

Busca Tabu aplicada ao problema de Particionamento de Conjuntos

Arthur Selle Jacobs
asjacobs@inf.ufrgs.br

Particionamento de Conjuntos

- Consiste em um universo U com n subconjuntos m elementos
- Cada subconjunto j possui de 1 a m elementos e um custo c_j associado
- Solução:
 - Encontrar um conjunto S de subconjuntos que cubra todos os elementos
 - Um elemento só pode ser coberto por um subconjunto
 - Minimizar a soma dos custos dos subconjuntos de S

Particionamento de Conjuntos (Cont.)

- Possui diversas aplicações na vida real
- Sua aplicação mais conhecida é o escalonamento de tripulações
 - n tripulações, cada uma com um custo associado
 - m voos que necessitam uma tripulação
 - Qual o menor custo para uma empresa aérea?

Particionamento de Conjuntos (Cont.)

- Formulação matemática

- $a_{i,j} \begin{cases} 1, \text{ caso o elemento } i \text{ pertence ao subconjunto } j. \\ 0, \text{ c. c.} \end{cases}$
- $x_j \begin{cases} 1, \text{ caso o subconjunto } j \text{ pertence a solução } S. \\ 0, \text{ c. c.} \end{cases}$
- c_j , custo associado ao subconjunto j .

$$\text{Minimizar } \sum_{j \in U} c_j x_j$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j \in U} a_{i,j} x_j = 1, \forall i \in |m|$$

$$a_{i,j}, x_j \in \mathbb{B}$$

$$c_j \in \mathbb{Z}$$

Busca Tabu

- Meta-heurística utilizada para guiar outros procedimentos, como a Busca Local
- Permite movimentos de piora
- Normalmente implementada com movimentos determinísticos
 - Best Improvement
- Mantém uma lista de movimentos proibidos, chamada Lista Tabu
 - Movimento que não levariam a uma solução ótima (e.g. as ultimas modificações realizadas)

Busca Tabu (Cont.)

- Pseudocódigo
 - S_0 é a solução inicial
 - S é a solução atual
 - S^* é a melhor solução encontrada
 - f^* é o valor da melhor solução encontrada
 - T é a Lista Tabu
 - $N(S)$ é vizinhança da solução S
 - $\bar{N}(S)$ é a vizinhança permitida da solução S

```
BuscaTabu()
{
     $S_0 := \text{EncontraSolucaoInicial}();$ 
     $S := S_0; S^* := S_0; f^* := f(S_0); T := \emptyset;$ 
    enquanto ( $\neg(\text{criterio} - \text{de} - \text{parada})$ ) faça
         $\bar{N}(S) := \emptyset;$ 
        para cada ( $s \text{ em } N(S)$ ) faça
            se ( $\neg \text{EhTabu}(s, T)$ )
                 $\bar{N}(S) := \bar{N}(S) + s;$ 
        fim - para;
         $S := \text{EncontraMelhorVizinho}(\bar{N}(S));$ 
        se ( $f^* < f(S)$ )
             $S^* := S; f^* := f(S);$ 
         $T := T + S;$ 
    fim - enquanto;
    retorna  $S^*;$ 
}
```

Aplicação ao problema

- Representação da instância
 - Uma instancia é uma lista de vetores de inteiros (i.e. `vector<vector<int>>`)
 - Cada vetor de inteiros é um subconjunto com $m + 1$ posições
 - A posição de índice 0 de cada subconjunto é o custo associado
 - As posições de 1 a m de cada subconjunto são tratadas com um vetor binário
- Representação da solução
 - Uma solução é representada por dois vetores de inteiros
 - Um vetor binário de subconjuntos com n posições
 - Um vetor binário de elementos cobertos pela solução com $m + 1$ posições
 - A posição 0 do vetor de elementos recebe a soma dos subconjuntos

Aplicação ao problema (Cont.)

○ Solução Inicial

1. Para cada elemento i não coberto pela solução, faz uma lista dos subconjuntos que cobrem tal elemento
2. Seleciona o subconjunto que cobre o elemento i com menor custo, e o adiciona a solução inicial.
3. Repita passos 1 e 2 até que todos os m elementos estejam cobertos.
4. Aplica *Operador Heurístico de Viabilidade* (P.C. Chu e J.E. Beasley, 1995)

Aplicação ao problema (Cont.)

○ *Operador Heurístico de Viabilidade*

1. Seleciona aleatoriamente um subconjunto que faz parte da solução.
2. Se o subconjunto contém algum elemento que é coberto mais de uma vez, o subconjunto é removido da solução.
3. Repete os passos 1 e 2 até que todos os subconjuntos da solução tenham sido analisados.
4. Seleciona aleatoriamente um elemento que não está coberto pela solução.
5. Dentre todos os subconjuntos que possuem o elemento selecionado, e não possuem nenhum outro elemento já coberto pela solução, seleciona o que tiver o menor custo e o adiciona à solução. Caso não exista nenhum subconjunto que satisfaça esses critérios, não faz nada.
6. Repete os passos 4 e 5 até que todos os elementos não cobertos tenham sido analisados.

Aplicação ao problema (Cont.)

○ Vizinhança

1. Seleciona um subconjunto pertence a solução atual.
2. Para cada subconjunto que não faz parte da solução, verifica que se o vizinho está na Lista Tabu:
 1. Se sim, pula para próximo vizinho;
 2. Se não, troca o subconjunto da solução com o que não faz parte da solução e adiciona vizinho a vizinhança.
3. Repete os itens 2 e 3 ate que todas as combinações sejam testadas.

Aplicação ao problema (Cont.)

- Soluções inviáveis são permitidas
- Como evitá-las?
 - Avaliação de cada solução

$$f_k = \sum_{j=1}^n c_j \times \left(1 + \sum_{i=1}^m \bar{b}_{i,k} \right), \forall k \in \bar{N}(S)$$

- $\bar{b}_{i,k}$ recebe 1 se o elemento i não é coberto pela solução k , ou se é múltiplemente coberto.

Testes

- Calibragem dos parâmetros
 - Tamanho da Lista Tabu
 - Número de iterações sem melhora
- Demais parâmetros mantidos constantes
 - Tempo máximo de execução (900 seg.)
 - Semente para heurística executada na solução inicial (515151)

Testes (Cont.)

- Calibragem
 - Instância: sppnw41

	T.L.T.	It. Max.	S.I.	S.F.	T. Exec. (seg)	Num. It.
Config. 1	10	50	19449 (V)	18576 (V)	4,169	64
	20	50	19449 (V)	17592 (V)	8,44	114
	30	50	19449 (V)	17835 (V)	4,107	87
	40	50	19449 (V)	17781 (V)	12,435	109
	50	50	19449 (V)	17835 (V)	13,47	81
Config. 2	10	100	19449 (V)	17409 (V)	10,556	231
	20	100	19449 (V)	17592 (V)	9,615	164
	30	100	19449 (V)	17544 (V)	9,023	213
	40	100	19449 (V)	17781 (V)	14,8	159
	50	100	19449 (V)	17835 (V)	15,22	131
Config. 3	10	200	19449 (V)	17409 (V)	17,505	331
	20	200	19449 (V)	17592 (V)	16,537	264
	30	200	19449 (V)	17544 (V)	15,05	313
	40	200	19449 (V)	17781 (V)	43,45	416
	50	200	19449 (V)	17835 (V)	30,37	231
Config. 4	10	500	19449 (V)	17409 (V)	59,985	631
	20	500	19449 (V)	17592 (V)	70,775	564
	30	500	19449 (V)	17544 (V)	45,254	613
	40	500	19449 (V)	17718 (V)	139,036	716
	50	500	19449 (V)	17835 (V)	107,331	531
Config. 5	10	1000	19449 (V)	17409 (V)	58,631	1131
	20	1000	19449 (V)	17592 (V)	68,871	1064
	30	1000	19449 (V)	17544 (V)	50,813	1113
	40	1000	19449 (V)	17718 (V)	14,8	1216
	50	1000	19449 (V)	17409 (V)	293,313	2004

Testes (Cont.)

- Calibragem
 - Instância: sppnw32

	T.L.T.	It. Max.	S.I.	S.F.	T. Exec. (seg)	Num. It.
Config. 1	10	50	19314 (V)	18816 (V)	7,129	56
	20	50	19314 (V)	18816 (V)	46,674	56
	30	50	19314 (V)	18816 (V)	17,758	56
	40	50	19314 (V)	18816 (V)	14,922	56
	50	50	19314 (V)	18816 (V)	9,402	56
Config. 2	10	100	19314 (V)	18816 (V)	5,785	106
	20	100	19314 (V)	18816 (V)	76,827	106
	30	100	19314 (V)	18816 (V)	24,296	106
	40	100	19314 (V)	18816 (V)	23,68	106
	50	100	19314 (V)	18816 (V)	15,607	106
Config. 3	10	200	19314 (V)	18816 (V)	12,036	206
	20	200	19314 (V)	18816 (V)	187,181	206
	30	200	19314 (V)	18816 (V)	46,351	206
	40	200	19314 (V)	18816 (V)	47,906	206
	50	200	19314 (V)	18816 (V)	37,288	206
Config. 4	10	500	19314 (V)	18816 (V)	42,266	506
	20	500	19314 (V)	18816 (V)	742,318	506
	30	500	19314 (V)	18816 (V)	171,505	506
	40	500	19314 (V)	18816 (V)	150,423	506
	50	500	19314 (V)	18816 (V)	149,486	506
Config. 5	10	1000	19314 (V)	18816 (V)	58,507	1006
	20	1000	19314 (V)	18816 (V)	899,45	1006
	30	1000	19314 (V)	18816 (V)	203,441	1006
	40	1000	19314 (V)	18816 (V)	193,715	1006
	50	1000	19314 (V)	18816 (V)	208,651	1006

Testes (Cont.)

- Calibragem
- Instância: sppnw34

	T.L.T.	It. Max.	S.I.	S.F.	T. Exec. (seg)	Num. It.
Config. 1	10	50	20838 (V)	20838 (V)	74,754	50
	20	50	20838 (V)	20838 (V)	42,516	50
	30	50	20838 (V)	20838 (V)	20,587	50
	40	50	20838 (V)	20838 (V)	54,558	50
	50	50	20838 (V)	20838 (V)	137,671	50
Config. 2	10	100	20838 (V)	20838 (V)	113,992	100
	20	100	20838 (V)	19860 (V)	145,846	187
	30	100	20838 (V)	20838 (V)	39,324	100
	40	100	20838 (V)	20838 (V)	144,064	100
	50	100	20838 (V)	20838 (V)	290,291	100
Config. 3	10	200	20838 (V)	20838 (V)	235,712	200
	20	200	20838 (V)	19860 (V)	222,122	287
	30	200	20838 (V)	19482 (V)	162,012	472
	40	200	20838 (V)	20838 (V)	460,053	200
	50	200	20838 (V)	20838 (V)	313,174	200
Config. 4	10	500	20838 (V)	20838 (V)	791,837	500
	20	500	20838 (V)	19860 (V)	627,814	587
	30	500	20838 (V)	19482 (V)	375,567	772
	40	500	20838 (V)	19482 (V)	900,41	273
	50	500	20838 (V)	20838 (V)	900,526	212
Config. 5	10	1000	20838 (V)	20838 (V)	900,239	600
	20	1000	20838 (V)	19860 (V)	708,68	1087
	30	1000	20838 (V)	19482 (V)	479,208	1272
	40	1000	20838 (V)	19482 (V)	901,628	333
	50	1000	20838 (V)	19482 (V)	901,53	588

Testes (Cont.)

- Calibragem
 - Tamanho da Lista Tabu := 30
 - Número de iterações sem melhora := 200
- Demais parâmetros
 - Semente := {515151, 159753, 333333, 299001, 100992}
 - Tempo máximo de execução := 900 seg.

Testes (Cont.)

○ Resultados

Instância	S.I.	S.F.	Solver	M.S.C.	Desvio (M.S.C.)	T. Exec. (seg).	Num. It.	Semente
sppnw41	19449 (V)	17544 (V)	11307	11307	65%	11.26	313	515151
	16788 (V)	15690 (V)	11307	11307	72%	8.46	257	159753
	14511 (V)	14031 (V)	11307	11307	80%	6.65	209	333333
	16425 (V)	15750 (V)	11307	11307	71%	7.94	215	299001
	16719 (V)	16422 (V)	11307	11307	67%	8.77	247	100992
sppnw32	19314 (V)	18816 (V)	14877	14877	79%	16.63	206	515151
	19314 (V)	18816 (V)	14877	14877	79%	16.61	206	159753
	19626 (V)	18816 (V)	14877	14877	79%	19.02	220	333333
	17400 (V)	17097 (V)	14877	14877	87%	18.70	209	299001
	19626 (V)	18816 (V)	14877	14877	79%	21.36	220	100992
sppnw34	20838 (V)	19482 (V)	10488	10488	54%	209.77	472	515151
	12786 (I)	14439 (V)	10488	10488	73%	79.18	241	159753
	19590 (V)	18561 (V)	10488	10488	56%	116.05	233	333333
	16461 (I)	19527 (V)	10488	10488	53%	341.19	756	299001
	15942 (I)	17916 (V)	10488	10488	58%	207.90	423	100992

Testes (Cont.)

○ Resultados

Instância	S.I.	S.F.	Solver	M.S.C.	Desvio (M.S.C.)	T. Exec. (seg).	Num. It.	Semente
heart	135 (I)	135 (I)	180	180	0%	202.89	200	515151
	144 (I)	144 (I)	180	180	0%	219.25	200	159753
	135 (I)	135 (I)	180	180	0%	224.32	200	333333
	126 (I)	126 (I)	180	180	0%	208.07	200	299001
	135 (I)	135 (I)	180	180	0%	219.93	200	100992
delta	90 (I)	90 (I)	126	126	0%	83.51	200	515151
	90 (I)	90 (I)	126	126	0%	82.95	200	159753
	81 (I)	81 (I)	126	126	0%	64.01	200	333333
	81 (I)	81 (I)	126	126	0%	67.01	200	299001
	90 (I)	90 (I)	126	126	0%	82.38	200	100992
sppnw36	5764 (I)	9454 (V)	7314	7314	77%	83.47	414	515151
	7106 (I)	8862 (V)	7314	7314	82%	65	299	159753
	8558 (I)	8328 (V)	7314	7314	87%	44.80	247	333333
	4126 (I)	8246 (V)	7314	7314	86%	62.61	350	299001
	6332 (I)	8952 (V)	7314	7314	81%	140.44	674	100992

Testes (Cont.)

○ Resultados

Instância	S.I.	S.F.	Solver	M.S.C.	Desvio (M.S.C.)	T. Exec. (seg).	Num. It.	Semente
meteor	42 (I)	42 (I)	60	60	0%	86.53	200	515151
	42 (I)	42 (I)	60	60	0%	104.67	200	159753
	42 (I)	42 (I)	60	60	0%	98.02	200	333333
	42 (I)	42 (I)	60	60	0%	97.46	200	299001
	36 (I)	36 (I)	60	60	0%	82.08	200	100992
sppaa06	18014 (I)	18858 (I)	27040	27040	0%	900	11	515151
	20409 (I)	20495 (I)	27040	27040	0%	900	11	159753
	18400 (I)	18559 (I)	27040	27040	0%	900	11	333333
	18666 (I)	15829 (I)	27040	27040	0%	900	12	299001
	19259 (I)	20559 (I)	27040	27040	0%	900	11	100992
sppnw05	211960 (V)	211960 (V)	∅	132878	62%	900	1	515151
	180098 (V)	180098 (V)	∅	132878	73%	900	1	159753
	267448 (V)	267448 (V)	∅	132878	50%	900	1	333333
	219854 (V)	219854 (V)	∅	132878	60%	900	1	299001
	220386 (V)	220386 (V)	∅	132878	60%	900	1	100992

Testes (Cont.)

○ Resultados

Instância	S.I.	S.F.	Solver	M.S.C.	Desvio (M.S.C.)	T. Exec. (seg).	Num. It.	Semente
sppnw16	1241460 (V)	1241460 (V)	∅	1181590	95%	900	1	515151
	1241342 (V)	1241342 (V)	∅	1181590	95%	900	1	159753
	1269486 (V)	1269486 (V)	∅	1181590	93%	900	1	333333
	1260070 (V)	1260070 (V)	∅	1181590	93%	900	1	299001
	1231948 (V)	1231948 (V)	∅	1181590	95%	900	1	100992
sppus01	9065 (I)	9065 (I)	∅	10036	0%	900	1	515151
	12690 (I)	13121 (I)	∅	10036	0%	900	1	159753
	10695 (I)	10695 (I)	∅	10036	0%	900	1	333333
	9630 (I)	9746 (I)	∅	10036	0%	900	1	299001
	103272 (I)	10601 (I)	∅	10036	0%	900	1	100992

Conclusões

- Resultados não muito próximos do melhor valor conhecido
- Calibragem apenas para soluções pequenas
- Complexidade alta demais para instâncias maiores

Referências

- [1] David Levine. A Parallel Genetic Algorithm for the Set Partitioning Problem. Argonne National Laboratory, Maio de 1994.
- [2] P.C. Chu, J.E. Beasley. A Genetic Algorithm for the Set Partitioning Problem. Imperial College, Abril de 1995.
- [3] Fred Glover. Tabu Search: A Tutorial. Junho–Agosto de 1990.
- [4] Michel Gendreau, Jean–Yves Potvin. Search Methodologies, Chapter 6 – Tabu Search. Editado por Edmund K. Burke e Graham Kendall, Springer. Junho de 2005.
- [5] Marcus Ritt, Luciana Buriol. INF05010 – Otimização combinatória. Notas de aula. 2013/08/07.