Metody numeryczne

Laboratorium 2: Interpolacja Lagrange'a

1. Podstawowe pojęcia

Interpolacja:

Metoda numeryczna polegająca na budowaniu w danym obszarze $\Omega \subset R^n$ tzw. *funkcji interpolacyjnej*, która przyjmuje w nim z góry zadane wartości w ustalonych *punktach nazywanych węzłami*. Funkcję φ określoną na przedziale [*a*,*b*] nazywa się funkcją interpolującą określoną w danych węzłach jeśli: $\varphi(x_k) = y_k$ dla wszystkich $k = 0, \dots, n$. *Węzeł funkcji* to argument funkcji, dla którego znana jest jej wartość. Zadaniem interpolacji jest znalezienie postaci analitycznej funkcji na podstawie znanych wartości w węzłach interpolacji. Możliwe jest także oszacowanie błędu tego przybliżenia w punktach nie będących węzłami.

Ekstrapolacja:

Prognozowanie wartości pewnej zmiennej lub funkcji *poza zakresem*, dla którego mamy dane. Ekstrapolacja realizowana jest przez dopasowanie do istniejących danych pewnej funkcji, następnie wyliczenie jej wartości w szukanym punkcie. Jest obarczona większą niepewnością i większym ryzykiem uzyskania błędnych wyników.

Aproksymacja:

Przybliżenie funkcji np. za pomocą wielomianu. Wiemy, że dla pewnego zbioru punktów $x_0, x_1, \dots, x_n$ funkcja przyjmuje wartości $y_0, y_1, \dots, y_n$. Naszym celem jest znalezienie wielomianu takiego, aby przybliżenie funkcji w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ było jak najlepsze.

2. Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f wielomianu L_n stopnia nie wyższego niż n, którego wartości w $n+1$ punktach x_i, są takie same jak wartości interpolowanej funkcji:

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{dla} \quad i = 0,1,\dots,n$$

Wielomian Lagrange'a pozwala na interpolację wartości funkcji za pomocą wartości znanych w punktach węzłowych. Wielomian jest wyrażony jako:

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

l_i jest wielomianem n-tego stopnia takim, że:

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Interpolowaną funkcję $f(x)$ można przedstawić w postaci wielomianu:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot l_i(x)$$

gdzie x_i i $f(x_i)$ są znanymi wartościami.

3. Przykład

Dane są wartości węzłów i wartości funkcji w tych węzłach. Znajdź wielomian interpolacyjny Lagrange'a:

x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	4.0	-3.0	5.0	-6.0

Wielomiany $l_i(x)$ dla $n = 4$ wyrażone są wartościami w węzłach:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{x\cdot(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-1)\cdot(-2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)\cdot x\cdot\ (x-2)}{(1+1)(1-2)}$$

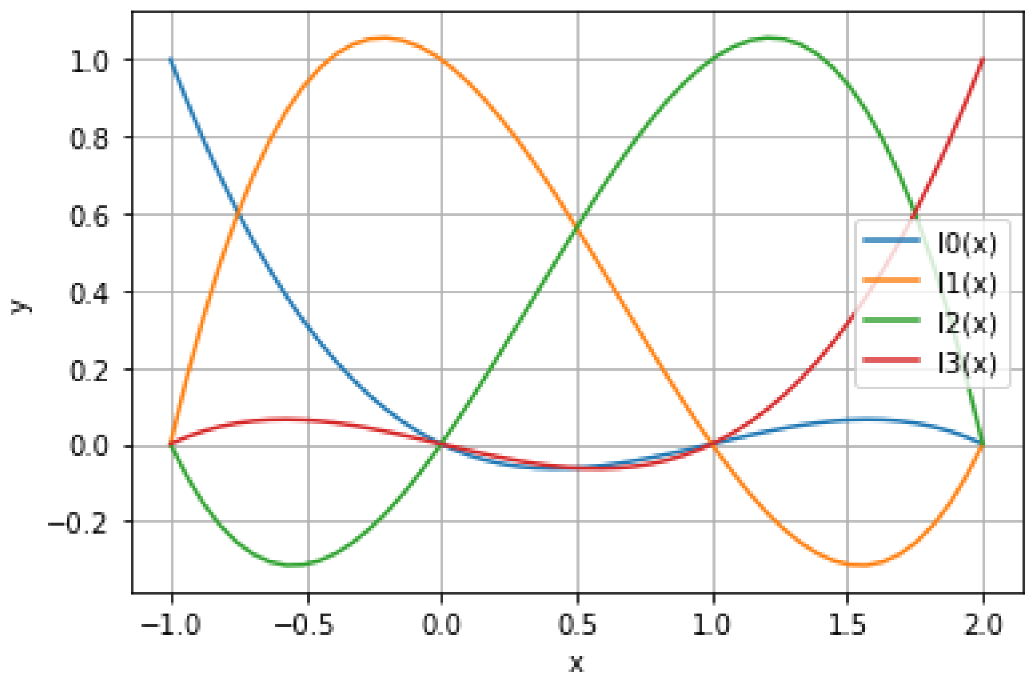
$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)\ \cdot x\cdot(x-1)}{(2+1)\cdot 2\cdot(2-1)}$$

Stąd wielomian interpolacyjny Lagrange'a wyrażony jest wzorem:

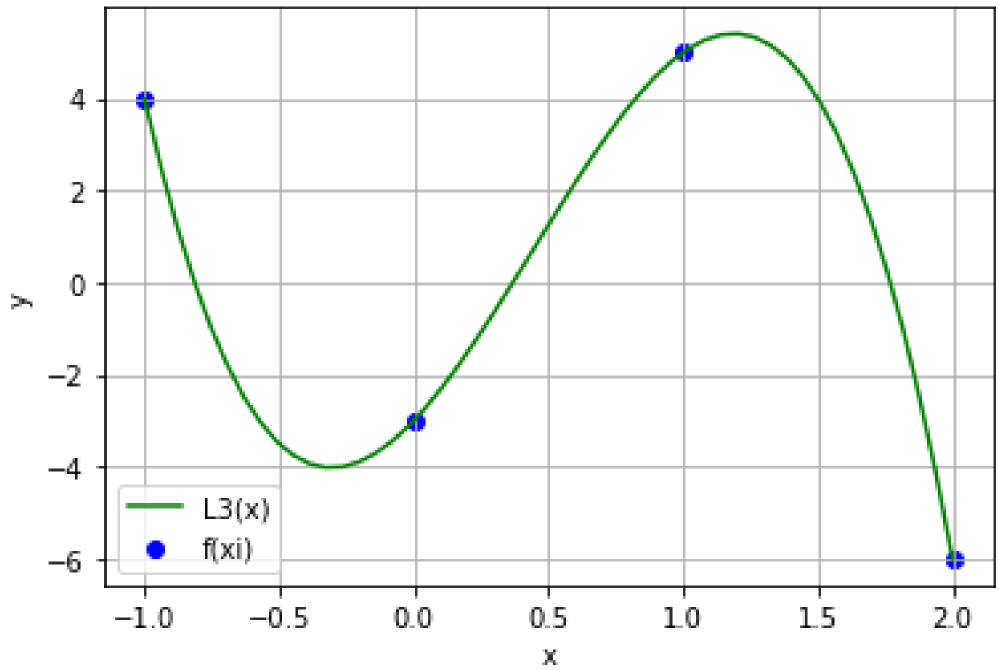
$$L_3(x) = 4\cdot l_0(x) - 3\cdot l_1(x) + 5\cdot l_2(x) - 6\cdot l_3(x)$$

Na poniższym rysunku widoczny jest przebieg wielomianów $l_i(x)$. Dla dowolnej wartości x:

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1.$$



Na kolejnym rysunku widoczna jest funkcja $L_3(x)$ (zielona linia) oraz wartości funkcji w punktach węzłowych $f(x_i)$ (niebieskie punkty).



4. Zadania

W dołączonym do zadania pliku *„interpolacja_gr_*.txt”* znajdują się dane do zadania (x_i, $f(x_i)$). Dane należy skopiować z fragmentu oznaczonego liczbą porządkową, taką samą jak na liście obecności. Dane do zadania należy zapisać do nowego pliku tekstowego, który będzie odczytywany przez program.

a) napisz program w dowolnym języku implementujący interpolację Lagrange'a:
   - wszystkie dane do programu wczytywane są z pliku tekstowego, zawierającego tylko własne dane: współrzędne węzłów i wartości funkcji
   - program oblicza wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie wpisanym z klawiatury przez użytkownika

b) napisz program obliczający wartość funkcji $y = \frac{1}{1+x^2}$ w zadanym przedziale [-5,5]. Zbadaj jak zmienia się dokładność obliczeń w zależności od liczby węzłów interpolacji.

Plik programu oraz plik własnych danych należy zapisać w Teams w udostępnionym zadaniu.

Zadanie a) należy oddać w trakcie zajęć. Zadanie oddane do tygodnia po terminie mogą uzyskać maksymalnie 70% punktów. Później oddane zadanie oceniane jest maksymalnie 20% punktów.

Literatura

[1] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody Numeryczne, WNT, 2001

[2] Jankowscy J. i M., Przegląd metod i algorytmów numerycznych, WNT, 1988