Metody numeryczne

Laboratorium 9: Rozwiązywanie równań różniczkowych - cz.1

1. Metoda Eulera

Celem ćwiczenia jest rozwiązywanie numeryczne równań różniczkowych pierwszego rzędu z warunkiem początkowym. Rozważane jest zagadnienie początkowe typu:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \qquad x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{1}$$

Często nie znamy analitycznej postaci rozwiązania zagadnienia początkowego i poszukujemy rozwiązania metodami numerycznymi. Metody różnicowe wyznaczają przybliżenia wartości rozwiązania $y(x_i)$ w pewnych punktach x_i z przedziału całkowania $[a, b]$.

Krok całkowania h obliczany jest ze wzoru:

$$h = \frac{b - a}{N} \tag{2}$$

Stąd wartość punku x_i można rozpisać jako:

$$x_i = a + i \cdot h \tag{3}$$

gdzie $i = 0, 1, \ldots, N$

Problem polega na obliczeniu kształtu krzywej opisanej równaniem (1), która ma znany punkt początkowy i spełnia równanie różniczkowe. Po obliczeniu położenia kolejnego punktu, równanie (1) służy do obliczenia nachylenia stycznej w tym punkcie. Po wykonaniu N kroków algorytmu, otrzymujemy rozwiązanie w postaci krzywej. Jeden krok metody Eulera przejścia z punktu x_n do x_{n+1} można zapisać jako:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right) \tag{4}$$

Błąd rozwiązania równania różniczkowego metodą Eulera maleje, jeżeli zmniejszamy krok całkowania h. Błąd jednak rośnie wraz ze wzrostem przedziału całkowania.

2. Przykład

Dane jest równanie:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

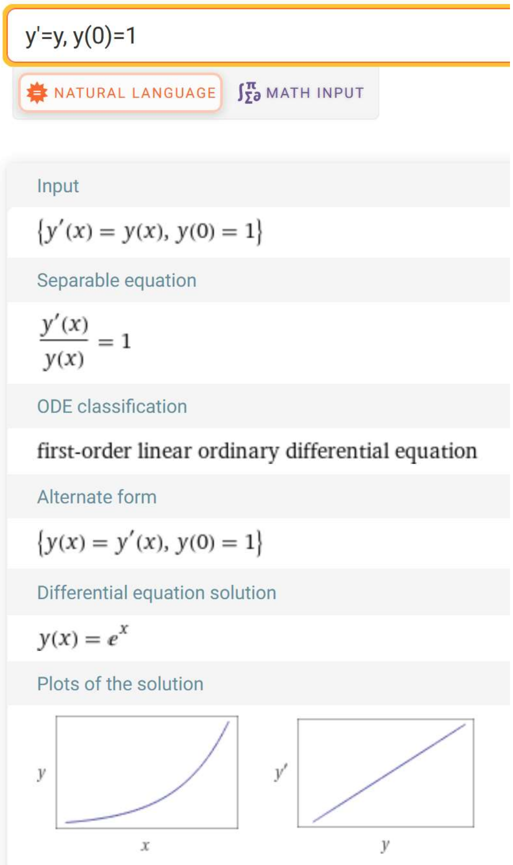
Położenie kolejnego punktu liczymy ze wzoru (3), przyjmując krok całkowania np. $h = 0.5$:

$$x_{n+1} = x_n + 0.5,$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.5 \cdot y_n = 1.5 y_n$$

$$\text{dla} \quad x_n = 4 \quad \text{mamy} \quad y_n \approx 25.62890625$$

Dokładne rozwiązanie możemy obliczyć np. na stronie Mathematica



Dokładne rozwiązanie w $x_n = 4$ wynosi $\exp(4) \approx 54,59815$.

3. Zadania

Równanie przewodnictwa cieplnego.

Kula nagrzana do temperatury 1200K schładza się do temperatury otoczenia. Jeżeli w procesie chłodzenia ciepło oddawane jest do toczenia tylko przez radiację, to zmiana temperatury opisana jest równaniem:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha \left(T^4 - \beta\right)$$

$$T(0) = T_0$$

gdzie $\beta = 0$, $\alpha = 10^{-12}$

- oblicz temperaturę kuli po 300s chłodzenia
- wykonaj obliczenia dla różnych kroków całkowania
- wyniki przedstaw w postaci wykresów zmian temperatury w czasie oraz w formie tabelarycznej

Literatura

[1] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody Numeryczne, WNT, 2001
[2] Jankowscy J. i M., Przegląd metod i algorytmów numerycznych, WNT, 1988
[3] Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna 2006