

Metody numeryczne

Laboratorium 6: Całowanie numeryczne – cz.1

1. Podstawy

Obliczanie całki oznaczonej polega na zastosowaniu przybliżenia:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx \quad (1)$$

gdzie $g(x)$ jest wielomianem interpolującym funkcję $f(x)$. Jeżeli w przedziale całkowania $[a, b]$ wybierzemy węzły x_0, x_1, \dots, x_n i zastosujemy wzór interpolacyjny Lagrange'a, wtedy:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x), \quad \text{gdzie} \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2)$$

Przyjmując funkcję $p(x)$ jako przybliżenie $f(x)$ dostajemy:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx \quad (3)$$

Otrzymany wzór całkowania numerycznego nazywany jest kwadraturą:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (4)$$

gdzie:

$$A_i \approx \int_a^b l_i(x)dx \quad (0 \leq i \leq n) \quad (5)$$

Jeżeli węzły interpolacji są rozmieszczone równomiernie $x_i = a + ih$ ($0 \leq i \leq n$), gdzie $h = (b - a)/n$, to wzór całkowania numerycznego (4) jest nazywany wzorem Newtona-Cotesa.

Najprostszym wzorem całkowania numerycznego jest wzór trapezów, który ma postać:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \quad (6)$$

Wzór ten można uprościć dla jednakowych przedziałów całkowania.

Analogiczne obliczenia można przeprowadzić z wykorzystaniem wzoru Simpsona, dla n podprzedziałów równej długości. Uproszczony wzór Simpsona ma postać:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n}) \right] \quad (7)$$

gdzie $x_i = a + ih$ ($0 \leq i \leq 2n$), $h = (b - a)/(2n)$.

2. Przykład

Poniżej przedstawiono fragment sesji [Mathematica](#). Dla danych z zadania, należy obliczyć wartość całki dla otrzymanej funkcji.



integrate -3+12*x+4*x^2+10*x^3+2*x^4 dx from -1 to 3



NATURAL LANGUAGE



MATH INPUT



EXTENDED KEYBOARD



EXAMPLES



UPLOAD



RANDOM

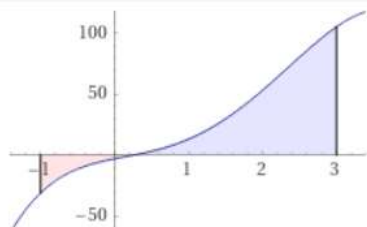
Definite integral

More digits

☒ Step-by-step solution

$$\int_{-1}^3 (-3 + 12x - 4x^2 + 10x^3 - 2x^4) dx = \frac{1516}{15} \approx 101.07$$

Visual representation of the integral



3. Zadania

W dołączonych do zadania pliku „kwadratury_gr*.txt” znajdują się dane do zadania. Dane należy skopiować z fragmentu oznaczonego liczbą porządkową, taką samą jak na liście obecności. Dane do zadania należy zapisać do nowego pliku tekstowego, który będzie odczytywany przez program.

Napisz program w dowolnym języku implementujący:

- Wczytywanie z pliku tekstowego danych do programu: stopień wielomianu n , współczynniki wielomianu a_i i przedział całkowania $[a, b]$.
- Obliczanie kwadratury Newtona-Cotesa dla otrzymanej funkcji w przedziale $[a, b]$, za pomocą wzoru trapezów i Simpsona.
- Do obliczania wielomianu należy wykorzystać schemat Hornera, zaimplementowany na wcześniejszych ćwiczeniach.
- Wykonaj obliczenia dla funkcji $\int_2^6 x^2 \cos^3(x) dx$.
- Przetestuj funkcje obliczające kwadratury dla różnych kroków całkowania.

Literatura

- [1] Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna 2006