

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Московская школа экономики
Кафедра эконометрики и математических методов экономики

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Учебное пособие для вузов

Вологда
ВолНЦ РАН
2021

УДК 330.43
ББК 65в6
В24

Авторы:

*Н. В. Артамонов, Е. А. Ивин,
А. Н. Курбацкий, Д. Фантаццини*

Рецензент

Шаклеина М.В., доцент кафедры
эконометрики и математических методов экономики
Московской школы экономики МГУ им. М.В. Ломоносова

В24 Введение в анализ временных рядов : учебное пособие для вузов / Н. В. Артамонов, Е. А. Ивин, А. Н. Курбацкий, Д. Фантаццини ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, Кафедра эконометрики и математических методов экономики. – Вологда : ВолНЦ РАН, 2021. – 134 с.: ил., табл.

ISBN 978-5-93299-496-2

Настоящее учебное пособие представляет собой справочник по базовым разделам эконометрики временных рядов. Пособие написано на основе лекций и семинаров, которые авторы проводили в Московской школе экономике МГУ, ВШЭ и в МГИМО со студентами в рамках курса “Введение в анализ временных рядов” в 2016-2020 учебных годах. В каждой главе приводятся основные определения, факты, примеры, а в конце книги размещены задачи для самостоятельного решения.

Книга адресована студентам и аспирантам социальных и экономических специальностей, а также преподавателям.

УДК 330.43
ББК 65в6

ISBN 978-5-93299-496-2

© Артамонов Н. В., Курбацкий А. Н.,
Фантаццини Д., 2021

© Ивин Е. А. (наследники), 2021

© Оформление. ФГБУН ВолНЦ РАН, 2021

Светлой памяти
Евгения Александровича Ивина
посвящается

Оглавление

Введение	7
1 Модели стационарных временных рядов	9
1.1. Стационарные временные ряды	10
1.1.1. Понятие стационарности	10
1.1.2. Модели стационарных рядов	13
1.1.3. Модели MA и AR	18
1.1.4. Прогнозирование для модели ARMA	24
1.2. Оценка и тестирование модели	26
1.2.1. Подход Бокса-Дженкинса	26
1.3. Линейная регрессия для стационарных рядов	33
1.3.1. Модель FDL	34
1.3.2. Модель ADL	36
1.4. TS-ряды	39
1.5. Модель тренда и сезонность	39
1.5.1. Понятие TS-ряда	39
1.5.2. Оценивание и статистические выводы	41
2 Нестационарные временные ряды	46
2.1. Ряды с единичным корнем	46
2.1.1. Случайное блуждание	46
2.1.2. Случайное блуждание со сносом	47
2.1.3. Дифференцирование ряда	50
2.1.4. DS-ряды	52

2.1.5.	Модель ARIMA	53
2.1.6.	Оценка и статистические свойства	56
2.1.7.	Тесты “единичного корня”	56
2.1.8.	Оценка ARIMA-модели	66
2.2.	Модели пространства состояний	66
2.2.1.	Идея и примеры	66
2.2.2.	Примеры оценивания	68
2.2.3.	Возможные применения	70
3	Моделирование волатильности	72
3.1.	Одномерная волатильность	72
3.2.	Обобщенные модели авторегрессионной гетероскедастичности	74
3.2.1.	ARCH(1)-модель	77
3.2.2.	ARCH(p)-модель	78
3.2.3.	GARCH модели	79
3.3.	Ассиметричные и нелинейные модели GARCH	84
3.3.1.	Экспоненциальная модель GARCH	84
3.3.2.	Пороговая модель GARCH	86
3.3.3.	Интегрированная модель GARCH	86
3.4.	Кривая воздействия новостей	87
3.5.	Дробно интегрированные модели	89
3.5.1.	Модели ARFIMA	89
3.5.2.	Модели FIGARCH	90
3.6.	Оценка моделей GARCH	91
4	Модель векторной авторегрессии	93
4.1.	Стационарная VAR-модель	93
4.1.1.	Функции импульсного отклика	96
4.1.2.	Причинность по Гренджеру	99
4.2.	Ряды с единичным корнем	100
4.2.1.	VAR-модель с единичным корнем	100
4.2.2.	Коинтеграция и векторная модель коррекции ошибки	101
4.2.3.	Оценивание и инференции	105

5	Задачи для самостоятельного решения	108
5.1.	Стационарные временные ряды	108
5.2.	Модели распределенных лагов	115
5.3.	TS – ряды	119
5.4.	DS – ряды	121
5.5.	Моделирование волатильности	126
5.6.	VAR и коинтеграция	127
	Литература	132

Введение

Настоящее пособие предназначено для знакомства и освоения самых базовых понятий и методов анализа и прогнозирования временных рядов, которые могут пригодиться при эконометрических исследованиях социально-экономических процессов. Это пособие написано на основе курсов, прочитанных авторами для студентов и аспирантов МШЭ МГУ, МГИМО, ВШЭ. Стоит отметить, что параллельно теоретическому курсу проводились и компьютерные практикумы, которые являлись неотъемлемой частью обучения анализу временных рядов.

Пособие содержит теоретический материал и примеры практического применения. Для закрепления усвоенных знаний в конце пособия приведены упражнения для самостоятельного решения. Для дополнительного чтения мы советуем книги [1, 2, 3, 4, 12, 13]. Для первоначального чтения можно воспользоваться книгами [6, 8].

Авторы сознательно приняли решение не вставлять примеры решения задач на компьютере, соответствующее пособие на языке R подготавливается к печати отдельно.

Благодарности

Авторы с благодарностью вспоминают заведующего кафедрой ЭММЭ Московской школы экономики МГУ им. Ломоносова, д.э.н., профессора Айвазяна С. А. за его внимание и советы по преподаванию курса вплоть до 2019 года.

Мы также благодарны слушателям за задаваемые ими вопросы, в особенности студентам магистратуры по направлению "Экономика и математические методы" Московской школы экономики Малютиной Ольге и Манукян Стелле за техническую помощь в процессе подготовки пособия и комментарии.

Пособие написано при поддержке гранта РФФИ: № 20-68-47030 "Эконометрические и вероятностные методы для анализа финансовых рынков сложной структуры".

Глава 1

Модели стационарных временных рядов

Анализ моделей временных рядов является логическим продолжением базового курса эконометрики пространственных данных [3, 4]. Принципиальное различие в структурах пространственных и временных выборок требует рассмотрения для них отдельных методов и подходов к оцениванию. При построении эконометрических регрессионных моделей для временных рядов возникает ряд особенностей, которые необходимо учесть:

- упорядоченность во времени (хронологический порядок);
- зависимость от прошлого (“память”, серийная или авто-корреляция);
- различаются краткосрочные и долгосрочные зависимости и модели;
- часто встречается феномен “ложной регрессии”;
- бывает небольшое число наблюдений (как правило при работе с

макроданными), которое невозможно увеличить (т.к. изменяется вид или структура зависимости).

Замечание. Для временных рядов используется индекс t , чтобы показать зависимость от времени.

Наиболее распространённые модели временных рядов (одномерные и многомерные):

1. стационарные ряды;
2. стационарные относительно тренда или TS-ряды;
3. ряды с единичным корнем или DS-ряды;
4. ряды с переменной волатильностью или с условной гетероскедастичностью.

Для каждой модели существуют свои подходы к оцениванию и построению регрессий.

1.1. Стационарные временные ряды

1.1.1. Понятие стационарности

Определение. Временной ряд $\{x_t\}$ называется стационарным (в широком смысле), если

1. $E x_t \equiv \text{const}$ (среднее постоянно во времени);
2. $\text{cov}(x_t, x_{t+h}) = \gamma(h)$ (ковариация зависит только от лага h).

Понятие стационарного временного ряда означает, что его среднее значение не изменяется во времени, т.е. временной ряд не имеет тренда. Кроме того, ковариация между разными элементами временного ряда (как между случайными величинами) зависит только от того, насколько сильно они отдалены друг от друга во времени. Величина h , характеризующая разницу во времени между элементами временного ряда,

называется *лаговой переменной* или *запаздыванием*. Так как

$$\gamma(0) = \text{cov}(x_t, x_t) = \text{Var}(x_t),$$

то дисперсия стационарного временного ряда также не меняется со временем.

Определение. Функция $\gamma(h)$ как функция от лаговой переменной, называется *автоковариационной функцией* временного ряда.

Она определена как для положительных, так и для отрицательных лагов h . Так как

$$\gamma(-h) = \text{cov}(x_t, x_{t-h}) = \text{cov}(x_{t-h}, x_t) = \text{cov}(x_\tau, x_{\tau+h}) = \gamma(h),$$

то $\gamma(h)$ – четная функция. Для произвольных моментов времени t и s очевидно равенство

$$\text{cov}(x_t, x_s) = \gamma(t - s)$$

Вычислим теперь коэффициенты корреляции между разными элементами стационарного временного ряда с временным лагом h :

$$\text{corr}(x_t, x_{t+h}) = \frac{\text{cov}(x_t, x_{t+h})}{\sqrt{\text{Var}(x_t) \cdot \text{Var}(x_{t+h})}} = \frac{\gamma(h)}{\sqrt{\gamma(0) \cdot \gamma(0)}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

Также как и в случае коэффициента ковариации, коэффициент корреляции между разными элементами стационарного временного ряда зависит только от лага между ними. Например, $\text{corr}(x_1, x_3) = \text{corr}(x_7, x_9) = \text{corr}(x_{15}, x_{17})$ и $\text{corr}(x_2, x_7) = \text{corr}(x_{10}, x_{15}) = \text{corr}(x_{24}, x_{29})$.

Определение. Функция $\rho(h) = \text{corr}(x_t, x_{t+h})$ называется *автокорреляционной функцией* (autocorrelation function, ACF) стационарного временного ряда.

Очевидно, что она также является четной функцией лаговой переменной и $\rho(0) = 1$. Для коэффициента автокорреляции очевидно:

$$\text{corr}(x_s, x_t) = \rho(s - t).$$

Предложение. Для произвольного стационарного ряда существует предел автокорреляционной функции

$$\lim_{h \rightarrow \pm\infty} \rho(h) = 0.$$

Это означает, что с ростом временного лага элементы временного ряда становятся «менее коррелированными». Это можно интерпретировать следующим образом: с ростом времени t временной ряд «забывает свои прошлые состояния», так как $\text{corr}(x_s, x_t) = \rho(t-s) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ если s фиксированно.

Определение. Коррелограммой стационарного временного ряда называется график функции $\rho(h)$.

Наряду с автокорреляционной функцией ещё рассматривается *частная автокорреляционная функция*¹, представляющая собой частный коэффициент корреляции между уровнями временного ряда x_t и x_{t+h} при исключении влияния промежуточных уровней $x_{t+1}, \dots, x_{t+h-1}$.

Определение. Частная автокорреляционная функция

$$\rho_{part}(h) = \text{corr}(x_t, x_{t+h} | x_{t+1}, \dots, x_{t+h-1})$$

Очевидно, $\rho_{part}(0) = 1$, $\rho_{part}(1) = \rho(1)$.

При общих условиях

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \rho_{part}(h) = 0$$

Рассмотрим основной пример стационарного временного ряда.

Определение. Ряд u_t называется *белым шумом* (white noise), если

1. $\mathbb{E}u_t = 0$,
2. $\text{Var}(u_t) = \mathbb{E}u_t^2 \equiv \sigma^2$

¹Partial autocorrelation function, PACF.

3. $\text{cov}(u_t, u_{t+h}) = \mathbb{E}(u_t u_{t+h}) = 0$ при $h \neq 0$.

Обозначение $u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$

Белый шум удобно рассматривать как *экзогенный внешний шок* (не коррелирующий с прошлым). Он используется для построения моделей стационарных рядов.

Определение. Если $u_t \sim \mathcal{N}$, то говорят о *гауссовском белом шуме*.

Автоковариационная функция для белого шума:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

ACF для белого шума:

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

Это означает, что ряд “мгновенно забывает” прошлые значения.

Частная автокорреляционная функция для белого шума:

$$\rho_{part}(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

1.1.2. Модели стационарных рядов

Рассмотрим основные модели стационарных временных рядов:

- модель скользящего среднего MA (Moving Average);
- модель авторегрессии AR (AutoRegression);
- общая смешанная модель ARMA авторегрессии-скользящего среднего.

Для удобства представления различных моделей часто используется (формальный) *лаговый оператор* L :

$$L(x_t) \stackrel{def}{=} x_{t-1}.$$

Далее

$$L^2(x_t) = L(L(x_t)) = L(x_{t-1}) = x_{t-2}.$$

Следовательно,

$$L^k(x_t) = x_{t-k}$$

и формально положим $L^0(x_t) = x_t$.

Модель ARMA

Начнём сразу с общего вида модели ARMA(p, q)

$$x_t = \mu + \sum_{j=1}^p \phi_j x_{t-j} + u_t + \sum_{s=1}^q \theta_s u_{t-s} \quad (1.1)$$

$$u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2), \quad \phi_p, \theta_q \neq 0.$$

Замечание. Проинтерпретировать модель можно следующим образом: текущее значение зависит от прошлых значений до лага p и от текущего и прошлых внешних шоков до лага q . Коэффициенты такой модели в общем случае не имеют экономической интерпретации.

Запишем (1.1) используя лаговый оператор L :

$$x_t = \mu + \sum_{j=1}^p \phi_j L^j x_t + u_t + \sum_{s=1}^q \theta_s L^s u_t.$$

Перепишем в виде

$$\left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j L^j\right) x_t = \mu + \left(1 + \sum_{s=1}^q \theta_s L^s\right) u_t.$$

Теперь введём два многочлена степени p и q :

$$\begin{aligned}\phi(z) &= 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j z^j = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p; \\ \theta(z) &= 1 + \sum_{s=1}^q \theta_s z^s = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q.\end{aligned}$$

Тогда модель (1.1) формально можно записать

$$\phi(L)x_t = \mu + \theta(L)u_t.$$

Определение. Многочлен $\phi(z)$ называется *авторегрессионным* многочленом.

Определение. $\phi(L)x_t$ называется *авторегрессионной* частью модели ARMA, а $\theta(L)u_t$ — *частью скользящего среднего*.

Утверждение. Модель ARMA определяет стационарный ряд \iff выполнено условие стационарности: все корни (в том числе из \mathbb{C}) авторегрессионного многочлена

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$$

по модулю больше единицы.

Замечание. Многочлен $\phi(z)$ имеет p корней с учётом кратности.

Пример. Рассмотрим $ARMA(1, q)$:

$$x_t = \mu + \phi x_{t-1} + u_t + \sum_{s=1}^q \theta_s u_{t-s}, \quad \phi, \theta_q \neq 0.$$

Тогда $\phi(z) = 1 - \phi z$ и его корень $z_0 = 1/\phi$. Так как $|z_0| > 1 \iff |\phi| < 1$, то это и будет условием стационарности для этого ряда.

Утверждение. Модель $ARMA(1, q)$ стационарна тогда только тогда, когда $|\phi| < 1$.

Вычислим среднее значение для стационарной ARMA (так как $\mathbb{E}u_s = 0$ и $\mathbb{E}x_t = \text{const}$):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x_t &= \mu + \sum_{j=1}^p \phi_j \mathbb{E}x_{t-j} + \mathbb{E}u_t + \sum_{s=1}^q \theta_s \mathbb{E}u_{t-s} \Rightarrow \\ \mathbb{E}x_t &= \mu + \sum_{j=1}^p \phi_j \mathbb{E}x_t \Rightarrow (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p) \mathbb{E}x_t = \mu.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}x_t = \frac{\mu}{1 - \sum_{j=1}^p \phi_j} = \frac{\mu}{\phi(1)}.$$

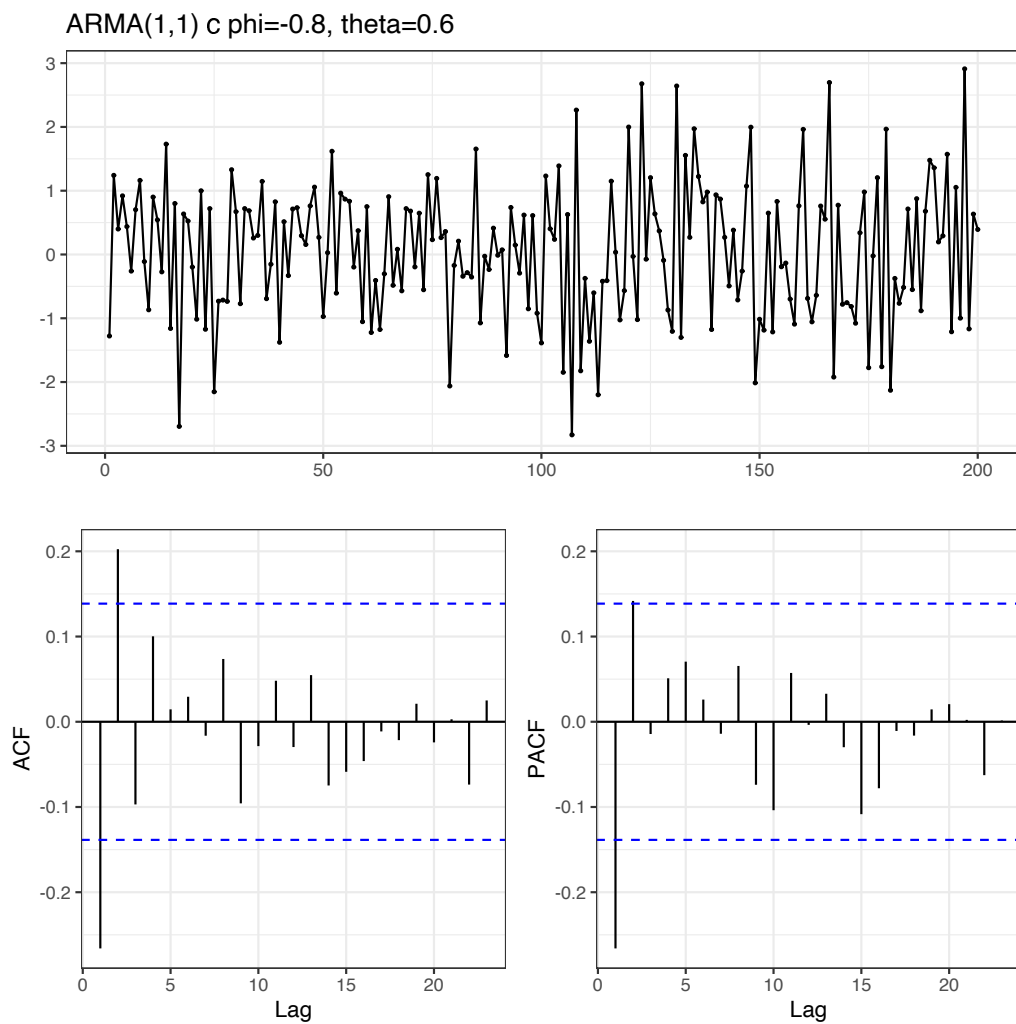


Рисунок 1.1. Пример модели ARMA(1, 1) и её ACF и PACF.

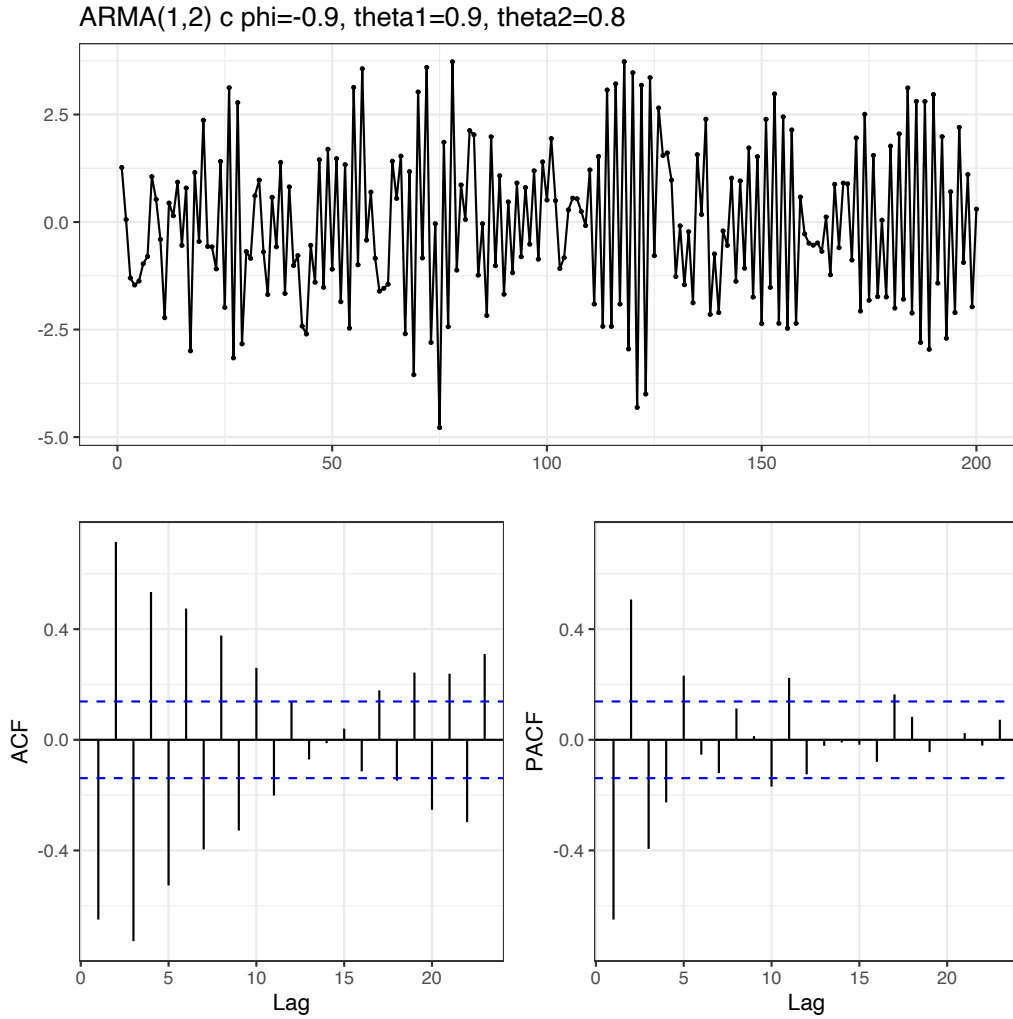


Рисунок 1.2. Пример модели ARMA(1, 2) и её ACF и PACF.

Утверждение. Стационарную ARMA можно представить как модель скользящего среднего бесконечного порядка $MA(\infty)$:

$$x_t = \mu_1 + u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \cdots = \mu_1 + u_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j u_{t-j},$$

где

$$\frac{\theta(z)}{\phi(z)} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j z^j.$$

Следствие. Для стационарной ARMA

$$\text{cov}(u_t, x_{t-h}) = 0, \quad h > 0,$$

т.е. внешний шок не коррелирует с прошлыми значениями ряда.

1.1.3. Модели МА и АR

Рассмотрим частные случаи общей модели ARMA:

- $MA(q) = ARMA(0, q)$ – модель скользящего среднего;
- $AR(p) = ARMA(p, 0)$ – модель авторегрессии.

Модель МА(q)

Модель $MA(q)$ (q – порядок лага)

$$x_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \cdots + \theta_q u_{t-q}, \quad u_t \sim WN(0, \sigma_u^2), \quad \theta_q \neq 0.$$

Временной ряд учитывает только внешние шоки до порядка q . Модель задаёт стационарный ряд x_t при любых $\{\theta_j\}_1^q$, так как $\phi(z) \equiv 1$ не имеет корней. Используя лаговый оператор её можно записать так

$$x_t = \mu + \theta(L)u_t.$$

Среднее, дисперсия и АСF для МА(q)

Так как $u_t \sim WN(0, \sigma_u^2)$, то

$$Ex_t = \mu + Eu_t + \theta_1 Eu_{t-1} + \cdots + \theta_q Eu_{t-q} = \mu$$

Далее

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_t) &= \text{Var}(\mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \cdots + \theta_q u_{t-q}) = \\ &= (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2) \sigma_u^2. \end{aligned}$$

Что касается АСF, то $\rho(h) = 0$ при $|h| > q$, т.е. ряд “забывает” прошлые значения с лагами больше порядка модели.

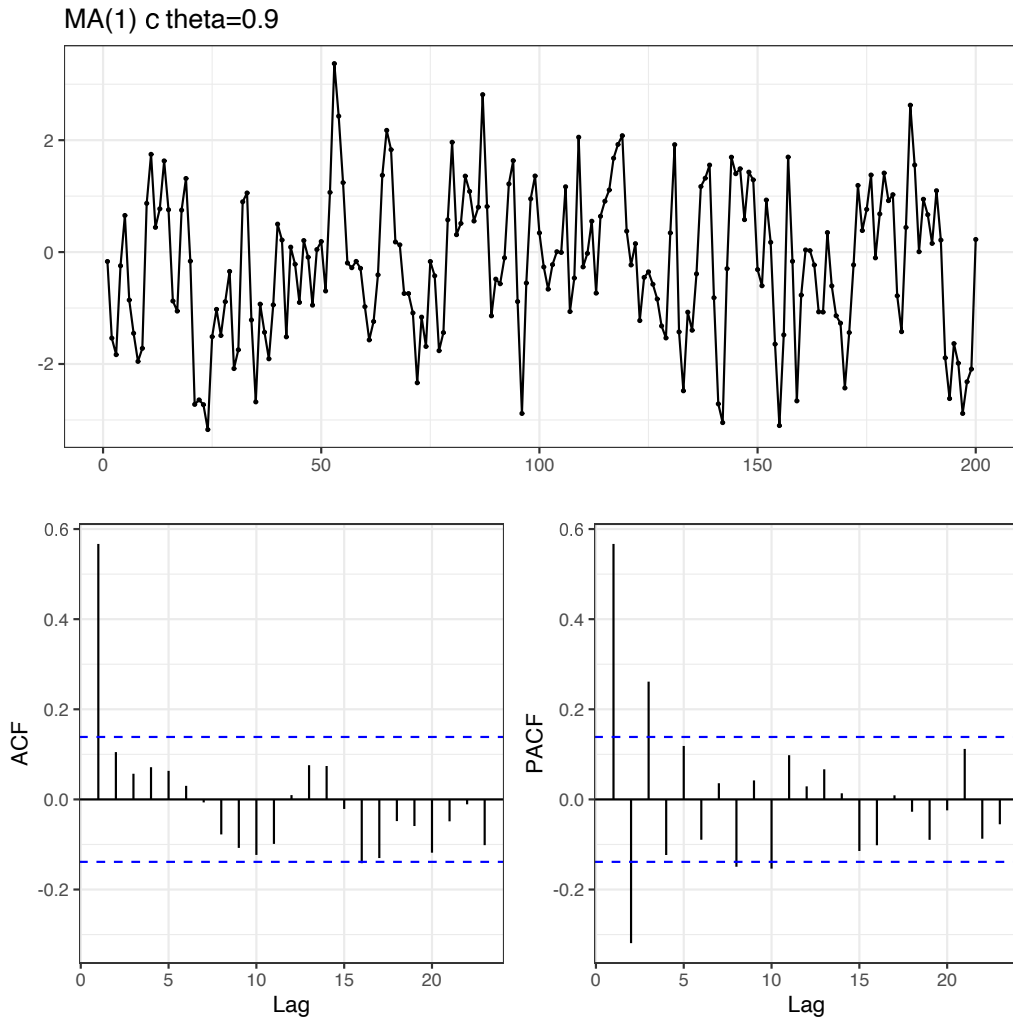


Рисунок 1.3. Пример модели MA(1) и её ACF и PACF.

Если рассмотреть модель MA(∞)

$$x_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \cdots = \mu + u_t + \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j u_{t-j},$$

$$u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2),$$

в которой ряд “помнит” все прошлые шоки, то для неё

$$\mathbb{E}x_t = \mu, \quad \text{Var}(x_t) = (1 + \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j^2) \sigma_u^2.$$

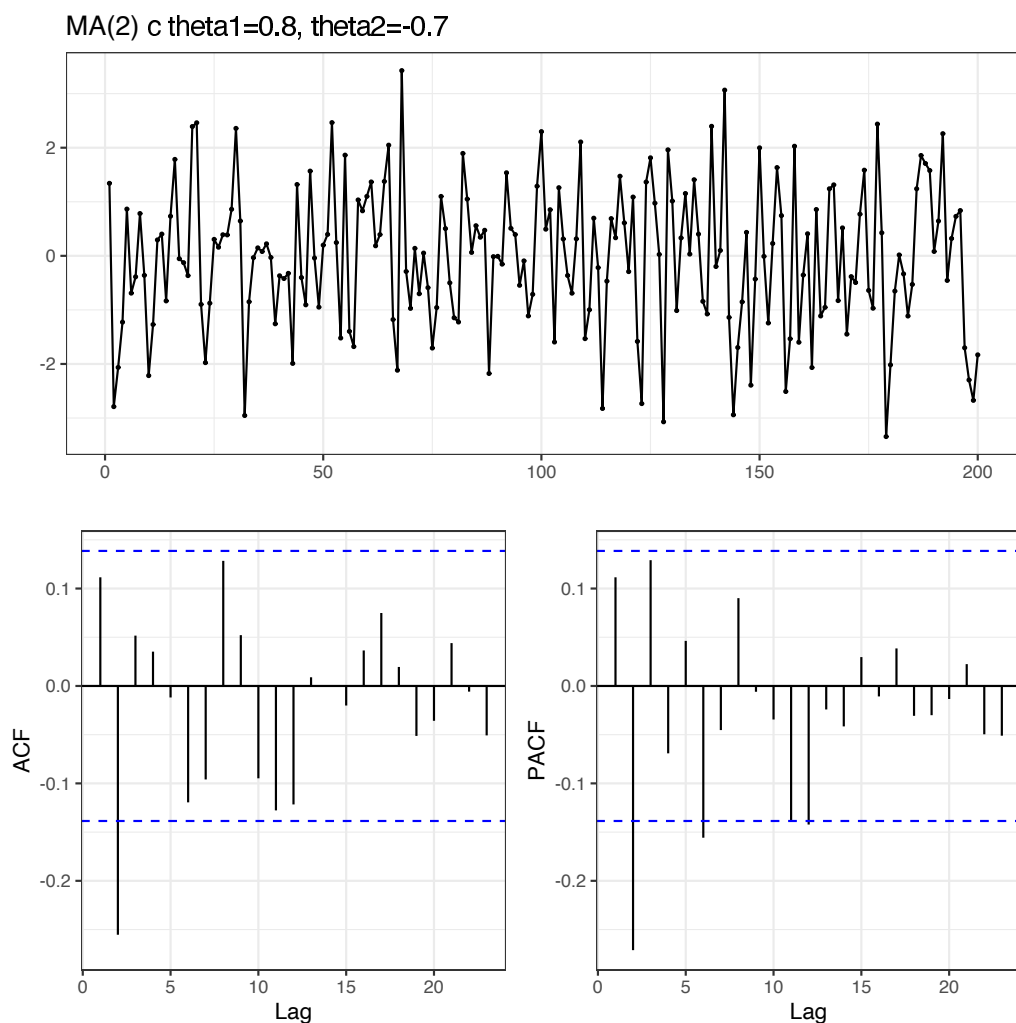


Рисунок 1.4. Пример модели MA(2) и её ACF и PACF.

Модель AR(p)

Модель AR порядка p имеет вид

$$x_t = \mu + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2), \quad \phi_p \neq 0.$$

Видно, что текущее значение в этой модели зависит от прошлых значений до лага p и от текущего внешнего шока.

Через лаговый оператор модель можно записать в виде

$$\phi(L)x_t = \mu + u_t.$$

Утверждение. Модель $AR(p)$ определяет стационарный ряд \iff вы-

полнено условие стационарности: все корни (в том числе из \mathbb{C}) многочлена $\phi(z)$ по модулю больше единицы.

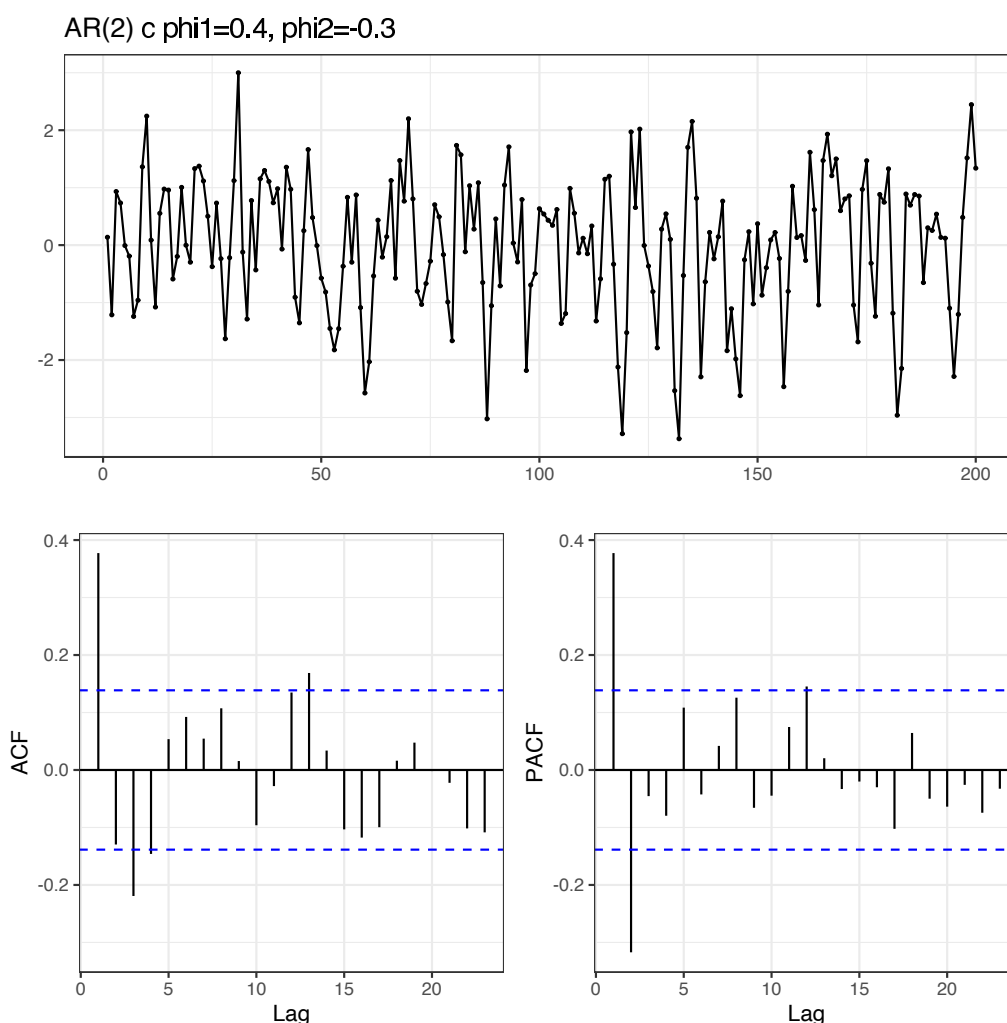


Рисунок 1.5. Пример модели AR(2) и её ACF и PACF.

Пример. Модель AR(1):

$$x_t = \mu + \phi x_{t-1} + u_t, \quad \phi \neq 0.$$

Так как AR(1) является частным случаем ARMA(1; q), то ранее мы доказали

Утверждение. Модель AR(1) стационарна $\iff |\phi| < 1$.

Замечание. При $\phi = 1$ модель AR(1) задаёт (нестационарное) случайное блуждание. В этом случае многочлен $\phi(z)$ имеет единичный корень. Подробнее об этом будет рассказано в следующей главе.

Среднее значение и PACF для модели AR

Для стационарной AR

$$\begin{aligned} \mathbb{E}x_t &= \mu + \phi_1 \mathbb{E}x_{t-1} + \cdots + \phi_p \mathbb{E}x_{t-p} + \mathbb{E}u_t \Rightarrow \\ (1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p) \mathbb{E}x_t &= \mu \Rightarrow \\ \mathbb{E}x_t &= \frac{\mu}{1 - (\sum_1^p \phi_j)} = \frac{\mu}{\phi(1)}. \end{aligned}$$

А особенность частной автокорреляционной функции состоит в том, что $\rho_{part}(h) = 0$ при $|h| > p$ и $\rho_{part}(p) = \phi_p$.

Для того, чтобы вычислить автокорреляционную функцию выполним несколько преобразований, используя свойства ковариации.

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \text{cov}(x_t, x_{t-h}) = \text{cov}(\mu + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + u_t, x_{t-h}) = \\ &= \phi_1 \text{cov}(x_{t-1}, x_{t-h}) + \cdots + \phi_p \text{cov}(x_{t-p}, x_{t-h}) = \\ &= \phi_1 \gamma(h-1) + \cdots + \phi_p \gamma(h-p). \end{aligned}$$

Разделив на $\gamma(0)$ получаем

$$\rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \cdots + \phi_p \rho(h-p).$$

Объединяя уравнения при $h = 1, \dots, p$ получаем *систему Юла-Уолкера*.

Таким образом, получаем автокорреляционную функцию для модели AR(1) ($h > 0$):

$$\rho(h) = \phi \rho(h-1) = \phi \cdot \phi \rho(h-2) = \cdots = \phi^h \rho(0) = \phi^h.$$

PACF для модели AR(1) имеет следующую структуру:

$$\rho_{part}(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \phi_1, & h = 1 \\ 0, & h \geq 2 \end{cases}$$

Для модели авторегрессии первого порядка существуют два разных случая поведения выборочного временного ряда: случаи положительного и отрицательного коэффициента ϕ_1 .

Случай $\phi_1 > 0$. По определению, $\text{corr}(x_t, x_{t+1}) = \rho(1) = \phi_1 > 0$, т.е. соседние члены временного ряда **положительно** коррелированы. Это означает, что в выборочных значениях временного ряда имеет место следующая закономерность:

Во временном ряду есть «тенденция к сохранению знака» относительно среднего уровня (математического ожидания): если значение временного ряда больше среднего уровня, то, «типичная ситуация», что и последующее значение также больше среднего уровня и наоборот (см.рис.).

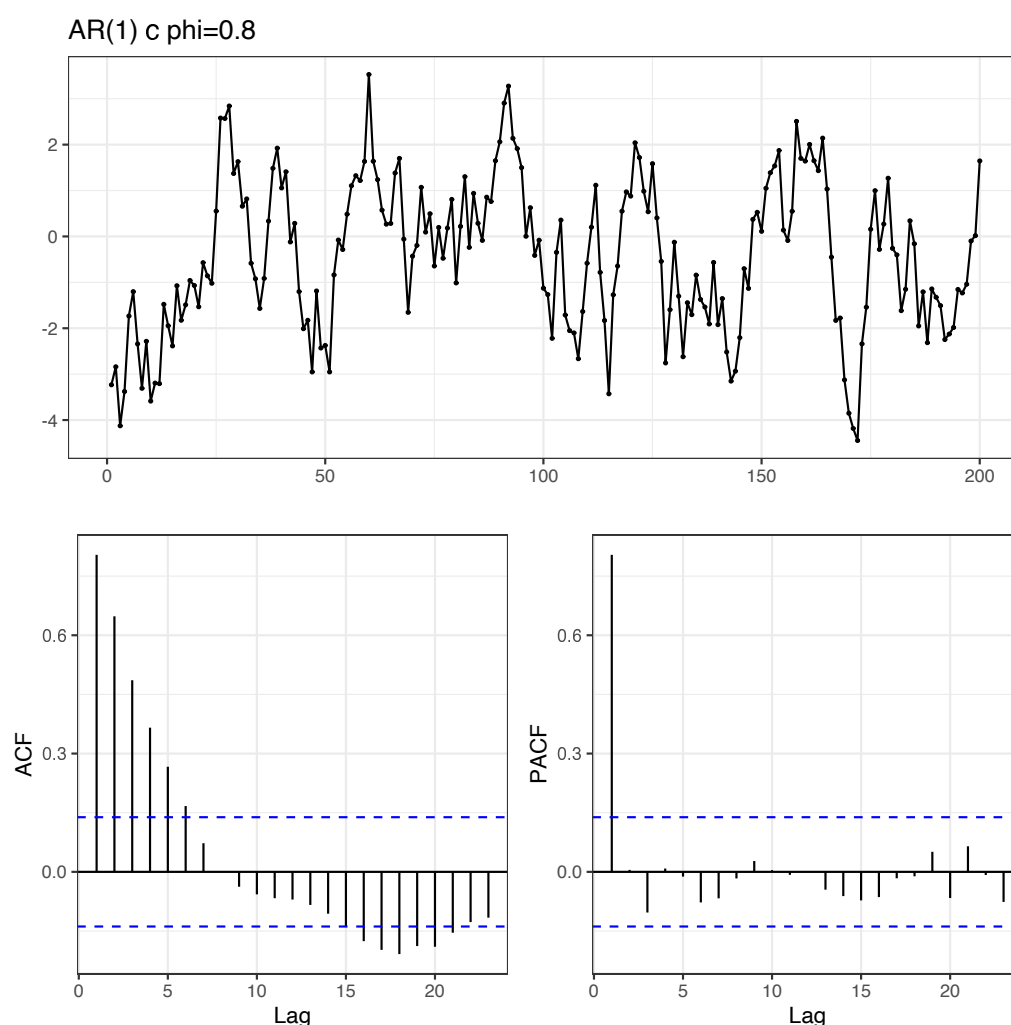


Рисунок 1.6. Пример модели AR(1) и её ACF и PACF.

Особенно наглядно эта закономерность выглядит при нулевом среднем значении (случай $\mu = 0$): «типичная ситуация», что значение вре-

менного ряда имеет тот же знак (положительный или отрицательный), что и предыдущее значение.

Случай $\phi_1 < 0$. По определению, $\text{corr}(x_t, x_{t+1}) = \rho(1) = \phi_1 < 0$, т.е. соседние члены временного ряда **отрицательно** коррелированы. Это означает, что в выборочных значениях временного ряда имеет место следующая закономерность:

Во временном ряду есть «тенденция к смене знака» относительно среднего уровня (математического ожидания): если значение временного ряда больше среднего уровня, то, «типичная ситуация», что последующее значение меньше среднего уровня и наоборот.

В случае нулевого среднего значения (случай $\mu = 0$) эта закономерность особенно наглядна: «типичная ситуация», что значение временного ряда имеет противоположный знак по сравнению с предыдущим значением.

1.1.4. Прогнозирование для модели ARMA

Пусть известны значения ряда x_t и шоки u_t до периода T . Обозначим $\Omega_T = \{x_t, u_t | t \leq T\}$ и на основе Ω_T будем строить “оптимальный” прогноз $\hat{x}_{T+\tau} = \hat{x}_{T+\tau} | \Omega_T$ на период $T + \tau$ ($\tau = 1, 2, \dots$).

Оптимальность прогноза будем понимать в смысле *среднего квадратического отклонение*

$$\min E(\hat{x}_{T+\tau} - x_{T+\tau})^2.$$

Начнём с прогнозирования на один период. Пусть $\tau = 1$, тогда

$$x_{T+1} = \mu + \phi_1 x_T + \dots + \phi_p x_{T+1-p} + u_{T+1} + \theta_1 u_T + \dots + \theta_q u_{T+1-q}.$$

Для ARMA-модели $\text{cov}(u_{T+1}, x_t) = 0$, $\text{cov}(u_{T+1}, u_t) = 0$ при $t \leq T$.

Оптимальный прогноз на один период

$$\hat{x}_{T+1} = \mu + \phi_1 x_T + \dots + \phi_p x_{T+1-p} + \theta_1 u_T + \dots + \theta_q u_{T+1-q}.$$

Замечание. Стоит обратить внимание, что при прогнозировании отбрасываются шоки, данном случае, $-u_{T+1}$.

Теперь рассмотрим $\tau = 2$ (прогноз на два шага). Имеем

$$x_{T+2} = \mu + \phi_1 x_{T+1} + \phi_2 x_T + \cdots + \phi_p x_{T+2-p} + \\ u_{T+2} + \theta_1 u_{T+1} + \theta_2 u_T + \cdots + \theta_q u_{T+2-q}.$$

Для ARMA модели $\text{cov}(u_{T+\tau}, x_t) = 0$, $\text{cov}(u_{T+\tau}, u_t) = 0$ при $\tau = 1, 2$ и $t \leq T$.

Оптимальный прогноз на два периода вперед:

$$\hat{x}_{T+2} = \mu + \phi_1 \hat{x}_{T+1} + \phi_2 x_T + \cdots + \phi_p x_{T+2-p} + \\ \theta_2 u_T + \cdots + \theta_q u_{T+2-q}.$$

Замечание. Как и отмечалось, отбрасываем u_{T+2} и u_{T+1} , а x_{T+1} заменяем на его прогноз.

Для общего случая запишем правило последовательного построения оптимального прогноза на τ шагов:

1. записываем ARMA-формулу для $x_{T+\tau}$;
2. “отбрасываем” будущие шоки $u_{T+\tau}, \dots, u_{T+1}$;
3. заменяем будущие значения $x_{T+\tau-1}, \dots, x_{T+1}$ на их прогнозы, полученные на предыдущих шагах.

Замечание. Прогнозы вычисляются последовательно для $\tau = 1, 2, \dots$. Для $\hat{x}_{T+\tau}$ нужно знать $\hat{x}_{T+\tau-1}, \dots, \hat{x}_{T+1}$.

Для стационарной ARMA-модели существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{x}_{T+\tau} = \mathbb{E}x_t,$$

т.е. долгосрочный прогноз “мало отличается” от тривиального прогноза – математического ожидания.

Утверждение. Модели стационарных рядов (ARMA) дают только краткосрочные “содержательные” прогнозы. Долгосрочные прогнозы не являются информативными.

Из построения следует, что при $\tau > q$ формула для $\hat{x}_{T+\tau}$ не включает внешние шоки u_T, u_{T-1}, \dots , т.к. при переходе к следующему шагу “часть МА” сокращается на одно слагаемое.

Замечание. Для модели $MA(q)$ прогноз при $\tau > q$ равен $\hat{x}_{T+\tau} = \mu$. Это также следствие того, что

$$\text{cov}(x_{t+s}, x_t) = 0, \quad s > q.$$

1.2. Оценка и тестирование модели

1.2.1. Подход Бокса-Дженкинса

Методологию работы со стационарными рядами можно представить в следующем виде:

1. Выбор порядка модели;
2. оценка модели выбранного порядка;
3. проверка “адекватности”;
4. прогнозирование.

Для выбора порядка модели традиционно вычисляют выборочные автокорреляционную и частную автокорреляционную функции.

- Выборочные коэффициенты автоковариации

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{t=1}^{n-h} (x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x}).$$

- Выборочные коэффициенты автокорреляции (ACF)

$$\hat{\rho}(h) = r(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}.$$

- Выборочные частные коэффициенты автокорреляции (*PACF*)

$$\hat{\rho}_{part}(h) = \widehat{\text{corr}}(x_t, x_{t+h} | x_{t+1}, \dots, x_{t+h-1}).$$

Далее необходимо проверить их значимость. Для этого тестируем гипотезу при фиксированном лаге:

$$H_0 : \rho(h) = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \rho(h) \neq 0.$$

Так как критическое значение $z_{cr} = z(\alpha)$, то статистическое правило выглядит следующим образом: (асимптотически) отвергаем H_0 при $|\hat{\rho}(h)| > z_{cr}/\sqrt{n}$ и называем коэффициент *значимым*.

Аналогично тестируем гипотезу

$$H_0 : \rho_{part}(h) = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \rho_{part}(h) \neq 0.$$

Предварительное тестирование на белый шум

Для построения моделей необходимо провести предварительный анализ стационарного ряда. Для этого тестируется гипотеза:

$$H_0 : x_t \sim \text{WN}(\mu, \sigma^2).$$

Точнее тестируется (для некоторого $K > 0$) гипотеза:

$$H'_0 : \rho(1) = \dots = \rho(K) = 0.$$

Обычно используется две тестовых Q-статистики, которые автоматически вычисляются в компьютерных пакетах:

- Box G.E.D., Pierce D.A., 1970 (устаревшая):

$$Q_{BP} = n \sum_{h=1}^K \hat{\rho}^2(h).$$

- Ljung G.M., Box G.E.D., 1978:

$$Q = n(n+2) \sum_{h=1}^K \frac{\hat{\rho}^2(h)}{n-h}.$$

Критическое значение имеет хи-квадрат распределения $\chi_{cr}^2 = \chi_K^2(\alpha)$, поэтому для проверки гипотезы применяем следующее статистическое правило:

- При $Q > \chi_{cr}^2$ отвергаем H'_0 (и H_0).
- При $Q < \chi_{cr}^2$ не отвергаем H'_0 .

Или альтернативно делаем вывод с помощью Р-значения.

Замечание. Применение Q -статистик оправдано только для больших выборок. Это асимптотический тест!

Оценка модели и тестирование гипотез

Оценивание модели $ARMA(p, q)$ происходит с помощью метода максимального правдоподобия (из-за нелинейности в части МА).

Замечание. Для $ARMA$ ML -метод также даёт “остатки” \hat{u}_t , “моделирующие” шоки u_t части МА (не путать с остатками линейной регрессии).

Тестирование гипотез о значимости коэффициентах проводится стандартным для метода максимального правдоподобия путём:

- Проверка значимости коэффициента: тестовая статистика $z = \frac{\hat{\phi}_j}{s_j}$ или $z = \frac{\hat{\theta}_l}{s_l}$.
- Проверка совместной значимости: LR или W статистики.

Отметим, что модель $AR(p)$ можно оценить, используя метод наименьших квадратов. В этом случае система нормальных уравнений есть система Юла-Уолкера

$$\hat{\rho}(h) = \phi_1 \hat{\rho}(h-1) + \dots + \phi_p \hat{\rho}(h-p), \quad h = 1, \dots, p.$$

Оценки коэффициентов ϕ_1, \dots, ϕ_p можно получить как решения системы уравнений Юла–Уолкера

$$\begin{cases} \hat{\rho}(1) &= \phi_1 \hat{\rho}(0) + \phi_2 \hat{\rho}(1) + \dots + \phi_p \hat{\rho}(p-1) \\ \hat{\rho}(2) &= \phi_1 \hat{\rho}(1) + \phi_2 \hat{\rho}(0) + \dots + \phi_p \hat{\rho}(p-2) \\ &\vdots \\ \hat{\rho}(p) &= \phi_1 \hat{\rho}(p-1) + \phi_2 \hat{\rho}(p-2) + \dots + \phi_p \hat{\rho}(0), \end{cases}$$

а оценка коэффициента μ равна

$$m = \bar{x} \left(1 - \hat{\phi}_1 - \dots - \hat{\phi}_p \right).$$

Пример. Для модели авторегрессии первого порядка получаем

$$\hat{\phi}_1 = \hat{\rho}(1), \quad m = \bar{x}(1 - \hat{\phi}_1) = \bar{x}(1 - \hat{\rho}(1))$$

Следовательно, модель первого порядка будет задаваться авторегрессионным уравнением

$$\hat{x}_t = \bar{x}(1 - \hat{\rho}(1)) + \hat{\rho}(1)x_{t-1}.$$

Пример. Для временного ряда были вычислены $\bar{x} = 1.3$ и $\hat{\rho}(1) = -0.7$. Тогда уравнение авторегрессии для модели первого порядка будет следующим

$$\hat{x}_t = 1.3(1 - (-0.7)) + (-0.7)x_{t-1} = 2.21 - 0.7x_{t-1}$$

Пример. Для модели второго порядка (с учетом $\hat{\rho}(0) = 1$) система уравнений Юла-Уолкера имеет вид

$$\begin{cases} \beta_1 + \hat{\rho}(1)\phi_2 = \hat{\rho}(1) \\ \hat{\rho}(1)\phi_1 + \phi_2 = \hat{\rho}(2) \end{cases}$$

Решая ее получаем

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}(1) - \hat{\rho}(1)\hat{\rho}(2)}{1 - \hat{\rho}^2(1)}, \quad \hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\rho}(2) - \hat{\rho}^2(1)}{1 - \hat{\rho}^2(1)}.$$

Модель второго порядка будет задаваться авторегрессионным уравнением

$$\hat{x}_t = \bar{x} \left(1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2 \right) + \hat{\phi}_1 x_{t-1} + \hat{\phi}_2 x_{t-2}.$$

Пример. Для временного ряда были вычислены $\bar{x} = 2.1$, $\hat{\rho}(1) = 0.6$ и $\hat{\rho}(2) = -0.2$. Коэффициенты для модели второго порядка равны

$$\hat{\phi}_1 = \frac{0.6 - 0.6(-0.2)}{1 - 0.6^2} = 1.125, \quad \hat{\phi}_2 = \frac{-0.2 - 0.6^2}{1 - 0.6^2} = -0.875.$$

Модель второго порядка будет задаваться уравнением

$$\hat{x}_t = 2.1(1 - 1.125 - (-0.875)) + 1.125x_{t-1} + (-0.875)x_{t-2}.$$

Формулы для вычисления прогнозируемых значений получаются из формул прогнозирования для стационарного временного ряда с заменой коэффициентов ϕ_k и μ на их МНК-оценки:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{n+1} &= m + \hat{\phi}_1 x_n + \hat{\phi}_2 x_{n-1} + \cdots + \hat{\phi}_p x_{n-p+1} \\ \hat{x}_{n+2} &= m + \hat{\phi}_1 \hat{x}_{n+1} + \hat{\phi}_2 x_n + \cdots + \hat{\phi}_p x_{n-p+2}\end{aligned}$$

К авторегрессионной модели временных рядов асимптотически применимы все методы регрессионного анализа (проверка значимости коэффициентов модели и модели в целом и т.д.), кроме теста Дарбина–Уотсона (Durbin – Watson) (т.к. модель содержит лаговые значения зависимой переменной).

Информационные критерии

Для сравнения моделей и выбора порядка используются стандартные информационные критерии, которые определяются через ошибку регрессии $s^2 = \sum \hat{u}_t^2 / n$.

- Информационный критерий Акаике (Akaike, 1973)

$$AIC = \ln s^2 + \frac{2(p + q + 1)}{n}.$$

- Информационный критерий Шварца (Schwarz [33], 1978) или Байеса (Bayesian)

$$SIC = BIC = \ln s^2 + \frac{(p + q) \ln n}{n}.$$

- Информационный критерий Хеннана-Куина (Hannan, Quinn [27], 1979)

$$HQC = \ln s^2 + \frac{2(p + q) \ln(\ln n)}{n}.$$

Иногда используются показатели информационных критериев без деления на объём выборки:

$$\begin{aligned}AIC &= 2(p + q + 1) + n \ln s^2; \\SIC &= (p + q) \ln n + n \ln s^2; \\HQC &= 2(p + q) \ln(\ln n) + n \ln s^2.\end{aligned}$$

Алгоритм выбора порядка модели ARMA можно записать следующим образом:

1. оцениваем *несколько альтернативных моделей* разного порядка (p, q) ;
2. выбираем модель с *минимальным информационным критерием*.

Замечание. Эмпирически критерий Акаике имеет тенденцию к *завышению порядка* при больших выборках поэтому Байесовский критерий или критерий Шварца считается предпочтительнее для оцениванию порядка. Критерий Хеннана-Куина может недооценивать порядок при небольших объемах выборки.

Пример. По временному ряду объёма $n = 100$ были оценены авторегрессионные модели до четвертого порядка и для них получены следующие оценки дисперсий ошибок:

$$s^2(1) = 0.9, \quad s^2(2) = 0.7, \quad s^2(3) = 0.5, \quad s^2(4) = 0.46.$$

Выберем порядок модели авторегрессии p на основе информационного критерия Шварца. Вычислим показатель SIC для моделей авторегрессии до четвертого порядка:

$$\begin{aligned}SIC(1) &= n \ln s^2(1) + 1 \cdot \ln n = 100 \ln 0.9 + 1 \cdot \ln 100 \approx -5,93 \\SIC(2) &= n \ln s^2(2) + 2 \cdot \ln n = 100 \ln 0.7 + 2 \cdot \ln 100 \approx -26,46 \\SIC(3) &= n \ln s^2(3) + 3 \cdot \ln n = 100 \ln 0.5 + 3 \cdot \ln 100 \approx -55,5 \\SIC(4) &= n \ln s^2(4) + 4 \cdot \ln n = 100 \ln 0.46 + 4 \cdot \ln 100 \approx -59,23\end{aligned}$$

Следовательно, необходимо сделать выбор в пользу модели авторегрессии четвертого порядка, так как значение информационного критерия для нее минимально.

Проверка адекватности модели

Проверка адекватности, т.е. проверка согласованности выбранной и оцененной модели с наблюдениями, как и в регрессионном анализе, основано на исследовании остатков. А именно, остатки должны моделировать процесс нормально распределенного белого шума.

Тесты на автокорреляцию

Тесты на автокорреляцию позволяют проверить “адекватность” выбранного порядка модели. Идея состоит в том, что если порядок модели “правильный”, то остатки \hat{u}_t “моделируют” белый шум (в частности, отсутствует автокорреляция).

Так как модель содержит лаговые значения зависимой переменной, то критерий Дарбина–Уотсона для исследования ошибок на автокорреляцию неприменим. Статистика DW будет смещенной в сторону уменьшения.

Приведем метод исследования, предложенный Боксом и Льюнгом (Box, Ljung [18]) и основанный на применении Q -статистик.

Тесты на серийную корреляцию подразумевают проверку гипотезы:

$$H_0 : \rho_u(1) = \dots = \rho_u(K) = 0.$$

Тестовая Q -статистика Льюнга-Бокса (Ljung-Box)

$$Q = n(n+2) \sum_{h=1}^K \frac{\hat{\rho}_u^2(h)}{n-h},$$

где $\hat{\rho}_u(h)$ – автокорреляционная функция ACF для ряда остатков \hat{u}_t .

При выполнении условия Гаусса – Маркова на ошибки модели Q -статистики **асимптотически** имеют распределение χ_{K-p-q}^2 . H_0 отвергается при $Q > \chi_{cr}^2 = \chi_{K-p-q}^2(\alpha)$ (или с помощью P -значения отвергаем при $P < \alpha$)), и тогда тест указывает на серийную корреляцию для u_t .

Пример. Для временного ряда длины $n = 100$ была оценена модель авторегрессии второго порядка $AR(2) = ARMA(2; 0)$ ($p = 2, q = 0$) и вычислены коэффициенты автокорреляции остатков

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_u(1) &= 0.001, \hat{\rho}_u(2) = 0.001, \hat{\rho}_u(3) = 0.0006, \\ \hat{\rho}_u(4) &= 0.0004, \hat{\rho}_u(5) = 0.0003.\end{aligned}$$

Проверим адекватность модели по критерию Бокса – Льюнга. Вычислим Q -статистику с $K = 5$:

$$\begin{aligned}Q &= n(n+2) \left(\frac{\hat{\rho}_u^2(1)}{n-1} + \frac{\hat{\rho}_u^2(2)}{n-2} + \frac{\hat{\rho}_u^2(3)}{n-3} + \frac{\hat{\rho}_u^2(4)}{n-4} + \frac{\hat{\rho}_u^2(5)}{n-5} \right) = \\ &= 100 \cdot 102 \cdot \left(\frac{0.001^2}{100-1} + \frac{0.001^2}{100-2} + \frac{0.0006^2}{100-3} + \frac{0.0004^2}{100-4} + \frac{0.0003^2}{100-5} \right) \approx \\ &\approx 0.00027.\end{aligned}$$

Критическое значение распределения хи-квадрат с $K - p - q = 5 - 2 - 0 = 3$ степенями свободы при 5%-м уровне значимости равно

$$\chi^2 = \chi^2(5\%; 3) \approx 7.875.$$

Так как $Q < \chi^2$, то данные согласованы с условиями Гаусса – Маркова для модели $AR(2)$.

1.3. Линейная регрессия для стационарных рядов

Пусть $y_t, \mathbf{x}_t = (x_{t1}, \dots, x_{tk})'$ – стационарные ряды.

Наиболее популярными являются три модели линейной регрессии:

1. статическая $y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t$;
2. конечных распределённых лагов FDL^2 ; объясняющие переменные содержат лаги факторов \mathbf{x}_t ;

²Finite Distributed Lags.

3. авторегрессии-распределённых лагов ADL³, среди объясняющих переменных есть лаги факторов \mathbf{x}_t и лаги зависимой переменной y_t .

Для моделей FDL и ADL различают *краткосрочную и долгосрочную зависимость*. К статической модели регрессии применимы все выводы линейной регрессии. По сути специфика временных рядов в этой модели отсутствует, но необходимо тестировать её на серийную корреляцию.

1.3.1. Модель FDL

Модель распределённых лагов FDL(q) включает *лаги регрессоров* до порядка q

$$y_t = \mu + \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_0 + \mathbf{x}'_{t-1} \boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + \mathbf{x}'_{t-q} \boldsymbol{\beta}_q + u_t,$$

где формально

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{t1} \\ \vdots \\ x_{tk} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_0 = \begin{pmatrix} \beta_{01} \\ \vdots \\ \beta_{0k} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{1k} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_q = \begin{pmatrix} \beta_{q1} \\ \vdots \\ \beta_{qk} \end{pmatrix}$$

Если $u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$, то к модели *FDL применимы все выводы* стандартной линейной регрессии.

При интерпретации коэффициентов при лагах надо отличать краткосрочный и долгосрочный эффект.

Пример. Рассмотрим на FDL с одной объясняющей переменной

$$y_t = \mu + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + u_t.$$

Пусть фактор x увеличился на единицу *только в момент времени T* (краткосрочно). Составим таблицу распределения во времени того, как это (в среднем) отразится на y .

t	T	$T+1$	$T+2$	\cdots	$T+q$	$T+q+1$	∞
Δx	1	0	0	\cdots	0	0	0
Δy	β_0	β_1	β_2	\cdots	β_q	0	0

³Autoregression Distributed Lags.

Таким образом, видно, что коэффициенты модели FDL можно интерпретировать как *краткосрочные мультипликаторы*.

Пусть теперь фактор x увеличился на единицу *начиная с момента времени T* (долгосрочно), тогда таблица принимает вид:

t	T	$T + 1$	$T + 2$	\dots	$T + q - 1$	$T + q$	∞
Δx	1	1	1	\dots	1	1	1
Δy	β_0	$\beta_0 + \beta_1$	$\sum_0^2 \beta_j$	\dots	$\sum_0^{q-1} \beta_j$	$\sum_0^q \beta_j$	$\sum_0^q \beta_j$

Тем самым можно говорить об “установившейся” *долгосрочной зависимости*, которую *формально* можно представить как

$$y^* = \mu + \left(\sum_{j=0}^q \beta_j \right) x^*,$$

где $\sum_{j=0}^q \beta_j$ – долгосрочный мультипликатор.

Для модели

$$y_t = \mu + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_q x_{t-q} + u_t$$

проверка значимости долгосрочного мультипликатора означает тестирование (“сложной”) гипотезы

$$H_0 : \beta_0 + \dots + \beta_q = 0$$

по F-тесту.

Для произвольной FDL(q) $y_t = \sum_{s=0}^q \mathbf{x}'_{t-s} \boldsymbol{\beta}_s + u_t$ уравнение долгосрочной связи принимает вид:

$$y_* = \mathbf{x}'_* \left(\sum_{j=0}^q \boldsymbol{\beta}_j \right).$$

Можем заключить, что при *долгосрочном* увеличении регрессора на единицу *долгосрочное изменение* зависимой переменной равно мультипликатору $\sum_{j=0}^q \beta_j$.

Саму модель FDL можно рассматривать как модель *краткосрочной зависимости* (отклонения от долгосрочной связи).

1.3.2. Модель ADL

Модель авторегрессии-распределённых лагов ADL(p,q) включает *лаги регрессоров* до порядка q и *лаги зависимой переменной* до порядка p

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}_0 + \mathbf{x}'_{t-1} \boldsymbol{\beta}_1 + \dots + \mathbf{x}'_{t-q} \boldsymbol{\beta}_q + u_t,$$

где формально

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{t1} \\ \vdots \\ x_{tk} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_0 = \begin{pmatrix} \beta_{01} \\ \vdots \\ \beta_{0k} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{1k} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \boldsymbol{\beta}_q = \begin{pmatrix} \beta_{q1} \\ \vdots \\ \beta_{qk} \end{pmatrix}$$

Для использования модели необходимо проверить стационарность, для этого все корни многочлена $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ (в том числе из \mathbb{C}) должны быть *по модулю больше единицы*.

Если $u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ и выполнено условие стационарности, то к модели ADL *применимы все выводы* стандартной линейной регрессии.

Замечание. Так как модель регрессии содержит лаговые значения зависимой переменной, то статистика DW будет смещена и тест Дарбина–Уотсона к данной модели **неприменим**.

Более точно можно сформулировать теорему.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия

- $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x_t^{(p)}$ – (многомерный) стационарный временной ряд;
- u_t – процесс белого шума, $\mathbb{E}u_t = 0$, $\text{Var}(u_t) = \sigma^2$;
- $\text{cov}(u_t, x_{tj}) = 0$, $j = 1, \dots, k$;
- $\text{cov}(u_t, y_{t-s}) = 0$, $s = 1, \dots, p$;
- **все** корни многочлена $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ по модулю больше единицы (условие стационарности);

- существует предел (условие эргодичности)

$$\frac{1}{n} \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' \xrightarrow{\text{P}} \Sigma, \quad \det \Sigma \neq 0.$$

Тогда МНК-оценки коэффициентов ADL модели **асимптотически** нормальны и имеют минимальную дисперсию.

Как и для модели FDL будем отличать краткосрочный и долгосрочный взгляды на коэффициенты.

Рассмотрим подробнее частный случай ADL с одним регрессором

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \beta_0 x_t + \dots + \beta_q x_{t-q} + u_t$$

и пусть выполнены все условия теоремы. Тогда, аналогично модели FDL, между факторами устанавливается «долговременная связь», описываемая соотношением

$$y^* = \delta_0 + \delta_1 x^*,$$

$$\delta_0 = \frac{\mu}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p} = \frac{\mu}{\alpha(1)}, \quad \delta_1 = \frac{\beta_0 + \dots + \beta_q}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$$

Коэффициент δ_1 называется *долгосрочным мультипликатором* (long-time multiplier).

Пример. Рассмотрим на примере ADL(1,1)

$$y_t = \mu + \phi y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + u_t, \quad |\phi| < 1.$$

Пусть фактор x увеличился на единицу *только в момент времени* T (краткосрочно). Влияние на y *распределено во времени* следующим образом:

t	T	$T + 1$	$T + 2$	$T + 3$	∞
Δx	1	0	0	0	0
Δy	β_0	$\beta_1 + \phi \beta_0$	$\phi \beta_1 + \phi^2 \beta_0$	$\phi^2 \beta_1 + \phi^3 \beta_0$	0

Таким образом, модель ADL можно рассматривать как модель *краткосрочной зависимости*, но коэффициенты модели уже не имеют простой интерпретации (как краткосрочные мультипликаторы).

Если фактор x увеличился на единицу *начиная с момента времени* T (долгосрочно), то среднее влияние на y можно записать так:

t	T	$T + 1$	$T + 2$	∞
Δx	1	1	1	1
Δy	β_0	$\beta_0 + \beta_1 + \phi\beta_0$	$\beta_0 \sum_0^2 \phi^j + \beta_1 \sum_0^1 \phi^j$	$(\beta_0 + \beta_1)/(1 - \phi)$

Таким образом, можно говорить об “установившейся” *долгосрочной зависимости*, которую *формально* можно представить как

$$y^* = \frac{\mu + (\beta_0 + \beta_1)x^*}{1 - \phi},$$

где $(\beta_0 + \beta_1)/(1 - \phi)$ – долгосрочный мультипликатор.

Для произвольной ADL $y_t = \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + \sum_{s=0}^q \mathbf{x}'_{t-s} \boldsymbol{\beta}_s + u_t$ уравнение долгосрочной связи принимает вид

$$\left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j\right) y_* = \mathbf{x}'_* \left(\sum_{j=0}^q \boldsymbol{\beta}_j\right).$$

Вектор долгосрочных мультипликаторов

$$\frac{\sum_{j=0}^q \boldsymbol{\beta}_j}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}.$$

Для модели с одним объясняющим фактором

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \beta_0 x_t + \dots + \beta_q x_{t-q} + u_t$$

уравнение долгосрочной зависимости имеет вид

$$y^* = \frac{\mu + (\sum_{j=0}^q \beta_j)x^*}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}.$$

Отметим, что проверка значимости долгосрочного мультипликатора в данном случае означает тестирование гипотезы

$$H_0 : \beta_0 + \dots + \beta_q = 0$$

по F-тесту.

Замечание. Обратим внимание на существование модели ARMAX, которая является моделью ARMA с экзогенными объясняющими переменными

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + u_t + \sum_{l=1}^q \theta_l u_{t-l} + \sum_{s=0}^k \mathbf{x}'_{t-s} \boldsymbol{\beta}_s.$$

Фактически ARMAX – это ADL с автокоррелированной ошибкой вида MA.

1.4. TS-ряды

1.5. Модель тренда и сезонность

В экономическом анализе встречаются временные ряды имеющие (в среднем) устойчивую тенденцию к возрастанию с течением времени. Поведение таких временных рядов можно описывать регрессионной моделью тренда, где в качестве объясняющей переменной выступает фактор времени.

1.5.1. Понятие TS-ряда

Рассмотрим важный класс рядов, имеющих выраженный тренд.

Определение. Ряд x_t называется *стационарным относительно тренда*, если для него имеет место представление

$$x_t = f(t) + v_t, \tag{1.2}$$

где $f(t)$ – детерминированная функция (*тренд* или долгосрочная тенденция), v_t – стационарный ряд с нулевым средним.

Следовательно, $E x_t = f(t)$ и $\text{Var}(x_t) = \text{Var}(v_t) \equiv \text{const}$.

Замечание. В прикладных задачах типична ситуация, когда в модели (1.2) ряд v_t автокоррелирован (следствие зависимости наблюдений).

Перечислим основные модели тренда.

- Линейный тренд: $x_t = \beta_0 + \beta_1 t + v_t$, где β_1 – среднее изменение за один период времени.
- Экспоненциальный тренд: $\ln x_t = \beta_0 + \beta_1 t + v_t$, где $\beta_1 \cdot 100\%$ – среднее процентное изменение за один период.
- Квадратичный тренд: $x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + v_t$, где средний прирост за один период непостоянен.

Рассмотрим эти модели более подробно.

Модель линейного тренда задается уравнением

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

Будем предполагать, что ошибки u_t удовлетворяют условиям теоремы Гаусса – Маркова, поэтому к модели линейного тренда применимы выводы стандартной линейной модели регрессии. В частности, среднее значение $E x_t$ линейно зависит от времени t :

$$E x_t = \beta_0 + \beta_1 t.$$

Коэффициент β_1 имеет следующую интерпретацию: это есть среднее приращение временного ряда за один период времени

$$\Delta E x_t = E x_t - E x_{t-1} = \beta_1.$$

Следовательно, с увеличением времени,

- при $\beta_1 > 0$ во временном ряду есть «тенденция к возрастанию»,
- при $\beta_1 < 0$ во временном ряду есть «тенденция к убыванию»,

причем средняя скорость изменения временного ряда за один период времени постоянна.

Модель экспоненциального тренда задается уравнением

$$\ln(x_t) = \beta_0 + \beta_1 t + u_t.$$

Будем предполагать, что ошибки u_t удовлетворяют условиям теоремы Гаусса – Маркова. Тогда к модели линейного тренда применимы выводы стандартной линейной модели регрессии. В частности, среднее значение зависит от t экспоненциально

$$E \ln(x_t) = \beta_0 + \beta_1 t.$$

Для коэффициента β_1 получаем следующую интерпретацию:

$$\Delta E \ln(x_t) = E \ln(x_t) - E \ln(x_{t-1}) = E \ln \left(\frac{x_t}{x_{t-1}} \right) = \beta_1.$$

Следовательно, за один период времени (в среднем) значение x_t изменяется в $\exp(\beta_1)$ раз.

Если β_1 мало, то $\exp(\beta_1) \approx 1 + \beta_1$ и за один период времени в среднем значение x_t изменяется (в первом приближении) на $\beta_1 \cdot 100\%$.

Другие модели тренда. Наряду с линейным и экспоненциальным трендом в прикладных задачах могут встречаться и другие функциональные формы трендов. Например, **квадратичный тренд**, задаваемый уравнением

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + u_t.$$

Для выбора функциональной модели тренда применимы методы и тесты модели регрессии на функциональную форму.

Использование временных рядов с трендом в регрессионных моделях

1.5.2. Оценивание и статистические выводы

Для оценки и тестирования модели (1.2) необходимо провести предварительное тестирование ошибки на серийную корреляцию, а после этого воспользоваться методом наименьших квадратов с поправкой на автокорреляцию ошибки u_t , то есть рассматривая робастные тестовые статистики.

Как устроена корректировка на автокорреляцию рассмотрим на примере *линейного тренда с автокорреляцией первого порядка*:

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + v_t, \quad v_t = \phi v_{t-1} + u_t, \quad |\phi| < 1, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

Стандартное авторегрессионное преобразование

$$\begin{aligned} x_t - \phi x_{t-1} &= \beta_0 + \beta_1 t + v_t - \phi \beta_0 - \phi \beta_1 (t-1) - \phi v_{t-1} = \\ &= (1-\phi)\beta_0 + \phi\beta_1 + (1-\phi)\beta_1 t + u_t \end{aligned}$$

приводит в модели

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \phi x_{t-1} + u_t, \quad |\phi| < 1, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2) \quad (1.3)$$

Далее можно использовать обе альтернативные модели линейного тренда:

- Модель №1: $x_t = \beta_0 + \beta_1 t + v_t$ вида (1.2) с автокоррелированной ошибкой.

Оценка и тестирование модели №1: используются МНК-оценки с поправкой на автокорреляцию (робастные тестовые статистики, т.к. *МНК-оценки неэффективны*).

- Модель №2: $x_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \phi x_{t-1} + u_t$, $u_t \sim \text{WN}$ вида (1.3).

Оценка и тестирование модели №2: OLS (*МНК-оценки эффективны*, т.к. ошибка не автокоррелирована).

Уравнение тренда для модели №2:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 t, \quad \beta_1 = \frac{\gamma_1}{1-\phi}, \quad \beta_0 = \frac{\gamma_0 - \phi\beta_1}{1-\phi}.$$

Применение трендовых временных рядов в качестве зависимой и объясняющих переменных имеет важную особенность. Поясним ее на примере модели с одной объясняющей переменной. Итак, пусть

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 t + u_t, & \alpha_1 &\neq 0, \\ x_t &= \gamma_0 + \gamma_1 t + v_t, & \gamma_1 &\neq 0, \end{aligned}$$

и оценивается линейная модель регрессии

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \text{error}.$$

Но тогда мы имеем *проблему невключения значимого фактора* (который «коррелирует» с x_t), а именно фактора времени t . Это приводит к смещению МНК-оценок⁴ параметров регрессии, в частности коэффициент β_1 может оказаться значимым, хотя из экономических соображений факторы должны быть независимыми. Описанная проблема называется **ложной регрессией** (spurious regression problem). Необходимо учесть тренд (включить в модель значимый фактор времени) и оценивать регрессию

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 t + \text{error}.$$

К ней уже можно применять OLS-метод с возможной поправкой на автокорреляцию (лучше предварительно потестировать на серийную корреляцию). Но, тем не менее, стоит обратить внимание на возможную мультиколлинеарность.

Пример (Housing investment & Prices [37]). На основе годовых данных с 1947 по 1988 года ($n = 42$) была оценена лог-линейная модель зависимости инвестиций в строительство ($invpc$) от индекса цен на дома ($price$, равен 1 для 1982 г.):

$$\begin{aligned} \ln(\widehat{invpc}) &= -0.550 + 1.241 \ln(price), \\ s_0 &= 0.043, \quad s_1 = 0.382, \quad R^2 = 0.208. \end{aligned}$$

Согласно этой модели, эластичность $invpc$ по $price$ значима и положительна. Оба временных ряда имеют возрастающие значимые тренды:

$$\begin{aligned} \ln(\widehat{invpc})_t &= \hat{\alpha}_0 + 0.0081t, & s_1 &= 0.0018, \\ \ln(\widehat{price})_t &= \hat{\gamma}_0 + 0.0044t, & s_1 &= 0.0004. \end{aligned}$$

⁴А также к их несостоятельности и неверным инференциям.

Чтобы учесть трендовое поведение факторов в модель необходимо включить временной тренд

$$\widehat{\ln(invpc)} = -0.913 - 0.381 \ln(price) + 0.0098t$$

$$s_0 = 0.136, \quad s_1 = 0.697, \quad s_2 = 0.0035, \quad R^2 = 0.307.$$

В этой модели эластичность отрицательна и незначима, а временной тренд значим и показывает увеличение *invpc* за год в среднем на 0.98%.

Замечание. Включение в модель трендовой переменной может и «по-вышать значимость» существенных объясняющих переменных.

Используя формулы для двухфакторной регрессии, несложно показать, что включение в модель трендовой переменной равносильно следующей двухшаговой процедуре:

1. «детрендируем» зависимую и объясняющую переменные: вычисляем \dot{y}_t и \dot{x}_t – остатки в моделях тренда

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + u_t$$

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + v_t,$$

соответственно;

2. оцениваем парную модель регрессии

$$\dot{y}_t = \beta_0 + \beta_1 \dot{x}_t + \text{error}.$$

Тогда оценки коэффициентов β_0 и β_1 в регрессии y_t на x_t, t и в регрессии \dot{y}_t на \dot{x}_t совпадают.

Сезонность

В некоторых временных рядах, особенно полученных на основе месячных или квартальных (иногда недельных или дневных) данных может наблюдаться сезонность или периодичность.

Пример. Объем продаж мороженого имеет выраженную сезонность, что связано с погодными условиями. Число постояльцев курортного отеля также может иметь выраженную сезонность, что также связано с погодными условиями. Однако в финансовых данных (доходности и т.д.) как правило сезонность не наблюдается.

Для учета сезонности и периодичности в модель регрессии вводят фиктивные переменные.

Замечание. Следует отметить, что часто статистические данные публикуются с поправкой на сезонность (seasonally adjusted), так что учитывать ее не нужно. Например, квартальные данные U.S. GDP публикуются с исключением сезонности.

Глава 2

Нестационарные временные ряды

2.1. Ряды с единичным корнем

2.1.1. Случайное блуждание

Обсуждение нестационарных временных рядов и методов их исследования начнём с классического примера.

Рассмотрим модель AR(1)

$$x_t = \phi x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2).$$

При $|\phi| < 1$ ряд x_t будет стационарным рядом с $\mathbb{E}x_t = 0$ и $\text{Var}(x_t) = \sigma_u^2 / (1 - \phi^2)$.

Если $|\phi| > 1$, то $|x_t| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, что экономически неинтересно.

А в случае $\phi = 1$ ряд x_t называется *случайным блужданием* (random walk)

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2).$$

Для случайного блуждания

$$x_t = u_t + x_{t-1} = u_t + u_{t-1} + x_{t-2} = \dots = \sum_{s=1}^t u_s + x_0.$$

Определение. $\sum_{s=1}^t u_s$ называется *стохастическим трендом* (u_s – белый шум).

Особенность названия происходит от того, что локально ряд часто похож на детерминированный тренд (локально наблюдается тенденция к росту или к убыванию).

Далее, если блуждание “выходит” из нуля ($x_0 = 0$)

$$x_t = \sum_{i=1}^t u_i, \quad u_i \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2),$$

то

1. $\mathbb{E}x_t = 0$;
2. $\text{Var}(x_t) = t\sigma_u^2$, т.е. разброс растёт пропорционально \sqrt{t} ;
3. $\text{cov}(x_t, x_s) = \min\{t, s\}\sigma_u^2$ и $\text{corr}(x_t, x_s) = \frac{\min\{t, s\}}{\sqrt{ts}}$.

Отсюда можно сделать вывод, что случайное блуждание нестационарно и есть *сумма всех прошлых шоков*.

2.1.2. Случайное блуждание со сносом

Рассмотрим модель $AR(1)$

$$x_t = \mu + \phi x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2).$$

Если $|\phi| < 1$, то x_t – стационарный ряд с $\mathbb{E}x_t = \mu/(1 - \phi)$ и $\text{Var}(x_t) = \sigma_u^2/(1 - \phi^2)$.

При $\phi = 1$ ряд x_t называется *случайным блужданием со сносом* (random walk with drift)

$$x_t = \mu + x_{t-1} + u_t \quad u_t, \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2).$$

Для случайного блуждания со сносом, считая $x_0 = 0$, получаем

$$x_t = \mu + u_t + x_{t-1} = 2\mu + u_t + u_{t-1} + x_{t-2} = \\ 3\mu + u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + x_{t-3} = \dots = \mu t + \sum_{s=1}^t u_s.$$

Таким образом, случайное блуждание со сносом есть сумма линейного тренда и стохастического тренда.

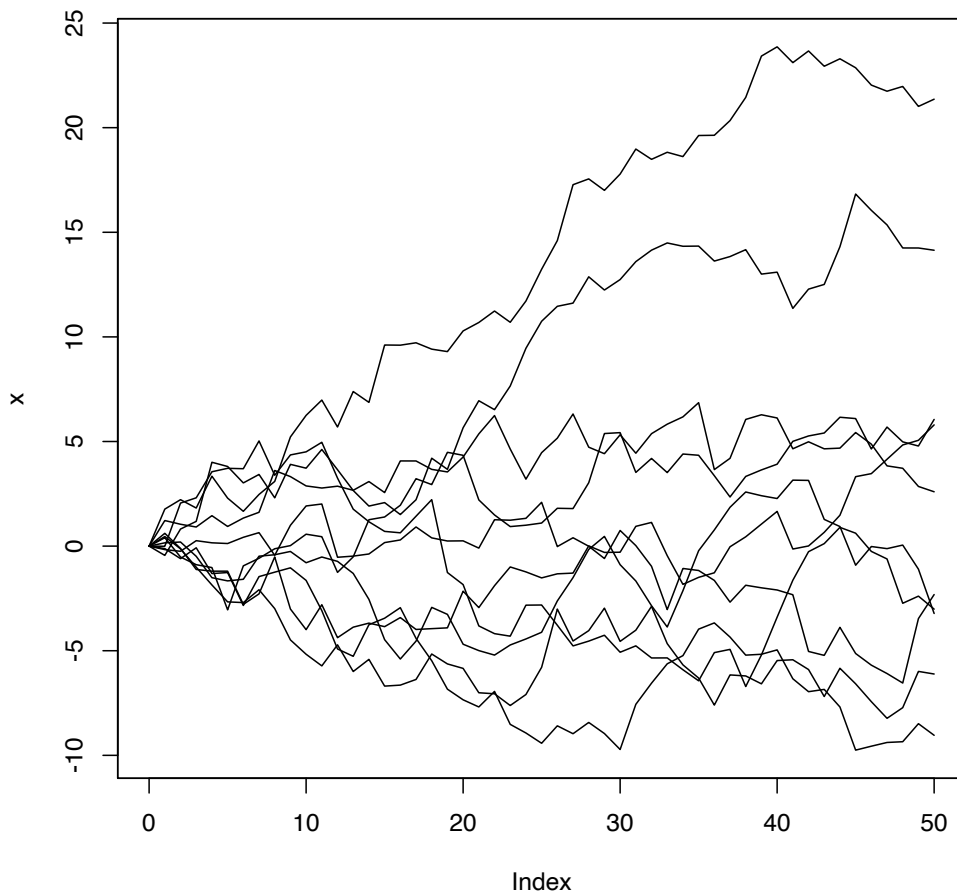


Рисунок 2.1. Несколько реализаций случайных блужданий.

Замечание. По-другому этот процесс x_t можно представлять как *случайное блуждание относительно линейного тренда*

$$\begin{aligned}x_t &= \mu t + w_t, \\w_t &= w_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}.\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим более сложную модель

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}.$$

Если $|\phi| < 1$, то модель задаёт TS-ряд с линейным трендом.

При $\phi = 1$ получаем

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + x_{t-1} + u_t.$$

Перепишем в другом виде, считая $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}x_t &= \beta_0 + \beta_1 t + x_{t-1} = \\&\beta_0 + \beta_1 t + u_t + \beta_0 + \beta_1(t-1) + u_{t-1} + x_{t-2} = \\&\beta_0 + \beta_1 t + u_t + \beta_0 + \beta_1(t-1) + u_{t-1} + \\&\beta_0 + \beta_1(t-2) + u_{t-2} + x_{t-3} = \dots \\&= \beta_0 t + \beta_1 \sum_{j=1}^t j + \sum_{j=1}^t u_j = \beta_0 t + \beta_1 \frac{t(t+1)}{2} + \sum_{j=1}^t u_j = \\&\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{2}\right)t + \frac{\beta_1}{2}t^2 + \sum_{j=1}^t u_j.\end{aligned}$$

Откуда следует, что модель

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + x_{t-1} + u_t$$

есть сумма квадратичного и стохастического тренда.

Также x_t можно представить как *случайное блуждание относительно квадратичного тренда*

$$\begin{aligned}x_t &= \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + w_t, \\w_t &= w_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).\end{aligned}$$

2.1.3. Дифференцирование ряда

Для того, чтобы перейти к стационарному ряду часто применяют операцию дифференцирования.

Определение. Операция *дифференцирования* или *первая конечная разность* ряда обозначается как

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = (1 - L)x_t,$$

где L – лаговый оператор.

Идея состоит в том, чтобы вместо исходного ряда рассматривать его приращение за один период.

Пример. В финансах часто рассматривают следующее приращение

$$\Delta \ln x_t = \ln x_t - \ln x_{t-1} = \ln \frac{x_t}{x_{t-1}},$$

то есть процентное изменение за один период или “логарифмическую доходность”.

Аналогично можно ввести дифференцирование и более высокого порядка.

Дифференцирование второго порядка:

$$\Delta^2 x_t = \Delta(\Delta x_t) = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}.$$

Дифференцирование произвольного порядка:

$$\Delta^k x_t = \Delta(\Delta^{k-1} x_t).$$

Используя лаговый оператор можно формально записать

$$\Delta^2 x_t = (1 - L)^2 x_t = (1 - 2L + L^2)x_t$$

и в общем случае

$$\Delta^k x_t = (1 - L)^k x_t.$$

Дифференцирование ряда позволяет перейти к стационарному ряду относительно приращений. Для примера продифференцируем TS-ряды.

- Линейный тренд (v_t – стационарный ряд)

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + v_t.$$

Тогда

$$\Delta x_t = \beta_1 + v_t - v_{t-1},$$

и, в частности, получаем

$$E(\Delta x_t) = \beta_1.$$

- Квадратичный тренд (v_t – стационарный ряд)

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + v_t.$$

Тогда

$$\Delta x_t = \beta_1 + 2\beta_2 t + v_t - v_{t-1},$$

$$\Delta^2 x_t = 2\beta_2 + v_t - 2v_{t-1} + v_{t-2}.$$

2.1.4. DS-ряды

Определение. Ряд x_t называется *интегрированным порядка k* , если

1. x_t не TS-ряд и нестационарный;
2. k – минимальный порядок такой, что $\Delta^k x_t$ – стационарный или TS-ряд.

Обозначение: $x_t \sim I(k)$.

Замечание. Если x_t – стационарный ряд, то формально $x_t \sim I(0)$.

Определение. Ряд x_t называется *DS-рядом*¹, если $x_t \sim I(k)$ для некоторого k .

¹Difference Stationary.

Запишем случайное блуждание как DS-ряд. Пусть x_t – случайное блуждание без сноса, тогда

$$x_t = x_{t-1} + u_t \Rightarrow \Delta x_t = x_t - x_{t-1} = u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

Следовательно, $x_t \sim I(1)$ при этом, конечно, x_t не является TS-рядом.

Аналогично для случайного блуждания со сносом имеем

$$x_t = \mu + x_{t-1} + u_t \Rightarrow \Delta x_t = x_t - x_{t-1} = \mu + u_t \sim \text{WN}(\mu, \sigma^2).$$

Следовательно, $x_t \sim I(1)$.

Пример. Пусть

$$x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

Перепишем в виде

$$x_t - x_{t-1} = x_{t-1} - x_{t-2} + u_t \Rightarrow \Delta x_t = \Delta x_{t-1} + u_t.$$

Следовательно, Δx_t – случайное блуждание.

Далее

$$\Delta^2 x_t = \Delta x_t - \Delta x_{t-1} = u_t \sim \text{WN}.$$

Следовательно, $x_t \sim I(2)$.

2.1.5. Модель ARIMA

Для нестационарных рядов, которые можно представить стационарными относительно приращений, введём следующий класс моделей.

Определение. $x_t \sim \text{ARIMA}(p, k, q)^2$, если

1. $x_t \sim I(k)$;
2. $\Delta^k x_t \sim \text{ARMA}(p, q)^3$.

²Autoregression Integrated Moving Average.

³Которая, конечно, стационарная.

Формально будем считать $ARMA(p, q) = ARIMA(p, 0, q)$.

Пример (Случайное блуждание). Пусть

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Тогда $x_t \sim I(1)$ и $\Delta x_t = u_t$. Следовательно

$$x_t \sim ARIMA(0, 1, 0).$$

Аналогично для случайного блуждания со сном

$$x_t = \mu + x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Тогда $x_t \sim I(1)$ и $\Delta x_t = \mu + u_t$. Следовательно

$$x_t \sim ARIMA(0, 1, 0).$$

Пусть $x_t \sim ARIMA(p, k, q)$. Это означает, что $\Delta^k x_t$ является стационарной $ARMA(p, q)$, и может быть представлена в виде

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) \Delta^k x_t = \mu + (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q) u_t$$

и все корни авторегрессионного многочлена

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$$

по модулю больше 1 (условие стационарности).

Тогда, используя $\Delta^k x_t = (1 - L)^k x_t$, получаем

$$\phi(L)(1 - L)^k x_t = \mu + \theta(L) u_t,$$

где $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$.

Введём многочлен

$$\gamma(z) = \phi(z)(1 - z)^k = 1 - \gamma_1 z - \dots - \gamma_{p+k} z^{k+p}.$$

Он имеет *единичный корень кратности k*, а остальные p корней по модулю больше 1.

Тогда для ряда $x_t \sim \text{ARIMA}(p, k, q)$

$$\gamma(L)x_t = \mu + \theta(L)u_t \Rightarrow x_t = \mu + \sum_{j=1}^{k+p} \gamma_j x_{t-j} + u_t + \sum_{s=1}^q \theta_s u_{t-s}.$$

Таким образом, модель $\text{ARIMA}(p, k, q)$ можно рассматривать как нестационарную $\text{ARMA}(p+k, q)$, авторегрессионный многочлен которой имеет *единичный корень кратности k* , а остальные p корней по модулю больше единицы. Отсюда происходит и название, так называемых, *рядов с единичным корнем*.

Утверждение. *Для прогнозирования ARIMA-рядов используем алгоритм прогнозирования для ARMA-рядов.*

Пусть Ω_T – “информация” в момент времени T , то есть значения ряда и внешних шоков до момента T включительно.

Пример. Для случайного блуждания $x_t = x_{t-1} + u_t$, $u_t \sim \text{WN}$ имеем

$$\begin{aligned} x_{T+1} &= u_{T+1} + x_T \Rightarrow \hat{x}_{T+1} | \Omega_T = x_T, \\ x_{T+2} &= u_{T+2} + u_{T+1} + x_T \Rightarrow \hat{x}_{T+2} | \Omega_T = x_T, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Следовательно, **наилучший прогноз – это текущее значение.**

Ошибка прогноза на k шагов: $\sum_{s=1}^k u_{T+s}$ и среднеквадратичная ошибка прогноза

$$\mathbb{E}(\hat{x}_{T+k} - x_{T+k})^2 = k\sigma_u^2.$$

Пример. Для случайного блуждания со сносом $x_t = \mu + x_{t-1} + u_t$, $u_t \sim \text{WN}$ получим

$$\begin{aligned} x_{T+1} &= \mu + u_{T+1} + x_T \Rightarrow \hat{x}_{T+1} | \Omega_T = \mu + x_T, \\ x_{T+2} &= \mu + u_{T+2} + \mu + u_{T+1} + x_T \Rightarrow \hat{x}_{T+2} | \Omega_T = 2\mu + x_T, \\ x_{T+3} &= 3\mu + u_{T+3} + u_{T+2} + u_{T+1} + x_T \Rightarrow \hat{x}_{T+3} | \Omega_T = 3\mu + x_T, \\ &\dots \end{aligned}$$

Следовательно, наилучший прогноз на k шагов

$$\hat{x}_{T+k}|\Omega_T = k\mu + x_T.$$

Этот прогноз можно рассматривать как **локальный тренд**. Средне-квадратичная ошибка прогноза

$$E(\hat{x}_{T+k} - x_{T+k})^2 = k\sigma_u^2.$$

2.1.6. Оценка и статистические свойства

Перейдём теперь к практической реализации оценивания ARIMA-моделей.

В таких случаях всегда начинают с предварительного анализа ряда на стационарность (возможно относительно тренда) или, напротив, на единичный корень. Необходимо это потому, что стационарность или наличие единичного корня влияют на

1. выбор модели динамики для подгонки под данные;
2. методы оценивания и инференции;
3. прогнозирование;
4. подходы к построению регрессий (для TS- и DS-рядов можно попасть на “ложную регрессию”);
5. подходы к оцениванию и тестированию регрессий.

2.1.7. Тесты “единичного корня”

Важной прикладной задачей является отнесение временного ряда к одному из классов: стационарный, TS- или DS-ряд. Для этого используются различные тесты на различие рядов. Для этого будем использовать так называемые *тесты единичного корня* (unit root tests).

Таких тестов много, но, как правило, тестируется *нулевая гипотеза о единичном корне* против *альтернативы о TS-/стационарности*. Все базовые тесты реализованы в специальных программах.

Стандартным и часто используемым тестом на единичный корень является расширенный тест Дики-Фуллера (ADF-test)⁴.

У теста имеется три варианта реализации:

1. единичный корень против стационарности для ряда с *нулевым средним*;
2. единичный корень против стационарности в общем случае;
3. единичный корень против стационарности относительно линейного тренда.

Замечание. Это тест на единичный корень *кратности один*!

1. Рассмотрим ADF тест №1 без константы. Пусть x_t – ряд с нулевым средним ($E x_t = 0$).

Для заданного p , которое выберем позже, тестируем

$$H_0 : x_t \sim \text{ARIMA}(p-1, 1, 0) \quad \text{vs} \quad H_1 : x_t \sim \text{ARMA}(p, 0).$$

Другими словами, для модели

$$x_t = \gamma_1 x_{t-1} + \dots + \gamma_p x_{t-p} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2) \quad (2.1)$$

тестируем гипотезу о том, что авторегрессионный многочлен

$$\gamma(z) = 1 - \gamma_1 z - \dots - \gamma_p z^p$$

имеет *единичный корень кратности 1* (остальные корни по модулю больше 1).

Очевидно, $z = 1$ корень $\gamma(z) \iff \sum_{j=1}^p \gamma_j = 1$. Преобразуем уравнение.

⁴ADF = Augmented Dickey-Fuller

Перепишем (2.1)

$$\begin{aligned}
 \Delta x_t &= \varphi x_{t-1} + \theta_1 \Delta x_{t-1} + \cdots + \theta_{p-1} \Delta x_{t-p+1} + u_t & (2.2) \\
 \varphi &= \gamma_1 + \cdots + \gamma_p - 1, \\
 \theta_1 &= -\gamma_2 - \cdots - \gamma_p, \\
 \theta_2 &= -\gamma_3 - \cdots - \gamma_p, \\
 &\vdots \\
 \theta_{p-1} &= -\gamma_p.
 \end{aligned}$$

Тогда наличие единичного корня означает $\varphi = 0$, а стационарность $\varphi < 0$.

Идея теста состоит в том, что для преобразованного уравнения (2.2) тестируем гипотезу

$$H_0 : \varphi = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \varphi < 0.$$

К сожалению, обычная t -статистика

$$t = \frac{\hat{\varphi}_{OLS}}{\text{s. e.}(\varphi)}$$

при справедливости H_0 не имеет распределения Стьюдента!

Приведём алгоритм теста:

- (a) Оцениваем (OLS) преобразованное уравнение (2.2);
- (b) Тестовая статистика:

$$ADF_t = DF_\tau = \frac{\hat{\varphi}_{OLS}}{\text{s. e.}(\varphi)};$$

- (c) Критическое значение: τ_{cr} – специальное критическое значение теста Дики-Фуллера без константы.
- (d) Вывод: отвергаем H_0 (гипотезу единичного корня) при

$$ADF_t < -\tau_{cr} < 0.$$

2. Теперь рассмотрим ADF тест №2 с константой. Этот случай является общим, то есть $E x_t \equiv a$ и допускается $a \neq 0$. Тогда

$$x_t = a + z_t, \quad E z_t \equiv 0.$$

Для заданного p тестируем

$$H_0 : z_t \sim \text{ARIMA}(p-1, 1, 0) \quad \text{vs} \quad H_1 : z_t \sim \text{ARMA}(p, 0)$$

или, другими словами, для модели

$$x_t = \mu + \gamma_1 x_{t-1} + \dots + \gamma_p x_{t-p} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2) \quad (2.3)$$

тестируем, что авторегрессионный многочлен $\gamma(z)$ имеет единичный корень кратности один (остальные корни по модулю больше 1) и $\mu = 0$.

Аналогично предыдущему преобразуем уравнение (2.3)

$$\Delta x_t = \mu + \varphi x_{t-1} + \theta_1 \Delta x_{t-1} + \dots + \theta_{p-1} \Delta x_{t-p+1} + u_t \quad (2.4)$$

Тогда гипотеза единичного корня означает, что $\mu = 0$ и $\varphi = 0$, а стационарность будет при $\varphi < 0$.

Можем записать следующий алгоритм:

- (a) Оцениваем (OLS) преобразованное уравнение (2.4)
- (b) Тестовая статистика:

$$ADF_t = DF_\tau = \frac{\hat{\varphi}_{OLS}}{\text{s. e.}(\varphi)}.$$

- (c) Критическое значение: τ_{cr} – специальное критическое значение теста Дики-Фуллера с константой.
- (d) Вывод: отвергаем H_0 (гипотезу единичного корня) при

$$ADF_t < -\tau_{cr} < 0.$$

3. Теперь перейдём к ADF тесту №3 с трендом. Пусть x_t – ряд с линейным трендом. Тогда

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + z_t, \quad E z_t \equiv 0.$$

Для заданного p тестируем

$$H_0 : z_t \sim \text{ARIMA}(p-1, 1, 0) \quad \text{vs} \quad H_1 : z_t \sim \text{ARMA}(p, 0)$$

Можем переформулировать задачу так: для модели

$$x_t = \mu + \beta t + \gamma_1 x_{t-1} + \dots + \gamma_p x_{t-p} + u_t \quad (2.5)$$

тестируем, что авторегрессионный многочлен $\gamma(z)$ имеет единичный корень кратности один (остальные корни по модулю больше 1) и $\beta = 0$.

Аналогично предыдущему преобразуем уравнение (2.5)

$$\Delta x_t = \mu + \beta t + \varphi x_{t-1} + \theta_1 \Delta x_{t-1} + \dots + \theta_{p-1} \Delta x_{t-p+1} + u_t \quad (2.6)$$

Тогда гипотеза единичного корня означает, что $\beta = 0$ и $\varphi = 0$, а стационарность будет при $\varphi < 0$.

Алгоритм теста можно записать так:

- (a) Оцениваем с помощью МНК преобразованное уравнение.
- (b) Тестовая статистика:

$$ADF_t = DF_\tau = \frac{\hat{\varphi}_{OLS}}{\text{s. e.}(\varphi)}.$$

- (c) Критическое значение: τ_{cr} – специальное критическое значение теста Дики-Фуллера с линейным трендом.
- (d) Вывод: отвергаем H_0 (гипотезу единичного корня) при

$$ADF_t < -\tau_{cr} < 0.$$

Можно предложить и другой подход к тестированию. Для преобразованной регрессии

$$x_t = \phi x_{t-1} + \begin{pmatrix} 0 \\ \text{const} \\ \text{trend} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \Delta x_{t-j} + \text{error}$$

используем тестовые статистики⁵

$$ADF_t = \frac{\hat{\phi} - 1}{\text{s. e.}(\hat{\phi})},$$

$$ADF_n = \frac{n(\hat{\phi} - 1)}{1 - \hat{\gamma}_1 - \dots - \hat{\gamma}_p}.$$

Стоит отметить, что $ADF_n = n(\hat{\phi} - 1)$ в случае $p = 0$.

Критические значения для ADF_t такие же, как и раньше. А для критических значений ADF_n теста имеются отдельные таблицы.

Статистическое правило, как и раньше, заключается в том, что мы отвергаем гипотезу единичного корня, когда тестовая статистика меньше критического значения (меньше 0).

Теоретически все тесты выглядят достаточно просто и лаконично, но при практическом применении возникают некоторые особенности.

Три основных практических вопроса:

1. Какой из тестов выбрать в конкретной ситуации?
2. Как выбрать порядок лагов p ?
3. Где брать критические значения?

Разберёмся по порядку. Что касается того, какой вариант теста брать, то здесь всё зависит от априорной информации:

- если думаем, что есть детерминированный долгосрочный тренд, то используем тест с трендом;

⁵ ADF_n – normalized bias statistic

- если думаем, что детерминированного тренда нет, то используем тест только с константой (и без тренда, это повышает мощность теста);
- если думаем, что ряд имеет нулевое среднее, то используем первый тест.

Что касается выбора порядка лагов, то неформальный подход состоит в использовании экономического смысла или экономической модели. Формальный подход, как правило, сводится к применению правила Schwert'a (1989):

1. Определяем максимальный лаг $p_{\max} = [12 \sqrt[4]{n/100}]$;
2. Выбираем порядок лага $p < p_{\max}$ по информационным критериям⁶, либо по t -статистикам (чтобы старший коэффициент был значим).

К сожалению, критические значения распределения Дики-Фуллера нестандартны и для них нужны специальные таблицы.

Кратко опишем некоторые другие тесты на единичный корень.

1. Рассмотрим (A)DF-GLS test в двух вариантах⁷:

- (a) *с константой*: единичный корень vs стационарность,
- (b) *с трендом*: единичный корень vs TS-ряд.

Это соответствует ADF-тесту №2 и №3.

Обозначим

$$x_t^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - rx_1 \\ \vdots \\ x_n - rx_{n-1} \end{pmatrix}, \quad z_t^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - r \\ \vdots \\ 1 - r \end{pmatrix},$$

⁶Akaike или Schwarz (Bayesian).

⁷Elliott, Rothenberg, Stock, 1996.

$$\text{где } r = \begin{cases} 1 - \frac{7}{n}, & \text{const} \\ 1 - \frac{13.5}{n}, & \text{trend} \end{cases}$$

Далее, обозначим x_t^d – OLS-остатки в двух случаях:

- в случае *теста с константой* в регрессии x^* на z^* ;
- в случае *теста с трендом* в регрессии x^* на z^* и $r + (1 - r)t$.

Процедуру проверки можно записать следующим образом:

для вспомогательной регрессии

$$\Delta x_t^d = \varphi x_{t-1}^d + \theta_1 \Delta x_{t-1}^d + \dots + \theta_p \Delta x_{t-p}^d + \text{error}$$

тестируем гипотезу

$$H_0 : \varphi = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \varphi < 0.$$

Тестовой статистикой служит $\tau = \hat{\varphi}_{OLS} / \text{s.e.}(\varphi)$.

Далее, используем специальное критическое значение τ_{cr} для данного теста и применяем следующее статистическое правило: отвергаем H_0 (гипотезу единичного корня) при

$$\tau < -\tau_{cr} < 0.$$

2. PP-test⁸

Рассмотрим модель

$$\Delta x_t = \phi x_{t-1} + \begin{pmatrix} \text{const} \\ \text{trend} \end{pmatrix} + u_t, \quad u_t \sim I(0)$$

и u_t могут быть автокоррелированы⁹.

⁸Phillips & Perron, 1988.

⁹Допускается даже гетероскедастичность

Пусть \hat{u}_t – OLS-остатки и

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2, \quad s^2 = \frac{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2}{n - k - 1},$$

где k – число регрессоров.

Тестовые статистики:

$$Z_t = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2}} \cdot \frac{\hat{\phi}}{s_\phi} - \frac{1}{2}(\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2) \frac{ns_\phi}{\hat{\lambda} \cdot s},$$

$$Z_\phi = n\hat{\phi} - \frac{1}{2}(\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2) \frac{n^2 s_\phi^2}{s^2},$$

где

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 + 2 \sum_{j=1}^L \left(1 - \frac{j}{L+1} \right) \sum_{t=j+1}^n \hat{u}_t \hat{u}_{t-j} \right).$$

Замечание. Это аналог формулы Newey-West'a.

Статистики Z_t и Z_ϕ являются скорректированными на серийную корреляцию статистиками ADF_t и ADF_n соответственно при $p = 0$.

Критические значения для Z_t и Z_ϕ – это критические значения для статистик ADF_t и ADF_n соответственно. Статистическое правило в этом случае аналогично ADF-тесту.

Один из главных недостатков тестов на единичный корень, описанных выше, является их недостаточная мощность в том случае, когда альтернативная гипотеза заключается в наличии корня, близкого к единичному. Поэтому параллельно с рассмотренными тестами используется следующий:

3. KPSS-test¹⁰.

Это очень популярный тест, в котором меняются местами основная и альтернативная гипотезы. Нулевая гипотеза состоит в том,

¹⁰Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, Shin 1992.

что ряд стационарен или является TS-рядом, а альтернативная говорит о том, что имеется единичный корень. Для критических значений теста существуют специальные таблицы.

4. Sargan-Bhargava test (1983).

Тестовая статистика

$$R_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (x_t - x_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2},$$

которая является модификацией DW-статистики. Гипотеза единичного корня отвергается при $R_1 > (R_1)_{cr}$.

5. Schmidt-Phillips test (1992).

6. NP-тесты¹¹: модифицированный PP-тест.

Отдельно стоит отметить специфические тесты единичного корня, которые учитывают определённую специфику временной структуры.

1. Сезонные единичные корни вида

$$x_t = \phi x_{t-S} + \dots + u_t :$$

- DHF-тест (Dickey, Hasza, Fuller, 1984);
- HEGY-тест (Hylleberg, Engle, Garnger, Yoo 1990).

2. Структурные сдвиги в известное время: Perron-test (1989, 1990).

3. Структурные сдвиги в неизвестное время:

- Zivot-Andrews-test (1992);
- Perron-test (1997).

4. Выбор даты сдвига:

- Perron & Zhu (2005);
- Harvey & Leybourne (2012).

¹¹Ng & Perron 2001

2.1.8. Оценка ARIMA-модели

Представим общий подход к оцениванию ARIMA моделей в нескольких шагах:

1. Выбор порядка интегрирования k (тесты единичного корня для x_t , $\Delta^k x_t$);
2. подбор ARMA-модели для $\Delta^k x_t$ (информационные критерии и тесты на адекватность);
3. Получить оценённую модель ARIMA из ARMA-модели.

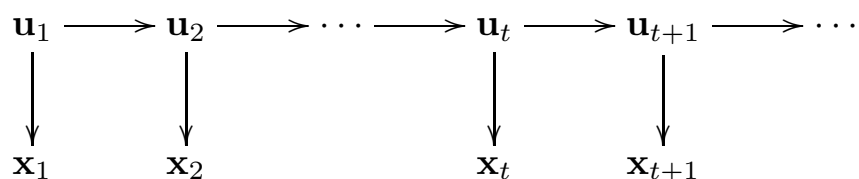
После выбора порядка и оценки модель ARIMA можно использовать, например, для прогнозирования.

2.2. Модели пространства состояний

В заключении приведём ещё один популярный класс моделей – **модели пространства состояний**.

2.2.1. Идея и примеры

Общая схема модели пространства состояний



Основные предположения:

- задана динамика \mathbf{u}_t ;
- ряд \mathbf{u}_t **ненаблюдаем**;
- ряд \mathbf{x}_t **наблюдаем** и есть функция от \mathbf{u}_t .

Пример. Регрессия с меняющимися коэффициентами (структурой)

$$\begin{aligned} y_t &= \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim \text{WN}(0, \sigma_\epsilon^2); \\ \boldsymbol{\beta}_t &= \boldsymbol{\beta}_{t-1} + \mathbf{v}_t, & \mathbf{v}_t &\sim \text{WN}(0, \Sigma), \end{aligned}$$

где ϵ_t и \mathbf{v}_t независимы.

Пример. Линейная модель пространства состояний

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{A}_t \mathbf{u}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t, \\ \mathbf{x}_t &= \boldsymbol{\gamma}_t + \mathbf{\Pi}_t \mathbf{u}_t + \mathbf{v}_t. \end{aligned}$$

Пример. Модель локального уровня

$$\begin{aligned} x_t &= \mu_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim \text{WN}(0, \sigma_\epsilon^2), \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \nu_t, & \nu_t &\sim \text{WN}(0, \sigma_\nu^2). \end{aligned}$$

Из определения

$$\Delta x_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1} + \nu_t \sim \text{ARIMA}(0, 1, 1).$$

В частном случае, при $\sigma_\nu = 0$, имеем

$$\mu_t \equiv \mu_0 \implies x_t = \mu_0 + \epsilon_t,$$

т.е. x_t – стационарное отклонение от постоянного уровня.

Интерпретировать такую модель можно так: “средний” уровень “медленно” изменяется. А прогнозом и будет этот средний уровень

$$\hat{x}_{T+s} | \Omega_T = \mu_T.$$

Другой вариант модели локального уровня:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim \text{WN}(0, \sigma_\epsilon^2), \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \nu_{t-1} + \eta_t, & \eta_t &\sim \text{WN}(0, \sigma_\eta^2), \\ \nu_t &= \nu_{t-1} + \zeta_t, & \zeta &\sim \text{WN}(0, \sigma_\zeta^2), \end{aligned}$$

где ν_t – параметр наклона.

Прогноз вычисляется по формуле

$$\hat{x}_{T+\tau}|\Omega_T = \mu_T + \nu_T\tau$$

В частном случае при $\sigma_\epsilon = \sigma_\zeta = 0$ имеем

$$\nu_t \equiv \nu_0 \implies x_t = \mu_t = \nu_0 + \mu_{t-1} + \eta_t = \nu_0 + x_{t-1} + \eta_t,$$

т.е. x_t – случайное блуждание со сном ν_0 .

Для учета сезонности можно рассмотреть следующую спецификацию:

$$\omega_t = -\omega_{t-1} - \dots - \omega_{t-S+1} + v_t, \quad \epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_v^2),$$

где S – число “сезонов”.

А локальный тренд и сезонность можно задать так:

$$x_t = \mu_t + \omega_t + \epsilon_t.$$

2.2.2. Примеры оценивания

Приведём несколько подходов к оцениванию моделей пространства состояний.

Стандартным решением в этом случае являются методы фильтрации (сглаживания) рядов. Среди распространённых фильтров выделим фильтры Ходрика-Прескотта, Калмана, Бакстера-Кинга. Но существуют и другие.

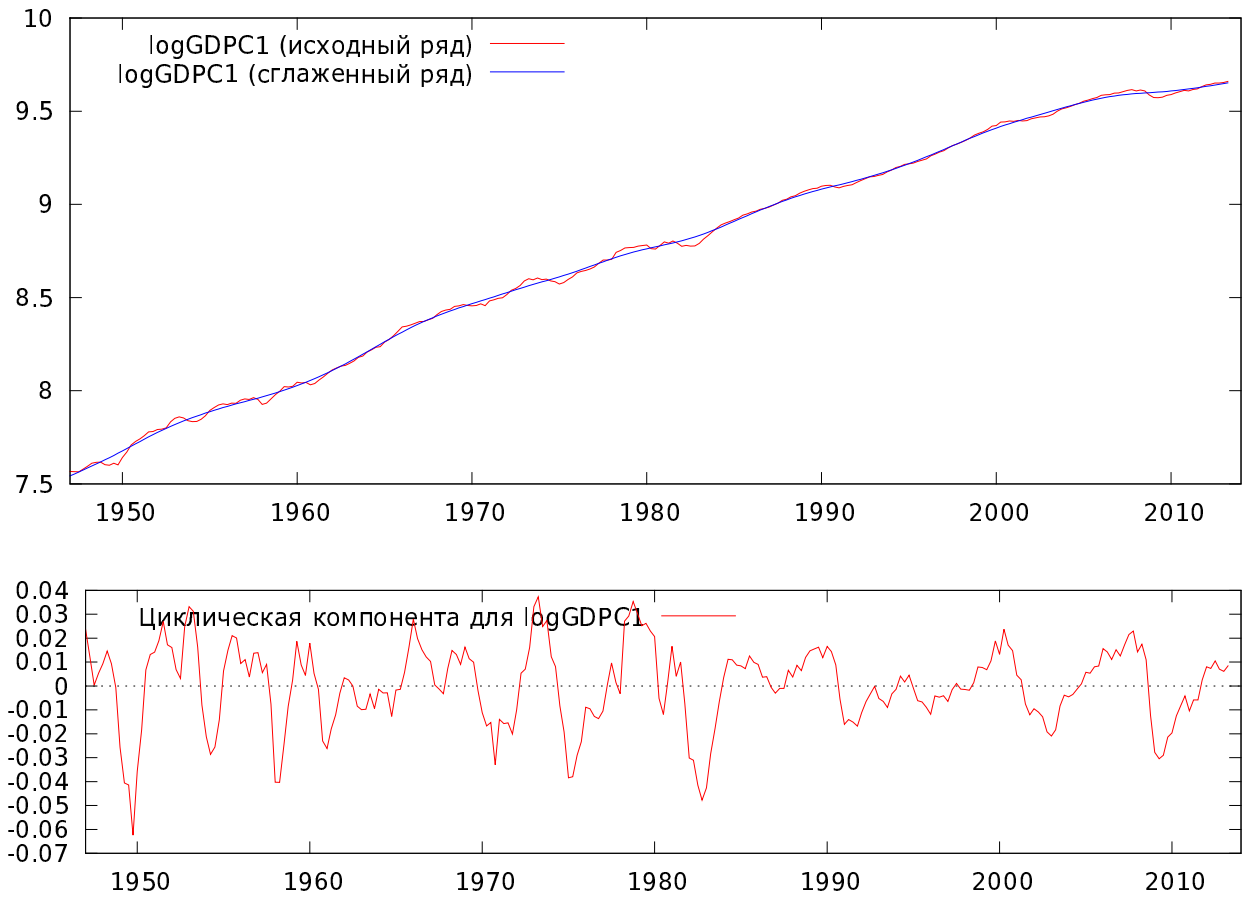


Рисунок 2.2. Пример сглаживания ряда.

Для примера рассмотрим фильтр Ходрика-Прескотта¹².

Цель фильтра состоит в выделении локального тренда μ_t .

Оценка локального тренда производится из условия

$$\min_{\{\mu_t\}} \left\{ \sum_{t=1}^n (x_t - \mu_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{n-1} (\mu_{t+1} - 2\mu_t + \mu_{t-1})^2 \right\},$$

где λ – параметр гладкости, а $x_t - \hat{\mu}_t$ обычно трактуется как циклическая компонента. Естественно, всё вышеперечисленное вычисляется автоматически, но проблема состоит в выборе λ .

Если $\lambda = 0$, то $x_t = \hat{\mu}_t$. Если $\lambda \gg 1$, то $\hat{\mu}_t \approx \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$.

¹²Hodrick-Prescott (HP) filter (1982, 1997).

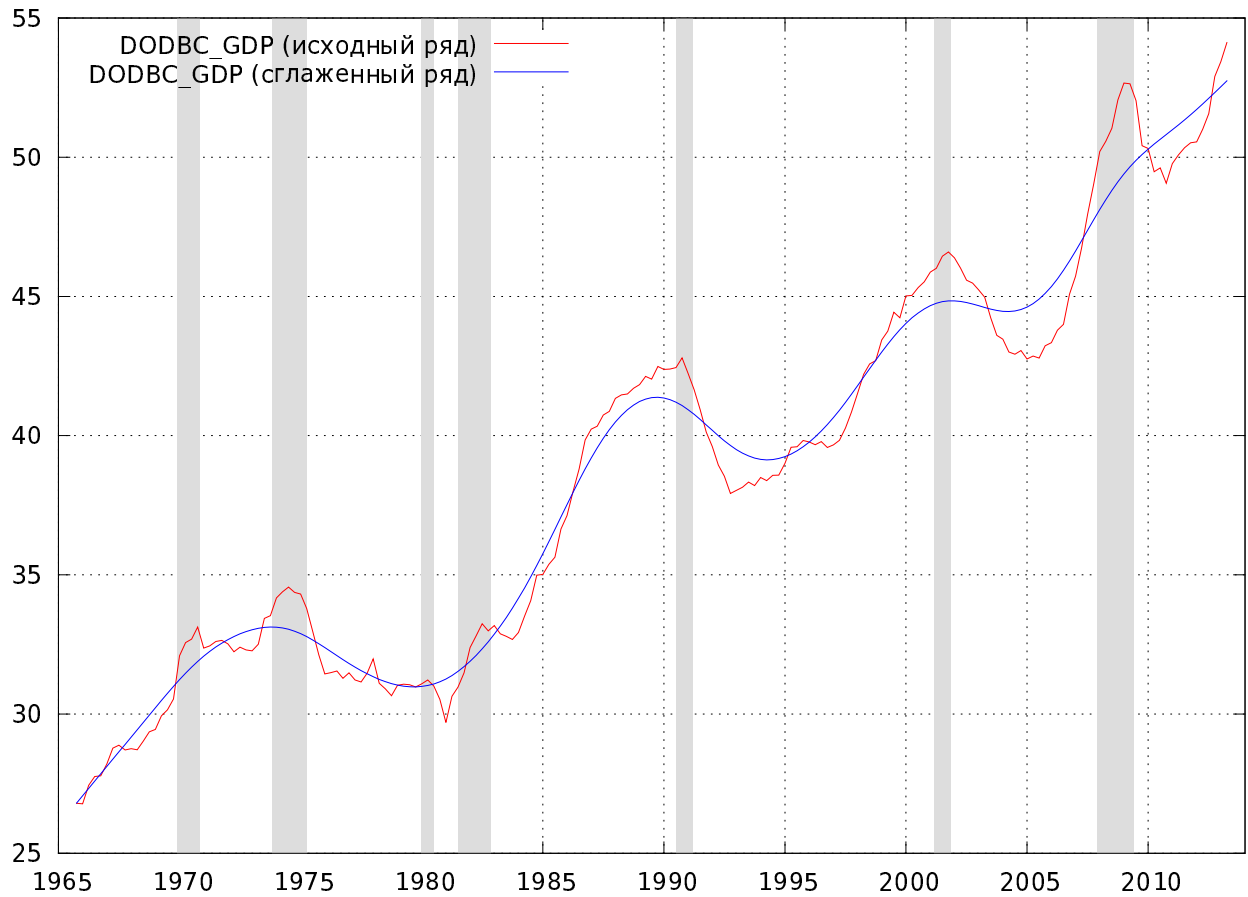


Рисунок 2.3. Отношение задолженности нефинансового сектора к ВВП (база FRED).

Замечание. Для фильтра Ходрика-Прескотта берут $\lambda = 100$ для годовых, $\lambda = 1600$ для квартальных, $\lambda = 14400$ для месячных рядов.

2.2.3. Возможные применения

Одним из важных применений является решение и оценивание моделей с рациональными ожиданиями.

Пусть \mathbf{z}_t – вектор эндогенных переменных, $\boldsymbol{\beta}$ – вектор структурных параметров, \mathbf{u}_t – вектор экзогенных шоков.

Лог-линеаризованная DSGE-модель¹³ может быть записана

$$\boldsymbol{\Gamma}_0(\boldsymbol{\beta})\mathbf{z}_t = \boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{\beta})\mathbf{E}_t\mathbf{z}_{t+1} + \boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{\beta})\mathbf{z}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_3(\boldsymbol{\beta})\mathbf{u}_t,$$

¹³Динамические стохастические модели общего равновесия.

где $E_t \mathbf{z}_{t+1}$ – рациональные ожидания, которые ненаблюдаемы.

Решение модели относительно рациональных ожиданий заключается в том, чтобы записать и оценивать её в виде

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbf{A}_0(\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{A}_1(\boldsymbol{\beta})t + \mathbf{A}_2(\boldsymbol{\beta})S_t, \\ S_t &= \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\beta})S_{t-1} + \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\beta})\mathbf{u}_t, \end{aligned}$$

где S_t – вектор состояний, Y_t – вектор наблюдаемых переменных.

- 1-е уравнение – это *уравнение измерения*,
- 2-е уравнение – это *уравнение перехода*.

Глава 3

Моделирование ВОЛАТИЛЬНОСТИ

3.1. Одномерная волатильность

До сих пор мы рассматривали только модели для условного среднего, пришло время обсудить модели условной дисперсии. Эта глава частично соответствует главе из книги [23], также подробный обзор о моделировании волатильности можно прочесть в статье [14] или книге [1].

Волатильность на сегодняшний день является наиболее важным показателем для измерения финансового риска. Использование волатильности в экономике и финансах имеет давнюю традицию. Марковиц, Тобин, Шарп [29, 35, 32] разработали современную теорию управления портфелем, описывающую взаимосвязь между ожидаемой доходностью и риском, который измеряется волатильностью. Блэк, Шоулс, Мертон [16, 28] использовали волатильность активов для оценки цены опционов, которые представляют собой контракты, дающие право купить или продать базовый актив по фиксированной цене в определенную дату или ранее. В целом волатильность стала ключевой переменной во многих

теоретических курсах, таких как управление рисками, управление портфелем, ценообразование опционов и т.д.

В предыдущих главах мы предполагали, что ошибки имеют постоянное безусловное среднее значение и дисперсию, и мы не рассматривали условное поведение их второго момента. Однако для большинства временных рядов волатильность - это изменяющееся во времени явление. Кроме того, финансовым временным рядам присущи следующие стилизованные факты:

- Цены на активы нестационарны, тогда как логарифмическая доходность обычно стационарна.
- Автокорреляции доходности активов довольно малы и чаще всего статистически не отличаются от нуля. Напротив, автокорреляции квадратов доходности активов статистически значимы и часто уменьшаются с гиперболическим спадом.
- Волатильность финансовой доходности кластеризована.
- Распределение доходностей, как правило, имеет более тяжёлые хвосты, чем нормальное.
- Некоторые ряды показывают так называемый *эффект рычага* (*levered effect*), то есть изменения цен на активы отрицательно коррелируют с изменениями волатильности: если стоимость фирмы падает, она становится более заемной и, следовательно, рискованной, что увеличивает волатильность доходности.
- Волатильности разных активов имеют тенденции двигаться вместе.
- Сильные сезонные закономерности присутствуют на более высоких частотах, например, внутридневные данные.

Следовательно, модели, которые мы рассматривали до сих пор, не подходят для обработки этих эмпирических данных. В этой главе мы

рассмотрим наиболее известные одномерные модели волатильности, такие как модели обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичности (GARCH) и её обобщения.

Ниже приведен пример временного ряда, в котором крайне затруднительно подобрать подходящую ARIMA модель.

Пример. Для недельных данных приращения денежной массы в США с 1985-01-07 по 2014-09-29 приведем результаты ACF, PACF для $\Delta \ln M2$

Лаг	ACF		PACF		Q-стат.	[p-значение]
1	0.0050		0.0050		0.0395	[0.842]
2	-0.4408	***	-0.4409	***	302.2031	[0.000]
3	-0.3280	***	-0.4004	***	469.5962	[0.000]
4	0.5378	***	0.4305	***	919.8586	[0.000]
5	0.2577	***	0.0502	**	1023.3146	[0.000]
6	-0.4158	***	-0.3632	***	1292.8825	[0.000]
7	-0.4141	***	-0.0611	**	1560.3986	[0.000]
8	0.2356	***	-0.0382		1647.0478	[0.000]
9	0.5604	***	0.2434	***	2137.5858	[0.000]
10	-0.2955	***	-0.3043	***	2274.0333	[0.000]

3.2. Обобщенные модели авторегрессионной гетероскедастичности

Самый большой класс моделей для изменяющейся во времени волатильности представлен классом моделей авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH), первоначально введенным в статье [21]. Эти модели описывают условную дисперсию члена ошибки u_t данного временного ряда.

Ранее мы предполагали, что в модели ARMA(p;q) u_t - это белый шум, и не учитывали наличие зависимости в более высоких моментах, однако это важно, когда мы хотим моделировать риск.

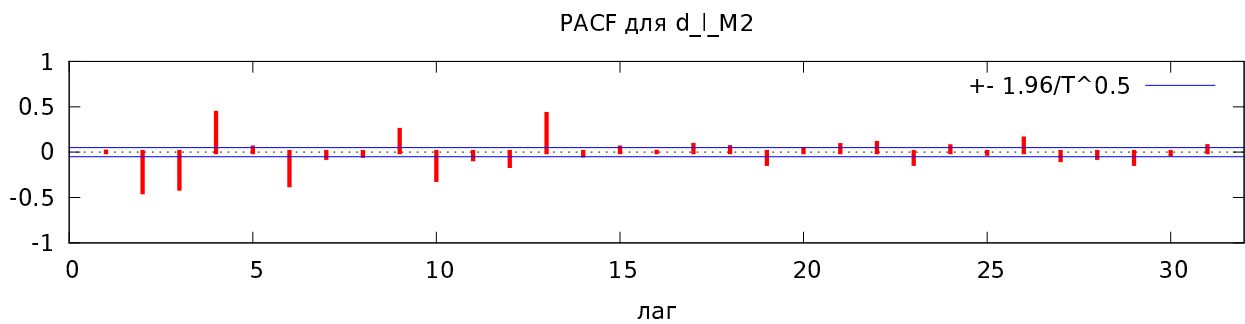
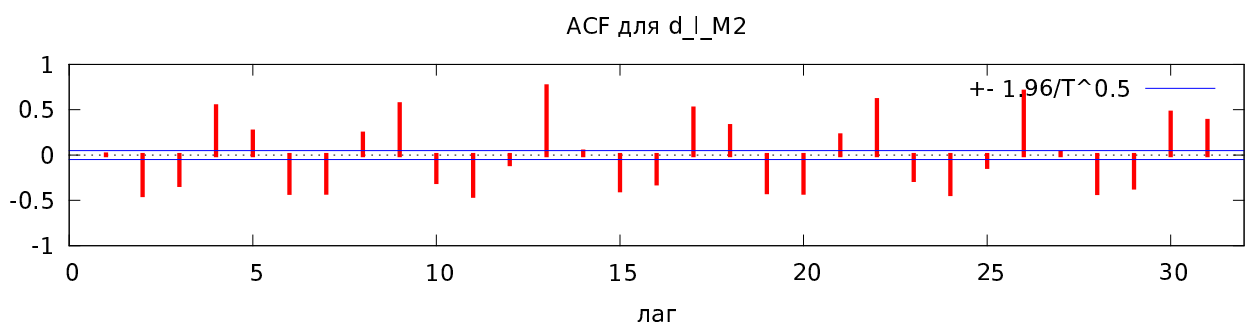
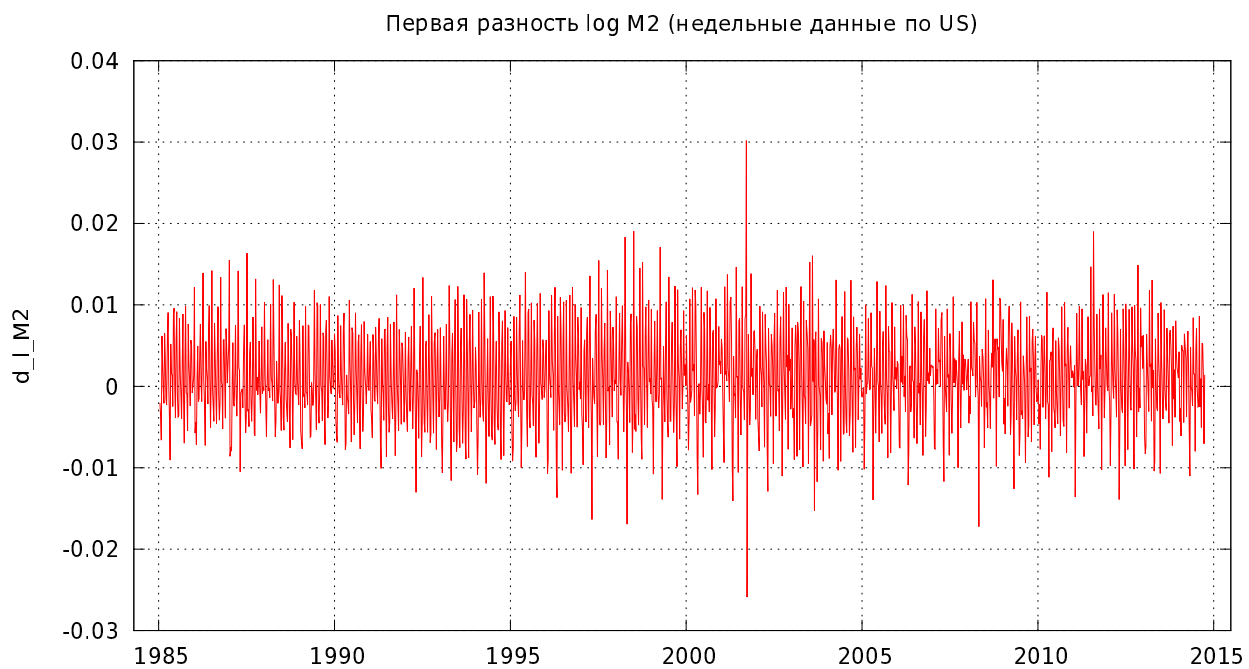


Рисунок 3.1. Пример ряда, где не удаётся подобрать подходящую ARIMA модель.

Подобно одномерным и многомерным моделям условного среднего, мы можем определить модели условной дисперсии процесса. В общем, мы считаем, что любая случайная величина Y_t может быть разложена как

$$Y_t = E[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] + u_t \quad (3.1)$$

где \mathcal{F}_{t-1} - информационное множество, состоящее из всей необходимой информации, доступной в момент времени $t - 1$. Вопрос, на который мы хотим ответить – как моделировать $\text{Var}[u_t | \mathcal{F}_{t-1}]$. До сих пор мы обычно предполагали, что ошибка гомоскедастична,

$$\text{Var}[u_t] = \text{Var}[u_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_u^2 \quad (3.2)$$

Модели типа ARCH ослабляют это предположение и предполагают, что ошибки могут быть разложены следующим образом:

$$u_t = z_t \sqrt{\sigma_t^2}, \quad (3.3)$$

где z_t - независимые и одинаково распределенные ошибки с нулевым средним и единичной дисперсией.

Функция σ_t^2 предполагается функцией прошлой информации $\sigma_t^2 \equiv \sigma_t^2(\mathcal{F}_{t-1})$, так что условная дисперсия (т. е. "волатильность") определяется как

$$\text{Var}[u_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t^2 \text{Var}[z_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t^2 \text{Var}[z_t] = \sigma_t^2(\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2.$$

Что говорит о зависимости от прошлых значений объясняющих переменных, то есть u_t условно гетероскедастичны. Безусловная дисперсия u_t может быть вычислена с использованием свойства разложения дисперсии:

$$\sigma_u^2 = \text{Var}[u_t] = E[\text{Var}[u_t | \mathcal{F}_{t-1}]] + \text{Var}[E[u_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = E[\sigma_t^2].$$

Так как $E[u_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ равна нулю, то безусловная дисперсия постоянна, если $\sigma_t^2(\mathcal{F}_{t-1})$ стационарна. Далее мы обсудим несколько спецификаций для эволюции процесса условной дисперсии σ_t^2 .

3.2.1. ARCH(1)-модель

Начнём с простейшей $ARCH(1)$ модели

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2.$$

Здесь предполагается, что $\omega > 0$ и $\alpha_1 \geq 0$ гарантирует положительность условной дисперсии σ_t^2 .

В модели $ARCH(1)$, условная дисперсия это функция, зависящая только от лагов квадратов ошибок/шоков, так что большой шок по абсолютному значению в периоде $t - 1$ приводит к большей дисперсии в периоде t . Эффект положительных и отрицательных шоков в этом случае одинаковый, то есть модель симметричная. Основные свойства процесса $ARCH(1)$ приведены ниже:

- (i) $u_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \nu_t$ при $\nu_t \equiv u_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2(z_t^2 - 1)$.
- (ii) u_t^2 стационарны, если $|\alpha_1| < 1$.
- (iii) $\sigma_u^2 = \text{Var}[u_t] = \frac{\omega}{1-\alpha_1}$.
- (iv) $u_t^2 = \sigma_u^2 + \alpha_1(u_{t-1}^2 - \sigma_u^2) + \nu_t \Leftrightarrow \sigma_t^2 = \sigma_u^2 + \alpha_1(u_{t-1}^2 - \sigma_u^2)$.
- (v) $E[u_t^4] = E[z_t^4]E[(\sigma_t^2)^2] \geq E[z_t^4]E[\sigma_t^2]^2 = E[z_t^4]E[u_t^2]^2$.
- (vi) $K_u = \frac{E[u_t^4]}{E[u_t^2]^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2} = \frac{6\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} + 3 > 3$ для $z_t \sim \text{i.i.d. } N(0,1)$ и $\alpha_1^2 \in [0, \frac{1}{3})$.

Свойство (i) показывает, что $ARCH(1)$ - процесс может быть записан как $AR(1)$ процесс с квадратом инноваций, где ν_t - мартингальная разностная последовательность. Динамика второго момента Y_t следует процессу $AR(1)$, что дает нам свойство (ii), которое гласит, что квадраты нововведений слабо стационарны всякий раз, когда $|\alpha| < 1$.

Свойство (iii) вычисляет безусловную дисперсию стационарного процесса u_t , которая положительна, если $\omega > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Свойство (iv) показывает, как процесс $ARCH(1)$ может моделировать кластеризацию

волатильности: за высокой волатильностью с большей вероятностью последует высокая волатильность, а за низкой - низкая.

Свойство (v) показывает, что эксцесс u_t всегда превышает эксцесс z_t , а свойство (vi) показывает, что эксцесс инновационного процесса для ARCH(1) модели больше, чем для нормального распределения. Это подтверждает, что класс модели ARCH может объяснить большой коэффициент эксцесса (тяжёлые хвосты), обычно обнаруживаемый в финансовых временных рядах.

3.2.2. ARCH(p)-модель

Простым расширением модели ARCH(1) является модель $ARCH(p)$, в которой текущая волатильность зависит от последних нововведений в квадрате p :

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 \\ &= \omega + \alpha_p^*(L) u_t^2,\end{aligned}$$

где

$$\alpha_p^*(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_p L^p.$$

Достаточными условиями для обеспечения положительности σ_t^2 являются $\omega > 0$ и $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$.

Из нашего предыдущего обсуждения следует, что процесс ARCH(p) обладает следующими свойствами:

- (i) $u_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 + \nu_t$ с $\nu_t \equiv u_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2(z_t^2 - 1)$, что эквивалентно $\alpha_p(L) u_t^2 = \omega + \nu_t$, где $(\alpha_p(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p)$.
- (ii) u_t^2 стационарен, если все корни уравнения $1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p = 0$ находятся вне единичной окружности.
- (iii) $\sigma_u^2 = \text{Var}[u_t] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p} = \frac{\omega}{\alpha_p(1)}$.
- (iv) $\sigma_t^2 = \sigma_u^2 + \alpha_p^*(L)(u_t^2 - \sigma_u^2)$.

- (v) $K_u > 3$ для $z_t \sim \text{iid } N(0,1)$ и некоторых ограничений параметров для существования четвертого момента u_t .

3.2.3. GARCH модели

Хотя процесс $\text{ARCH}(p)$ более гибкий, чем процесс $\text{ARCH}(1)$, он требует большого количества лагов для определения структуры зависимости, обычно встречающейся в финансовых временных рядах. Это приводит к тому, что нужно оценивать множество параметров.

Чтобы смоделировать условную гетероскедастичность более экономно, в работе [17] была предложена обобщенная модель ARCH , которая допускает более гибкую, но экономную спецификацию.

Процесс σ_t^2 называется процессом $\text{GARCH}(1, 1)$, если

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

где достаточными условиями для обеспечения положительности σ_t^2 являются $\omega > 0$, $\alpha_1 \geq 0$ и $\beta_1 \geq 0$. Условная дисперсия представляет собой средневзвешенное значение постоянной (долгосрочной) дисперсии, лагов квадратов шока и дисперсии. Веса трех оценок дисперсии управляют скоростью адаптации к новой информации и тем, как быстро дисперсия возвращается к своему долгосрочному среднему значению. Положительные и отрицательные шоки оказывают одинаковое влияние на дисперсию. Основные свойства процесса $\text{GARCH}(1,1)$ представлены ниже:

- (i) $u_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)u_{t-1}^2 - \beta_1 \nu_{t-1} + \nu_t$ с $\nu_t \equiv u_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2(z_t^2 - 1)$;
- (ii) u_t^2 стационарны, если $|\alpha_1 + \beta_1| < 1$;
- (iii) $\sigma_u^2 = \text{Var}[u_t] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$;
- (iv) $u_t^2 = \sigma_u^2 + (\alpha_1 + \beta_1)(u_{t-1}^2 - \sigma_u^2) - \beta_1 \nu_{t-1} + \nu_t$;
- (v) $\sigma_t^2 = \sigma_u^2 + \alpha_1(u_{t-1}^2 - \sigma_u^2) + \beta_1(\sigma_{t-1}^2 - \sigma_u^2)$;

$$(vi) \quad K_u = \frac{E[u_t^4]}{E[u_t^2]^2} = \frac{3(1-(\alpha_1+\beta_1))}{1-2\alpha_1^2-(\alpha_1+\beta_1)^2} = \frac{6\alpha_1^2}{1-2\alpha_1^2-(\alpha_1+\beta_1)^2} + 3 > 3 \text{ для } z_t \sim \text{iid } N(0,1) \text{ и } 2\alpha_1^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^2 < 1;$$

$$(vii) \quad \sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} \omega + \alpha_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} u_{t-i}^2, \text{ если } \beta_1 < 1.$$

(viii) В предположении стационарности и при $2\alpha_1^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^2 < 1$ (существование четвертого момента u_t), автокорреляция u_t^2 определяется следующим образом:

$$\rho_1 = \alpha_1 + \frac{\alpha_1^2 \beta_1}{1-2\alpha_1 \beta_1 - \beta_1^2}$$

$$\rho_k = (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \rho_1 \text{ for } k = 2, 3, \dots$$

В противном случае, если $2\alpha_1^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^2 \geq 1$ можно получить следующие приближения:

$$\rho_1 \approx \alpha_1 + \frac{\beta_1}{3}$$

$$\rho_k \approx (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \rho_1 \text{ for } k = 2, 3, \dots$$

Свойство (i) показывает, что модель GARCH(1,1) может быть записана как модель ARMA(1,1) для квадратов ошибок, которые можно использовать для получения условий стационарности. Свойство (ii) показывает, при каких условиях процесс u_t^2 является слабо стационарным, а свойство (iii) определяет безусловную дисперсию u_t . Свойство (iv) дает представление GARCH с использованием u_t^2 , а свойство (v) показывает, что подход GARCH(1,1) может моделировать кластеризацию волатильности. Свойство (vi) подтверждает, что процесс GARCH(1,1) может моделировать избыточный эксцесс, то есть он имеет более толстые хвосты. Свойство (vii) - это ARCH(∞) представление модели GARCH(1,1).

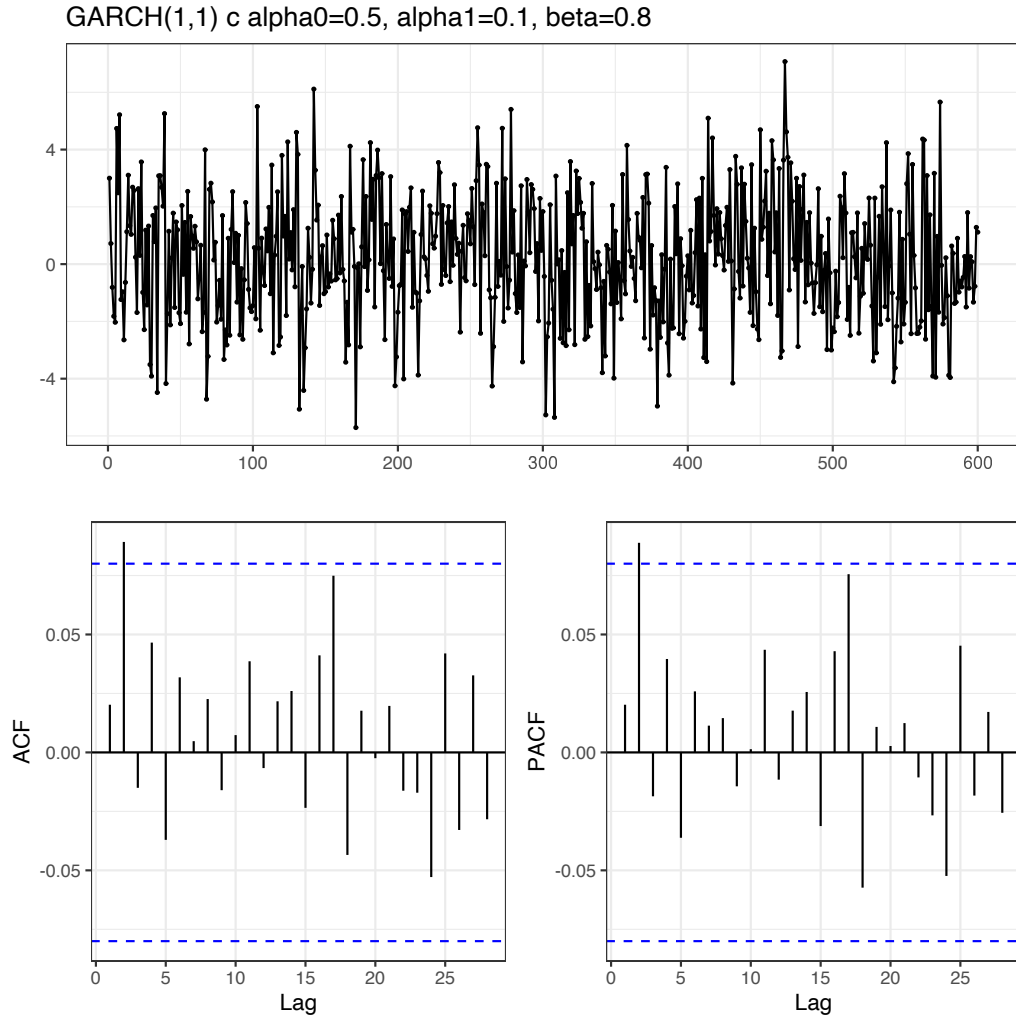


Рисунок 3.2. Пример ряда GARCH(1,1).

Подобно моделям ARCH, расширение общего процесса GARCH(p, q) выглядит так:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2 \\ &= \omega + \alpha_p^*(L) u_t^2 + \beta_q^*(L) \sigma_t^2,\end{aligned}$$

где $\alpha_p^*(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_p L^p$ и $\beta_q^*(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_q L^q$ являются лаговыми полиномами порядков p и q соответственно.

Достаточные условия положительности σ_t^2 - это $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$ и $\beta_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, q$.

Основные свойства процесса GARCH(p, q) представлены ниже:

(i) $u_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \nu_{t-i} + \nu_t$, с $\alpha_i \equiv 0$ для $i > q$ и $\beta_i \equiv 0$ для $i > p$, и $m = \max(p, q)$ и $\nu_t \equiv u_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2(z_t^2 - 1)$.

(ii) u_t^2 стационарны, если все корни $1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_m z^m - \beta_1 z - \beta_2 z^2 - \dots - \beta_m z^m = 0$ лежат вне единичной окружности.

(iii) $\sigma_u^2 = \text{Var}[u_t] = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{i=1}^q \beta_i}$.

(iv) $u_t^2 = \sigma_u^2 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i)(u_{t-i}^2 - \sigma_u^2) - \sum_{i=1}^q \beta_i \nu_{t-i} + \nu_t$.

(v) $\sigma_t^2 = \sigma_u^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i(u_{t-i}^2 - \sigma_u^2) + \sum_{i=1}^q \beta_i(\sigma_{t-i}^2 - \sigma_u^2)$.

(vi) $K_u > 3$ для $z_t \sim \text{iid } N(0,1)$ и некоторых параметрических ограничениях, что обеспечивает существование четвертого момента u_t .

(vii) $\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1 - \beta_q^*(1)} + \frac{\alpha_p^*(L)}{1 - \beta_q^*(L)} u_t^2 = \frac{\omega}{1 - \beta_q^*(1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i u_{t-i}^2$, если корни $1 - \beta_q^*(z) = 0$ лежат вне единичной окружности и δ_i обозначает функцию от α_i и β_i .

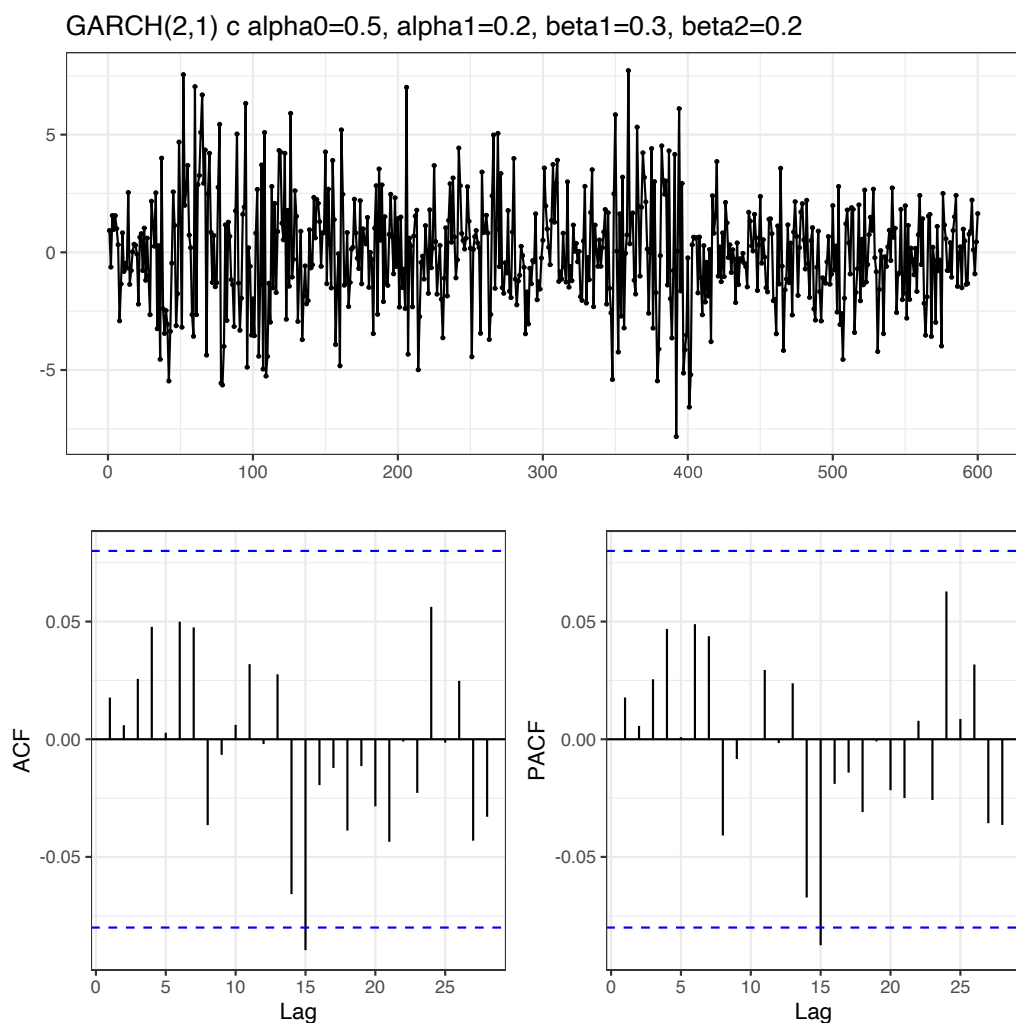


Рисунок 3.3. Пример ряда GARCH(2,1).

Модель GARCH(1,1) имела огромный успех в эмпирических исследованиях по финансам в последние десятилетия, и она по-прежнему представляет собой важную модель волатильности, которую часто используют в качестве эталона. Тем не менее, можно выделить некоторые важные недостатки:

- В моделях GARCH *положительные и отрицательные шоки одинаково влияют на условные дисперсии*. Однако на практике мы наблюдаем, что условная волатильность по-разному реагирует на положительные и отрицательные эффекты. Для учета этого были разработаны нелинейные GARCH модели (подробнее ниже).
- *Чтобы изучить поведение хвоста u_t , мы должны убедиться в*

существовании четвертого момента u_t . Условия, необходимые для обеспечения этого существования, могут быть очень ограниченными, например, в модели ARCH(1) $\alpha_1^2 \in [0, \frac{1}{3})$.

- В предыдущих моделях автокорреляционная функция экспоненциально убывает, но финансовые данные показывают, что гиперболическое затухание встречается чаще: такое высокое постоянство может быть достигнуто только с помощью сильно параметризованных GARCH моделей. Дробно интегрированные или интегрированные модели GARCH - это низкопараметрическое решение этой проблемы (подробнее ниже).
- Высокая стойкость волатильности обычно исчезает, если в спецификацию дисперсии включены реальные причины: макроэкономические сообщения / объявления компаний, другие волатильности рынка и т. д.

3.3. Ассиметричные и нелинейные модели GARCH

Несколько расширений моделей GARCH были предложены для моделирования так называемого "эффекта леввериджа" (см. [15]) и высокой устойчивости условной дисперсии. Ниже мы рассмотрим некоторые из наиболее распространенных вариантов.

3.3.1. Экспоненциальная модель GARCH

Предыдущие модели GARCH не могли объяснить отрицательную корреляцию между доходностью акций и изменением волатильности их доходности. Это можно сделать, если условная дисперсия выражается как асимметричная функция от u_{t-j} , но, учитывая, что модели GARCH являются функциями квадрата данных, несколько крупных наблюдений могут сильно повлиять на параметры модели.

Нельсон [30] предложил экспоненциальную GARCH(p,q) модель¹, где условная дисперсия зависит как от размера, так и от знака лагированных остатков:

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) = & \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) \\ & + \sum_{i=1}^q \alpha_i [\phi z_{t-i} + \psi (|z_{t-i}| - \mathbf{E} |z_{t-i}|)], \end{aligned}$$

где $\alpha_1 \equiv 1$, $\mathbf{E} |z_t| = (2/\pi)^{1/2}$, если $z_t \sim NID(0, 1)$. Параметры ω , β_i , α_i не ограничиваются как неотрицательные, что упрощает оценку модели.

Определим

$$g(z_t) = \phi z_t + \psi [|z_t| - \mathbf{E} |z_t|].$$

Мы видим, что $\{g(z_t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ является i.i.d. случайной последовательностью по построению.

В диапазоне $0 < z_t < \infty$, $g(z_t)$ линейна по z_t с наклоном $\phi + \psi$, а в диапазоне $-\infty < z_t \leq 0$, $g(z_t)$ линейна с наклоном $\phi - \psi$. Член $\psi [|z_t| - \mathbf{E} |z_t|]$ — это так называемый *размерный эффект*.

Если $\psi > 0$ и $\phi = 0$, нововведение в $\ln(\sigma_{t+1}^2)$ является положительным (отрицательным), когда размер z_t больше (меньше), чем его ожидаемое значение. Если $\psi = 0$ и $\phi < 0$, нововведение в условной дисперсии будет положительным (отрицательным), когда инновации для доходностей отрицательны (положительны). Таким образом, эффект кредитного плеча можно учесть, если $\alpha_i > 0$ и $\phi < 0$.

Сильная стационарность $\ln(\sigma_t^2)$ требует, чтобы все корни многочлена $[1 - \sum_{i=1}^p \beta_i x^i]$ лежали за пределами единичной окружности.

Замечание. Обратите внимание, что сильная стационарность не обязательно подразумевает слабую стационарность.

¹EGARCH(p,q).

3.3.2. Пороговая модель GARCH

Общая форма пороговой модели GARCH² модели имеет вид:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q (\alpha_i u_{t-i}^2 + \gamma_i u_{t-i}^2 I_{[u_{t-i} < 0]}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2, \quad (3.4)$$

где $I_{[\cdot]}$ – индикаторная функция. В этой модели хорошие новости $u_{t-i} \geq 0$ и плохие новости $u_{t-i} < 0$ имеют разное влияние на условную дисперсию. Хорошие новости влияют на α_i , а плохие новости влияют на $\alpha_i + \gamma_i$. Если $\gamma_i > 0$, плохие новости увеличивают волатильность, и мы говорим, что существует эффект кредитного леввериджа для i -того порядка. Если $\gamma_i \neq 0$, то влияние новости асимметрично.

Обратите внимание, что модель GARCH может интерпретироваться как частный случай модели TGARCH, когда пороговый член равен нулю.

3.3.3. Интегрированная модель GARCH

Высокая степень устойчивости к волатильности привела к идее рассматривать волатильность как интегрированный процесс, и поэтому была разработана интегрированная модель GARCH³.

Рассмотрим следующий GARCH(p, q) процесс

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2,$$

где $\omega \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$ и $\beta_i \geq 0$ для всех i и уравнение $1 - \alpha(x) - \beta(x) = 0$ имеет $d > 0$ единичных корней, а $\max\{p, q\} - d$ корней лежат вне единичной окружности. Этот процесс называют

- i) интегрированным относительно дисперсии порядка d , если $\omega = 0$;
- ii) интегрированным относительно дисперсии порядка d с трендом, если $\omega > 0$.

²TGARCH(p, q).

³IGARCH.

Интегрированные модели GARCH(p,q) обладают свойством «устойчивой дисперсии», что означает, что текущая информация остается важной для прогнозирования условных дисперсий на всех горизонтах.

Интегрированная модель GARCH(p, q) получается, когда

$$\alpha(1) + \beta(1) = 1.$$

Например, IGARCH(1,1) модель может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} u_t &= z_t \sqrt{\sigma_t^2}, \\ \sigma_t^2 &= \omega + (1 - \beta)u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2. \end{aligned}$$

Эти модели позволяют экономно моделировать высокую устойчивость волатильности и с тех пор стали одними из наиболее широко используемых практиками моделей. Модель RiskMetrics, разработанная Морганом (J.P. Morgan), представляет собой модель IGARCH(1,1) с $\omega = 0$ и $\beta = 0.94$ (подробности можно посмотреть на веб-сайте RiskMetrics Group).

3.4. Кривая воздействия новостей

Мы уже обсуждали, что новости, как правило, оказывают асимметричное влияние на волатильность, а преимущество асимметричных моделей GARCH заключается в том, что они позволяют выявить различные влияния благоприятных и плохих новостей на будущую волатильность. *Кривая воздействия новостей*⁴ отражает влияние прошлых шоков доходности на ее текущую волатильность, посредством использования определенной модели волатильности.

Для заданной информации на момент $t - 2$ и раньше, можно исследовать подразумеваемую взаимосвязь между условной дисперсией в момент времени t и шоковым членом в момент времени $t - 1$, а все лагированные условные дисперсии оцениваются на уровне безусловной дисперсии.

⁴News Impact Curve.

Для модели GARCH кривая центрирована в $u_{t-1} = 0$. Например, для модели GARCH(1,1) ($\sigma_t^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$), кривая воздействия новостей:

$$\sigma_t^2 = A + \alpha u_{t-1}^2, \quad \text{где} \quad A = \omega + \beta \sigma^2.$$

В случае EGARCH(1,1) модель будет иметь вид:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \phi z_{t-1} + \psi (|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|),$$

кривая достигает своего минимума в точке $u_{t-1} = 0$ и экспоненциально растет в обоих направлениях, но с разными параметрами (Rossi, 2010):

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} A \exp \left[\frac{\phi + \psi}{\sigma} u_{t-1} \right] & \text{для } u_{t-1} > 0, \\ A \exp \left[\frac{\phi - \psi}{\sigma} u_{t-1} \right] & \text{для } u_{t-1} < 0, \end{cases}$$

где $A = \sigma^{2\beta} \exp \left[\omega - \psi \sqrt{2/\pi} \right]$, $\phi < 0$, $\psi + \phi > 0$.

В отличие от линейной модели GARCH, модель EGARCH позволяет благоприятным и плохим новостям по-разному влиять на волатильность. Кроме того, модель EGARCH позволяет оценить "размерный эффект" так, что важные новости могут оказывать большее влияние на волатильность по сравнению с обычной моделью GARCH.

Для модели TGARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \gamma u_{t-1}^2 \text{dir0o}_{[u_{t-1} < 0]} + \beta \sigma_{t-1}^2$$

кривая воздействия новостей задается следующим образом

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} \omega + \beta \sigma^2 + \alpha u_{t-1}^2 & \text{если } u_{t-1} > 0 \\ \omega + \beta \sigma^2 + (\alpha + \gamma) u_{t-1}^2 & \text{если } u_{t-1} < 0. \end{cases}$$

Различия между кривыми рассмотренных моделей GARCH позволяют по-разному подходить к выбору портфеля и ценообразованию активов.

3.5. Дробно интегрированные модели

Основной мотивацией для использования таких моделей является то, что распространение шоков в частично интегрированных процессах $I(d)$ происходит с медленной гиперболической скоростью распада, в отличие от экспоненциального распада, связанного со стационарным и обратимым классом процессов ARMA. Учитывая высокую степень устойчивости шоков к процессу условной дисперсии, было предложено несколько частично интегрированных моделей для моделирования этих долгосрочных зависимостей условной дисперсии.

Для вычисления дробно интегрированной модели необходимо ввести понятие оператора дробного дифференцирования, который может быть вычислен с помощью разложения в ряд Тейлора-Маклорена $z = 0$:

$$(1 - z)^d = 1 - dL + \frac{d(d-1)}{2!}L^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-1)^j z^j$$

где

$$\binom{d}{j} = \frac{d!}{(d-j)!j!}$$

3.5.1. Модели ARFIMA

Рассмотрим модель ARFIMA(k, d, l)⁵ для дискретного вещественного процесса $\{Y_t\}$. Такая модель имеет вид

$$a(L)(1 - L)^d Y_t = b(L)u_t,$$

где $a(L)$ и $b(L)$ являются полиномами от L порядков k и l , соответственно, а $\{u_t\}$ – серийно некоррелированный процесс с нулевым средним.

Можно показать, что если $\text{Var}(u_t) < \infty$ и $-0.5 < d < 0.5$, процесс $\{y_t\}$ является слабо стационарным, обратимым и единственным образом представим в виде скользящего среднего и авторегрессии бесконечных порядков. Если $d > 0$ процесс обладает длинной памятью.

⁵The AutoRegressive, Fractionally Integrated, Moving Average models

Процесс, удовлетворяющий этим свойствам, имеет автокорреляционную функцию, показывающую гиперболический спад. Это отличается от ARMA, GARCH и других процессов, которые имеют экспоненциальный спад.

Замечание. Модель ARFIMA может разделять краткосрочную и долгосрочную динамику $\{Y_t\}$, где первая смоделирована с помощью обычных лаговых многочленов ARMA, $a(L)$ и $b(L)$, в то время как последняя по параметру дробной интегрированности d .

3.5.2. Модели FIGARCH

Модель FIGARCH⁶ представляет интерес, так как для неё свойственна медленная гиперболическая скорость убывания лагированных квадратов инноваций в условной дисперсии. Эта модель предлагает альтернативу подходу, рассматривающему изменения параметров GARCH-модели как главную причину медленного убывания автокорреляций.

Если мы выражаем процесс GARCH(p, q) как процесс ARMA(m, p) для u_t^2 - аналогично тому, что мы делали на предыдущих страницах – и используем лаговые многочлены, то получим:

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]u_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]\nu_t, \quad \nu_t = \varepsilon - \sigma_t^2,$$

где $m = \max(p, q)$. Из этого сразу следует, что класс моделей IGARCH задается следующим образом:

$$\phi(L)(1 - L)u_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]\nu_t,$$

где лаговый многочлен для краткосрочной авторегрессионной динамики $\phi(L) \equiv [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)^{-1}$ имеет порядок $m - 1$. Модель FIGARCH получается путем замены оператора $(1 - L)$ оператором дробного дифференцирования $(1 - L)^d$:

$$\phi(L)(1 - L)^d u_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]\nu_t,$$

⁶Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models.

где $0 < d < 1$, и все корни $\phi(L)$ и $(1 - \beta(L))$ лежат вне единичного круга. Откуда следует, что процесс для u_t^2 является ARFIMA($m - 1, d, p$):

$$(1 - L)^d \left[\frac{1 - \alpha(L) - \beta(L)}{1 - L} \right] u_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]\nu_t.$$

3.6. Оценка моделей GARCH

Оценка вектора параметров в моделях ARCH получается путём максимизации функции правдоподобия.

Наиболее часто применяемое распределение для оценки GARCH моделей – нормальное, но существует большое количество финансовой литературы, которая показала, что финансовые доходы имеют положительный эксцесс и являются асимметричными. Одно из распределений, которое может быть использовано для моделирования, как эксцесса, так и асимметрии – это обобщенное T-распределение (или асимметричное t-распределение). Несмотря на другие предложенные обобщения, выбирается это из-за его простоты и его прошлых успешных результатов в моделировании экономических переменных.

Как и в случае с моделями ARMA(p, q), неотъемлемой частью выбора модели являются диагностические проверки модели. Если мы хотим проверить наличие ARCH эффектов, можно воспользоваться тестом множителей Лагранжа (LM-тест). Нулевая гипотеза данного теста состоит в отсутствии ARCH эффектов. Для остатков \hat{u}_t строим вспомогательную регрессию:

$$\hat{u}_t^2 = \zeta + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \hat{u}_{t-m}^2 + e_t \quad (3.5)$$

Тестовая статистика множителя Лагранжа задаётся как $LM = TR^2$, где R^2 – это центрированный R-квадрат из регрессии (3.5). Статистика асимптотически имеет хи-квадрат распределение с m степенями свободы при нулевой гипотезе.

Необходимо также проверить остатки на автокорреляцию. Согласно правильной спецификации GARCH, квадратные стандартизированные остатки не должны демонстрировать никакой автокорреляции, что

можно проверить, непосредственно обратившись к значимости автокорреляционной функции \hat{z}_t^2 или более точно, применив тест Льюинга-Бокса к \hat{z}_t^2 . Более того, если мы предполагаем, что \hat{z}_t является стандартной нормальной величиной, то мы можем использовать критерии согласия, чтобы проверить, насколько хорошо \hat{z}_t соответствует этому предположению. Например, можно воспользоваться тестами Колмогорова-Смирнова, Харке-Бера или другими.

Напомним, что у каждой модели волатильности есть своя кривая воздействия новостей, например, у модели GARCH(p, q) она симметрична и центрирована в $u_{t-1} = 0$, так что положительные и отрицательные шоки доходности одинаково влияют на волатильность.

В этом случае, модель GARCH может занижать величину волатильности в случае отрицательных шоков и завышать ее в случае положительных шоков. Более того, стандартная модель GARCH не учитывает возможный "размерный эффект" так что она может недооценивать волатильность после большого возвратного шока и переоценивать волатильность после малого возвратного шока. В этой связи можно рассмотреть три диагностических теста для моделей волатильности:

- *тест на смещение для шоков разного знака*, который исследует влияние как положительных, так и отрицательных шоков доходности на волатильность.
- *тест на смещение для размера отрицательных шоков*, который фокусируется на различных эффектах, которые большие и малые отрицательные шоки оказывают на волатильность.
- *тест на смещение для размера положительных шоков*, который фокусируется на различном влиянии больших и малых положительных шоков на волатильность, не предсказываемые моделью для волатильности.

Тесты позволяют понять, можно ли прогнозировать квадрат нормализованных остатков некоторыми переменными, наблюдаемыми в прошлом и не включенными в используемую модель волатильности. Если да, то модель для дисперсии неверно специфицирована.

Глава 4

Модель векторной авторегрессии

Динамика сложных явлений в экономике и финансах редко может быть описана с использованием одного временного ряда. В этой главе обратимся к многомерным временным рядам, однако всегда следует учитывать, что многие временные ряды изменяются синхронно в определенной взаимозависимости. Поэтому теперь мы перейдём к подходам и методам совместного моделирования двух или более временных рядов.

4.1. Стационарная VAR-модель

Симс в своей работе [31] показал, что VAR-модели могут служить гибким и интерпретируемым инструментом анализа экономических временных рядов.

Начнём с рассмотрения двух рядов x_t и y_t . Модель векторной авто-

регрессии VAR(p) порядка p имеет вид

$$\begin{aligned}x_t &= \mu_1 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{t-j} + \sum_{j=1}^p \gamma_j y_{t-j} + u_t, \\y_t &= \mu_2 + \sum_{j=1}^p \delta_j x_{t-j} + \sum_{j=1}^p \theta_j y_{t-j} + v_t.\end{aligned}$$

Обратите внимание, что в модели VAR все факторы рассматриваются как эндогенные¹.

Обозначим

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} \beta_j & \gamma_j \\ \delta_j & \theta_j \end{pmatrix}.$$

Тогда модель VAR(p) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=1}^p A_j \mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{u}_t. \quad (4.1)$$

Общая модель векторной VAR(p) имеет вид (4.1), где

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ \vdots \\ x_{kt} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{kt} \end{pmatrix}.$$

и A_1, \dots, A_p — $k \times k$ матрицы.

Обозначим

$$A(z) = I - zA_1 - \dots - z^p A_p$$

где I — единичная $k \times k$ матрица.

Условием стационарности является то, что все корни уравнения

$$\det A(z) = 0^2$$

¹Всё влияет на всё!

² $\det A(z)$ — многочлен степени не выше $p + k$.

по модулю больше единицы, включая комплексные.

Для простоты рассмотрим модель VAR(1). Её спецификация выглядит следующим образом $\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t$. Собственные значения – это корни характеристического многочлена $\det(A - \lambda I) = 0$.

Очевидно, что если $\det A \neq 0$, то $\det A(z) = 0 \iff \lambda = 1/z$ – собственные значения A . Откуда делаем вывод, что модель VAR(1) стационарна тогда и только тогда, когда все собственные значения A по модулю меньше 1.

Пример. Рассмотрим модель с матрицей (см.рис.)

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

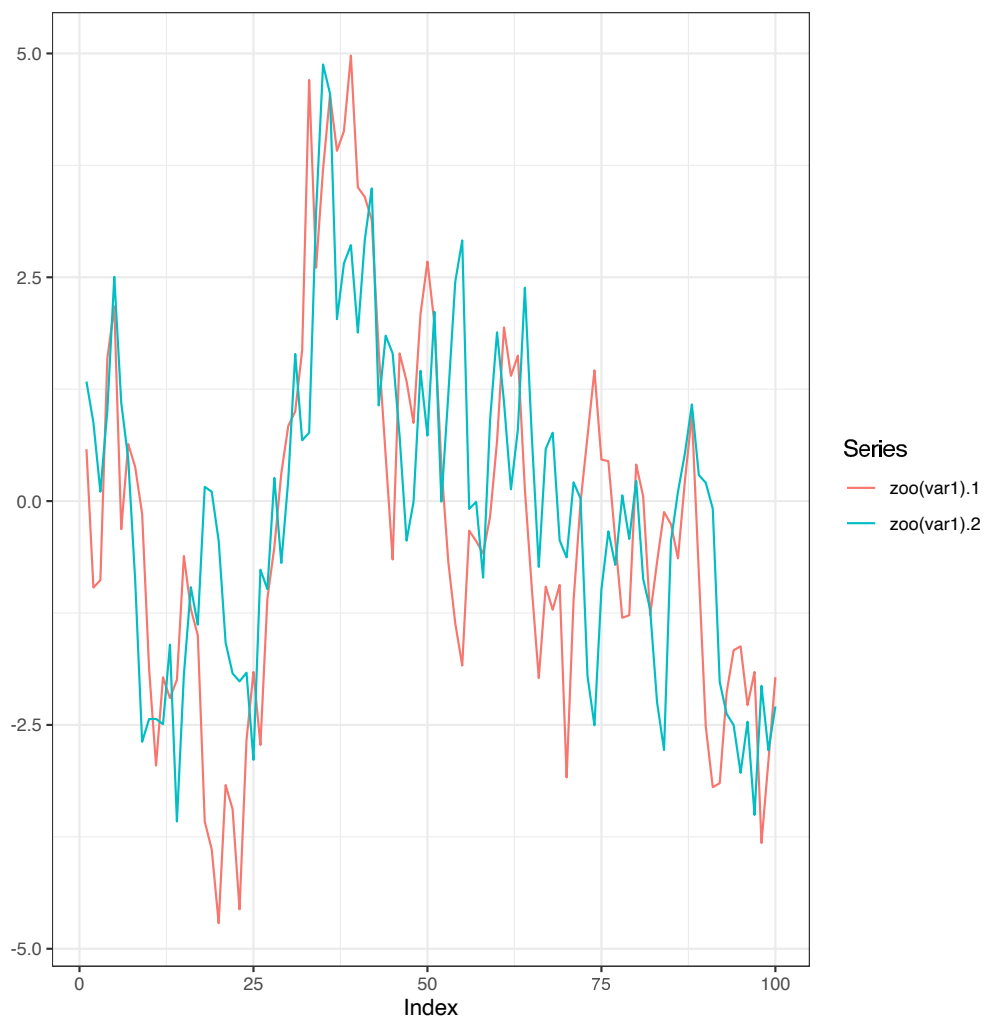


Рисунок 4.1. Графики рядов для VAR(1)-модели с матрицей A .

Замечание. Коэффициенты VAR-модели в общем случае **не имеют экономической интерпретации**. Сама VAR-модель часто рассматривается как привидённая форма некоторой структурной системы одновременных уравнений.

Стандартные условия на вектор шоков (ошибку) для стационарной модели VAR выглядят так:

- отсутствие серийной корреляции

$$\text{cov}(u_{it}, u_{js}) = 0, \quad t \neq s,$$

- допускаются кросс-корреляции

$$\text{cov}(u_{it}, u_{jt}) \neq 0, \quad i \neq j.$$

Приведём алгоритм оценки и тестирования стационарной модели VAR.

1. Порядок модели: многомерные аналоги информационных критериев Akaike, Schwarz, Hannan-Quinn.
2. Метод оценивания: независимо оцениваем каждое уравнение VAR-модели, используя метод наименьших квадратов.
3. Статистические выводы: стандартные МНК-инференции, т.е. используем стандартные тестовые статистики.
4. Проверка “адекватности”: тест Льюинга-Бокса на серийную корреляцию для каждого уравнения VAR-модели.

4.1.1. Функции импульсного отклика

Так как коэффициенты VAR-модели не имеют экономической интерпретации, то, как правило, рассматривают функции импульсного отклика IRF^3 для описание того, как переменные реагируют на экзогенный

³Impulse response function.

шок. Более точно, как влияние на все факторы экзогенного шока в одно стандартное отклонение распространяется во времени. При этом Факторы нужно упорядочить «по степени возрастания эндогенности».

Формально функция импульсного отклика — это матричная функция от $h = 0, 1, 2, \dots$, которая задается так $\frac{\partial \mathbf{x}_{t+h}}{\partial \mathbf{u}_t} = \left[\frac{\partial x_{i,t+h}}{\partial u_{j,t}} \right]_{p \times p}$.

Таким образом, (i, j) -элемент этой матричной функции отражает реакцию переменной x_i на шок в переменной x_j . А именно $\frac{\partial x_{i,t+h}}{\partial u_{j,t}}$ — это реакция значения i -й переменной в момент времени $t + h$ на единичное изменение шока j -й переменной в момент времени t . Функция импульсного отклика переменной x_i на шок переменной x_j — это последовательность $\frac{\partial x_{i,t}}{\partial u_{j,t}}, \frac{\partial x_{i,t+1}}{\partial u_{j,t}}, \dots, \frac{\partial x_{i,t+h}}{\partial u_{j,t}}, \dots$.

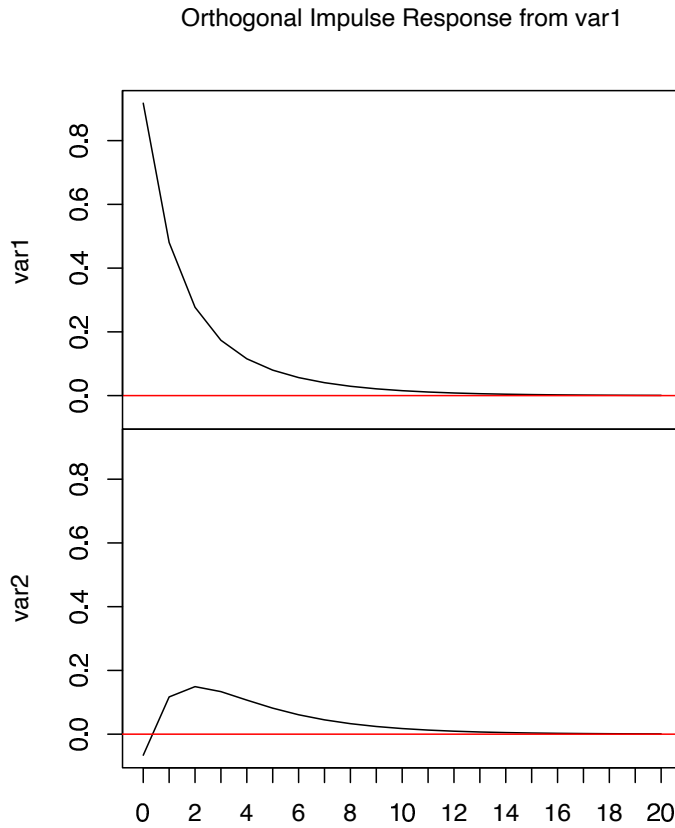


Рисунок 4.2. Функции импульсного отклика первой переменной.

Если u_t коррелированы, то мы не можем рассуждать о рассматриваемых шоках как об изолированных, поскольку в силу корреляции будет наблюдаться мгновенное воздействие на все другие элементы вектора. Поэтому, с учетом этих единовременных эффектов, рассматриваются ортогонализированные функции импульсного отклика, которые вычисляются в пакетах.

Пример. Для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

графики импульсных откликов каждой переменной приведены на рисунках 4.2 и 4.3.

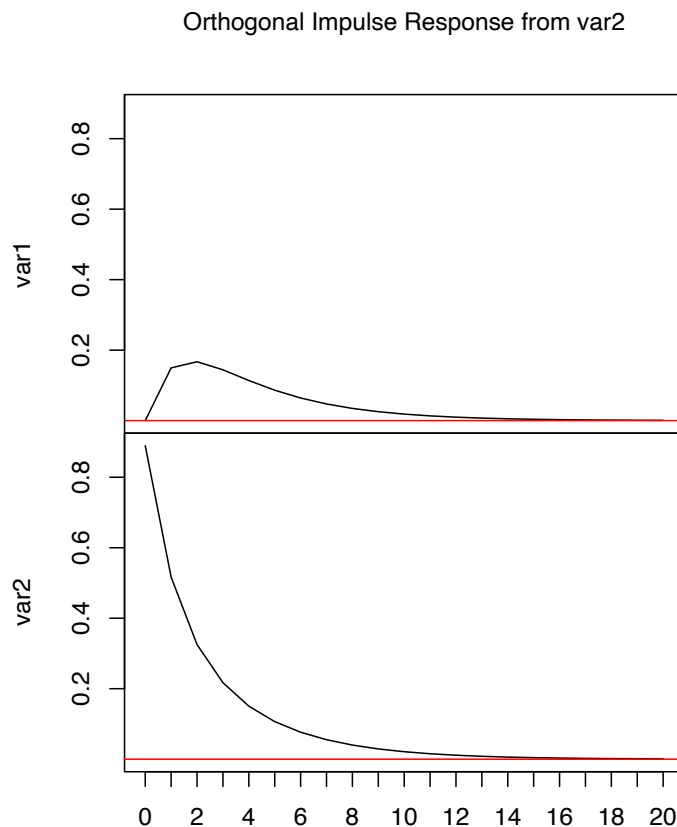


Рисунок 4.3. Функции импульсного отклика второй переменной.

4.1.2. Причинность по Гренджеру

Одним из важнейших аспектов оценивания VAR модели является возможность протестировать изменения каких факторов предшествуют изменениям других. При помощи эмпирического анализа весьма сложно установить те или иные эффекты воздействий. Даже при сильной корреляционной зависимости между переменными, в отсутствие дополнительной информации, мы не можем говорить о причинах воздействия этих переменных друг на друг. Иногда может помочь эконометрическая теория, но, к сожалению, теория не всегда дает однозначный ответ: в таких случаях используется понятие причинности, которое дает возможность идентифицировать влияние тех или иных переменных, основываясь только на статистических результатах.

Определение причинности будет строиться на следующем принципе: причина всегда предшествует следствию. Другими словами, если переменная X влияет на переменную Y , то это означает, что Y меняется либо мгновенно, либо через короткое время после изменения X . То есть сначала происходит изменение X , и только после этого мы наблюдаем его эффект, т. е. изменение Y . И наоборот, если X не является причиной изменения Y , то изменения X не влияют на будущие значения Y . Ниже мы обсудим такое понятие как причина *по Гренджеру*. Более подробно соответствующая тема раскрывается в книге [1].

Рассмотрим VAR(p) для двух факторов

$$\begin{aligned}x_t &= \mu_1 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{t-j} + \sum_{j=1}^p \gamma_j y_{t-j} + \text{error}, \\y_t &= \mu_2 + \sum_{j=1}^p \delta_j x_{t-j} + \sum_{j=1}^p \theta_j y_{t-j} + \text{error}.\end{aligned}$$

Тогда утверждение “ x не влияет на y ” означает $\delta_1 = \dots = \delta_p = 0$. Наоборот, высказывание “ y не влияет на x ” равносильно условию $\gamma_1 = \dots = \gamma_p = 0$.

Идея⁴ состоит в том, что изменение одного фактора **предшествуют**

⁴Clive Granger, Nobel Prize 2003.

изменениям другого фактора, но не наоборот.

Введём формальное определение для модели VAR(p).

Определение. Фактор x является *причиной по Гренджеру* для фактора y , если “ x влияет на y ”, но “ y не влияет на x ”, т.е. в модели VAR(p)

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \end{pmatrix} = 0 \quad \text{и при этом} \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_p \end{pmatrix} \neq 0.$$

Замечание. Причинность по Гренджеру не означает наличие причинно-следственной связи! Но отсутствие причинности по Гренджеру подтверждает отсутствие причинно-следственной связи.

Тест на причинность по Гренджеру состоит в том, что для модели VAR(p):

$$\begin{aligned} x_t &= \mu_1 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{t-j} + \sum_{j=1}^p \gamma_j y_{t-j} + \text{error}, \\ y_t &= \mu_2 + \sum_{j=1}^p \delta_j x_{t-j} + \sum_{j=1}^p \theta_j y_{t-j} + \text{error} \end{aligned}$$

тестируем гипотезы

$$H'_0 : \gamma_1 = \cdots = \gamma_p = 0 \quad \text{и} \quad H''_0 : \delta_1 = \cdots = \delta_p = 0.$$

Вывод можно сформулировать так: x есть **причина по Гренджеру** для y , если H'_0 не отвергается, а H''_0 отвергается. Наоборот, y есть **причина по Гренджеру** для x , если H''_0 не отвергается, а H'_0 отвергается.

4.2. Ряды с единичным корнем

4.2.1. VAR-модель с единичным корнем

Пусть $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt})'$ и рассмотрим модель VAR(p)

$$\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=1}^p A_j \mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{u}_t, \quad \mathbf{u}_t \sim \text{WN}(0, \Sigma_{\mathbf{u}})$$

и $A(z) = I - zA_1 - \cdots - z^p A_p$.

Определение. Будем говорить, что модель VAR имеет единичный корень, если уравнение $\det A(z) = 0$.

1. имеет корень $z = 1$ (возможно кратный);
2. все остальные корни по модулю больше 1.

Обозначим

$$\Pi = I - A_1 - \dots - A_p = A(1).$$

Тогда модель VAR можно записать в виде

$$\Delta \mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + \Pi \mathbf{x}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} B_j \Delta \mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{u}_t$$

и

- модель VAR с единичным корнем $\iff \det \Pi = 0$,
- если $\mathbf{x}_t \sim I(1)$, то

$$\begin{aligned} \Delta x_t \sim \text{VAR}(\text{finite}) &\iff \Pi = 0, \\ \Delta x_t \sim \text{VAR}(\infty) &\iff \Pi \neq 0. \end{aligned}$$

4.2.2. Коинтеграция и векторная модель коррекции ошибки

При анализе нестационарных временных рядов часто наблюдается проблема так называемой ложной регрессии. Для перехода к стационарным рядам обычно используют «детрендирование» или переход к последовательным разностям.

У этих подходов есть следующие недостатки:

- неприменимость по отношению к тем рядам, природа нестационарности которых заключается не только в наличии неслучайной составляющей;
- чувствительность к компонентам краткосрочного шума;

- тот факт, что это может приводить к смещенным оценкам в случае, если временные ряды имеют так называемое долгосрочное равновесие.

Именно поэтому появилась идея коинтеграции, которая подробно описана в работе [22]. Коинтеграция может быть интерпретирована как статистическое выражение для природы равновесного соотношения: например, x_{1t} и x_{2t} могут быть связаны некоторым долгосрочным соотношением, от которого эти временные ряды могут отклоняться в краткосрочной перспективе, но к которому должны возвращаться в долгосрочной перспективе. Например, обменные курсы и уровни цен, долгосрочные и краткосрочные процентные ставки, потребление и доходы.

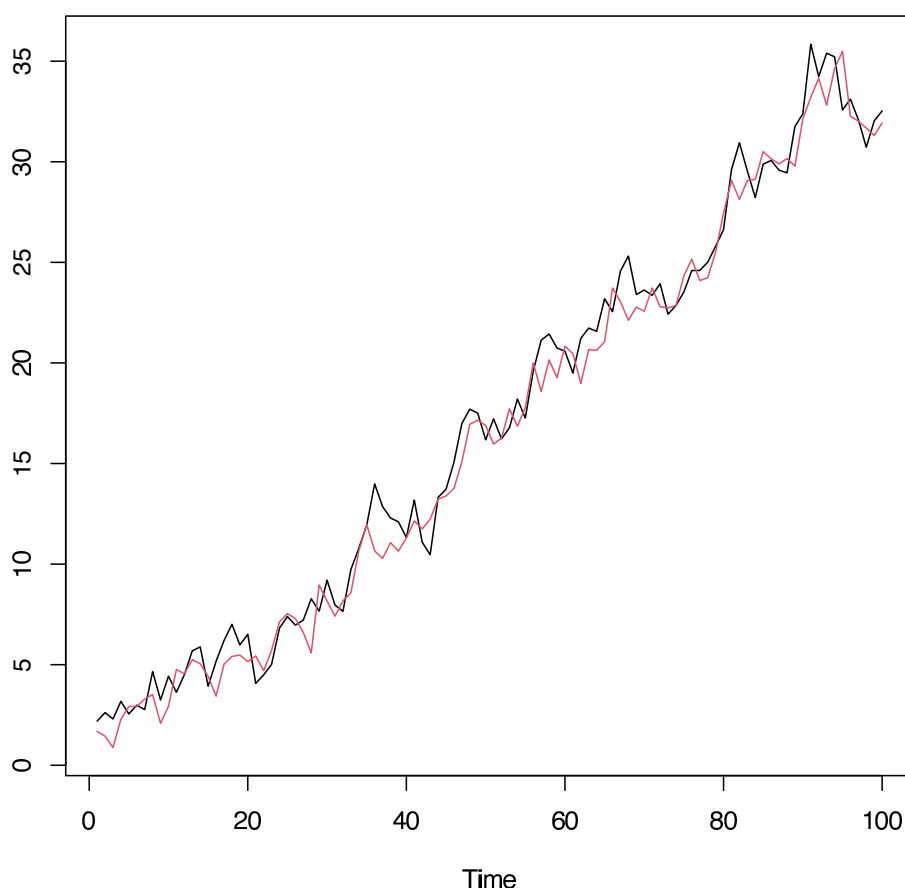


Рисунок 4.4. Пример коинтегрированных рядов.

Рассмотрим многомерный ряд $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt})' \sim \text{VAR}(p)$ с *единичным корнем*.

Определение. Ряды с единичными корнями x_{1t}, \dots, x_{kt} называются *коинтегрированными*, если существуют $(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \neq 0$ такие, что

$$\gamma_1 x_{1t} + \dots + \gamma_k x_{kt} = z_t \sim I(0).$$

Вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ называется *коинтеграционным вектором*.

Замечание. Понятие коинтеграции применимо *только к рядам с единичным корнем!* Идея коинтеграции состоит в том, что две или более переменных могут изменяться синхронно так, что их некоторая линейная комбинация является стационарным процессом.

Коинтеграционное соотношение удобнее записать по-другому

$$\gamma_1 x_{1t} + \dots + \gamma_k x_{kt} = \text{const} + \nu_t, \quad \nu_t \sim I(0), \quad E\nu_t = 0.$$

Коинтегрированность рядов означает, что для них существует *долгосрочное равновесие* (аналог регрессии)

$$\gamma_1 x_{1t} + \dots + \gamma_k x_{kt} = \text{const}$$

и ν_t – стационарное отклонение от долгосрочного равновесия.

Если $\gamma_1 \neq 0$, то коинтеграционное соотношение можно записать так

$$x_{1t} = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_k x_{kt} + \epsilon_t.$$

Замечание. Это не регрессия в обычном понимании, т.к. все факторы эндогенны.

Таким образом, коинтеграция – это наличие долгосрочного равновесия и “суррогат” регрессии для нестационарных рядов с единичным корнем. Непосредственно регрессия смысла не имеет из-за эндогенности всех факторов.

Для понимания приведём пример некоинтегрированных рядов. Два случайных блуждания

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + u_t, & u_t &\sim \text{WN}(0, \sigma_u^2), \\ y_t &= y_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \text{WN}(0, \sigma_v^2) \end{aligned}$$

и допускается $\text{cov}(u_t, v_t) \neq 0$.

Тогда для произвольных γ_1, γ_2

$$\gamma_1 x_t + \gamma_2 y_t \sim \text{random walk},$$

т.к. $\gamma_1 u_t + \gamma_2 v_t \sim \text{WN}$.

Замечание. Коинтегрирующий вектор **определён неоднозначно!**

Приведём основные свойства коинтегрирующих векторов (далее, к.в.):

- если γ – к.в., то $c\gamma$ также к.в.;
- если γ_1, γ_2 – к.в., то $\gamma_1 \pm \gamma_2$ также к.в.

Это означает, что множество коинтеграционных векторов образует линейное пространство

$$\{\gamma\} = \mathfrak{L} \subset \mathbb{R}^k.$$

Определение. Размерность пространства \mathfrak{L} называется *рангом коинтеграции*

$$\text{rank} = \dim \mathfrak{L} < k.$$

Можно сказать, что ранг коинтеграции – это число линейно независимых коинтеграционных соотношений.

Замечание. Если ряды некоинтегрированы, то формально будем считать, что $\text{rank} = 0$.

Пусть $\text{rank} = r$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ – базис пространства \mathfrak{L} . Тогда каждому γ_j соответствует z_{jt} .

Обозначим

- $\mathbf{z}_t = (z_{1t}, \dots, z_{rt})'$ – корректирующий вектор;
- $\beta = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) - k \times r$ матрица, составленная из вектор-столбцов γ_j , причём $\text{rank } \beta = r$.

Тогда из определения

$$\beta' \mathbf{x}_t = \mathbf{z}_t.$$

$\text{VAR}(p)$ можно записать в виде

$$\Delta \mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + \Pi \mathbf{x}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} B_j \Delta \mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{u}_t, \quad \det \Pi = 0,$$

где $\Pi = I - A_1 - \dots - A_p$. Тогда

- ряды неинтегрированы $\iff \Pi = 0$;
- если ряды интегрированы, то $\text{rank} = \text{rank } \Pi$ и

$$\Pi_{k \times k} = \begin{matrix} \alpha_{k \times r} & \cdot & \beta'_{r \times k} \end{matrix}, \quad \text{rank } \alpha = \text{rank } \beta = r.$$

В последнем случае

$$\Pi \mathbf{x}_{t-1} = \alpha \beta' \mathbf{x}_{t-1} = \alpha \mathbf{z}_{t-1}.$$

В ситуации, когда ряды неинтегрированы, $\text{VAR}(p)$ с единичным корнем можно переписать в виде стационарной $\text{VAR}(p-1)$:

$$\Delta \mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=1}^{p-1} B_j \Delta \mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{u}_t, \quad \mathbf{u}_t \sim \text{WN}(0, \Sigma).$$

Если же ряды являются интегрированными, тогда $\text{VAR}(p)$ с единичным корнем можно записать в виде стационарной **векторной модели коррекции ошибки VECM**

$$\Delta \mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + \alpha \mathbf{z}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} B_j \Delta \mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{u}_t, \quad \mathbf{u}_t \sim \text{WN}(0, \Sigma).$$

4.2.3. Оценивание и инференции

Основной проблемой при оценивании VAR-моделей можно назвать модели с единичным корнем. Для оценки и правильных инференций обычный подход, как в стационарном случае, не работает.

В этом случае обычно применяется следующая методология:

1. Проводятся тесты на коинтеграцию для выявления ранга коинтеграции r .
2. Оцениваются коинтеграционные соотношения методом наименьших квадратов и стационарный коинтегрирующий вектор \mathbf{z}_t , если $r > 0$.
3. Оценивается стационарная модель VECM при $r > 0$ или VAR для $\Delta \mathbf{x}_t$ при $r = 0$.
4. Приводятся функции импульсного отклика, тесты на причинность по Гренджеру, инференции для VECM.

В заключении рассмотрим три теста на коинтеграцию.

1. Test Engle-Granger.

Этот тест применим только в случае $k = 2$ (двух рядов) и состоит в рассмотрении $(y_t, x_t) \sim \text{VAR}(p)$. Алгоритм можно записать так:

- Оцениваем (OLS) регрессию y_t на $x_t \Rightarrow$ остатки \hat{u}_t .
- Применяем ADF-тест на единичный корень для остатков \hat{u}_t .
- Если гипотеза единичного корня отвергается, то делаем вывод о коинтегрированности y_t и x_t . Если не отвергается, то делаем вывод, что ряды некоинтегрированы.

2. Test Johansen (1988).

Это тест на коинтеграцию произвольного ранга.

Для рассматриваемого многомерного временного ряда

$$\mathbf{x}_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt}) \sim \text{VAR}(p)$$

идея заключается в последовательном тестировании гипотез

$$H_0 : \text{rank} = r,$$

$$H_1 : \text{rank} = r + 1,$$

$$r = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Для каждой гипотезы вычисляются три тестовых статистики и их Р-значения.

Алгоритм можно записать в таком виде:

- Если для $r = 0$ нулевая гипотеза не отвергается, то тест указывает на некоинтегрированность рядов.
- Последовательно тестируем нулевую гипотезу для порядка $r = 1, 2, \dots$ до тех пор пока H_0 впервые не будет “подтверждена”.
- Порядок из “подтвержденной” H_0 указывает на ранг коинтеграции.

Глава 5

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Стационарные временные ряды

Упражнение 1. Является ли временной ряд, заданный авторегрессионным разностным уравнением, стационарным?

1. $x_t = 7 + 0.5x_{t-1} + u_t$.
2. $x_t = 10 + 0.25x_{t-2} + u_t$.
3. $x_t = 10 + x_{t-1} - 0.25x_{t-2} + u_t$.
4. $x_t = \frac{3}{2}x_{t-1} - \frac{3}{4}x_{t-2} + \frac{1}{8}x_{t-3} + u_t$.
5. $x_t = 3 + 0.4x_{t-1} - 0.04x_{t-2} + u_t$.
6. $x_t = 5 - 3x_{t-1} - 3x_{t-2} - x_{t-3} + u_t$.
7. $x_t = -2x_{t-1} + 1.25x_{t-2} - 0.25x_{t-3} + u_t$.

Упражнение 2. Написать формулы для прогноза

1. на $l = 3$ шага для процесса $x_t = 5 + 0.5x_{t-1} + u_t$.
2. на $l = 4$ шага для процесса $x_t = 2 + 0.25x_{t-2} + u_t$.
3. на $l = 3$ шага для процесса $x_t = \frac{1}{27}x_{t-3} + u_t$.
4. на $l = 5$ шагов для процесса $x_t = 0.5x_{t-2} - 0.05x_{t-3} + 0.001x_{t-4} + u_t$.
5. на $l = 6$ шагов для процесса $x_t = 0.5x_{t-3} + 0.001x_{t-4} + u_t$.

Упражнение 3. Написать в общем виде уравнения Юла – Уолкера для моделей AR(2), AR(3) и AR(4).

Упражнение 4. По временному ряду длины $n = 60$ были оценены следующие авторегрессионные модели:

1. $\hat{x}_t = 2 + 0.7x_{t-1}$, $s^2 = 2.1$;
2. $\hat{x}_t = 2.3 + 0.6x_{t-1} - 0.3x_{t-2}$, $s^2 = 1.9$;
3. $\hat{x}_t = 1.8 + 0.55x_{t-1} - 0.25x_{t-2} + 0.01x_{t-3}$, $s^2 = 1,85$.

Какую модель вы выберете?

Упражнение 5. Для временного ряда были вычислены коэффициенты автокорреляции

$$\hat{\rho}(1) = 0.7; \quad \hat{\rho}(2) = 0.4; \quad \hat{\rho}(3) = -0.2$$

и выборочное среднее значение $\bar{x} = 1.7$. Найти оценки коэффициентов в модели

1. AR(1);
2. AR(2);
3. AR(3).

Упражнение 6. Для модели временного ряда длины $n = 50$ были оценены несколько моделей и в каждой из моделей вычислены коэффициенты автокорреляции остатков. Исследовать адекватность этих моделей

1. $\hat{\rho}_u(1) = 0.001$; $\hat{\rho}_u(2) = 0.0006$; $\hat{\rho}_u(3) = 0.0002$; $\hat{\rho}_u(4) = 0.001$ в модели AR(2).
2. $\hat{\rho}_u(1) = 0.04$; $\hat{\rho}_u(2) = 0.02$; $\hat{\rho}_u(3) = 0.006$ в модели AR(1).
3. $\hat{\rho}_u(1) = 0.02$; $\hat{\rho}_u(2) = 0.0008$; $\hat{\rho}_u(3) = 0.003$; $\hat{\rho}_u(4) = 0.001$ в модели AR(3).

Упражнение 7. Постройте автоковариационную и автокорреляционную функцию для модели MA(1), MA(2), MA(3).

Упражнение 8. Для модели ARMA(1, 1)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1}, \quad u_t \sim \text{WN}.$$

1. Вычислите Ey_t и $\text{Var}(y_t)$.
2. Найдите представление временного ряда в виде MA(∞).
3. Вычислите автоковариационную и автокорреляционную функцию.

Упражнение 9. Для модели ARMA(1, 2)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}, \quad u_t \sim \text{WN}.$$

1. Вычислите Ey_t и $\text{Var}(y_t)$.
2. Найдите представление временного ряда в виде MA(∞).
3. Вычислите автоковариационную и автокорреляционную функцию.

Упражнение 10. Рассмотрим модель ARMA

	const	x_{t-1}	x_{t-2}	u_{t-1}	u_{t-2}	u_{t-3}
коэфф.	10	-0.25	0.125	0.5	-1	-1

Задаёт ли эта модель стационарный ряд? Ответ обоснуйте. Если да, то найдите Ex_t .

Упражнение 11. Временной ряд x_t – первая разность логарифма реального ВВП США с 1995:1 по 2018:4 (квартальные данные). Была оценена модель ARMA(2, 2)

	const	x_{t-1}	x_{t-2}	u_{t-1}	u_{t-2}
коэфф.	0.0107	0.1005	0.5013	0.2279	-0.2409
ст.ош.	0.0014	1.2859	1.0050	1.3077	0.6111

Известны значения временного ряда и остатки модели

t	2017:4	2018:1	2018:2	2018:3	2018:4
x_t	0.003	0.007	0.0004	0.003	0.006
\hat{u}_t	0.0014	-0.0008	0.0073	-0.0012	-0.0026

Постройте прогноз на четвёртый квартал 2019 года (2019:4).

Упражнение 12. На данных о некоторых доходностях была оценена модель ARMA(2, 2)

$$y_t = 10.3 + 0.803y_{t-1} + 0.682y_{t-2} + u_t - 0.502u_{t-1}, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2).$$

Проверьте полученную модель на стационарность.

Упражнение 13. На некоторых данных построена модель ARMA(2, 2)

$$y_t = 10.3 + 0.803y_{t-1} + 0.682y_{t-2} + u_t - 0.502u_{t-1}, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2).$$

Проверьте модель на стационарность.

Упражнение 14. Рассмотрим оценённую модель ARMA(1, 2)

$$y_t = 2.4 + 0.925y_{t-1} + u_t - 0.803u_{t-1} - 0.403u_{t-2}, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2).$$

Проверьте модель на обратимость.

Упражнение 15. Получены следующие оценки для модели ARMA(3, 2)

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.4y_{t-2} + 0.1y_{t-3} + u_t - 0.9u_{t-1} + 1.2u_{t-2},$$

где $u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2)$. Проверьте модель на обратимость.

Упражнение 16. Проверьте предложенную модель ARMA(2, 3) на стационарность

$$y_t = 0.803y_{t-1} + 0.106y_{t-2} + u_t + 0.422u_{t-1} - 0.541u_{t-2} + 0.378u_{t-3},$$

где $u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2)$.

Упражнение 17. Вы оценили следующую модель ARMA(1, 2) для некоторых данных

$$y_t = 0.6y_{t-1} + u_t + 0.6u_{t-1} - 0.7u_{t-2}.$$

Предположим, что мы имеем данные

time	t	$t - 1$	$t - 2$
y	-0.5	1.2	-0.9
u	-0.2	0.3	-0.4

Вычислите прогнозы для y в периоды t , $t + 1$, $t + 2$.

Упражнение 18. Вы оценили следующую модель ARMA(2, 1) для некоторых данных временного ряда

$$y_t = 0.6y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + u_t - 0.3u_{t-1}.$$

Предположим, что у нас есть данные

time	t	$t - 1$	$t - 2$
y	0.5	1.2	-0.9
u	-0.2	0.3	-0.4

Постройте прогнозы для ряда y для периодов t , $t + 1$, $t + 2$.

Упражнение 19. Вы оценили следующую модель ARMA(1, 1) для некоторого временного ряда

$$y_t = 0.6y_{t-1} + u_t - 0.6u_{t-1}.$$

Предположим, что у вас есть следующие данные

time	t	$t - 1$	$t - 2$
y	-0.5	1.2	-0.9
u	-0.2	0.3	-0.4

Рассчитайте прогнозы для y в моменты t , $t + 1$, $t + 2$.

Упражнение 20. Для некоторого временного ряда была оценена модель $\text{ARMA}(0, 2)$

$$y_t = u_t - 0.6u_{t-1} + 0.3u_{t-2}.$$

Предположим, что у вас есть данные

time	t	$t - 1$	$t - 2$
y	-0.5	1.2	-0.9
u	-0.2	0.3	-0.4

Вычислите прогнозы y для периодов t , $t + 1$, $t + 2$.

Упражнение 21. Рассмотрим ежемесячные данные по доходности корпоративных облигаций Moody's с рейтингом Ваа (переменная ВАА в базе FRED), начиная с 2000 года и по настоящее время. Пусть y_t является первой разностью ряда.

1. Постройте график y_t .
2. Постройте график ACF и PACF.
3. Является ли $\rho_{part}(3)$ значимым?
4. Подберите соответствующую ARMA модель.
5. Дайте прогноз на 10 месяцев вперед.

Упражнение 22. Рассмотрим ежемесячные данные по десяти летним Казначейским ценным бумагам с одинаковым сроком до погашения (переменная GS10 в базе FRED), начиная с 1995 года и по настоящее время. Пусть x_t является первой разностью ряда.

1. Постройте график y_t .
2. Постройте график ACF и PACF.
3. Является ли $\rho_{part}(3)$ значимым?
4. Подберите соответствующую ARMA модель.
5. Дайте прогноз на 10 месяцев вперед.

Упражнение 23. Рассмотрим ежемесячные данные по доходности корпоративных облигаций Moody's с рейтингом Aaa (переменная AAA в базе FRED), начиная с 1995 года и по настоящее время. Пусть x_t является первой разностью ряда.

1. Нарисуйте график x_t .
2. Нарисуйте графики ACF и PACF.
3. Является ли $\rho(5)$ значимым?
4. Постройте подходящую ARMA модель.
5. Дайте прогноз на 10 месяцев вперед.

Упражнение 24. Исследователь пытается определить соответствующий порядок модели ARMA, имея в своем распоряжении 200 наблюдений. У него есть следующие данные для оценки дисперсии остатков (т. е. s^2) для различных моделей-кандидатов. Предполагается, что порядок не должен превышать (3,3) для моделирования динамики данных. Каков "оптимальный" порядок модели?

Модель ARMA порядка	s^2
(0,0)	1.902
(1,0)	1.662
(0,1)	1.583
(1,1)	1.442
(2,1)	1.303
(1,2)	1.423
(2,2)	0.981
(3,2)	0.972
(2,3)	0.923
(3,3)	0.893

Упражнение 25. Исследователь пытается определить соответствующий порядок модели ARMA, имея в своем распоряжении 150 наблюдений. У него есть следующие данные для оценки дисперсии остатков (т. е. s^2)

для различных моделей-кандидатов. Предполагается, что порядок не должен превышать (3,3) для моделирования динамики данных. Каков "оптимальный" порядок модели?

ARMA model order	s^2
(0,0)	0.902
(1,0)	0.662
(0,1)	0.583
(1,1)	0.442
(2,1)	0.303
(1,2)	0.423
(2,2)	0.398
(3,2)	0.382
(2,3)	0.385
(3,3)	0.379

Упражнение 26. Исследователь пытается определить соответствующий порядок модели ARMA, имея в своем распоряжении 250 наблюдений. У него есть следующие данные для оценки дисперсии остатков (т. е. s^2) для различных моделей-кандидатов. Предполагается, что порядок не должен превышать (2,2) для моделирования динамики данных. Каков "оптимальный" порядок модели?

ARMA model order	s^2
(0,0)	2.902
(1,0)	2.662
(0,1)	2.583
(1,1)	2.442
(2,1)	2.303
(1,2)	2.423
(2,2)	2.398

5.2. Модели распределенных лагов

Упражнение 27. Для следующих моделей FDL найдите долгосрочные мультипликаторы и напишите уравнение «долгосрочной связи»

1. $\hat{y}_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \beta_3 x_{t-2} + \beta_4 x_{t-3}$;
2. $\hat{y}_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \beta_3 z_t + \beta_4 z_{t-1}$;
3. $\hat{y}_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \beta_3 x_{t-2} + \beta_4 z_t + \beta_5 z_{t-1} + \beta_6 z_{t-2}$;
4. $\hat{y}_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 z_t + \beta_3 z_{t-1} + \beta_4 z_{t-2} + \beta_5 w_t + \beta_6 w_{t-1}$.

Упражнение 28. Рассмотрим модель FDL(2)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \beta_3 x_{t-2} + \text{error}.$$

1. Напишите функцию импульсного отклика (impulse response function) для краткосрочной зависимости.
2. Напишите функцию импульсного отклика (impulse response function) для долгосрочной зависимости.
3. Напишите уравнение долгосрочной зависимости и дайте его интерпретацию.

Упражнение 29. Рассмотрим модель FDL(4)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \beta_3 x_{t-2} + \beta_4 x_{t-4} + \gamma_1 z_t + \gamma_2 z_{t-1} + \gamma_3 z_{t-2} + u_t.$$

Сформулируйте условия Гаусса–Маркова для ошибок этой модели регрессии. Найдите долгосрочные мультипликаторы y по x и по z . Напишите уравнение «долгосрочной зависимости» y от x и z .

Упражнение 30. Рассмотрим модель ADL

$$y_t = \beta_0 + \alpha y_{t-1} + \beta_1 x_t + \text{error}.$$

1. Когда для этой модели выполнено условие стационарности?
2. Напишите функцию импульсного отклика для краткосрочной зависимости.
3. Напишите функцию импульсного отклика для долгосрочной зависимости.

4. Напишите уравнение долгосрочной зависимости и дайте его интерпретацию.

Упражнение 31. Рассмотрим модель ADL

$$y_t = \beta_0 + \alpha y_{t-1} + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \text{error}.$$

1. Когда для этой модели выполнено условие стационарности?
2. Напишите функцию импульсного отклика для краткосрочной зависимости.
3. Напишите функцию импульсного отклика для долгосрочной зависимости.
4. Напишите уравнение долгосрочной зависимости и дайте его интерпретацию.

Упражнение 32. Рассмотрим модель ADL

$$y_t = \beta_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \beta_1 x_t + \text{error}.$$

1. Когда для этой модели выполнено условие стационарности?
2. Напишите функцию импульсного отклика для краткосрочной зависимости.
3. Напишите функцию импульсного отклика для долгосрочной зависимости.
4. Напишите уравнение долгосрочной зависимости и дайте его интерпретацию.

Упражнение 33. Рассмотрим модель ADL(2)

$$y_t = 5 + \frac{5}{6}y_{t-1} - \frac{1}{6}y_{t-2} + 2.1x_t + 1.2x_{t-1} + 0.2x_{t-2} + 4.3z_t + 2.3z_{t-1} + u_t,$$

где для ошибок выполнены условия Гаусса–Маркова.

1. Выполнено ли для этой модели условие стационарности?

2. Если да, то найдите долгосрочные мультипликаторы y по x и z и напишите уравнение «долгосрочной зависимости» y от x и z .

Упражнение 34. Рассмотрим модель распределённых лагов

$$y_t = \mu + \alpha y_{t-1} + \gamma_0 x_t + \gamma_1 x_{t-1} + \gamma_2 x_{t-2} + \gamma_3 x_{t-3} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2).$$

Напишите уравнение долгосрочной зависимости y от x и дайте его интерпретацию.

Упражнение 35. Пакет `dynlm` содержит набор исторических макроэкономических данных по Германии `M1Gremany`¹: логарифм реального М1 на душу населения `logm1`, логарифм индекса цен `logprice`, логарифм реального ВВП на душу населения `loggnp`, долгосрочная ставка `interest`.

Загрузите набор данных командой

```
data(M1Germany, package="dynlm").
```

Оцените модель $ADL(1, 2)$ зависимости первой разности логарифма М1 от первой разности логарифма индекса цен, первой разности логарифма ВВП и первой разности ставки.

1. Напишите уравнение долгосрочной зависимости.
2. Тестируйте модель на автокорреляцию.

Упражнение 36. Пакет `dynlm` содержит набор исторических макроэкономических данных по Германии `M1Gremany`²: логарифм реального М1 на душу населения `logm1`, логарифм индекса цен `logprice`, логарифм реального ВВП на душу населения `loggnp`, долгосрочная ставка `interest`.

Загрузите набор данных командой

```
data(M1Germany, package="dynlm").
```

Оцените модель $ADL(2, 1)$ зависимости первой разности логарифма М1 от первой разности логарифма индекса цен, первой разности логарифма ВВП и первой разности ставки.

¹квартальные данные с 1960Q1 по 1996Q3

²квартальные данные с 1960Q1 по 1996Q3

1. Напишите уравнение долгосрочной зависимости.
2. Тестируйте модель на автокорреляцию.

5.3. TS – ряды

Упражнение 37. Рассмотрим модель временного ряда

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \alpha x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}.$$

1. Сформулируйте условия стационарности.
2. Напишите уравнение тренда для временного ряда.

Упражнение 38. Рассмотрим модель временного ряда

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \alpha x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}.$$

1. Сформулируйте условия стационарности.
2. Напишите уравнение тренда для временного ряда.

Упражнение 39. Рассмотрим модель временного ряда

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}.$$

1. Сформулируйте условия стационарности.
2. Напишите уравнение тренда для временного ряда.

Упражнение 40. Рассмотрим модель временного ряда

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \phi x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}.$$

Найдите уравнение тренда для временного ряда.

Упражнение 41. Рассмотрим модель временного ряда

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}.$$

Найдите уравнение тренда для временного ряда.

Упражнение 42. Для TS-рядов (v_t – стационарный ряд)

1. $x_t = \beta_0 + \beta_1 t + v_t$;
2. $x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + v_t$;

найдите Δx_t и $\Delta^2 x_t$.

Упражнение 43. Для TS-рядов ($u_t \sim \text{WN}$)

1. $x_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \phi x_{t-1} + u_t$;
2. $x_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \phi x_{t-1} + u_t$;
3. $x_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + u_t$;

найдите уравнение для Δx_t и $\Delta^2 x_t$.

Упражнение 44. Рассмотрим модель квадратичного тренда с автокорреляцией первого порядка

$$\begin{aligned}x_t &= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + v_t, \\v_t &= \rho v_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}, \quad |\rho| < 1.\end{aligned}$$

1. Проведите авторегрессионное преобразование для получения эффективной оценки тренда.
2. Как связаны коэффициенты преобразованного уравнения с параметрами тренда?

Упражнение 45. Для TS-ряда

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \phi x_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}, \quad u_t \sim \text{WN}, \quad |\phi| < 1.$$

1. Найдите уравнение для первой разности x_t .
2. Найдите уравнение для второй разности x_t .

Упражнение 46. Рассмотрим модель временного ряда для ВВП

$$\ln \text{GDP}_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \phi_1 \ln \text{GDP}_{t-1} + \phi_2 \ln \text{GDP}_{t-2} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}.$$

1. При каких условиях эта модель временного ряда задаёт TS-ряд?
2. Найдите тренд ВВП (для случая TS).

Упражнение 47. Рассмотрим модель тренда для ВВП (в млн. \$)

$$\widehat{GDP}_t = 230.4 + \underset{(23.4)}{0.32} t, \quad t = 0, \dots, 20.$$

Дайте интерпретацию коэффициентов модели.

Проверьте значимость тренда при альтернативе о тенденции к росту ВВП. Уровень значимости 5%

Упражнение 48. Рассмотрим модель тренда для численности населения (в млн. чел.)

$$\widehat{\ln POP}_t = \underset{(0.4)}{2.4} + \underset{(0.01)}{0.023} t, \quad t = 0, \dots, 23.$$

Дайте интерпретацию коэффициентов модели.

Проверьте значимость тренда при альтернативе о тенденции к росту населения. Уровень значимости 1%.

Упражнение 49. Исследуется регрессионная модель влияния численности населения (POP) на ВВП (GDP) на основе временных рядов

$$\ln GDP_t = \beta_0 + \beta_1 \ln POP_t + \text{error}.$$

Однако временные ряды для ВВП и численности населения как правило имеют тенденцию к росту. Как это повлияет на статистические выводы для регрессионной модели?

5.4. DS – ряды

Упражнение 50. Для временного ряда

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2), \quad x_0 = 0$$

найдите $E x_t$ и $\text{Var } x_t$.

Упражнение 51. Для временного ряда ($\mu \neq 0$)

$$x_t = \mu + x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2), \quad x_0 = 0$$

найдите $E x_t$ и $\text{Var } x_t$.

Упражнение 52. Для временного ряда ($\mu \neq 0$)

$$x_t = \mu + \beta t + x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2), \quad x_0 = 0$$

найдите $E x_t$ и $\text{Var } x_t$.

Упражнение 53. Пусть $x_t \sim \text{ARIMA}(1, 1, 0)$. Запишите представление ряда в виде (нестационарной) модели $\text{ARMA}(2, 0)$. Покажите, что авторегрессионный многочлен модели ARMA имеет единичный корень кратности 1.

Упражнение 54. Пусть $x_t \sim \text{ARIMA}(1, 2, 0)$. Запишите представление ряда в виде (нестационарной) модели $\text{ARMA}(3, 0)$. Покажите, что авторегрессионный многочлен модели ARMA имеет единичный корень кратности 2.

Упражнение 55. Пусть $x_t \sim \text{ARIMA}(2, 2, 3)$. Запишите представление ряда в виде (нестационарной) модели ARMA . Покажите, что авторегрессионный многочлен модели ARMA имеет единичный корень и найдите кратность этого корня.

Упражнение 56. Пусть $x_t \sim \text{ARIMA}(3, 1, 1)$. Запишите представление ряда в виде (нестационарной) модели ARMA . Покажите, что авторегрессионный многочлен модели ARMA имеет единичный корень и найдите кратность этого корня.

Упражнение 57. Пусть $x_t \sim \text{ARIMA}(1, 2, 2)$.

1. Что означает $x_t \sim \text{ARIMA}(1, 2, 2)$?
2. Запишите представление ряда в виде (нестационарной) ARMA .

Упражнение 58. Рассмотрим модель временного ряда

$$x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + u_t + 0.5u_{t-1} - 0.1u_{t-2}, \quad u_t \sim \text{WN}.$$

1. Покажите, что $x_t \sim I(2)$.
2. Найдите порядок модели $ARIMA(p, k, q)$, соответствующей ряду x_t .

Для практических задач данные нужно взять с сайта Федерального Банка г. С.-Луиса www.stlouisfed.org, база данных FRED. Во всех задачах уровень значимости равен 10%.

Упражнение 59. Рассмотрим месячные данные по денежной массе M2 для US с 1990 г. по н.в. Ряд x_t – логарифм M2.

1. Постройте график x_t . Какие можно сделать выводы?
2. Тестируйте ряд x_t на единичный корень.
3. Какой порядок интегрирования у ряда x_t ?
4. Какую модель ARIMA выбрать для ряда x_t ?

Упражнение 60. Рассмотрим квартальные данные по ВВП US с 1985 г. по н.в. Постройте ряд x_t – логарифм ВВП.

1. Постройте график x_t . Какие можно сделать выводы?
2. Тестируйте ряд x_t на единичный корень.
3. Какой порядок интегрирования у ряда x_t ?
4. Какую модель ARIMA выбрать для ряда x_t ?

Упражнение 61. Рассмотрим месячные данные по краткосрочной ставке 3-х месячных Treasury Bills с 1990 г. по н.в. (ряд x_t).

1. Постройте график x_t . Какие можно сделать выводы?
2. Тестируйте ряд x_t на единичный корень.
3. Какой порядок интегрирования у ряда x_t ?
4. Какую модель ARIMA выбрать для ряда x_t ?

Упражнение 62. Рассмотрим месячные данные по долгосрочной ставке 10-ти летних бондов с 1990 г. по н.в. (ряд x_t).

1. Постройте график x_t . Какие можно сделать выводы?
2. Тестируйте ряд x_t на единичный корень.
3. Какой порядок интегрирования у ряда x_t ?
4. Какую модель ARIMA выбрать для ряда x_t ?

Во всех задачах уровень значимости равен 10%.

Упражнение 63. Рассмотрим месячные сезонно-скорректированные исторические данные с 2000 г. по н.в. о денежной массе США M2SL. Тестируйте этот ряд на единичный корень используя тесты ADF и Philips-Perron'a. Отчет о тестировании должен включать график временного ряда, результаты теста, выводы и обоснование выбранного метода.

Упражнение 64. Рассмотрим месячные исторические данные с 2000 г. по н.в. о 3-х месячной ставке TB3MS.

1. Подберите модель ARIMA. Отчет должен включать график временного ряда, результаты теста, выводы и обоснование выбранного метода.
2. Постройте прогноз на 5 месяцев.

Упражнение 65. Рассмотрим месячные данные с 2000 г. по н.в. о 10-ти летней ставке GS10. Тестируйте этот ряд на единичный корень используя тесты ADF и KPSS. Отчет о тестировании должен включать график временного ряда, результаты теста, выводы и обоснование выбранного метода.

Упражнение 66. Рассмотрим квартальные исторические данные с 1985 г. по н.в. о ВВП США GDP.

1. Подберите модель ARIMA. Отчет должен включать график временного ряда, результаты теста, выводы и обоснование выбранного метода.

2. Постройте прогноз на 6 кварталов.

Упражнение 67. Для ряда недельных данных о 30-ти летних ставках ипотечного кредитования MORTGAGE30US с 2000 г. по н.в.

1. подберите модель ARMA для первых приращений ставки и проверьте её адекватность;
2. постройте прогноз на десять недель.

Упражнение 68. Рассмотрим месячные данные Moody's Seasoned Aaa Corporate Bond Yield (переменная AAA в базе FRED), начиная с 1995 года и до текущего момента.

1. Постройте модель ARIMA;
2. Протестируйте модель на серийную корреляцию;
3. Сделайте прогноз на 10 периодов и постройте соответствующие графики прогноза.

Упражнение 69. Рассмотрим квартальные исторические данные логарифма ВВП США (переменная GDP из базы FRED) с 1990 года и по н.в.

1. Постройте модель ARIMA;
2. Протестируйте модель на серийную корреляцию;
3. Сделайте прогноз на 10 периодов и постройте соответствующие графики прогноза.

Упражнение 70. Рассмотрим месячные данные по 10-летней ставке погашения (переменная GS10 в базе FRED) с 1995 по н.в.

1. Постройте модель ARIMA;
2. Протестируйте модель на серийную корреляцию;
3. Сделайте прогноз на 10 периодов и постройте соответствующие графики прогноза.

5.5. Моделирование волатильности

Упражнение 71. Рассмотрите следующий процесс ARCH(2)

$$y_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = z_t \sqrt{\sigma_t^2},$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2.$$

1. Вычислите безусловную дисперсию σ_ε^2 .
2. Запишите уравнения для дисперсии в качестве процесса авторегрессии второго порядка для ε_t^2 .
3. Выпишите условия, при которых дисперсия стационарна.

Упражнение 72. Рассмотрите следующий процесс AR(1)-GARCH(1,1)

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = z_t \sqrt{\sigma_t^2},$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

1. Вычислите безусловную дисперсию σ_ε^2 .
2. Запишите уравнения для дисперсии в виде модели ARMA(1, 1) для ε_t^2 .
3. Выпишите условия, при которых дисперсия стационарна.

Упражнение 73. Рассмотрим месячные исторические данные с 2000 г. по н.в. о 2-х месячной ставке TB2MS. Пусть x_t – первая разность.

1. Найдите порядок модели ARMA для x_t .
2. Найдите порядок ARCH для остатков ARMA-модели.
3. Оцените модель ARMA-ARCH выбранного порядка.

Упражнение 74. Рассмотрим месячные данные Moody's Seasoned Aaa Corporate Bond Yield (переменная AAA в базе FRED), начиная с 1995 года и до текущего момента. Пусть x_t – первая разность.

1. Найдите порядок модели ARMA для x_t .
2. Найдите порядок GARCH для остатков ARMA-модели.
3. Оцените модель ARMA-GARCH выбранного порядка.

Упражнение 75. Рассмотрим месячные данные по 10-летней ставке погашения (переменная GS10 в базе FRED) с 1995 по н.в. Пусть x_t – первая разность.

1. Найдите порядок модели ARMA для x_t .
2. Найдите порядок GARCH для остатков ARMA-модели.
3. Оцените модель ARMA-GARCH выбранного порядка.

5.6. VAR и коинтеграция

Упражнение 76. Рассмотрим модель VAR(1)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t, \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix},$$

где $u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2)$, $v_t \sim \text{WN}(0, \sigma_v^2)$, $\text{cov}(u_t, v_t) = \sigma_{uv}$. Проверьте условие стационарности для матрицы \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} &1) \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}, \\ &4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 5) \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad 6) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Упражнение 77. Рассмотрим модель VAR(1)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t, \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix} \sim \text{WN}.$$

Проверьте условие стационарности для матриц

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 78. Рассмотрим модель VAR(2)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{u}_t, \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \sim \text{WN}$$

Проверьте условие стационарности для матриц

$$1) \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix}.$$

$$2) \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 79. Рассмотрим модель VAR ($u_t, v_t \sim \text{WN}$)

$$x_t = \mu_1 + 0.5x_{t-1} + \beta y_{t-1} + u_t,$$

$$y_t = \mu_2 + \beta x_{t-1} + 0.5y_{t-1} + v_t.$$

При каких значениях параметра β эта модель нестационарна (имеет единичный корень)?

Упражнение 80. Рассмотрим модель VAR ($u_t, v_t \sim \text{WN}$)

$$x_t = \mu_1 + 0.5x_{t-1} + \beta y_{t-2} + u_t,$$

$$y_t = \mu_2 + 0.5y_{t-1} + \beta x_{t-2} + v_t.$$

При каких значениях параметра β эта модель нестационарна (имеет единичный корень)?

Упражнение 81. Рассмотрим модели временных рядов

$$a) \begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = y_{t-1} + v_t \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = cx_t + v_t \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = x_t + x_{t-1} + v_t \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x_t = 3x_{t-1} - 7y_{t-1} + u_t \\ y_t = x_{t-1} - 2.5y_{t-1} + v_t \end{cases}$$

1. Запишите эти модели в виде моделей VAR.
2. Проверьте условие стационарности.
3. Какие временные ряды коинтегрированы?
 - Если ряды коинтегрированы, найдите коинтеграционное соотношение, корректируя ошибку, и запишите модель VECM.
 - Если ряды неинтегрированы, то постройте VAR-модель для первых разностей.

Упражнение 82. Рассмотрим модели временных рядов

$$a) \begin{cases} x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + u_t \\ y_t = 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + v_t \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = x_t + x_{t-1} + v_t \\ z_t = x_t + y_{t-1} + w_t \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + u_t \\ y_t = 2x_t + \frac{1}{2}(y_{t-1} + y_{t-2}) + v_t \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x_t = y_{t-1} + u_t \\ y_t = z_{t-1} + v_t \\ z_t = x_{t-1} + w_t \end{cases}$$

1. Запишите эти модели в виде моделей VAR.
2. Проверьте условие стационарности.
3. Какие временные ряды коинтегрированы?
4. Представьте модели в виде VECM.

Упражнение 83. Рассмотрим модели временных рядов

$$a) \begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = x_t + v_t \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_t = 0.5y_t + x_{t-1} + u_t \\ y_t = x_t + 0.5y_{t-1} + v_t \end{cases}$$

1. Запишите эти модели в виде моделей VAR.
2. Проверьте условие стационарности.
3. Какие временные ряды коинтегрированы?
4. Представьте модели в виде VECM.

Упражнение 84. Рассмотрим модель временных рядов

$$\begin{cases} x_t = 1.5x_{t-1} + y_{t-1} - 0.5x_{t-2} - y_{t-2} + u_t \\ y_t = -x_{t-1} - 0.5y_{t-1} + x_{t-2} + 1.5y_{t-2} + v_t \end{cases}$$

1. Запишите модель в виде модели VAR.
2. Проверьте условие стационарности.
3. Коинтегрированы ли ряды?
 - Если ряды коинтегрированы, найдите коинтеграционное соотношение, корректируя ошибку, и запишите модель VECM.
 - Если ряды неинтегрированы, то постройте VAR-модель для первых разностей.

Упражнение 85. Рассмотрим многомерные ряды **Canada** из пакета **vars**.

1. Оцените модель VAR для первых разностей.
2. Протестируйте полученную модель на серийную корреляцию.
3. Постройте график разложения дисперсии прогноза (используйте упорядочение по умолчанию).
4. Для каждой переменной протестируйте причинность по Гренджеру.

Упражнение 86. Рассмотрим многомерные ряды **M1Germany** из пакета **dynlm**.

1. Оцените модель VAR для первых разностей.
2. Протестируйте полученную модель на серийную корреляцию.
3. Нарисуйте графики функций отклика, используя упорядочение по умолчанию.
4. Для каждой переменной протестируйте причинность по Гренджеру.

Упражнение 87. Рассмотрим многомерные ряды **Money** из пакета **Ecdat**.

1. Оцените модель VAR для первых разностей.
2. Протестируйте полученную модель на серийную корреляцию.
3. Вычислите прогнозы на 10 периодов и постройте соответствующие графики.
4. Для каждой переменной протестируйте причинность по Гренджеру.

Литература

- [1] Айвазян С. А., Фантаццини Д., *Эконометрика-2: продвинутый курс с приложениями в финансах*, М.: Магистр: Инфра-М, 2014. – 944 с.
- [2] Айвазян С. А., Мхитарян В.С., *Прикладная статистика. Основы эконометрики. Т. 1. Теория вероятностей и прикладная статистика*, М.: Юнити-Дана, 2001. – 656 с.
- [3] Айвазян С.А., *Методы эконометрики: учебник*, М.:МАГИСТР: ИНФРА-М, 2010. – 512 с.
- [4] Артамонов Н.В. *Введение в эконометрику*, 2-е изд., испр. и доп.– М.:МЦНМО, 2014.
- [5] Берндт Э., *Практика эконометрики. Классика и современность*, М.: Юнити, 2005.
- [6] Бородич С.А., *Вводный курс эконометрики*, Учебное пособие, Мн.: БГУ, 2000.
- [7] Вербик М., *Путеводитель по современной эконометрике*, М.: Научная книга, 2008.
- [8] Доугерти К., *Введение в эконометрику*, М.: ИНФРА-М, 1997.

- [9] Ивин Е. А., Артамонов Н. В., Курбацкий А. Н., *Методическое пособие по эконометрике: для социально-экономических специальностей*, ИСЭРТ РАН Вологда, 2016. — 184 с.
- [10] Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А., *Эконометрика. Начальный курс*, М.: Дело, 2007
- [11] Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А., Головань С. В., *Сборник задач к начальному курсу эконометрики* М.: «Дело», 2007 — 224 с.
- [12] Носко В. П. *Эконометрика. Книга 1. Части 1 и 2*, Издательский дом Дело РАНХиГС Москва, 2011. — 672 с.
- [13] Носко В. П. *Эконометрика. Книга 2. Части 3 и 4*, Издательский дом Дело РАНХиГС Москва, 2011. — 576 с.
- [14] Росси, Э., *Одномерные GARCH-модели: обзор*, Квантиль, №8, с. 1–67, 2009.
- [15] Black, F. (1976). *Studies of stock price volatility changes*. Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, pp. 177–181.
- [16] Black, F. and Scholes, M. (1972). *The valuation of option contracts and a test of market efficiency*. The Journal of Finance, 27(2), 399–417.
- [17] Bollerslev, T. (1986). *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of Econometrics, 31(3), 307–327.
- [18] G. E. Box, G. M. Ljung, *On a measure of lack of fit in time series models*, Biometrika, 65(2), pp. 297–303, 1978.
- [19] T. S. Breusch, A. R. Pagan, *A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation*, Econometrica, 47(5), pp. 1287–1294, 1979.
- [20] W. Enders, *Applied Econometric Time Series*, John Wiley & Sons; 2nd edition, 2004.

- [21] Engle, R. F. (1982). *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation*. *Econometrica*, pp. 987–1007.
- [22] Engle, R. F. and Granger, C. W. (1987). *Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing*. *Econometrica*, pp. 251–276.
- [23] Fantazzini D., *Quantitative Finance with R and Cryptocurrencies*, — Amazon KDP United States, 2019. — 586 p.
- [24] R. Frisch, *Editor's note*, *Econometrica*, vol. 1, pp. 1–4, 1933.
- [25] W. J. Greene, *Econometric Analysis*, Prentice Hall, 6th edition, 2007.
- [26] J. D. Hamilton, *Time series analysis*, Princeton University Press, 1994.
- [27] E. J. Hannan, B. G. Quinn, *The Determination of the order of an autoregression*, *J. of the Royal Statistic Society. Series B*, v. 41, No 2, pp.190–195, 1979.
- [28] Merton, R. C. (1973). *Theory of rational option pricing*. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, pages 141–183.
- [29] Markowitz, H. (1952). *Portfolio selection*. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- [30] Nelson, D. B. (1991). *Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach*. *Econometrica*, pp. 347–370.
- [31] Sims, C. A. (1980). *Macroeconomics and reality*. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 1–48.
- [32] Sharpe, W. F. (1964). *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*. *The Journal of Finance*, 19(3), 425–442.
- [33] G. Schwarz, *Estimating the dimension of a model*, *Ann. Statistic*, 6, pp. 461–464, 1978.

- [34] J. H. Stock, M. W. Watson, *Introduction to Econometrics*, Addison Wesley, 2nd edition, 2006.
- [35] Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies*, 25(2):65–86.
- [36] H. White, *A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity*, *Econometrica*, v. 48, No 4, pp.817–838, 1980.
- [37] J. M. Wooldridge, *Introductory Econometrics. A modern approach*, Forth Edition. 2009.

Учебное издание

**Артамонов Никита Вячеславович,
Ивин Евгений Александрович,
Курбацкий Алексей Николаевич
Фантаццини Деан**

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Учебное пособие для вузов

Подписано в печать 20.01.2021 г.
Формат 60 × 84/16. Печать цифровая.
Усл.печ.л. 7,79. Тираж 110 экз. Заказ № 17.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Вологодский научный центр Российской академии наук»
(ФГБУН ВолНЦ РАН)

Россия, 160014, г. Вологда, ул. Горького, 56а
Тел. (8172) 59-78-03, e-mail: common@vscc.ac.ru

ISBN 978-5-93299-496-2



9 785932 994962