Curvas e Superfícies - Lista 2

Wellington José Leite da Silva[1]

[1]Escola de Matemática Aplicada da FGV (EMAP), Brazil

Problema 1: Desenhe em ambiente computacional, utilizando sistemas de computação simbólica, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo as seguintes parametrizações da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\gamma(t) = (t^3, t^6)$. Mostre que α é curva regular e γ não é regular. Qual seria a função naturalmente candidata a ser uma reparametrização entre as duas parametrizações? Porque falha?

Solução:
No gráfico vemos que o quanto $t = 0$ o vetor tangente a α não se anula, o que não ocorre com o vetor de γ. De fato, $\alpha'(t) = (1, 2t$ e $\gamma'(t) = (3t^2, 4t^3)$, quando $t = 0$, $\alpha'(0) = (1, 0)$ e $\gamma'(0) = (0, 0)$, então α é regular e γ não. Uma reparametrização natural para as curvas é $h(x) = x^3$, porem h não pode ser um difeomorfismo, pois $h'(0) = 0$, ou seja, existe um ponto onde $h^{-1\prime}(h'(0)) = 0$ o que é um absurdo dado que $h^{-1\prime}(h'(0)) = 1$ para qualquer t.

Gráfico Geogebra: link

Problema 2: Mostre que as curvas regulares $\alpha(t) = (t, e^t), t \in \mathbb{R}$ e $\beta(s) = (\log(s), s), s \in (0, \infty)$ têm o mesmo traço.

Solução:
Vamos mostrar que $\alpha(\mathbb{R}) = \beta((0, \infty))$.

- ($\subset$) $\forall(x, y) \in \alpha(\mathbb{R})$, $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $x = t$ e $y = e^t$. Sendo $s = e^t > 0$, então $log(s) = t = x$, então $(x, y) = (log(s), s)$. Logo, $(x, y) \in \beta((0, \infty))$ e $\alpha(\mathbb{R}) \in \beta((0, \infty))$.
- ($\supset$) $\forall(x, y) \in \beta((0, \infty)$, $\exists s \in (0, \infty$ tal que $x = log(s)$ e $y = s$. Sendo $t = log(s)$, então $(x, y) = (t, e^t)$. Logo, $(x, y) \in \alpha(\mathbb{R})$ e $\beta((0, \infty)) \in \alpha(\mathbb{R})$.

Então, $\alpha(\mathbb{R}) = \beta((0, \infty))$ e, portanto, tem o mesmo traço.

Problema 3: Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:

1. $\alpha(t) = (3\cosh(2t), 3\sinh(2t), 6t), t \in [0, \pi]$
2. Catenária: $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$ a partir do ponto $(0, 1)$.

Solução:
Calculando o comprimento de arco para a primeira temos

$$
\begin{aligned}
L_0^{\pi} &= \int_0^{\pi} \|(6sinh^2 2t, 6cosh^2 2t, 6)\|dt \\
&= \int_0^{\pi} 6(sinh^2(2t) + cosh^2(2t) + 1)^{\frac{1}{2}}dt \\
&= \int_0^{\pi} 6\sqrt{2}(sinh^2(2t) + 1)^{\frac{1}{2}}dt \\
&= 6\sqrt{2}\int_0^{\pi} cosh(2t)dt \\
&= 3\sqrt{2}sinh(2\pi)
\end{aligned}
$$

E de forma análoga fazemos para a segunda curva:

$$
\begin{aligned}
L_0^{\gamma} &= \int_0^{t} \|(1, sinh(s)\|ds \\
&= \int_0^{t} (1 + sinh^2(s))^{\frac{1}{2}}ds \\
&= \int_0^{t} cosh(s)ds \\
&= sinh(t)
\end{aligned}
$$

Gráfico Geogebra: link

Problema 4: Mudanças de parâmetro:

a. Demonstrar que $s(\theta) = \dfrac{\theta^2}{\theta^2 + 1}$ é uma mudança de parâmetro diferenciável que transforma o intervalo $(0, \infty)$ no intervalo $(0, 1)$.
b. Mostrar que a função $\gamma : (-1, 1) \to (-\infty, +\infty)$ definida por $\gamma(t) := \tan(\pi t/2)$ é uma mudança de parâmetro.
c. Provar que qualquer curva pode ser reparametrizada de forma tal que o domínio da reparametrização seja um intervalo de extremos 0 e 1.

Solução:

a. Vamos mostrar que s possui inversa, que s é bijetora e por fim que $s((0, \infty)) = (0, 1)$.
   1. $s^{-1}(\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}}$ é a inversa de s, de fato, $\forall t \in (0, 1)$

$$s(s^{-1}(t)) = \frac{\left(\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)^2 - 1} = t$$

$$s^{-1}(s(t)) = \sqrt{\frac{\frac{t^2}{t^2+1}}{1 - \frac{t^2}{t^2+1}}} = t$$

2. s é injetiva em $(0, \infty)$, seja a e $b \in (0, \infty)$ com $a \neq b$, suponha por absurdo que seja $s(a) = s(b)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2+1} = \frac{b^2}{b^2+1} &\iff 1 + \frac{1}{a^2+1} = 1 + \frac{1}{b^2+1} \\ &\iff \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} \\ &\iff a^2 = b^2 \\ &\iff a = b \end{aligned}$$

Absurdo, pois $a \neq b$, então s é injetiva em $(0, \infty)$.

3. s é sobrejetiva em (0, 1),
$\forall a \in (0, 1)$, seja $b = s^{-1}(a) = \sqrt{\frac{a}{1-a}}$, então $s(b) = a$

Agora vamos mostrar que $s((0, \infty)) = (0, 1)$

- ($\subset$) $\forall t \in (0, \infty),\ s(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$, é tal que $s(t) > 0$ pois $t^2 > 0$ e $s(t) < 1$ pois $t^2 < t^2 + 1$. então $s(t) \in (0, 1)$ e logo $s((0, \infty)) \subset (0, 1)$.
- ($\supset$) Note que, para $(0, 1) \subset s((0, \infty))$ é equivalente mostrar que $s^{-1}((0, 1)) \subset (0, \infty)$, então $\forall t \in (0, 1), s^{-1} = \sqrt{\frac{t}{t-1}}$,

$$\begin{aligned} 0 < t < 1 &\iff 0 < \frac{t}{t-1} < \frac{1}{1-t} \\ &\iff 0 < \sqrt{\frac{t}{1-t}} < \frac{1}{\sqrt{1-t}} < 1 \\ &\iff 0 < s^{-1} < 1 \end{aligned}$$

Então, s é diferenciável, pois é o produto de duas funções diferenciáveis. Logo é uma mudança de parâmetro diferenciável que transforma o intervalo $(0, \infty)$ no intervalo $(0, 1)$.

b. Como γ é a função tangente, sabemos qual é a sua derivada, no caso,

$$\gamma'(t) = \frac{\pi}{2} sec^2(t)$$

Que é definida em (-1, 1), como $\gamma(t) \to -\infty$ se $t \to -1$ e $\gamma(t) \to \infty$ se $t \to 1$, então temos que a função γ leva (-1, 1) em $(-\infty, \infty)$.

c. Seguindo como nos itens anteriores, basta encontrar uma bijeção do intervalo de definição da curva para o intervalo 0 e 1.

Problema 5: Provar que a curva

$$\gamma(t) = \left(2t, \frac{2}{1+t^2}\right)$$

com $t > 0$ é regular e é uma reparametrização de

$$\alpha(t) = \left(\frac{2\cos(t)}{1+\sin(t)}, 1+\sin(t)\right), t \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Solução:
De fato, γ é regular, pois sua derivada é sempre não nula:

$$\gamma'(t) = \left(2, -4\frac{t}{(1+t^2)^2}\right) \neq (0,0), \ \forall t > 0$$

Para verificar que α é uma reparametrização, temos que encontrar uma função h que leve γ em α. Em particular (para o primeiro parâmetro) deve valer que

$$\frac{2cos(t)}{1+sin(t)} = 2h(t) \Rightarrow h(t) = \frac{cos(t)}{1+sin(t)}$$

Pode-se observar também que vale para o segundo parâmetro. Por praticidade tomamos h como sendo $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (0, +\infty)$, note que, é contínua e derivável falta mostrar que é bijetora:

h é injetora, de fato, note que, no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$h'(t) = -\frac{1}{1+sen(t)} < 0$$

Logo, a função é estritamente decrescente e injetiva.

h é sobrejetiva, primeiro tome a inversa de h dada por

$$h^{-1}(t) = sen^{-1}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$$

$\forall a \in (0, +\infty)$, seja $b = h^{-1}(a) = sen^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$, então $h(b) = a$ e h é sobrejetora.

E em particular γ e α são reparametrização por h.

Problema 6: Seja $\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t), \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(t), \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)\right)$. Reparametrizar α pelo comprimento de arco.

Solução:
Primeiro α deve ser regular e, de fato

$$\alpha'(t) = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t), -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(t), \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)\right) \neq (0,0,0),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Então α é regular, calculando a reparametrização temos

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t)\| &= \frac{1}{3}\sin^2(t) + \frac{1}{2}\cos^2(t) + \frac{1}{3}\sin^2(t) + \frac{1}{3}\sin^2(t) + \frac{1}{2}\cos^2(t)\\ &= \sin^2(t) + \cos^2(t)\\ &= 1\end{aligned}$$

Então, α já está parametrizada por comprimento de arco.

Problema 7: Mostre que, se todas as retas tangentes a uma curva regular passam por um mesmo ponto $P \in \mathbb{R}^2$, então seu traço está contido em uma reta.

Solução:
Como a curva dada é regular ela pode ser reparametrizada por comprimento de arco então seja α a curva reparametrizada, então para cada t existe um $\lambda(t)$ tal que $P = \lambda(t)\alpha'(t) + \alpha(t)$, onde λ é o ponto da curva que a reta toca. Como α é regular e, portanto, derivável, temos que λ também será derivável, e ainda

$$0 = \frac{d}{dt}(\lambda(t)\alpha'(t) + \alpha(t)) = \lambda'(t)\alpha'(t) + \lambda(t)\alpha''(t) + \alpha'(t)$$

Como $\langle \alpha(t), \alpha'(t)\rangle = 0$ aplicando o produto interno ficamos com

$$0 = \lambda(t)\|\alpha''(t)\|^2$$

Aqui ou $\lambda(t) = 0$ ou $\|\alpha''(t)\|^2 = 0$. Caso seja $\|\alpha''(t)\|^2 \neq 0$ então em uma vizinhança de t $\|\alpha''(t)\|^2 \neq 0$ e $\lambda(t) = 0$, assim $\alpha(t) = P$ na vizinhança, mas como α vai ser constante $\|\alpha''(t)\|^2 \neq 0$ absurdo. Logo $\alpha''(t) = 0$ e $\alpha(t)$ está contido em uma reta.

Problema 8: Mostre que, se todas as retas normais a uma curva regular passam por um mesmo ponto $P \in \mathbb{R}^2$, então seu traço está contido em um círculo.

Solução:
Como no item anterior tome α uma reparametrização por comprimento de arco. Sabemos que por $\alpha(t)$ temos uma reta com vetor $\alpha''(t)$ que passa por P. Então $\forall t,\ \exists a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha(t) = P + a\alpha''(t)$$

ou melhor

$$a\alpha''(t) = \alpha(t) - P$$

Então, temos que

$$\frac{d}{dt}\|\alpha(t) - P\|^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) - P \rangle + \langle \alpha(t) - P, \alpha'(t) \rangle = 0$$

Então $\|\alpha - P\|^2$ é constante o que só ocorre se o traço de α entrar contido numa circunferencial.