

## Metody numeryczne

### Laboratorium 3: Interpolacja wielomianem w postaci Newtona

#### 1. Postacie wielomianu

##### 1.1 Wielomian w postaci naturalnej

Wielomiany zapisywane są najczęściej z wykorzystaniem jednomianów  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ , czyli w postaci potęgowej. Taka forma zapisu w postaci naturalnej może powodować to, że drobne błędy wartości współczynników dają znaczne zmiany własności wielomianu, np. położenie miejsc zerowych. Wielomian  $W(x)$  dany jest wzorem:

$$W(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (1)$$

Obliczanie wielomianu w punkcie można zapisać np. w postaci:

$$w_0 = a_0,$$

$$w_i = w_{i-1} + a_i x x^{i-1}, \text{ dla } i = 1, \dots, n$$

Algorytm obliczający wartość wielomianu w punkcie  $x$ , wymaga więc  $2n$  mnożeń i  $n$  dodawań. Konieczne jest zapamiętanie  $n + 1$  współczynników  $a_i$ . Obliczanie wartości wielomianu bezpośrednio z równania (1) wymaga natomiast  $\frac{(n+1)n}{2}$  mnożeń i  $n$  dodawań.

##### 1.2 Wielomian w postaci Hornera

Zastosowanie postaci Hornera wielomianu przyspiesza obliczanie wartości wielomianu:

$$W(x) = a_0 + x \left( a_1 + x \left( a_2 + \dots + x \left( a_{n-2} + x \left( a_{n-1} + x a_n \right) \dots \right) \right) \right) \quad (2)$$

Algorytm Hornera obliczania  $W(x)$  jest następujący:

$$b_n = a_n,$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + x b_n,$$

$$b_{n-2} = a_{n-2} + x b_{n-1}$$

...

$$b_0 = a_0 + x b_1$$

W takim algorytmie obliczane jest  $n$  mnożeń i  $n$  dodawań.

### 1.3 Wielomian w postaci Newtona

Interpolacja funkcji za pomocą wielomianu w postaci Newtona stopnia  $n$  polega na obliczeniu wzoru:

$$W(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) =$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_1)(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)(x - x_0)$$
(3)

gdzie  $x_0, x_1, \dots, x_n$  są węzłami interpolacji, w których znane są wartości funkcji  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Zakładamy, że  $x_i \neq x_j$  dla  $i \neq j$  i węzły nie są równoodległe. Wielomian wymaga obliczenia  $2n$  mnożeń i  $2n$  dodawań.

Obliczenie wartości współczynników  $a_i$  wymaga obliczenia ilorazów różnicowych. Iloraz różnicowy pierwszego rzędu definiuje się jako:

$$f(x_{i-1}; x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$
(4)

Iloraz różnicowy drugiego rzędu obliczany jest rekurencyjnie:

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$
(5)

Iloraz różnicowy  $n$ -tego rzędu obliczamy z pomocą ilorazów różnicowych  $n - 1$  rzędu:

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; \dots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \dots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}$$
(6)

Procedura interpolacji polega na uzupełnianiu tabeli w kolejnych kolumnach. Dwie pierwsze kolumny są to wartości węzłów interpolacji i znane wartości funkcji. W kolejnych kolumnach dopisywane są ilorazy różnicowe coraz wyższych rzędów.

$x_i$	$f(x_i)$	$f(x_{i-1}; x_i)$	$f(x_{i-2}; x_{i-1}; x_i)$	...	$f(x_0; \dots; x_i)$
$x_0$	$f(x_0)$				
$x_1$	$f(x_1)$	$f(x_0; x_1)$			
$x_2$	$f(x_2)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_0; x_1; x_2)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$x_n$	$f(x_n)$	$f(x_{n-1}; x_n)$	$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)$	...	$f(x_0; \dots; x_n)$

Wartości współczynników  $a_i$  znajdują się na przekątnej utworzonej tabeli.

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f(x_0; x_1)$$

...

$$a_n = f(x_0; \dots; x_n)$$

## 2. Zadania

W dołączonym do zadania plikach: „*interpolacja\_H\_gr\_\*.txt*” i „*interpolacja\_N\_gr\_\*.txt*” znajdują się dane do zadania. Dane należy skopiować z fragmentu oznaczonego liczbą porządkową, taką samą jak na liście obecności. Dane do zadania należy zapisać do nowych plików tekstowych, który będą odczytywane przez program.

Napisz program w dowolnym języku implementujący:

- Wczytywanie z pliku tekstowego „*interpolacja\_H\_gr\_\*.txt*” danych do programu: wartości współczynników wielomianu ( $a_0, a_1, \dots, a_n$ ) i współrzędne punktów ( $x_0, x_1, \dots, x_n$ ).
- Obliczanie wartości wielomianu zadanego w postaci naturalnej dla wartości  $x$  wczytanej z pliku „*interpolacja\_H\_gr\_\*.txt*”.
- Obliczanie wartości wielomianu według schematu Hornera dla wartości  $x$  wczytanej z pliku „*interpolacja\_H\_gr\_\*.txt*”.
- Porównanie szybkość i dokładność obliczeń wartości wielomianów dwoma powyższymi metodami.
- Obliczanie i wypisanie wartości współczynników  $a_i$  wielomianu w postaci Newtona na podstawie danych z pliku „*interpolacja\_N\_gr\_\*.txt*”.
- Dla dowolnej wartości  $x$  wpisanej z klawiatury, program wypisuje wartość wielomianu.
- Oblicz błąd obliczeń w porównaniu z wartościami z pliku „*interpolacja\_H\_gr\_\*.txt*”.

## Literatura

- [1] Kincaid Cheney - Analiza numeryczna 2006