Metody numeryczne
Laboratorium 11: Rozwiązywanie równań nieliniowych – metoda Newtona i siecznych

1. Wprowadzenie

Celem ćwiczenia jest znalezienie rozwiązania równania postaci $f(x) = 0$, gdzie zmienna występuje nieliniowo. Niektóre równania mają rozwiązania, które można w łatwy sposób obliczyć analityczne. W przypadkach gdy rozwiązanie jest trudne do obliczenia lub niemożliwe, stosuje się rozwiązania przybliżone.

1.1 **Metoda Newtona**

Metoda Newtona jest szybsza od metod bisekcji i siecznych, szczególnie gdy przybliżenie jest bliskie pierwiastka. Metoda ta nie zawsze jest zbieżna, dlatego stosuje się w połączeniu z wolniejszą metodą. W metodzie zakłada się, że funkcja f posiada ciągłą pochodną f' oraz znane jest przybliżenie x_0 pierwiastka równania $f(x) = 0$. Obliczana jest wartość wyrażenia otrzymanego z twierdzenia Taylora, przybliżającego wartość funkcji w otoczeniu punktu x_0:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{1}$$

W kolejnych krokach dla $n > 1$ obliczamy:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

Obliczenia kończy warunek:

$$x_n - x_{n-1} \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

1.2 **Metoda siecznych**

W metodzie Newtona konieczne jest obliczenie pochodnej funkcji f' (wzór 2). Obliczenie pochodnej można zastąpić ilorazem różnicowym:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{4}$$

Podstawiając obliczoną wartość do równania (2) otrzymujemy równanie metody siecznych:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{5}$$

Nowa wartość x_{n+1} obliczana jest m.in. z dwóch poprzednich wartości x_n i x_{n-1}. Dlatego w pierwszej iteracji konieczne jest podanie dwóch punktów. W kolejnych iteracjach obliczana jest tylko jedna nowa wartość funkcji f.

2. Zadania

Zaimplementuj metody obliczania miejsc zerowych:

- metoda Newtona (pochodne wyznacz analitycznie i numerycznie)
- metoda siecznych

Powyższymi metodami, wyznacz miejsca zerowe następujących funkcji:

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$sin(x^2) - x^2 = 0$$

$$sin(x^2) - x^2 + \frac{1}{2} = 0$$

Kolejne przybliżenia miejsc zerowych przedstaw w postaci tabeli i wykresów.

Literatura

[1] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody Numeryczne, WNT, 2001
[2] Jankowscy J. i M., Przegląd metod i algorytmów numerycznych, WNT, 1988
[3] Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna 2006