для производства), в равновесии выполняется равенство:*

$$\tilde{p}_j = q_j(\tilde{p} + v, \hat{s}) > 0, \quad j = 1, \ldots, m \tag{11}$$

Замечание 2.1. *Условия $F_j > 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$ и $F_0(X^0) > 0$ очевидно выполняются в случае крупных отраслевых комплексов реальной производственной сети. С вычислительной точки зрения это означает, что решение системы уравнений 11 определяет равновесные цены $\tilde{p}$ как функцию цен на первичные ресурсы $\hat{s}$ и наценок v.*

Равновесные межотраслевые потоки $\hat{X}^j, \hat{l}^j, j = 1, \ldots, m$ определяются из условия максимума прибыли производителей при равновесных ценах $\tilde{p}, v$ и заданных ценах на первичные ресурсы $\hat{s}$:

$$(\hat{X}^j, \hat{l}^j) \in \arg\max\{\tilde{p}_j F_j(X^j, l^j) - (\tilde{p} + v)X^j - \hat{s}l^j \mid X^j \geq 0, l^j \geq 0\} \tag{12}$$

2.6 Обобщение модели Леонтьева

Предложение 2.2. *Пусть $\hat{X}^0$ – равновесный вектор конечного потребления в модели, $\hat{X}^j, \hat{l}^j, j = 1, \ldots, m$ – равновесные межотраслевые потоки, $\tilde{p}, v$ – равновесные цены. Если $F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) > 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$, то в равновесии выполняется равенство:*

$$F_i(\hat{X}^i, \hat{l}^i) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\lambda}_{ij}(\tilde{p}, v) F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) + \hat{X}_i^0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{13}$$

где неотрицательная квадратная матрица $\tilde{\Lambda}(\tilde{p}, v) = \|\tilde{\lambda}_{ij}(\tilde{p}, v)\|$ является продуктивной матрицей с элементами:

$$\tilde{\lambda}_{ij}(\tilde{p}, v) = \frac{\hat{X}_i^j}{F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j)} \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, m \tag{14}$$

Соотношение 13 определяет баланс спроса и предложения в экономике с учетом торговой наценки в результате дефицита мощностей. В силу продуктивности матрицы

$\tilde{\Lambda}(\tilde{p}, v)$, матрица $E - \tilde{\Lambda}(\tilde{p}, v)$, где E – единичная матрица размера $m \times m$, является неотрицательно обратимой. Таким образом, соотношение 13 можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} F_1(\hat{X}^1, \hat{l}^1) \\ \vdots \\ F_m(\hat{X}^m, \hat{l}^m) \end{pmatrix} = (E - \tilde{\Lambda}(\tilde{p}, v))^{-1} \hat{X}^0 \tag{15}$$

Заметим, что баланс 15 является обобщением линейного межотраслевого баланса в модели В. Леонтьева. В отличие от классической модели Леонтьева, матрица $\tilde{\Lambda}(\tilde{p}, v)$ зависит от равновесных цен и наценок на товары, установившихся в результате ограничения на мощности отраслей. Использование неоклассических производственных функций также приводит к зависимости коэффициентов матрицы от процессов замещения ресурсов в экономике.

2.7 Случай производственных функций с постоянной эластичностью замещения

В рамках данного эксперимента, как и в статье [12] будем считать, что производственные функции описываются классом функций с постоянной эластичностью замещения (CES).

$$F_j\left(X^j, l^j\right) = \left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{X_i^j}{w_i^j}\right)^{-\rho_j} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{l_k^j}{w_{m+k}^j}\right)^{-\rho_j}\right)^{-\frac{1}{\rho_j}}, \tag{16}$$

$$w_i^j = (a_{ij})^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}}, \quad w_{m+k}^j = (b_{kj})^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}} \tag{17}$$

$$i, j = 1, .., m, k = 1, .., n, \tag{18}$$

Для производственных функций с постоянной эластичностью замещения (CES) система уравнений 11 принимает вид:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left(w_i^j(\tilde{p}_i + v_i)\right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} + \sum_{k=1}^{n}\left(w_{m+k}^j \hat{s}_k^j\right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}}\right)^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}} = \tilde{p}_j \tag{19}$$

где $a_{ij} = \frac{Z_i^j}{Y_j}$, $b_{kj} = \frac{Z_{m+k}^j}{Y_j}$, $i, j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, а $\frac{1}{1+\rho_j}$ – эластичность замещения производственных факторов, причем $\rho_j \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

2.8 Алгоритм вычисления экономического равновесия в модели

Рассмотрим алгоритм для вычисления экономического равновесия в модели при заданных сценарных условиях. Пусть для некоторого года заданы:

- вектор суммарного конечного спроса $\hat{Z}_i^0$ на продукцию производственных комплексов в текущих ценах, $i = 1, \ldots, m$;
- индексы цен на первичные ресурсы $\hat{s}^j = (\hat{s}_1^j, .., \hat{s}_n^j)$, $j = 1, \ldots, m$ по отношению к базовому году для каждой отрасли.

Нашей задачей является вычисление:

- равновесных цен $\tilde{p}_i > 0$ и наценок $v_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$;
- равновесных межотраслевых потоков $\hat{Z}_i^j \geq 0$, $\hat{Z}_{m+k}^j \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$ в ценах целевого года.

Соответствующие потоки в постоянных ценах $\hat{X}_i^j \geq 0$, $\hat{l}_k^j \geq 0$ вместе с вектором конечного потребления $\hat{X}^0$ должны являться решением задачи распределения ресурсов 3-7, а равновесные цены $\tilde{p}, v, \hat{s}$ должны удовлетворять системе 19. При этом должны выполняться соотношения:

$$\hat{Z}_i^j = (\tilde{p}_i + v_i)\hat{X}_i^j, \quad \hat{Z}_{m+k}^j = \hat{s}_k^j \hat{l}_k^j, \quad \hat{Z}_i^0 = (\tilde{p}_i + v_i)\hat{X}_i^0 \tag{20}$$

Из условий оптимальности 16 и свойств функций CES получаем:

$$\frac{\hat{X}_i^j}{F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j)} = a_{ij} \left(\frac{\tilde{p}_j}{\tilde{p}_i + v_i} \right)^{\frac{1}{1+\rho_j}}, \quad i, j = 1, \ldots, m \tag{21}$$

$$\frac{\hat{l}_k^j}{F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j)} = b_{kj} \left(\frac{\tilde{p}_j}{\hat{s}_k^j} \right)^{\frac{1}{1+\rho_j}}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n \tag{22}$$

С учетом проделанного ранее, из баланса 13 получаем:

$$(\tilde{p}_i + v_i) F_i(\hat{X}^i, \hat{l}^i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\tilde{p}_j}{\tilde{p}_j + v_j} a_{ij} \left(\frac{\tilde{p}_i + v_i}{\tilde{p}_j} \right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} (\tilde{p}_j + v_j) F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) + (\tilde{p}_i + v_i)\hat{X}_i^0 \tag{23}$$

Данное соотношение определяет баланс спроса и предложения в экономике с учетом торговой наценки в результате дефицита мощностей в текущих ценах целевого года. Обозначим $\hat{Y} = (\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, ..., \hat{Y}_m)$ равновесный валовый выпуск отраслей в ценах потребителя целевого года, тогда:

$$\hat{Y}_i = (\tilde{p}_i + v_i) F_i(\hat{X}^i, \hat{l}^i), \quad i = 1, \ldots, m \tag{24}$$

Определим матрицу:

$$\Lambda(\tilde{p}, v) = \|\lambda_{ij}(\tilde{p}, v)\| \tag{25}$$

с элементами:

$$\lambda_{ij}(\tilde{p}, v) = \frac{\tilde{p}_j}{\tilde{p}_j + v_j} a_{ij} \left(\frac{\tilde{p}_i + v_i}{\tilde{p}_j} \right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, m \tag{26}$$

Матрица $\Lambda(\tilde{p}, v)$ продуктивна в силу продуктивности матрицы $\tilde{\lambda}_{ij}$. Равновесный валовый выпуск отраслей $\hat{Y}$ в целевом году будет равен:

$$\hat{Y}(\hat{Z}^0, \tilde{p}, v) = (E - \Lambda(\tilde{p}, v))^{-1} \hat{Z}^0 \tag{27}$$

Данный баланс определяет валовый выпуск отраслей в положении равновесия, соответствующий конечному потреблению $\hat{Z}^0$, ценам на первичные ресурсы $\hat{s}$ и равновесным ценам производственной сети $\tilde{p}, v$ с учетом наценок.

2.9 Формирование квадрантов межотраслевого баланса

Выпишем ссылаясь на [12] равновесное потребление отралсями промежуточных и первичных ресурсов в заданных сценарных условиях:

$$\hat{Z}_i^j = \lambda_{ij}(\tilde{p}, v) \hat{Y}_j(\hat{Z}^0, \tilde{p}, v) \tag{28}$$

$$\hat{Z}_{m+k}^j = \frac{\tilde{p}_j}{\tilde{p}_j + v_j} b_{kj} \left(\frac{\hat{s}_k^j}{\tilde{p}_j} \right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} \hat{Y}_j(\hat{Z}^0, \tilde{p}, v), \quad k = 1, \ldots, n-1 \tag{29}$$

$$\hat{Z}_{m+n}^j = \frac{\tilde{p}_j}{\tilde{p}_j + v_j} b_{nj} \left(\frac{\hat{s}_n^j}{\tilde{p}_j} \right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} \hat{Y}_j(\hat{Z}^0, \tilde{p}, v) + \frac{v_j}{\tilde{p}_j + v_j} \hat{Y}_j(\hat{Z}^0, \tilde{p}, v) \tag{30}$$

Полученные потоки $\hat{Z}_i^j$ и $\hat{Z}_{m+k}^j$ формируют, соответственно, I и III квадранты межотраслевого баланса. Вместе с заданным вектором конечного потребления $\hat{Z}^0$ (II квадрант), они образуют полную таблицу затраты-выпуск целевого года.

Важно отметить, что в случае наличия дефицита мощностей (т.е. когда $v_j > 0$

для некоторых j), сумма по строке j и по столбцу j в таблице будет отличаться на величину $\frac{v_j}{\tilde{p}_j+v_j}\hat{Y}_j$. Эта величина соответствует прибыли посреднических структур в отрасли, для которой мощности лимитируют выпуск. Для обеспечения балансовых соотношений таблицы необходимо добавить эту компоненту к последней строке квадранта III, отражающей прибыль отраслей.

2.10 Условия равновесия при наличии ограничений на мощности

Существует два возможных случая равновесия в модели:

Замечание 2.2. *1) Если в равновесии агрегированная прибыль экономической системы положительна, т.е. $\Pi_A(\hat{s}) > 0$, то существует группа отраслей $J \subset \{1, \dots, m\}$, в которой мощности лимитируют выпуск. В этом случае $v_j > 0$ при $j \in J$ и $v_j = 0$ при $j \notin J$. Для отраслей из множества J условие дополняющей нежесткости гарантирует выполнение равенства:*

$$(\tilde{p}_j + v_j)M_j = \hat{Y}_j(\hat{Z}^0, \tilde{p}, v) \tag{31}$$

При условии, что величины $M_j > 0$, $j \in J$ известны, система уравнений для определения равновесия в модели задается:

- *равенствами 11 для всех $j = 1, \dots, m$;*
- *соотношениями 31 для $j \in J$;*
- *равенствами $v_j = 0$ для $j \notin J$;*
- *межотраслевым балансом 27;*
- *формулами для межотраслевых потоков 30.*

2) Если в равновесии $\Pi_A(\hat{s}) = 0$, то производственные мощности не лимитируют выпуск, т.е. $v = 0$. В этом случае система уравнений для определения равновесия в модели задается:

- *системой 11 с условием $v_j = 0$ для нахождения равновесных цен;*
- *межотраслевым балансом 27;*

- *формулами для межотраслевых потоков 30.*

3 Моё Исследование

3.1 Особенности работы

В данной работе было решено провести моделирование эластичности рынка в целом поэтому будет использоваться предположение, что все чистые отрасли описываются одним значением эластичности $\rho_j = \rho,\ j = 1, \ldots, m$, описывающем экономику страны.

В качестве конечных агрегируемых отраслей было решено использовать отрасли из ОКЭД (общего классификатора по экономической деятельности), с одним маленьким уточнением, что отрасль "Промышленность"делится на несколько других и в нашем конечном агрегировании не будет присутствовать. Таким образом, у нас будет $m = 19$ чистых отраслей, которые будут суммироваться из продукций таблиц [15], [14].

Данное решение основывается на наличии информации о индексе реальной заработной платы [16] и дефлятору ВВП по видам экономической деятельности [17]. В основных экспериментах используется статистическая информация о дефляторе ВВП методом производства.

В качестве первичной гипотезы для индекса цен импортных поступлений для каждой отрасли будет использоваться статистическая информация индекса всего импорта [18].

Таким образом, есть статистическая информация по "Оплате труда"(индокс заработной платы), "Прибыли, смешанному доходу"(дефлятору) и "Импорту товаров и услуг"(индекс. импортных поступлений.

Теперь поговорим про остальные позиции в 3 квадранте.
Данные 3 строчки "Чистые налоги на продукты "Другие налоги на производство за вычетом субсидий на производство "Прибыль, смешанный доход "Потребление основного капитала"просуммируем в одну агрегированную строку "Прибыли".

Объединение данных компонентов в единую категорию обосновано, поскольку всё это является экономической выгодой в различных формах: налоги представляют собой часть добавленной стоимости, перераспределяемую через государственный бюджет, "прибыль, смешанный доход"и "Потребление основного капитала"отражают доходы владельцев факторов производства.

3.2 Краевые случае эластичности спроса

Рассмотрение предельных случаев позволяет лучше понять экономический смысл параметра эластичности замещения и его влияние на поведение экономических агентов в разных рыночных условиях, потому что происходит трансформация в известные формы.

Далее мы подробно рассмотрим три ключевых краевых случая, каждый из которых представляет особый тип взаимоотношений между факторами в экономических моделях: случай единичной эластичности (функция Кобба-Дугласа), случай абсолютной дополняемости факторов (модель Леонтьева) и случай совершенного замещения.

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}\begin{cases} \rho \to 0, \text{Cobb-Douglas}, \\ \rho \to +\infty, \text{Leontief model}, \\ \rho \to -1, \text{perfect substitutes} \end{cases}$$

Случай единичной эластичности (функция Кобба–Дугласа, $\rho \to 0$)

Факторы производства или товары могут замещать друг друга с постоянной эластичностью, равной единице. Это означает, что при изменении относительных цен факторов на 1%, соотношение используемых факторов также изменится на 1%. Изменение одного фактора может быть компенсировано пропорциональным изменением другого при сохранении того же уровня выпуска или полезности.

Случай абсолютной дополняемости факторов (модель Леонтьева, $\rho \to +\infty$)

Факторы производства или товары используются в строго фиксированных пропорциях и не могут замещать друг друга. Увеличение количества только одного фактора не приводит к росту выпуска или полезности. Производственная функция определяется «узким местом» — фактором, который находится в минимальном количестве относительно требуемых пропорций.

Случай совершенного замещения ($\rho \to -1$)

Факторы производства или товары являются абсолютными заменителями друг друга. Потребитель или производитель будет использовать только тот фактор, который дешевле или эффективнее, полностью отказываясь от использования другого. Предельная норма технического замещения между факторами остаётся постоянной независимо от их соотношения.

3.3 Идентификация без ограничений

Вначале были совершены эксперименты для идентификации модели без ограничений. Опишем подробнее получающиеся формулы в этом случае. Если мы считаем, что ни в одной из отраслей мы не можем выйти на максимум, то уравнение для экономического равновесия можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{m}(w_i^j\tilde{p}_i)^{\frac{\rho}{1+\rho}}+\sum_{k=1}^{n}(w_{m+k}^j\hat{s}_k^j)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}}=\tilde{p}_j,\\
&w_i^j=(a_{ij})^{\frac{1+\rho}{\rho}},\quad w_{m+k}^j=(b_{kj})^{\frac{1+\rho}{\rho}}\\
&i,j=1,..,m,k=1,..,n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}(w_i^j\tilde{p}_i)^{\frac{\rho}{1+\rho}}+\sum_{k=1}^{n}(w_{m+k}^j\hat{s}_k^j)^{\frac{\rho}{1+\rho}}=\tilde{p}_j^{\ \frac{\rho}{1+\rho}},\\
&\sum_{i=1,i\neq j}^{m}a_i^j\tilde{p}_i^{\ \frac{\rho}{1+\rho}}+(a_j^j-1)\tilde{p}_j^{\ \frac{\rho}{1+\rho}}=-\sum_{k=1}^{n}b_{m+k}^j(\hat{s}_k^j)^{\frac{\rho}{1+\rho}},
\end{aligned}$$

Переобозначим $\hat{p}_j=(\tilde{p}_j)^{\frac{\rho}{1+\rho}}$. В итоге это получается

$$\begin{aligned}
&\hat{p}_j=(I-A^T)^{-1}V,\\
&V=(v_1,\ldots,v_m)^T,\ v_j=\sum_{k=1}^{n}b_k^j(s_k^j)^{\frac{\rho}{1+\rho}}
\end{aligned}$$

Далее используем

$$\lambda_{ij}=\left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}a_{ij}.$$

Подсчёт Z_i^j в обоих случаях одинаковый, а вот для 3 квадранта формула примет вид

$$Z_{m+k}^j=\left(\frac{s_k^j}{p_j}\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}b_{kj}Y_j,k=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m.$$

3.4 Идентификация

Стоит упомянуть, что идентификация проводилась по модели без ограничений на мощность $M_j = +\infty,\ j = 1, \ldots, m$.

Вначале проводилась проверка работы модели. Проводилась идентификация для разных функционалов. Их можно разделить по некоторым параметрам на группы.

Минимизация отклонения показателя от статистики. В качестве показателя могло быть:

- Вектор валового выпуска
- 1 квадрант СТЗВ
- 3 квадрант СТЗВ

Минимизация отклонения показателя от статистики. В качестве способа подсчёта отклонения показателя могло быть:

- Абсолютное отклонение

  Могло быть представлено в виде

  1. $\sum |Z_{predict} - Z_{true}|$ (суммы модулей)
  2. $\sum (Z_{predict} - Z_{true})^2$ (суммы квадратов отклонений)

- Относительное отклонение

  Могло быть представлено в виде

  1. $\sum \left| \frac{Z_{predict} - Z_{true}}{Z_{true}} \right|$ (суммы модулей)
  2. $\sum \left(\frac{Z_{predict} - Z_{true}}{Z_{true}} \right)^2$ (суммы квадратов отклонений)

При идентификации с относительными отклонениями также было проведено несколько экспериментов, где ошибка отклонения учитывалась только для отраслей, у которых значение Z_{ij} было больше определённого числа. В таких экспериментах было получено, что при увеличении порогового значения $\rho \to +\infty$, что свидетельствует о приближении модели к Леонтьевской, что соотносится с теорией и тем, что модель перестаёт учитывать связь и возможное замещение.

Однако в данной работе упор делается на прогноз оплаты труда, соответственно, идентификация проводилась именно на эту строку из 3 квадранта.

В качестве базового года были эксперименты с 2017 и 2023 годом, показатели оказались лучше для 2017 года, поэтому все дальнейшие результаты указаны для данного базового года.

Приведём результаты идентификации.

- Абсолютное отклонение
  1. сумма модулей $\rho = 0.53$,
  2. сумма квадратов отклонений $\rho = 0.76$,
- Относительное отклонение
  1. суммы модулей $\rho = 0.89$,
  2. сумма квадратов отклонений $\rho = 1.15$.

В качестве верификации модели было решено сравнивать суммарное отклонение оплаты труда. Ниже будет приведено сопоставление результата по расчётам с помощью модели и суммы по статистике базового года.

Год	**Ошибка прогноза по модели**	**Отклонение от базового года**
2018	0.03758154643679484	0.16118671489788136
2019	0.02780357398125149	0.255727738719677
2020	0.04008049722587218	0.28412117431746015
2021	0.0206460919849566	0.39683715815290177
2022	0.04353197343776553	0.5001855379278815
2023	0.03249422799823941	0.5710770053102157

Соответстенно ошибка модели составляет не больше 5% и существенно лучше ошибки в случае прогноза в виде базового года.

Также проведено сравнение, где прогноз базового года приводился к ценам необходимого года с помощью индекса оплаты труда и индекса дефлятора ВВП.

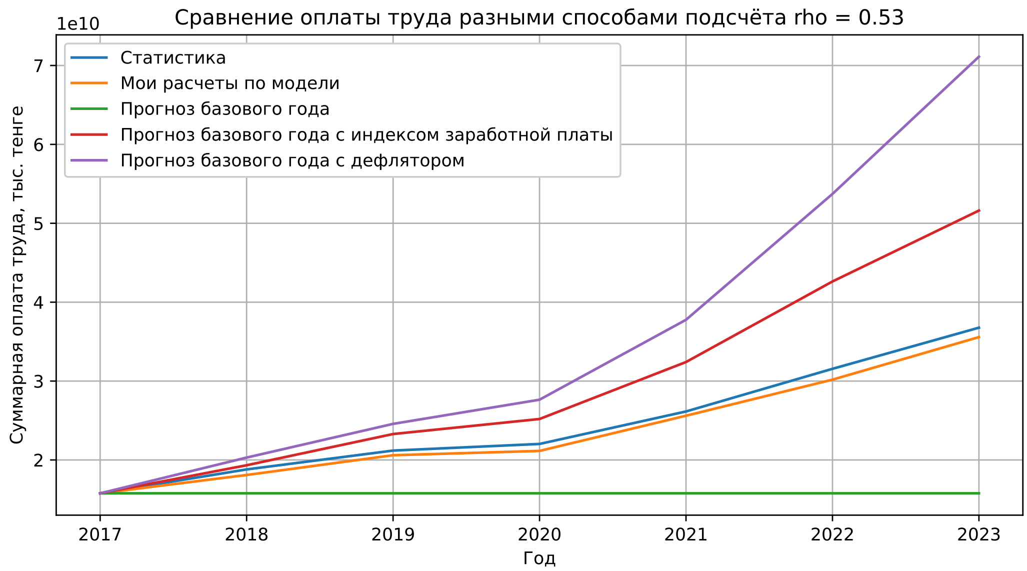

Рис. 2: Сравнение оплаты труда разными способами подсчёта $\rho = 0.53$.

3.5 Анализ ошибки отдельно по отраслям

Также было решено провести анализ ошибки отдельно по отраслям, в приложении указана таблица с результатами 1 ниже если будут упоминаться ошибки, это будут относительные отклонения модельных расчётов от статистики. Причиной этому может быть несколько факторов исходя из данной работы:

- Гипотеза, что все отрасли моделируются одним значением эластичности замещения. Это существенное упрощение вычислительной сложности модели может давать такой эффект.

- Гипотеза на то, что индекс цен импортных поступлений для всех отраслей одинаковый, что не вполне корректно и могло бы, вероятно, улучшить качество работы модели.

Также у модели есть структурные ограничения не связанные с гипотезами в работе: отстутствие учёта структурных шоков. За этот период Казахста пережил много событий и во многих случаях государству необходимо было принимать срочные меры по изменению политики в общем и отдельных отраслей в частности.

По характеру ошибки можно сделать качественный вывод:

- Отрицательная ошибка уменьшить эластичность замещения (увеличить ρ), сделать технологию более жёсткой.

- Положительная ошибка увеличить эластичность замещения (уменьшить ρ), сделать технологию более гибкой.

Однако для количественного вывода необходимы дополнительные эксперименты, поэтому рассмотрим несколько примеров с предположениями о направлении изменения без количественного анализа.

1. **Горнодобывающая промышленность и разработка карьеров:**
   Ошибка почти всегда отрицательная и значительная (например, -0.24 в 2023), значит, модель недооценивает оплату труда.
   Вывод: Труд здесь менее заменим, чем предполагает модель $\rightarrow$ эластичность замещения должна быть ниже (более "жёсткая"технология).

2. **Финансовая и страховая деятельность:**
   Ошибка положительная в 2020 и 2021 (0.48 и 0.33), затем становится небольшой и отрицательной.
   Вывод: В годы с положительной ошибкой — возможно, труд здесь легче заменим, чем предполагает модель, и эластичность замещения стоит повысить.

3. **Строительство:**
   Ошибка всегда отрицательная и довольно большая (до -0.27 в 2023).
   Вывод: Модель недооценивает труд, значит, труд менее заменим — эластичность замещения должна быть ниже.

Также к таких отраслях, как Строительство, Здравоохранение было большое влияние государства из-за инфраструктурных проектов в первом случае и влияния пандеии COVID-19 во втором. Масштабные инфраструктурные проекты создают острый дефицит кадров.

Были и отрасли, которые хорошо были промоделированы, например:

- 7 "Оптовая и розничная торговля; ремонт автомобилей и мотоциклов"ошибка получалась не более 6% в год,

- 16 "Образование"в 2023 год была недооценка на 12 процентов, в остальные года не более 7% в год.

- 12 "Операции с недвижимым имуществом"до 2021 включительно значительно переоценивались, после 2021 года значительно недооценивались. Может быть, такой скачок связан с уменьшением спроса на недвижимость по время COVID-19 и на большой спрос после данного периода.

3.6 Эксперимент с моделью с ограничением на мощность

Минерально-сырьевой комплекс играет ключевую роль в формировании валютных поступлений страны, поэтому в качестве эксперимента было решено промоделировать ситуацию, где произведенные мощности отрасли под номером 2 "Горнодобывающая промышленность и разработка карьеров"будут ограничены значением $M_2 = 1.5 \cdot 10^{10}$ тысяч тенге. Ниже будет приведён график для сравнения, где заменили только расчёты по прогнозу, остальное осталось таким же.

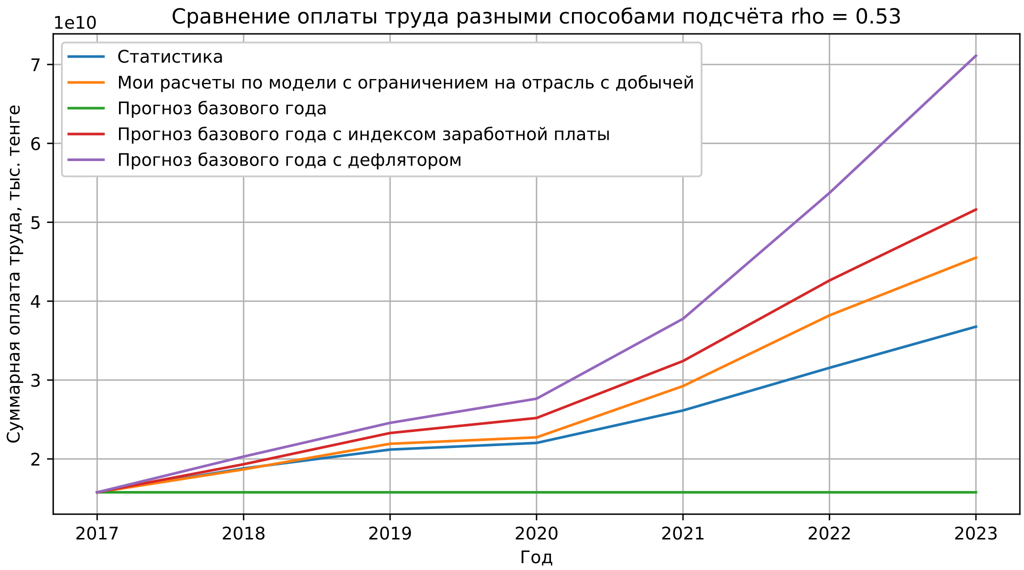

Рис. 3: Сравнение оплаты труда разными способами подсчёта $\rho = 0.53$.

На графике для сравнения оставил предыдущие величины и можно заметить, что график по прогнозу стал приближаться и напоминать по изменению график с прогнозом базового года обусловленный на изменение индекса цен.

4 Заключение

В рамках данной работы была продолжена работа над исследованием нелинейной модели межотраслевого баланса с учётом ограниченности ресурсов и замещения производственных факторов. Модель позволяет анализировать структурные особенности экономики Республики Казахстан и оценивать влияние различных факторов на её развитие.

Основные результаты работы:

1. **Разработка и адаптация теоретической модели.** Успешно реализована нелинейная модель межотраслевого баланса с производственными функциями CES, позволяющая учитывать эффекты замещения и ограничения мощностей. Модель обобщает классический подход Леонтьева, вводя возможность замещения факторов производства через параметр эластичности ρ.

2. **Идентификация параметров для экономики Казахстана.** Проведена идентификация ключевого параметра модели – эластичности замещения – на основе статистических данных СТЗВ за 2017-2023 годы. Получены следующие оценки параметра ρ:

   - При минимизации абсолютных отклонений: $\rho \in [0.53, 0.76]$, что соответствует эластичности замещения $\sigma \in [0.57, 0.65]$
   - При минимизации относительных отклонений: $\rho \in [0.89, 1.15]$, что соответствует $\sigma \in [0.47, 0.53]$

   Выявлена двойственная структура экономики: крупные межотраслевые потоки демонстрируют поведение, близкое к модели Леонтьева ($\rho \to +\infty$), в то время как малые потоки показывают значительную эластичность замещения.

3. **Высокая суммарная точность прогнозирования.** Максимальная ошибка модели не превышает 5%, что существенно превосходит точность простых методов экстраполяции.

4. **Анализ причин** ошибок отдельно по каждой отрасли исходя их структурных ограничений и экономических факторов.

5. **Анализ структурных ограничений.** Проведен сценарный анализ влияния ограничений производственных мощностей в горнодобывающей промышленности ($M_2 = 1.5 \cdot 10^{10}$ тысяч тенге). Выявлено, что при введении жестких ограничений на ключевые отрасли:

    - Экономика теряет адаптивность и переходит в режим фиксированных пропорций
    - Прогноз модели сходится к простому методу индексации от базового года
    - Подтверждается системообразующая роль минерально-сырьевого комплекса

6. **Разработка вычислительного алгоритма.** Создан и реализован эффективный алгоритм поиска экономического равновесия в модели, включающий:

    - Решение системы уравнений для определения равновесных цен
    - Вычисление оптимальных межотраслевых потоков с учетом эффектов замещения
    - Формирование всех квадрантов таблицы межотраслевого баланса

Список литературы

[1] Wassily Leontief, 1936. Quantitative Input-Output Relations in the Economic System of the United States, Review of Economics and Statistics, 18 (1936), 105–125

[2] W.W. Leontief, The Structure of American Economy, 1919-1939: An Empirical Application of Equilibrium Analysis, Oxford University Press, 1951

[3] R.E. Miller, P.D. Blair, Input-Output Analysis: Foundations and Extensions, Second Edition, Cambridge University Press, (2009).

[4] Ашманов С.А. Введение в математическую экономику : [Учеб. пособие для спец. "Прикл. математика"] / С. А. Ашманов. - Москва : Наука, 1984. - 293 с.

[5] Х. Никайдо Выпуклые структуры и математическая экономика. Пер. с англ. А. В. Малишевского ; Под ред. Э. М. Бравермана. - Москва : Мир, 1972. - 517 с.

[6] Daron Acemoglu, Ufuk Akcigit, William Kerr. Networks and the Macroeconomy. In: Handbook of Macroeconomics, 2016, Vol. 2B, pp. 527–576.

[7] D. Baqaee, E. Farhi. The Macroeconomic Impact of Microeconomic Shocks: Beyond Hulten's Theorem. Econometrica, 87(4), 2019, pp. 1397–1460.

[8] C. I. Jones. Intermediate Goods and Weak Links in the Theory of Economic Development. American Economic Journal: Macroeconomics, 3(2), 2011, pp. 1–28.

[9] Шананин А.А. Двойственность по Янгу и агрегирование балансов // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2020. Т. 493, С. 81–85. DOI: 10.31857/S2686954320040177

[10] Shananin, A.: Problem of Aggregating of an Input-Output Model and Duality. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 61(1), 153–166 (2021)

[11] Н.К. Обросова, А.А. Шананин. Двойственность по Янгу вариационных неравенств. Приложение для анализа взаимодействий в производственных сетях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 3. С. 88-105.

[12] Obrosova, N., Shananin, A., A nonlinear Input-Output model with capacitiy constraints. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2024, Т.21 №2 С. 654-668, DOI: 10.33048/semi.2024.21.045.

[13] Н.К. Обросова, А.А. Спиридонов, А.А. Шананин, Оценка инфляционных рисков в условиях реструктуризации экономики в сетевой модели с инфраструктурными ограничениями. Сибирские электорнные математические известия, 2024, Т.21 №3, С. A21-A56, DOI: 10.33048/semi.2024.21.A02.

[14] Таблицы "затраты-выпуск" с 2021 по 2023 год

[15] Бюллетени таблиц "затраты-выпуск" до 2021 года

[16] Индекс реальной заработной платы по видам экономической деятельности в Республике Казахстан (2010-2024гг.)

[17] Дефлятор ВВП методом производства

[18] Индекс цен импортных поступлений по основным группам товаров, продукции

A Приложение: Соответствие отраслей и продукции

Ниже представлено соответствие между отраслями из СТЗВ и ОКЭД:

1. **Сельское, лесное и рыбное хозяйство**

   (1) Продукция сельского хозяйства, охоты и сопутствующие услуги

   (2) Продукция лесного хозяйства, лесозаготовок и услуг в этих областях

   (3) Рыба и продукция рыболовства прочая; аквакультура; услуги вспомогательные в области рыболовства

2. **Горнодобывающая промышленность и разработка карьеров**

   (4) Уголь каменный и лигнит

   (5) Нефть сырая

   (6) Газ природный в жидком или газообразном состоянии

   (7) Руды железные

   (8) Руды металлов цветных

   (9) Продукция горнодобывающей промышленности

   (10) Услуги вспомогательные в области горнодобывающей промышленности

3. **Обрабатывающая промышленность**

   (11) Продукты пищевые и напитки

   (12) Изделия табачные

   (13) Текстиль

   (14) Предметы одежды

   (15) Кожа и изделия, относящиеся к ней

   (16) Древесина и изделия из древесины и пробки (кроме мебели), изделия из соломки и материалов для плетения

   (17) Бумага и изделия бумажные

   (18) Услуги по печатанию и воспроизведению

   (19) Продукция печей коксовых

(20) Продукты переработки нефти

(21) Вещества химические и продукты химические

(22) Продукты фармацевтические и препараты фармацевтические основные

(23) Изделия резиновые и пластмассовые

(24) Изделия минеральные неметаллические прочие

(25) Металлы черные основные: железо, чугун, сталь и ферросплавы

(26) Трубы разных диаметров, профили полые и фитинги для труб разных диаметров из стали

(27) Изделия стальные прочие, полученные путем первичной обработки

(28) Металлы драгоценные основные и металлы цветные прочие

(29) Услуги производства литейного

(30) Изделия металлические готовые, кроме машин и оборудования

(31) Компьютеры, продукция электронная и оптическая

(32) Оборудование электрическое

(33) Машины и оборудование, не включенные в другие группировки

(34) Автомобили, прицепы и полуприцепы

(35) Оборудование транспортное прочее

(36) Мебель

(37) Изделия готовые прочие

(38) Услуги по ремонту и установке машин и оборудования

4. **Электроснабжение, подача газа, пара и воздушное кондиционирование**

(39) Услуги по производству и распределению электроэнергии

(40) Газ отопительный; услуги по распределению топлива газообразного трубопроводного

(41) Услуги по снабжению паром и воздухом охлажденным

5. **Водоснабжение; водоотведение; сбор, обработка и удаление отходов, деятельность по ликвидации загрязнений**

(42) Водоснабжение; канализационная система, услуги по сбору и удалению отходов

6. **Строительство**

   (43) Здания и работы строительные

7. **Оптовая и розничная торговля; ремонт автомобилей и мотоциклов**

   (44) Услуги по торговле оптовой и розничной; услуги по ремонту автомобилей и мотоциклов

   (45) Услуги по торговле оптовой, кроме торговли автомобилями и мотоциклами

   (46) Услуги по торговле розничной, за исключением автомобилями и мотоциклами

8. **Транспорт и складирование**

   (47) Услуги сухопутного транспорта и транспортирование по трубопроводам

   (48) Услуги водного транспорта

   (49) Услуги воздушного транспорта

   (50) Услуги по хранению и услуги транспортные вспомогательные

   (51) Услуги почтовые и курьерские

B Ошибка модели по отраслям для Оплаты труда

Таблица 1: ошибка модели по каждой отрасли

	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Сельское, лесное и рыбное хозяйство	-0.06	-0.07	-0.15	-0.2	-0.14	0
Горнодобывающая промышленность и разработка карьеров	-0.09	-0.14	-0.21	-0.21	-0.16	-0.24
Обрабатывающая промышленность	-0.05	0.01	-0.05	-0.11	-0.18	0.02
Электроснабжение, подача газа, пара и воздушное кондиционирование	-0.1	-0.02	0	0.03	-0.14	0.1
Водоснабжение; водоотведение; сбор, обработка и удаление отходов, деятельность по ликвидации загрязнений	-0.01	-0.01	-0.01	-0.18	0.14	0.3
Строительство	-0.14	-0.18	-0.22	-0.05	-0.23	-0.28
Оптовая и розничная торговля; ремонт автомобилей и мотоциклов	-0.03	0.02	0	0.01	-0.04	-0.07
Транспорт и складирование	-0.11	-0.19	-0.17	-0.12	-0.18	-0.23
Услуги по проживанию и питанию	0.01	0.01	-0.03	0.04	-0.21	-0.1
Информация и связь	-0.05	-0.05	-0.13	-0.13	-0.19	-0.18
Финансовая и страховая деятельность	-0.1	-0.17	-0.12	0.07	-0.03	-0.03
Операции с недвижимым имуществом	0.08	0.13	0.49	0.33	-0.22	-0.09
Профессиональная, научная и техническая деятельность	-0.08	-0.07	-0.01	-0.19	-0.14	-0.24
Деятельность в области административного и вспомогательного обслуживания	-0.11	0.02	-0.08	-0.29	-0.19	-0.28
Государственное управление и оборона; обязательное социальное обеспечение	0.01	0.2	0.13	-0.04	-0.12	0.12
Образование	0	-0.02	0.01	0.07	0.03	-0.12
Здравоохранение и социальное обслуживание населения	0.02	0.01	0.06	0.14	-0.24	-0.53
Искусство, развлечения и отдых	0.01	-0.01	-0.06	-0.12	-0.19	-0.25
Предоставление прочих видов услуг	-0.04	-0.18	-0.34	-0.25	-0.17	0.09