Cálculo da Integral mencionada por Chen & Li para o cálculo de distâncias fuzzy intuitionist

André Siviero

August 18, 2012

Abstract

Detalhamento matemático que serve de suporte para o código escrito em Matlab que realiza a distância entre dois números fuzzy.

1 Definições preliminares

1.1 λ-cut representation

Uma representacao λ-cut de um número fuzzy intuicionista $\tilde{A}$ é definida pelo intervalo:

$$\tilde{A}_\lambda = [a^L(\lambda), a^R(\lambda)]$$

tal que

$$\mu_A(x) \geqslant \lambda \forall x \in \tilde{A}_\lambda$$

1.2 Expressões para $a^L(\lambda)$ e $a^R(\lambda)$

Novamente nos referindo a Chen & Li para as definicoes de $\mu(x)$, os valores de $a^L(\lambda)$ e $a^R(\lambda)$ são facilmente obtidos substituindo x por estes valores e $\mu(x) = \lambda$. Com algum algebrismo simples, as expressões obtidas são:

$$a^L(\lambda) = \frac{\lambda}{\tilde{\mu}}(b-a) + a$$

$$a^R(\lambda) = d - \frac{\lambda}{\tilde{\mu}}(d-c)$$

com $\lambda \leqslant \tilde{\mu}$

2 A integral

A integral é definida como no paper:

$$\int_0^1 \left[\left(a^L(\lambda) - b^L(\lambda)\right)^2 + \left(a^R(\lambda) - b^R(\lambda)\right)^2 \right] d\lambda$$

Primeiro efetua-se o calculo de $\left(a^L(\lambda) - b^L(\lambda)\right)$:

$$a^L(\lambda) - b^L(\lambda) = \frac{\lambda}{\tilde{\mu_a}}(b_a - a_a) + a_a - \frac{\lambda}{\tilde{\mu_b}}(b_b - a_b) + a_b$$

$$\lambda \left[\frac{b_a - a_a}{\tilde{\mu_a}} - \frac{b_b - a_b}{\tilde{\mu_b}} \right] + (a_a - a_b)$$

Chamando o termo que multiplica λ de α, obtem-se:

$$a^L(\lambda) - b^L(\lambda) = \lambda\alpha + (a_a - a_b)$$

Por fim, eleva-se ao quadrado para obter:

$$(a^L(\lambda) - b^L(\lambda))^2 = \lambda^2\alpha^2 + 2\lambda\alpha(a_a - a_b) + (a_a - a_b)^2$$

Um procedimento similar é usado para calcular $\left(a^R(\lambda) - b^R(\lambda)\right)$:

$$a^R(\lambda) - b^R(\lambda) = d_a - \frac{\lambda}{\tilde{\mu_a}}(d_a - c_a) - d_b + \frac{\lambda}{\tilde{\mu_b}}(d_b - c_b)$$

$$\lambda \left[\frac{d_b - c_b}{\tilde{\mu_b}} - \frac{d_a - c_a}{\tilde{\mu_a}} \right] + (d_a - d_b)$$

Chamando o termo que multiplica λ de β, obtem-se:

$$a^R(\lambda) - b^R(\lambda) = \lambda\beta + (d_a - d_b)$$

Por fim, eleva-se ao quadrado para obter:

$$(a^R(\lambda) - b^R(\lambda))^2 = \lambda^2\beta^2 + 2\lambda\beta(d_a - d_b) + (d_a - d_b)^2$$

Retornando à integral:

$$\int_0^1 \left[\left(a^L(\lambda) - b^L(\lambda)\right)^2 + \left(a^R(\lambda) - b^R(\lambda)\right)^2 \right] d\lambda =$$

$$\int_0^1 \left[\lambda^2\alpha^2 + 2\lambda\alpha(a_a - a_b) + (a_a - a_b)^2 + \lambda^2\beta^2 + 2\lambda\beta(d_a - d_b) + (d_a - d_b)^2\right] d\lambda =$$

$$\int_0^1 \left[\lambda^2(\alpha^2 + \beta^2) + \lambda(2(\alpha(a_a - a_b) + \beta(d_a - d_b))) + (a_a - a_b)^2 + (d_a - d_b)^2\right] d\lambda =$$

$$\left[\frac{\lambda^3}{3}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{\lambda^2}{2}(2(\alpha(a_a - a_b) + \beta(d_a - d_b))) + \lambda((a_a - a_b)^2 + (d_a - d_b)^2) \right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha(a_a - a_b) + \beta(d_a - d_b)) + (a_a - a_b)^2 + (d_a - d_b)^2$$

Portanto, o valor analítico da integral é funcao apenas dos parametros a, b, c, d e $\tilde{\mu}$ dos números fuzzy dos quais se quer calcular a distancia.