Александр Никитич <neutec@yandex.ru>
http://neutec.narod.ru
[Последнее обновление от 12.09.2006]

Заметка

Троичная арифметика

Введение

Рассматриваются троичная симметричная система счисления (ТСС) и операции производимые в ней. Благодаря тому, что основание нечетно (основание системы 3), в такой системе возможно симметричное относительно нуля представление значений: отрицательное, нулевое, положительное. Такую систему еще называют троичной симметричной (уравновешенной) системой счисления.

В троичной системе веса соседних разрядов различаются в три раза. В общем виде число в троичной системе можно представить как сумму целых степеней числа 3, причем знак слагаемого определяется значением соответствующего разряда. Иными словами:

$a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + a_{-2} \cdot 3^{-2} + \ldots a_{-m+1} \cdot 3^{-m+1} + a_{-m} \cdot 3^{-m}$, где $a_i \in [-1,0,1]$, $n,m,i \in \mathrm{N}$. Причем $a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0$ – целая часть числа, $a_{-1} \cdot 3^{-1} + a_{-2} \cdot 3^{-2} + \ldots a_{-m+1} \cdot 3^{-m+1} + a_{-m} \cdot 3^{-m}$ – дробная часть.

Существует несколько вариантов обозначения алфавита троичной системы счисления:

- Н.П. Брусенцов [1] ввел для обозначения символы $\overline{1}$, 0, 1 (для обозначения $\overline{1}$ может использоваться символ i).
- На сайтах NedoPC.org [2] и Ternary.info [3], используется символы N, 0, P, или N, Z, P.
- Автор совместно с А.В.А. используют для обозначения символы $^{-}$, 0, $+$.

Десятичное представление троичного числа выражается как сумма произведений значения разряда на соответствующую этому разряду степень числа 3 (в десятичном представление).

Так в троично-симметричной системе число $+-+$ в десятичном представлении является числом 7: $+-+_3 = 1 \cdot 3^2 + (-1) \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 7$.

Для перевода из десятичной системы в троичную, можно воспользоваться следующим алгоритмом:

1. выполняем деление в десятичной системе исходное число на 3;
2. если остаток от деления равен 2, записываем его как $\bar{}$, а к результату от деления добавляем 1;
3. если результат меньше 3, начинаем записывать результат перевода, п.5;
4. делим результат на 3, затем и повторяем действия описанные в п.2;
5. если результат 2, то его переписываем как $-+$;
6. переписываем полученные значения остатков (снизу-вверх), начиная с последнего результата деления.

```
 _1 9|3              _1 9|3
  1 8 6|3      ⇒      1 8 6|3        ⇒   + − 0 +
  ‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾         ‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾
    1 6 2               + 6 − +
      0                   0
```

Данный способ больше пригоден для преобразования с вычислительным устройством, так как если необходимо преобразовать большое число придется выполнять соответственно большое число операций деления.

Ключевая особенность ТСС – наличие знака числа в самом алфавите, т.е. однозначно определяется знак числа по самому числу. Если ведущий ненулевой разряд отрицателен, то и само число является отрицательным. Изменение знака числа производится инвертированием каждого разряда числа: положительный разряд меняется на отрицательный и наоборот, ноль остается без изменений.

$5_{10} = +\,-\,-$

$-\,5_{10} = -\,+\,+$

Другой важной особенностью является механизм округления чисел, простым отбрасыванием младших разрядов получается наилучшее при данном оставшемся количестве цифр приближение этого числа и округление не требуется. Это следствие того, что абсолютная величина части числа, представленной отбрасываемыми младшими цифрами, никогда не превосходит половины абсолютной величины части числа, соответствующей младшей значащей цифре младшего из сохраняемых разрядов.

Округлим число $0{,}+\ +\ ++ = 0{,}493827$ до 3 знаков после запятой: $0{,}+\ +\ + = 0{,}48148$, до 2 знаков дает: $0{,}++ = 0{,}4444(4)$, до 1 знака – $0{,}+ = 0{,}3333(3)$.

Сложение

Сложение производится по общим правилам для позиционных систем с учетом таблицы 1.

Таблица 1

Слагаемое	+	+	+	-	-
Слагаемое	+	0	-	0	-
Сумма	-	+	0	-	+
Перенос	+	0	0	0	-

Оптимально в троичных ЭВМ производить сложение сразу 4 слагаемых, одно из которых является переносом от предыдущей операции. Такая постановка обусловлена тем, что только при 5 слагаемых может появиться второй знак переноса, в двоичных системах так можно складывать только 2 слагаемых.

$$\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \\ \hline ? \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} +\,- \\ +\,- \\ \hline +\,+ \end{array}$$

Вычитание

Операция вычитание выполняется через сложение с инвертированием одного из слагаемых, т.е одно из слагаемых меняет знак.

«+0-» - «-+» = «+0-» + «+-» = «+0+».

Умножение

Умножение производится по общим правилам для позиционных систем с учетом таблицы 2.

Таблица 2

	+	0	-
+	+	0	-
0	0	0	0
-	-	0	+

Умножение 8 на 8, в результате получаем 64:

$$
\begin{array}{r}
\times\; +0- \\
+0- \\
\hline
-0+ \\
{}^{+}\,000 \\
{}^{+}\,+0- \\
\hline
+-+0+
\end{array}
$$

Умножение в ТСС на 3^n, где $n > 0, n \in N$, сводится к добавлению к числу n – младших разрядов с нулевым значением: $4 = ++$; $12 = ++0$; $36 = ++00$, также эта операция называется троичный сдвиг влево.

Деление

Деление производится по общим правилам для позиционных систем. При делении столбиком, если разрядность остатка от деления не уменьшилось, необходимо произвести его деление без добавления следующего разряда делимого, а результат записать под предыдущем результатом, затем необходимо сложить полученные результаты поразрядно. Удобно заменять операцию вычитания – операцией сложения, для этого вычитаемое необходимо инвертировать, после чего можно производить сложение.

Деление 25 на 5:

$$
\begin{array}{l|l}
-\;+0-+ & +-- \\
\;\;+-- & +
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{l|l}
+\;+0-+ & +-- \\
\;\;-++ & ++ \\
\hline
\;\;0+0+ & + \\
\;\;\;\;-++ & \\
\hline
\;\;\;\;+-- & \\
\;\;\;\;-++ & \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;0 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r}
++ \\
+ \\
\hline
+--
\end{array}
\Rightarrow
+--
$$

Операцию вычитания заменяем сложением, в результате второй операции получается остаток с разрядностью равной разрядности делителя, т.е. необходимо произвести деление остатка без займа следующего разряда делимого. Полученный результат записываем под предыдущим результатом, а затем производим поразрядное сложение полученных результатов.

Аналогично операции умножения при делении числа на 3^n, где $n > 0, n \in N$, происходит троичный сдвиг вправо: $18 = +-00$; $6 = +-0$; $2 = +-$;

$\frac{2}{3} = +,-$.

Признак делимости на 2

Число *a* в ТСС можно представить в виде

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = (3^n - 1) \cdot a_n + (3^{n-1} - 1) \cdot a_{n-1} \ldots + (3^2 - 1) \cdot a_2 + (3 - 1) \cdot a_1 + a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0,$$

где $a_i \in \{-1, 0, 1\}$, *i=0, 1, …, n*, $a_n \neq 0$.

Обозначим $b = (3^n - 1) \cdot a_n + (3^{n-1} - 1) \cdot a_{n-1} ... (3 - 1) \cdot a$,

$c = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$, т.е. $a = b + c$.

Рассмотрим число $b = (3^n - 1) \cdot a_n + (3^{n-1} - 1) \cdot a_{n-1} ... (3 - 1) \cdot a$.

Множителями a_i, является $(3^k - 1)$.

При любом $k \geq 1$ $(3^k - 1) = (3 - 1) \cdot \left(3^{k-1} + 3^{k-2} + ... + 3 + 1\right) = 2 \cdot \left(3^{k-1} + 3^{k-2} + ... + 3 + 1\right)$, следовательно, можно записать $b = 2 \cdot (...)$, т.е. b делится 2.

Следовательно, число $a = b + c$ делится на 2 тогда, когда делится на 2 число $c = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$, которое представляет собой сумму цифр числа a.

Число в ТСС делится на 2 (число четное), если сумма его цифр делится на 2.

Числа, которые делятся на 2			Числа, которые не делятся на 2		
ТСС	Сумма цифр	ДПСИ	ТСС	Сумма цифр	ДПСИ
+-	0	2	+	1	1
++	2	4	+0	1	3
+-0	2	6	+--	-1	5
+0-	2	8	+-+	1	7
+0+	2	10	+00	1	9
++0	2	12	++-	1	11
+---	4	14	+++	3	13

Признак делимости на 3

Число *a* в ТСС можно представить в виде

$a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} = 3^n \cdot a_n + 3^{n-1} \cdot a_{n-1} ... 3^1 \cdot a_1 + 3^0 \cdot a_0$, где $a_i \in \{-1, 0, 1\}$, *i=0, 1, …, n*, $a_n \neq 0$.

Зададим число $b = a - a_0$, т.е.

$b = 3^n \cdot a_n + 3^{n-1} \cdot a_{n-1} ... 3^2 \cdot a_2 + 3^1 \cdot a_1 = 3 \cdot \left(3^{n-1} \cdot a_n + 3^{n-2} \cdot a_{n-1} ... 3 \cdot a_2 + a_1\right)$

Отсюда следует, что число b делится на 3, а число $a = b + a_0$ делится на 3 тогда и только тогда, когда a_0 делится на 3, этому соответствует значение $a_0 = 0$, таким образом, числа в ТСС делятся на 3, если младший разряд равен нулю.

Числа, которые делятся на 3		Числа, которые не делятся на 3	
ТСС	ДПС	ТСС	ДПС
+0	3	+	1
+-0	6	+-	2
+00	9	++	4
++0	12	+0-	8

Литература:

1. http://cs.msu.su/jetspeed/portal/content/view/person/general?id=4053751
2. http://www.nedopc.org/forum/
3. http://www.ternary.info/
4. http://flags.pfu.edu.ru/content/Lib/math/Gromov/OralExams/chapt1.pdf