Metody numeryczne

Laboratorium 4: Rozwiązywanie układu równań liniowych – metoda eliminacji Gaussa

1. Podstawy

Celem ćwiczenia jest rozwiązanie układu równań liniowych w postaci:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,$$

…

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Układ składa się z n równań i n niewiadomych oznaczonych jako $x_1, x_2, \dots, x_n$. Wartości a_{ij} i b_i są znanymi wartościami rzeczywistymi. Korzystając z notacji macierzowej układ równań można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Zapis ten można sprowadzić do mnożenia macierzy, który zapisujemy jako:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Oznaczając macierz współczynników $[a_{ij}]$, zmienne $[x_j]$ i wyrazy wolne $[b_i]$ odpowiednio jako $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{b}$, otrzymujemy następującą macierzowe równanie liniowe:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Wygodne jest pominięcie w zapisie macierzy x i operowanie na macierzy uzupełnionej (rozszerzonej), złożonej z elementów macierzy $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{b}$, w której wyrazy a_{ij} oddziela się od wyrazów b_i pionową kreską:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

Taki układ równań można przekształcić na równoważny, który ma takie samo rozwiązanie. Za pomocą operacji elementarnych przekształcamy układ równań na prostszy, który następnie rozwiązujemy.

Operacje elementarne przekształcające układ równań polegają na:

- przestawieniu wierszy dwóch równań w układzie,
- pomnożeniu obu stron równania przez liczbę różną od 0.0,
- dodanie stronami do równania wielokrotności innego równania.

Algorytm eliminacji Gaussa jest iteracyjnym przekształceniem układu równań $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, do postaci $\widehat{\boldsymbol{A}}\mathbf{x} = \widehat{\boldsymbol{b}}$, gdzie $\widehat{\boldsymbol{A}}$ jest trójkątną macierzą górną. Macierz trójkątna górna zawiera elementy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$. Nowy układ równań ma to samo rozwiązanie jak pierwotny. Nowy układ równań można łatwo rozwiązać, obliczając niewiadome x od ostatniej do pierwszej.

2. Przykład

Dany jest następujący układ równań liniowych:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -11 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Macierz rozszerzona dla tego układu ma postać:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

Procedura redukcji wierszy polega kolejno na:

- eliminacji zmiennej x_1 z wszystkich równań poniżej R_1,
- eliminacji y ze wszystkich równań poniżej R_2,
- jeżeli liczba zmiennych jest większa, procedura jest powtarzana dla kolejnych zmiennych.

W wyniku tej procedury otrzymujemy trójkątną macierz górną.

$$\begin{aligned} R_2 + \tfrac{3}{2}R_1 &\to R_2 \\ R_3 + R_1 &\to R_3 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccr|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$R_3 + -4R_2 \to R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccr|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Wynikiem jest macierz trójkątna. Następnie podstawiamy zmienne od ostatniego wiersza do pierwszego.

$$\begin{aligned} &x_3 = 1/(-1) = -1 \\ &x_2 = (1 - (\frac{1}{2}(-1)))/\frac{1}{2} = 3 \\ &x_1 = (8 - 3 - (-1)(-1))/2 = 2 \end{aligned}$$

3. Uwagi

- Jeżeli podczas elementarnych przekształceń równań otrzymamy wiersz zerowy (zerowe wartości wszystkich współczynników) wtedy będziemy mieli problem z rozwiązaniem takiego układu równań. Stanie się tak wtedy, jeśli wyrazy jednego wiersza różnią się od wyrazów drugiego wiersza jedynie o stałą - dwa wiersze są liniowo zależne od siebie.
- W trakcie eliminacji Gaussa może się zdarzyć, że element stosowany do eliminacji k-tej zmiennej $a_{kk} = 0$ (element na przekątnej macierzy). W takim przypadku można zastosować tzw. wybór częściowy (ang. pivoting). Szukamy elementu o maksymalnej wartości modułu w k-tej kolumnie pod elementem $a_{kk} = 0$. Następnie należy przestawić znaleziony wiersz z k-tym wierszem. Dzięki wyborowi wiersza z maksymalnym modułem, minimalizujemy błąd zaokrągleń.

  Przykład:

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

  $k = 2$, $a_{22} = 0$, zamiana wiersza 2 i 3

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \end{array}\right]$$

4. Zadania

W dołączonych do zadania plikach *„gauss_elimination_gr*_A.txt*”, *„gauss_elimination_gr*_B.txt*” i *„gauss_elimination_gr*_C.txt*” znajdują się dane do zadania. Dane należy skopiować z fragmentu oznaczonego liczbą porządkową, taką samą jak na liście obecności. Dane do zadania należy zapisać do nowego pliku tekstowego, który będzie odczytywany przez program.

Napisz program w dowolnym języku implementujący:

- wczytywanie z pliku tekstowego danych do programu: liczby niewiadomych n, współczynników równania a_{ij} i wyrazów wolnych b_i
- wypisz macierze otrzymane w kolejnych krokach algorytmu
- wypisz otrzymane rozwiązanie równania
- uwzględnij przypadek liniowej zależności wierszy i częściowy pivoting.

Literatura

[1] Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna 2006

[2] Fortuna, Macukow, Wąsowski - Metody numeryczne 1993