Curvas e Superfícies - Lista 7

Wellington José Leite da Silva[1]

[1]Escola de Matemática Aplicada da FGV (EMAP), Brazil

Problema 1: Provar que toda bola aberta $B(x, r)$ é um conjunto aberto

Solução:
Seja $y \in B(x, r)$. Queremos provar que $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(y, \varepsilon) \subseteq B(x, r)$. Definimos para isto $\varepsilon := r - |y - x| > 0$. Logo, dado qualquer ponto $z \in B(y, \varepsilon)$, temos que

$$\begin{aligned} |z - x| &\leq |z - y| + |y - x| \\ &< \varepsilon + |y - x| \\ &= r - |y - x| + |y - x| \\ &= r \end{aligned}$$

Logo, $z \in B(x, r)$. Isto é, $B(y, \varepsilon) \subseteq B(x, r)$.

Problema 2: Provar que $z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\}$ é aberto.

Solução:
Seja $(a, b) \in \mathbb{Z}$ tome $\varepsilon := \min\{|a|, |b|\} > 0$. Assim queremos provar que $B((a, b), \varepsilon) \subseteq \mathbb{Z}$. Então, $\forall (c, d) \in B((a, b), \varepsilon)$,

$$\|(c, d) - (a, b)\| = \|(c - a, d, b)\| < \varepsilon$$

Daí, usamos que a distância até a origem da bola é menor que ε.

$$(c - a)^2 < \varepsilon^2 \text{ e } (d - b)^2 < \varepsilon^2$$

que por consequência

$$|c - a| < \varepsilon \text{ e } |d - b| < \varepsilon$$

assim

$$c \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \text{ e } d \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

Sem perda de generalidade seja $\varepsilon = |a| < |b|$ (análogo caso contrario), temos 2 casos

- Se $a < 0$, então $b > 0$ e vale que $c \in (a - |a|, a + |a|) = (2a, 0)$ e $d \in (b - |a|, b - |a|) \subset (0, 2b)$
  Então $c < 0$ e $d > 0$ assim $(c, d) \in Z$
- Se $a > 0$, então $b < 0$ e vale que $d \in (b - |b|, b + |b|) = (2b, 0)$ e $c \in (a - |a|, a - |a|) \subset (0, 2a)$
  Então $c > 0$ e $d < 0$ assim $(c, d) \in Z$

E concluímos que Z é aberto.

Problema 3: Provar que união de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Solução:
Seja $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de abertos, onde Λ é o conjunto de índices (possivelmente infinito, não enumerável). Seja a união

$$A := \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

e seja $z \in A_\lambda$ para algum índice λ. Dado que A_λ é aberto, $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(z, \varepsilon) \subseteq A_\lambda \subseteq A$. Concluímos que A é aberto.

Problema 4: Provar que a interseção de uma quantidade finita de abertos é um aberto.

Solução:
Seja $A_1, \dots, A_n$ abertos. E tome a interseção

$$A := \cap_{i=1}^{n} A_i$$

Então, $\forall z \in A_i \; \forall I_n$. Dado que A_i é aberto, tome $\varepsilon_0 := \min_{i=1}^{n} \varepsilon_i$. Assim $B(z, \varepsilon_0) \in A_i \; \forall i \in I_n$ e portanto

$$B(z, \varepsilon_0) \subset A$$

Logo A é aberto.

Problema 5: Provar que a interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado. Será que união de fechados é também fechado? Se não for, dar um contraexemplo.

Solução:
Como fizemos no *problema 3*. Seja $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ uma família de abertos, onde Λ é o conjunto de índices (possivelmente infinito e não enumerável). E tome a interseção

$$A = \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

Usando que se X e Y são conjuntos vale que

$$(X \cap Y)^C = X^C \cup Y^C$$

temos que,

$$A^C = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\Lambda^C$$

e como o complementar de um conjunto fechado é aberto por definição, segue do *problema 3* que uma interseção de fechados é fechado. Podemos fazer de forma análoga para a união usando o *problema 4* porém para uma quantidade finita de conjuntos fechados.

Problema 6: O conjunto $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ é aberto? É fechado?

Solução:
O conjunto $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ não é aberto pois $\forall \varepsilon > 0,\ \nexists B(1, \varepsilon) \subset A$. Suponha então que A seja fechado, porém, isso também é falso pois $\forall \varepsilon > 0,\ \nexists B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R} - A$. Então A não é nem fechado, nem aberto.

Problema 7: Dê exemplos de conjuntos que não são nem abertos, nem fechados.

Solução:
Em geral, um conjunto aberto em uma parte e fechado em outra como o do item anterior é um exemplo e também a união de conjuntos abertos e fechados disjuntos.

Problema 8: Prove que

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

é aberto.

Solução:
Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\},\ \forall (a,b) \in A$ tome $\varepsilon = b/2$, então $B((a,b),\varepsilon) \subset A$ assim A é aberto.

Problema 9: Prove que um conjunto em $\mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se, é união de bolas abertas.

Solução:
Seja A aberto, então $\forall a \in A\ \exists \varepsilon_a > 0$ tal que $B(a,\varepsilon_a) \subset A$. Assim

$$B = \cup_{a \in A} B(a,\varepsilon_a) \subset A$$

E $\forall a \in A,\ a \in B(a,\varepsilon_a) \subset B$

$$A \subset B$$

Problema 10: Prove que bolas fechadas são conjuntos fechados.

Solução:
Para provar que uma bola fechada $B = B(x,r)$ é um conjunto fechado vamos mostrar que seu complementar é aberto. Então, seja $a \in B^C$, por definição

$$\|x - a\| > r$$

Basta tomar $\varepsilon = \frac{\|x-a\|-r}{2} > 0$. Então a bola aberta $B(a,\varepsilon) \subset B^C$, o que vale $\forall a \in B^C$ então B^C é aberto e por consequência B é fechado.

Problema 11: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, onde $\exists d > 0$ tal que $\|x - y\| \geq d$ para todo par de pontos $x, y \in A$. Prove que, A é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Solução:

Problema 12: Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto não vazio contido numa reta de $\mathbb{R}^2$. Prove que A não é aberto.

Solução:

Problema 13: Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Prove que $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}(A)$ é fechado.

Solução:

Problema 14: Seja $A \subset B \subseteq \mathbb{R}^n$ e x ponto de acumulação de A. Será que x é também ponto de acumulação de B?

Solução:

Definition 1 (ponto de acumulação) *Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é dito* ***ponto de acumulação*** *de $A \subset \mathbb{R}^n$ se $\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A$ tal que $|a - y| < \varepsilon$.*

Pela definição como x é ponto de acumulação de A $\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A$ tal que $|a - y| < \varepsilon$. Como $y \in A \subset B$, $y \in B$. Logo, x é ponto de acumulação de B.

Problema 15: Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, prove que sua fronteira tem interior vazio.

Solução:
Sendo a fronteira de A denotada por ∂A, se $x \in \partial A,\ \exists \varepsilon > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon) \not\subseteq A,$$

$$B(x, \varepsilon) \not\subseteq A^C,$$

Por absurdo que existe $x \in \operatorname{int}(\partial A) \subset \partial A$, então $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset \partial A$, $B(a, \varepsilon) \not\subseteq A$ e $B(a, \varepsilon) \not\subseteq A^C$. Em particular, $\exists x_1, x_2 \in B(a, \varepsilon)$ tais que $x_1 \in A$ e $x_2 \in A^C$, porem se $x_1 \in A$, então $x_1 \notin \partial A$, absurdo. Logo, $\operatorname{int}(\partial A) = \emptyset$.

Problema 16: Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$. Prove que, dado $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$, o conjunto $A \cup \{a\}$ é aberto se, e somente se, a é um ponto isolado da fronteira de A.

Solução:
Seja A um conjunto aberto e a um ponto "afastado" de A, como no desenho

Figure 1. Contraexemplo

Então, vale que a é ponto isolado da fronteira de A, mas $A \cup \{a\}$ não é aberto, pois $\forall \varepsilon > 0, \nexists B(a, \varepsilon) \subset A \cup \{a\}$.

Problema 17: Prove que se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, então sua fronteira tem interior vazio.

Solução:
Suponha por absurdo que existe $a \in \text{int}(\partial F)$, então como no *item 15*, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset \partial F$, $B(a, \varepsilon) \nsubseteq F$ e $B(a, \varepsilon) \nsubseteq F^C$, então $\exists x_1, x_2 \in B(a, \varepsilon$ tais que $x_1 \in F$ e $x_2 \in F^C$, absurdo, pois $B(a, \varepsilon) \subset \partial F$. Logo $\text{int}(\partial F) = \emptyset$.

Problema 18: Sejam $F \in \mathbb{R}^n$ fechado e $f : F \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua. Mostre que f leva subconjuntos limitados de F em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^m$. Prove, exibindo um contra-exemplo, que não se conclui o mesmo removendo-se a hipótese de F ser fechado.

Solução:

Problema 19: Prove que duas bolas abertas de $\mathbb{R}^n$ são homeomorfas.

Solução:

Problema 20: Verifique que a aplicação:

$$\begin{aligned} f : B(0,1) &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \frac{x}{1-\|x\|} \end{aligned}$$

é um homeomorfismo entre a bola aberta unitária $B(0,1)$ e $\mathbb{R}^n$. Conclua que qualquer bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a todo o espaço $\mathbb{R}^n$.

Solução:
Precisamos provar que f e f^{-1} são continuas, mas antes, note que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to B(0,1) \\ x &\mapsto \frac{x}{1+\|x\|} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= \frac{\frac{x}{1+\|x\|}}{1-\|\frac{x}{1+\|x\|}\|} \\ &= \frac{\frac{x}{1+\|x\|}}{1-\frac{\|x\|}{1+\|x\|}} \\ &= \frac{\frac{x}{1+\|x\|}}{\frac{1+\|x\|}{1+\|x\|}-\frac{\|x\|}{1+\|x\|}} \\ &= x \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= \frac{\frac{x}{1-\|x\|}}{1+\|\frac{x}{1-\|x\|}\|} \\ &= \frac{\frac{x}{1-\|x\|}}{1+\frac{\|x\|}{1-\|x\|}} \\ &= \frac{\frac{x}{1-\|x\|}}{\frac{1-\|x\|}{1-\|x\|}+\frac{\|x\|}{1-\|x\|}} \\ &= x \end{aligned}$$

Então, f é bijetora e possui inversa f^{-1} da forma acima. Agora como $\| \cdot \|$ é contínua num conjunto aberto, em particular é contínua em $\mathbb{R}^n$ e B(0,1). Logo, $f : \mathbb{R}^n \to B(0, 1)$ é contínua. Valendo o mesmo para sua inversa f^{-1}. Portanto, f é homeomorfismo e em geral o mesmo vale para qualquer bola aberta $B(a, r),\ r > 0$.

Problema 21: Mostre que o cone $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ e $\mathbb{R}^2$ são homeomorfos.

Solução: