Metody numeryczne
Laboratorium 7: Całowanie numeryczne – cz.2

1. Podstawy

Obliczanie całek oznaczonych funkcji za pomocą wzorów kwadraturowych, polega na wyborze wag w_i i węzłów interpolacji x_i takich, żeby obliczona wartość najlepiej przybliżała całkę:

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{1}$$

gdzie f jest dowolną funkcją określoną w przedziale $[a, b]$, w jest tzw. funkcją wagową.
Kwadratury z przedziału $[-1, 1]$ z wagą w=1 nazywane są kwadraturami Gaussa-Legendre'a (G-L):

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{2}$$

Współrzędne węzłów i wagi stosowane w kwadraturze G-L podane są w poniższej tabeli.

Number of points, n	Points, x_i		Weights, w_i	
1	0		2	
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	±0.57735…	1	
3	0		$\frac{8}{9}$	0.888889…
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	±0.774597…	$\frac{5}{9}$	0.555556…
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	±0.339981…	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	0.652145…
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	±0.861136…	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	0.347855…
5	0		$\frac{128}{225}$	0.568889…
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	±0.538469…	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$	0.478629…
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	±0.90618…	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$	0.236927…

Obliczenie całki z wykorzystaniem kwadratury, wymaga zmiany przedziału całkowania. Jeżeli przedział całkowania $[-1, 1]$ oznaczymy na pomocniczej osi jako ξ, to przekształcenie liniowe zmiennej ξ na x ma postać:

$$x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2} \tag{3}$$

Wykorzystując przekształcenie liniowe (3) i wzór całkowania przez podstawienie otrzymujemy:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right) \frac{dx}{d\xi} d\xi \tag{4}$$

gdzie $dx/d\xi = (b-a)/2$.

Dla n punktowej kwadratury otrzymujemy wartość przybliżoną całki:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2}\xi_i + \frac{b+a}{2}\right) \tag{5}$$

2. Przykład

Obliczyć całkę funkcji $f(x) = 5x^3 - 12x^2 - x + 3$ w przedziale $[-2, 3]$ dwupunktową kwadraturą G-L:

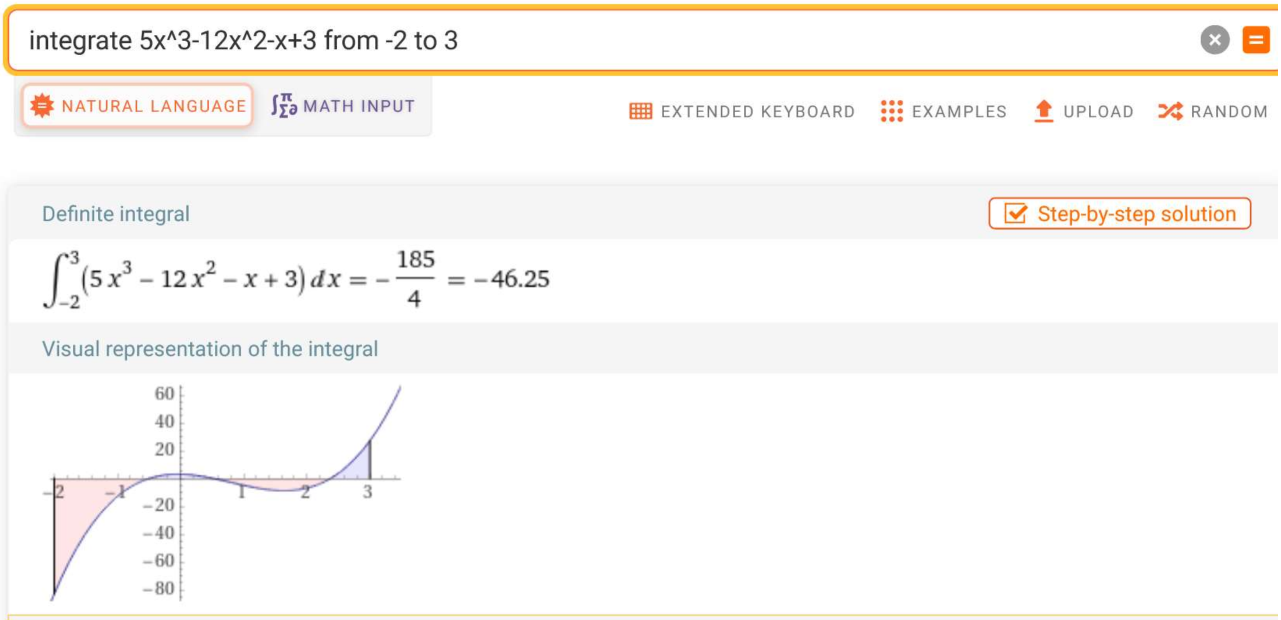
$$I(f) \approx \sum_{i=1}^{2} w_i f(x_i)$$

$$I(f) \approx \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{b-a}{2}\cdot(-0.5773503) + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2}\cdot 0.5773503 + \frac{b+a}{2}\right)\right]$$

$$I(f) \approx \frac{5}{2}\left[f\left(\frac{5}{2}\cdot(-0.5773503) + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\cdot 0.5773503 + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$I(f) \approx -46,250005$$

Poniżej przedstawiono fragment sesji Mathematica. Dla danych z zadania, należy obliczyć wartość całek funkcji.



3. Zadania

Oblicz poniższe całki za pomocą 2, 3 i 4 węzłowych kwadratur G-L:

$$\int_{1}^{4.8} x^2 \sin^3(x) dx$$

$$\int_{-1.5}^{3.2} \exp(x^2)(1-x) dx$$

Implementacja musi zawierać:

- funkcje obliczające funkcje podcałkowe
- funkcję obliczającą kwadraturę, jednym z jej argumentów jest funkcja podcałkowa

Literatura

[1] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody Numeryczne, WNT, 2001
[2] Jankowscy J. i M., Przegląd metod i algorytmów numerycznych, WNT, 1988
[3] Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna 2006