Metody numeryczne
Laboratorium 12: Rozwiązywanie równań nieliniowych –
metoda połowienia i fałszywej linii

1. Wprowadzenie

Celem ćwiczenia jest znalezienie rozwiązania równania postaci $f(x) = 0$, gdzie zmienna występuje nieliniowo. Niektóre równania mają rozwiązania, które można w łatwy sposób obliczyć analityczne. W przypadkach gdy rozwiązanie jest trudne do obliczenia lub niemożliwe, stosuje się rozwiązania przybliżone.

1.1 **Metoda bisekcji (połowienia przedziału)**

Zakładamy że funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$. Jeżeli $f(a)f(b) < 0$ to funkcja f zmienia znak w przedziale $[a, b]$. W takim przypadku f ma miejsce zerowe w $[a, b]$, ponieważ przyjmuje w nim wszystkie wartości zawarte między $f(a)$ i $f(b)$.

Metoda bisekcji korzysta z powyższych własności. Jeżeli $f(a)f(b) < 0$, obliczana jest wartość $c = (a + b)/2$ i sprawdzane jest, czy $f(a)f(c) < 0$. Jeżeli tak, to f ma zero w $[a, c]$ i za b podstawiamy c. W przeciwnym przypadku $f(c)f(b) < 0$ i wtedy pod a podstawiamy c. W kolejnym kroku mamy więc dwa razy krótszy przedział, który zawiera miejsce zerowe f i obliczenia można powtórzyć. Metoda bisekcji daje tylko jedno zero funkcji. Obliczenia kończymy jeżeli $|f(c)| < \varepsilon$, gdzie ε jest precyzją obliczeń.

1.2 **Metoda fałszywej linii (regula falsi)**

Metoda opiera się na fałszywym założeniu liniowości funkcji. Przyjmuje się, że w przedziale $[a, b]$ równanie (1) ma dokładnie jeden pierwiastek i na końcach przedziału funkcja ma różne znaki, czyli $f(a)f(b) < 0$.

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Zakładamy, że funkcja $f(x)$ jest klasy C^2 - pierwsza i druga pochodna funkcji są ciągłe. Dodatkowo, pierwsza i druga pochodna mają stały znak w przedziale $[a, b]$.

Algorytm składa się z następujących kroków:

- Przez punkt $A = (a, f(a)$ i $B = f(b, f(b))$ prowadzona jest prosta.
- Punkt przecięcia przez prostą osi X jest pierwszym przybliżeniem pierwiastka x_1.
- Jeżeli ten pierwiastek jest wystarczająco dokładny, kończymy algorytm.
- Prowadzimy prostą przez punkt $(x_1, f(x_1))$ i punkty A lub B – o wyborze decyduje zmiana znaku rzędnej w stosunku do $f(x_1)$. Ponieważ pierwsza i druga pochodna $f(x)$ ma stały znak, jeden z punktów przedziału A lub B będzie stały w algorytmie.

- Obliczany jest kolejny punkt przecięcia prostej z osią X i przechodzimy do kolejnej iteracji.

Pierwszy punkt przecięcia prostej z osią X obliczany jest ze wzoru:

$$x_1 = \frac{af(b)–bf(a)}{f(b)-f(a)} \tag{2}$$

W kolejnych iteracjach dla $i = 1, 2, \ldots$, punkt przecięcia obliczany jest następująco:

$$x_{i+1} = \begin{cases} \frac{x_i f(a) - af(x_i)}{f(a) - f(x_i)} & gdy \quad f(a)f(x_i) < 0 \\ \\ \frac{x_i f(b) - bf(x_i)}{f(b) - f(x_i)} & gdy \quad f(b)f(x_i) < 0 \end{cases} \tag{3}$$

2. Zadania

Zaimplementuj metody obliczania miejsc zerowych:

- metoda bisekcji
- metoda fałszywej linii

Powyższymi metodami, wyznacz miejsca zerowe następujących funkcji:

$$4 \cdot x + sin(x) - e^x = 0$$

$$3 \cdot x^4 - 6 \cdot x^2 + x + 2 = 0$$

$$x^2 - 3 \cdot x \cdot sin(x) + (3 \cdot sin(x))^2 - 6 = 0$$

Kolejne przybliżenia miejsc zerowych przedstaw w postaci tabeli i wykresów.

Literatura

[1] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody Numeryczne, WNT, 2001
[2] Jankowscy J. i M., Przegląd metod i algorytmów numerycznych, WNT, 1988
[3] Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna 2006