Metody numeryczne
Laboratorium 8: Aproksymacja

1. Aproksymacja średniokwadratowa funkcji ciągłych

Funkcję ciągłą $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ aproksymuje się następująco:

$$F(x) = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n \tag{1}$$

gdzie $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_n(x)$ są elementami bazy podprzestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem w przedziale $[a, b]$. Aproksymacja polega na znalezieniu takich współczynników a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, żeby otrzymać minimum normy:

$$H_n = \|F(x) - f(x)\| = \int_a^b w(x) \left[F(x) - f(x)\right]^2 dx \tag{2}$$

Przyjmujemy, że funkcja wagowa $w(x)$ jest stała i równa jedności. Wartości współczynników a_i obliczamy z pochodnych cząstkowych funkcji H, szukając ekstremum funkcji wielu zmiennych:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m \tag{3}$$

Rozwiązujemy $m + 1$ równań liniowych z $m + 1$ niewiadomych a_i:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 2\int_a^b \left[a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n - f(x)\right]\varphi_k(x)dx = 0 \tag{4}$$

Jedną z postaci funkcji funkcji $F(x)$ wykorzystuje bazę jednomianów:

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^m \tag{5}$$

2. Przykład

Aproksymuj funkcję $f(x) = sin(x)$ w przedziale $[0, \pi/2]$ wykorzystując bazę jednomianów:

$$1, \quad x, \quad x^2$$

Z równania (4) otrzymujemy trzy równania:

$$\frac{\partial H}{\partial a_0} = 2\int_0^{\pi/2} \left[a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 - \sin(x)\right] \cdot 1\, dx = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_1} = 2\int_0^{\pi/2} \left[a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 - \sin(x)\right] \cdot x\, dx = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_2} = 2\int_0^{\pi/2} \left[a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 - \sin(x)\right] \cdot x^2\, dx = 0$$

Rozpisując całkę sumy na sumę całek i przenosząc stałe na prawą stronę równań dostajemy:

$$a_0 \int_0^{\pi/2} dx + a_1 \int_0^{\pi/2} xdx + a_2 \int_0^{\pi/2} x^2 dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$$

$$a_0 \int_0^{\pi/2} xdx + a_1 \int_0^{\pi/2} x^2 dx + a_2 \int_0^{\pi/2} x^3 dx = \int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx$$

$$a_0 \int_0^{\pi/2} x^2 dx + a_1 \int_0^{\pi/2} x^3 dx + a_2 \int_0^{\pi/2} x^4 dx = \int_0^{\pi/2} x^2\sin(x)dx$$

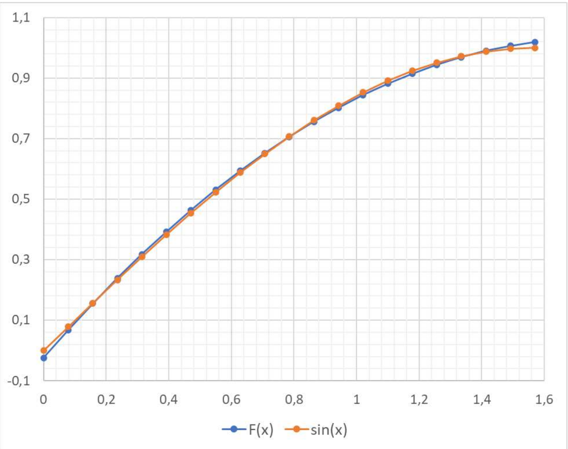
Po obliczeniu całek otrzymujemy:

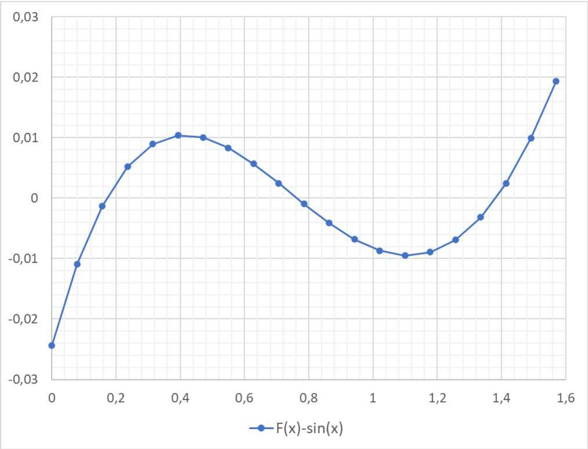
$$\frac{\pi}{2}a_0 + \frac{\pi^2}{8}a_1 + \frac{\pi^3}{24}a_2 = 1$$

$$\frac{\pi^2}{8}a_0 + \frac{\pi^3}{24}a_1 + \frac{\pi^4}{64}a_2 = 1$$

$$\frac{\pi^3}{24}a_0 + \frac{\pi^4}{64}a_1 + \frac{\pi^5}{160}a_2 = \pi - 2$$

Rozwiązując powyższy układu równań, otrzymujemy wartości współczynników a_i. Poniższe rysunki przedstawiają funkcję $\sin(x)$, $F(x)$ oraz błąd aproksymacji w wybranych węzłach.





3. Zadania

Wykonaj aproksymację średniokwadratową ciągłą w przedziale [-1,1] dla poniższej funkcji:

$$f(x) = e^x \cdot \sin(\frac{x}{2}) - x^3$$

Wykorzystaj bazę standardową:

$$1, x, x^2, x^3, x^4$$

Wyniki przedstaw w postaci wykresu z wartościami dokładnymi i zaproksymowanymi.

Literatura

[1] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody Numeryczne, WNT, 2001
[2] Jankowscy J. i M., Przegląd metod i algorytmów numerycznych, WNT, 1988
[3] Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna 2006