

# 1. 全停机问题:

假设  $H$  可以判定  $\#M$  是否属于  $\mathcal{R}$

且  $H(\#M) = \begin{cases} 1 & M \text{ 在所有输入下停机} \\ 0 & \text{存在输入使 } M \text{ 不停机} \end{cases}$

则构造图灵机  $D$  正好与  $H$  相反

即  $H(\#M) = 1 \quad D(\#M) \text{ 不停机} \quad H(\#M) = 0 \quad D(\#M) \text{ 停机}$

则对于  $D(\#D)$ , 若  $H(\#D) = 1$  则  $D$  在所有输入下停机, 则  $D(\#D)$  不停机, 矛盾!

若  $H(\#D) = 0$  则存在输入  $D$  不停机, 此时  $D(\#D)$  停机, 矛盾!

$\therefore H$  并不存在, 即  $\mathcal{R}$  不可判定  $\square$

2. 1. 设  $M_1$  为一个全常数函数, 如果存在  $M_2$ ,  $M_1, M_2$  在所有输入下相同, 则  $M_2$  也为全常数函数  $\#M_2 \in C$ , 所以  $C$  为指标集。存在  $f(x) = 1$  为全常数函数  $\therefore C \neq \emptyset$ ,  $g(x) = x$  不是全常数函数  $\therefore C \neq U$

由莱斯定理可知  $C$  不可判定

2. 同 1. 设  $M_1$  是一个全函数, 若存在  $M_2$ ,  $M_1, M_2$  在所有输入下输出相同, 则  $M_2$  也为全函数  $\#M_2, \#M_1 \in T$ . 即  $T$  为指标集

$\therefore$  存在  $f(x) = x$  为全函数  $\therefore T \neq \emptyset$

存在  $g(x) = \frac{1}{x}$  为非全函数  $\therefore T \neq U$

由莱斯定理知,  $T$  不可判定