Metody numeryczne

Laboratorium 10: Rozwiązywanie równań różniczkowych - cz.2

1. Wprowadzenie

Celem ćwiczenia jest rozwiązywanie numeryczne równań różniczkowych pierwszego rzędu z warunkiem początkowym. Rozważane jest zagadnienie początkowe typu:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \qquad x \in [a,b] \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{1}$$

Metoda Eulera rozwiązania równań (1) zakładała, że styczna krzywej (x_i, y_i) jest obliczana za pomocą $f(x_i, y_i)$. W przypadku gdy druga pochodna jest tylko dodatnia lub ujemna w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$, to obliczona wartość y_{i+1} coraz bardziej oddala się od krzywej.

Metody które dają szybszą zbieżność w porównaniu z klasyczną metodą Eulera to m.in.:

- **metoda Heuna**

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right] \end{aligned} \tag{2}$$

- **metoda punktu środkowego**

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right) \tag{3}$$

- **metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu**

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \\ \Delta y_i &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_i, y_i\right) \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf\left(x_i + h, y_i + k_3\right) \end{aligned} \tag{5}$$

2. Zadania

Równanie przewodnictwa cieplnego.

Kula nagrzana do temperatury 1200K schładza się do temperatury otoczenia. Jeżeli w procesie chłodzenia ciepło oddawane jest do toczenia tylko przez radiację, to zmiana temperatury opisana jest równaniem:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha \left(T^4 - \beta\right)$$

$$T(0) = T_0$$

gdzie $\beta = 0$, $\alpha = 10^{-12}$

- oblicz temperaturę kuli po 300s chłodzenia trzema metodami
- wykonaj obliczenia dla różnych kroków całkowania
- wyniki przedstaw w postaci wykresów zmian temperatury w czasie oraz w formie tabelarycznej
- porównaj wyniki z poprzedniego ćwiczenia

Literatura

[1] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody Numeryczne, WNT, 2001
[2] Jankowscy J. i M., Przegląd metod i algorytmów numerycznych, WNT, 1988
[3] Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna 2006