Curvas e Superfícies - Lista 4

Wellington José Leite da Silva[1]

[1]Escola de Matemática Aplicada da FGV (EMAP), Brazil

Problema 1: Verifique se as seguintes curvas são 2-regulares:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3),\ t \in \mathbb{R}$
(b) $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t),\ t \in \mathbb{R}$

Solução:
Por definição a curva deve ser $\alpha''(t) \neq 0\ \forall t$, segue que

(a) $\alpha''(t) = (0, 2, 6t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$
(b) $\alpha''(t) = (0, 4, 6t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$

então as curvas são 2-regular.

Problema 2: Prove que a aplicação $\alpha(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2)), t \in \mathbb{R}$, é uma curva regular cujo traço está contido na interseção do cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ e da esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$. Desenhe a curva α, o cilindro C e a esfera S em ambiente computacional.

Solução:
Primeiro vamos provar que α é regular e de fato

$$\alpha'(t) = \left(-\sin(t), \cos(t), \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

como $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ a primeira e segunda coordenada nunca são iguais a 0 ao mesmo tempo, então $\alpha'(t) \neq (0, 0, 0),\ \forall t$ e logo α é regular. Para provarmos que α está na interseção deve estar na esfera (E) e no cilindro (C), então vamos mostrar os 2.

1.
$$\begin{aligned}\alpha \subset E &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha(t) \in E \\ &\iff (1 + \cos(t))^2 + \sin^2(t) + (2\sin(t/2))^2 = 4 \\ &\iff 2 + 2\cos(t) + 4\sin^2(t/2) = 4 \\ &\iff \sin^2(t/2) = \frac{1 - \cos(t)}{2}\end{aligned}$$

Está última é uma igualdade trigonométrica conhecida.

2.

$$
\begin{aligned}
\alpha \subset C &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha(t) \in C \\
&\iff (1 + \cos(t) - 1)^2 + (\sin(t))^2 = 1 \\
&\iff \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1
\end{aligned}
$$

Também chegamos numa igualdade conhecida.

Então concluímos que $\alpha \subset E \cap C$.

Por fim temos a seguinte visualização em *sagemath*:

```
x, y, t= var('x y t')

# Esfera
E = sphere((0, 0, 0), size=2, color='red', opacity=0.5)

# Cilindro
C = Cylinder(1, 6, color='green', opacity=0.5).translate(1, 0, -3)

# Curva
U = parametric_plot3d((1 + cos(t), sin(t), 2 * sin(t/2)),
                       (t,0,20),
                       color='blue')

show(E + C + U, figsize=8)
```

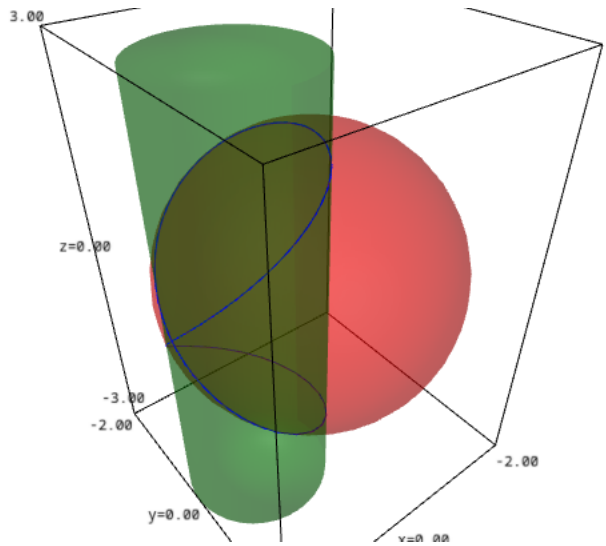

Figure 1. Ex. 2

Problema 3: Obtenha uma reparametrização por comprimento de arco da curva

$$\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t), t \in \mathbb{R}$$

Solução:
Primeiro precisamos encontrar a função comprimento de arco

$$\begin{aligned} L_0^t(\alpha) &= \int_0^t \|\alpha'(s)\| ds \\ &= \int_0^t e^s \sqrt{3} ds \\ &= \sqrt{3}e^t - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Seja então $g(s) = \sqrt{3}e^t$ que é tal que g e g^{-1} são diferenciáveis, então uma curva parametrizada por comprimento de arco de α é $\beta(t) = \alpha(g^{-1}(t))$, como $g^{-1}(t) = \log(t/\sqrt{3})$,

$$\beta(t) = \frac{t}{\sqrt{3}} \left(\cos\left(\log\left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right), \sin\left(\log\left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right), 1 \right)$$

Problema 4: Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que $||\alpha'(t)||$ é constante se, e só se, $\forall t \in I, \alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$. Em particular, mostre que $||\alpha'(t)||$ é constante para a hélice circular $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), b.t), t \in \mathbb{R}$.

Solução:
Segue que

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| = c &\iff \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = c^2 \\ &\iff 2\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0 \\ &\iff \alpha'(t) \perp \alpha''(t) \end{aligned}$$

No caso particular da hélice, temos que

$$\alpha'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b)$$

$$\alpha''(t) = (-a\cos(t), -a\sin(t), 0)$$

Então fazendo

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle &= \langle (-a\sin(t), a\cos(t), b), (-a\cos(t), -a\sin(t), 0)\rangle \\
&= a^2\sin(t)\cos(t) - a^2\sin(t)\cos(t) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Logo $\|\alpha'(t)\|$ é constante

Problema 5: Em ambiente computacional, desenhe as seguintes curvas e produza uma animação do triedro de Frenet de cada curva:

(a) $\alpha(t) = (4\cos(t), 5 - 5\sin(t), -3\cos(t)), t \in \mathbb{R}$
(b) $\beta(t) = (1 - \cos(t), \sin(t), t), t \in \mathbb{R}$

Solução:
Seguem os códigos em *sagemath* e as imagens dos plots

(a) Para a primeira curva temos

```
t = var('t')

alpha(t) = (4 * cos(t), 5 - 5 * sin(t), -3 * cos(t))

# Identify curve parameter
x = get_vector_arguments(alpha).pop()

# Calculate the derivatives
alpha_x = alpha.derivative(x)

# Calculate arc length from 0 to t
t = var("t")
assume(t>0)
comp_arco = integrate(norm(alpha_x), (x,0,t))

t = comp_arco.arguments()[0]

# Find t in terms of s
s = var("s")
param_comp_arco = solve(s == comp_arco,t)[0]

# Replace original parameter in curve
alpha_subs = alpha(t).subs(param_comp_arco)
alpha_subs = vector_simplify(alpha_subs)

# Reset function argument
alpha_param(s) = tuple(coord for coord in alpha_subs)

```

```
C = parametric_plot3d(alpha_param(t),
                      (t,0,10*pi),
                      color='blue',
                      thickness=2)

T(s) = alpha_param.derivative(s)

N(s) = T.derivative(s)/norm(T.derivative(s))

B(s) = T.cross_product(N)

a = arrow(alpha_param(0), T(0) + alpha_param(0), color='red')
b = arrow(alpha_param(0), N(0) + alpha_param(0), color='red')
c = arrow(alpha_param(0), B(0) + alpha_param(0), color='red')

show(C + a + b + c, figsize=8)
```

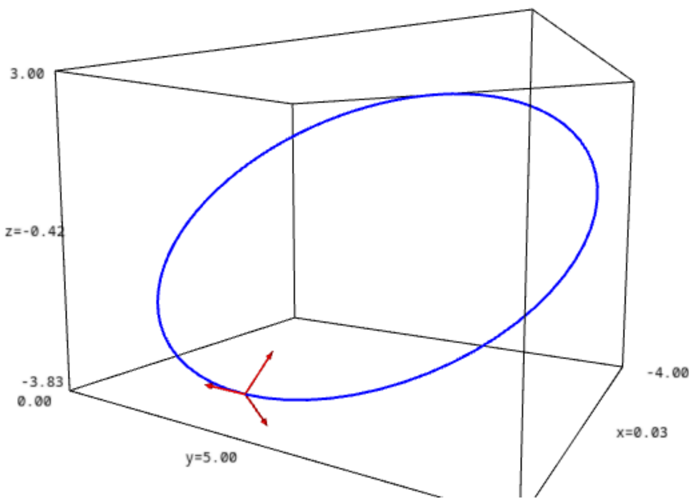

Figure 2. Ex. 5 item (a)

(b) E para a segunda curva usamos um cogido análogo, contudo mudando a curva.

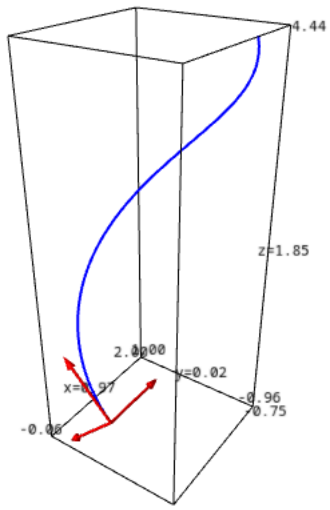

Figure 3. Ex. 5 item (b)

Problema 6: Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva 2-regular, a qual, não é, necessariamente, parametrizada por comprimento de arco. Prove, então, que

$$K_\alpha(t) = \frac{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||}{||\alpha'(t)||^3}$$

$$\mathcal{T}_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2}$$

em que $\times$ denota o produto vetorial.

Solução:
Para a curvatura seja s um parâmetro unitário da velocidade para α. Temos que,

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}$$

então

$$
\begin{aligned}
K_\alpha = \left\| \frac{d^2 s}{ds} \right\| &= \left\| \frac{d}{ds}\left(\frac{d\alpha/dt}{ds/dt} \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha/dt}{ds/dt} \right)}{ds/dt} \right\| \\
&= \left\| \frac{\frac{ds}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d\alpha}{dt}}{(ds/dt)^3} \right\|
\end{aligned}
$$

Temos que,

$$
\frac{ds}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2} = \alpha' \alpha''
$$

e

$$
\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \|\alpha'\|^2 = \alpha' \alpha'
$$

Então, chegamos que

$$
\begin{aligned}
K_\alpha &= \left\| \frac{(\frac{ds}{dt})^2 \alpha'' - \frac{d^2 s}{dt^2}\frac{ds}{dt}\alpha'}{(ds/dt)^3} \right\| \\
&= \frac{\|(\alpha'\alpha')\alpha'' - (\alpha'\alpha'')\alpha'\|}{\|\alpha'\|^4} \\
&= \frac{\|\alpha' \times (\alpha'' \times \alpha')\|}{\|\alpha'\|^4} \\
&= \frac{\|\alpha'' \times \alpha'\|}{\|\alpha'\|^3}
\end{aligned}
$$

E para a torção, primeiro se $\mathcal{T}_\alpha$ é unit-speed

$$
\mathcal{T}_\alpha = -nb = -n(t \times n)' = -n(t \times n')
$$

Como, $n - \frac{1}{K_\alpha} t' = \frac{1}{K_\alpha}\alpha''$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\alpha &= -\frac{1}{K_\alpha}\alpha''\left(\alpha' \times \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{K_\alpha}\alpha''\right)\right)\\
&= \frac{1}{K_\alpha}\alpha''\left(\alpha' \times \left(\frac{1}{K_\alpha}\alpha''' - \frac{K'_\alpha}{K_\alpha^2}\alpha''\right)\right)\\
&= \frac{1}{K_\alpha}\alpha'''(\alpha' \times \alpha'')\\
&= \frac{\alpha'''(\alpha' \times \alpha'')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}
\end{aligned}$$

Agora para o caso geral, seja s o comprimento de arco ao longe de α. Então

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\alpha}{ds}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2\alpha}{ds^2} + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\alpha}{ds}$$

$$\frac{d^3\alpha}{dt^3} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{d^3\alpha}{ds^2} + 3\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{d^2\alpha}{ds^2} + \frac{d^3s}{dt^3}\frac{d\alpha}{ds}$$

Como

$$\alpha' \times \alpha'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\left(\frac{d\alpha}{ds} \times \frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$$

$$\alpha'''(\alpha' \times \alpha'') = \left(\frac{ds}{dt}\right)^6\left(\frac{d^3\alpha}{ds^3}\left(\frac{d\alpha}{ds} \times \frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)\right)$$

Então a torção de α é

$$\mathcal{T}_\alpha = \frac{\left(\frac{d^3\alpha}{ds^3}\left(\frac{d\alpha}{ds} \times \frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)\right)}{\|\frac{d\alpha}{ds} \times \frac{d^2\alpha}{ds^2}\|^2} = \frac{\alpha'''(\alpha' \times \alpha'')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

Problema 7: Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3),\ \forall t \in \mathbb{R}$
(b) $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), t),\ \forall t \in \mathbb{R}$

Solução:

O cálculo propriamente dito da curvatura e da torção para essa questão foi feito em *sage-math* onde os códigos estão presentes no seguinte *pdf* [1]

(a) Primeiramente precisaremos das derivadas

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$$

$$\alpha'''(t) = (0, 0, 6)$$

Agora aplicamos as fórmulas já vistas

$$\begin{aligned} K_\alpha(t) &= \frac{\|\alpha''(t) \times \alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \\ &= \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\alpha(t) &= \frac{\langle(\alpha'(t) \times \alpha''(t)), \alpha'''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} \\ &= \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1} \end{aligned}$$

(b) Analogamente

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

$$\alpha''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

$$\alpha'''(t) = (\sin(t), -\cos(t), 0)$$

E aplicando as fórmulas

$$\begin{aligned} K_\beta(t) &= \frac{\|\beta''(t) \times \beta'(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[1] `https://github.com/wellington36/curvas-e-superficies/blob/main/Curvas_e_Superficies_Part_I.pdf`

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\beta(t) &= \frac{\langle(\beta'(t)\times\beta''(t)),\beta'''(t)\rangle}{\|\beta'(t)\|^3}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Problema 8: Seja $\alpha(t)$ uma curva 2-regular:

(a) Verifique que $\alpha''(t)$ é paralelo ao plano osculador de α em t.
(b) Prove que o plano osculador de α em t_0 é dado pelos pontos P de R^3 tal que $\langle P-\alpha(t_0),\alpha'(t_0)\times\alpha''(t_0)\rangle = 0$

Solução:

(a) Seja $\beta = \alpha(\phi)$ a parametrização unit-speed de α. Logo, $\beta'(s)$ e $\beta''(s)/K_\beta(s)$ geram um plano osculador e, assim, β' e β'' são paralelos ao plano osculador. Note que,

$$\beta'(s) = \alpha'(\phi(s))\phi'(s)$$

$$\begin{aligned}\beta''(s) = \alpha''(\phi(s))(\phi'(s))^2 + \alpha'(\phi(s))\phi'(s) \Longrightarrow\\ \alpha''(\phi(s))(\phi'(s))^2 = \beta''(s) - \alpha'(\phi(s))\phi'(s)\end{aligned}$$

Então, α' é paralelo ao plano osculador e por consequência α'' também é.

(b) Podemos escrever na forma $\langle P-\alpha(t_0), B(t_0)\rangle$, onde B é o binormal, daqui tiramos que

$$B(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)\times\alpha''(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\times\alpha''(t_0)\|}$$

O que finaliza a prova.

Problema 9: Desenhe em ambiente computacional as curvas e seus planos normal e osculador em função do parâmetro:

(a) $\alpha(t) = (3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3), t\in R$.
(b) $\beta(t) = (a\cos(t)+b\sin(t), a\sin(t)+b\cos(t), c\sin(2t)), t\in R$.

Solução:

(a) Para a primeira curva calculamos o Triedro de Frener e geramos os planos apartir deles

```
u, v, t = var("u v t")

alpha(t) = (3 * t - t^3, 3 * t^2, 3 * t + t^3) # R -> R3

alpha_t = alpha.derivative(t)
alpha_tt = alpha_t.derivative(t)

T(t) = alpha_t / norm(alpha_t)

N(t) = alpha_tt / norm(alpha_tt)

cross = alpha_t.cross_product(alpha_tt)

B(t) = cross / norm(cross)

# Plot
t0 = .5

C = parametric_plot3d(alpha(t),
                      (t,-1,1),
                      color='blue',
                      thickness=2)

a = arrow(alpha(t0), T(t0) + alpha(t0), color='red')
b = arrow(alpha(t0), N(t0) + alpha(t0), color='green')
c = arrow(alpha(t0), B(t0) + alpha(t0), color='yellow')

P1 = parametric_plot3d(u * T(t0) + v * N(t0) + alpha(t0),
                       (u, 0, 3),
                       (v, 0, 3),
                       opacity=.6)

P2 = parametric_plot3d(u * T(t0) + v * B(t0) + alpha(t0),
                       (u, 0, 3),
                       (v, 0, 3),
                       color='red',
                       opacity=.6)

show(C + a + b + c + P1 + P2, figsize=8)
```

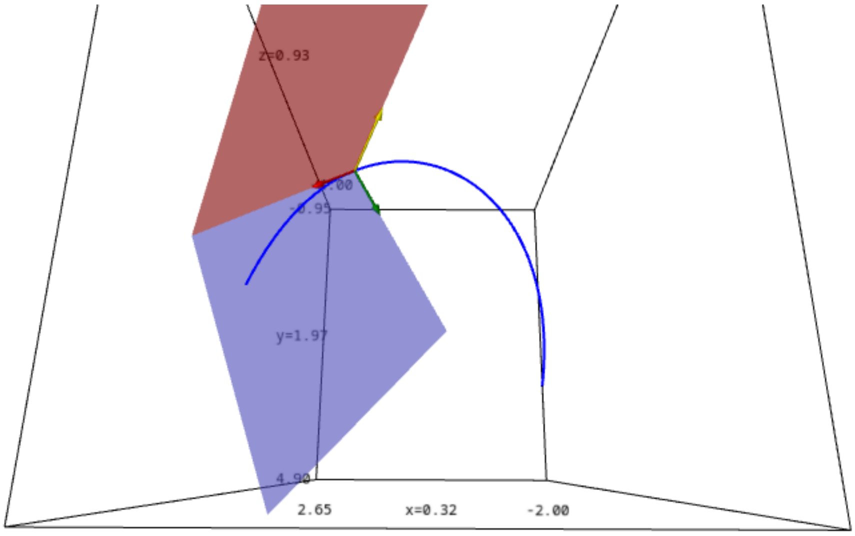

Figure 4. Ex. 9 item (a)

(b) De forma análoga ao item anterior agora em particular tomamos $a = 1, b = 1$ e $c = 1$ no seguinte cógido

```
u, v, t = var("u v t")

a = 1
b = 1
c = 1

alpha(t) = (a * cos(t) + b * sin(t),
            a * sin(t) + b * cos(t),
            c * sin(2 * t))

alpha_t = alpha.derivative(t)
alpha_tt = alpha_t.derivative(t)

T(t) = alpha_t / norm(alpha_t)

N(t) = alpha_tt / norm(alpha_tt)

cross = alpha_t.cross_product(alpha_tt)

B(t) = cross / norm(cross)

# Plot
t0 = 0

C = parametric_plot3d(alpha(t),
                      (t,-pi,pi),
                      color='blue',
                      thickness=2)

a = arrow(alpha(t0), T(t0) + alpha(t0), color='red')
b = arrow(alpha(t0), N(t0) + alpha(t0), color='green')
c = arrow(alpha(t0), B(t0) + alpha(t0), color='yellow')
```

```

P1 = parametric_plot3d(u * T(t0) + v * N(t0) + alpha(t0),
                       (u, 0, 3),
                       (v, 0, 3),
                       opacity=.6)

P2 = parametric_plot3d(u * T(t0) + v * B(t0) + alpha(t0),
                       (u, 0, 3),
                       (v, 0, 3),
                       color='red',
                       opacity=.6)

show(C + a + b + c + P1 + P2, figsize=8)
```

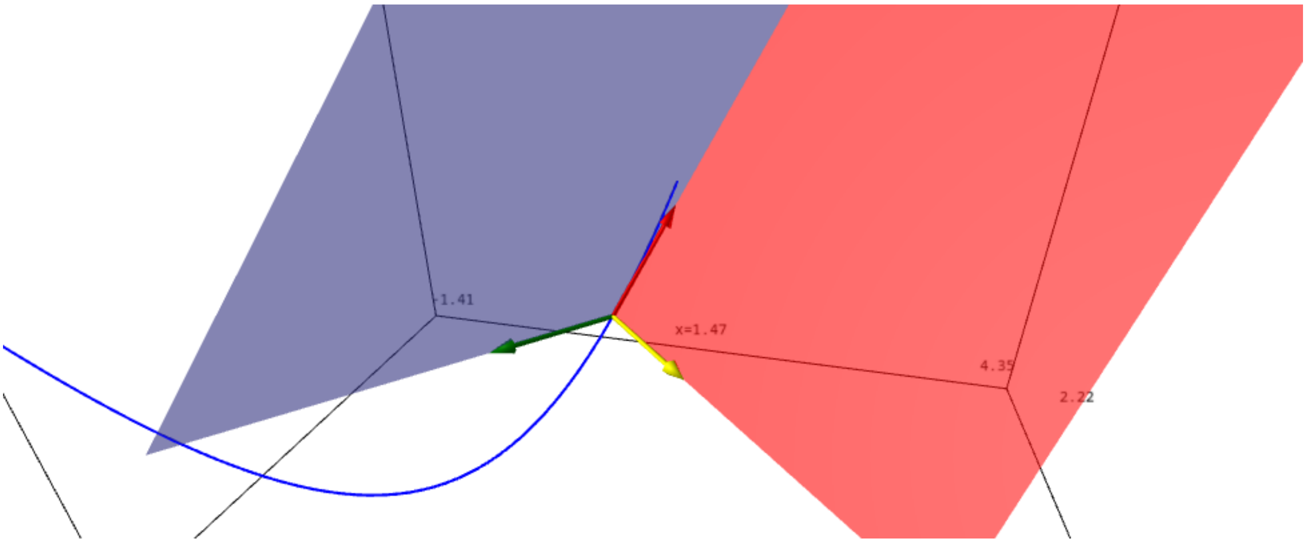

Figure 5. Ex. 9 item (b)

Problema 10: Verifique que o vetor binormal de uma hélice circular forma um ângulo constante com o eixo do cilindro sobre o qual está a hélice. Ilustre o fato em ambiente computacional.

Solução:
Considere a hélice circular

$$\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$$

A norma da derivada é dada por $\sqrt{a^2 + b^2} := c$. Assim, podemos reparametrizar pelo comprimento de arco,

$$\alpha(t) = (a\cos(t/c), a\sin(t/c), bt/c)$$

Calculamos o triedro

$$T(t) = \frac{1}{c}(-a\sin(t/c), a\cos(t/c), t$$

$$N(t) = (-\cos(t/c), -\sin(t/c), 0)$$

$$B(t) = \frac{1}{c}(b\sin(t/c), -b\cos(t/c), a)$$

E como o eixo do cilindro é dado pelo vetor $c = (0, 0, 1)$. Temos que

$$\langle B(t), c\rangle = a, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Assim, o cosseno do angulo é fixo e tomando cos no intervalo $[0, \pi]$, temos que o ângulo é fixo. E para uma visualização fazemos

```
t = var('t')

# Define the curve
h(t) = (cos(t), sin(t), t)

C = parametric_plot3d(h(t), (t,0,pi), color='blue', thickness=2)

T(t) = h.derivative(t)

N(t) = T.derivative(t)/norm(T.derivative(t))

B(t) = T.cross_product(N)


# Define all vectors
t0 = 0

eixo_cilindro(t) = (0,0,1)

j = arrow((0,0,0) , eixo_cilindro, color='green')

j_in_B1 = arrow(h(t0), h(t0) + eixo_cilindro, color='green')

B1 = arrow(h(t0), B(t0) + h(t0), color='red')

t0 = 1
j_in_B2 = arrow(h(t0), h(t0) + eixo_cilindro, color='green')

B2 = arrow(h(t0), B(t0) + h(t0), color='red')

```

```
t0 = 2
j_in_B3 = arrow(h(t0), h(t0) + eixo_cilindro, color='green')

B3 = arrow(h(t0), B(t0) + h(t0), color='red')

t0 = 3
j_in_B4 = arrow(h(t0), h(t0) + eixo_cilindro, color='green')

B4 = arrow(h(t0), B(t0) + h(t0), color='red')

# Plot
show(C + j + j_in_B1 + B1 + j_in_B2 + B2 + j_in_B3 + B3 + j_in_B4 + B4,
     figsize=8)
```

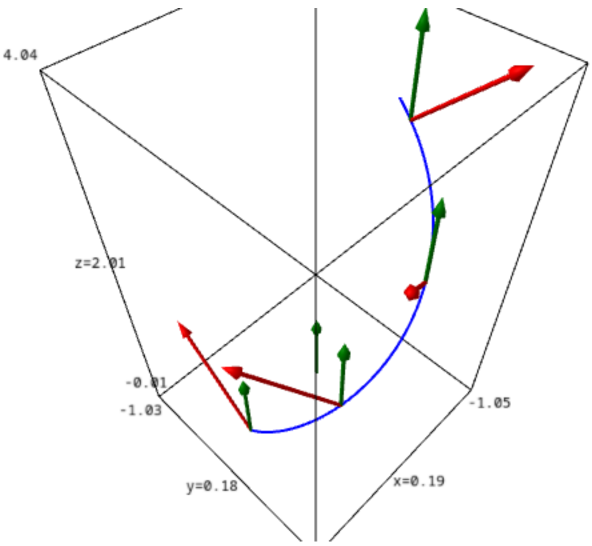

Figure 6. Ex. 10

Problema 11: Prove que a aplicação

$$\alpha(s) = \left(\frac{4}{5}\cos(s), 1 - \sin(s), -\frac{3}{5}\cos(s)\right), s \in \mathbb{R}$$

é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cujo traço é um círculo. Determine, então, seus centro e raio.

Solução:
Temos que, $\alpha'(t) = (-4/5\sin(t), -\cos(t), -3/5\cos(t))$ e, portanto, α é regular, pois sin e cos nunca são nulos ao mesmo tempo. Agora como

$$\alpha''(t) = (-4/5\cos(t), \sin(t), 3/5\cos(t))$$

Então $K_\alpha = 1$ e, portanto α está parametrizado por comprimento de arco. E pela fórmula da torção $\mathcal{T}_\alpha = 0$, então como não a torção e a curvatura é constante, pelo TF a curva é um círculo.

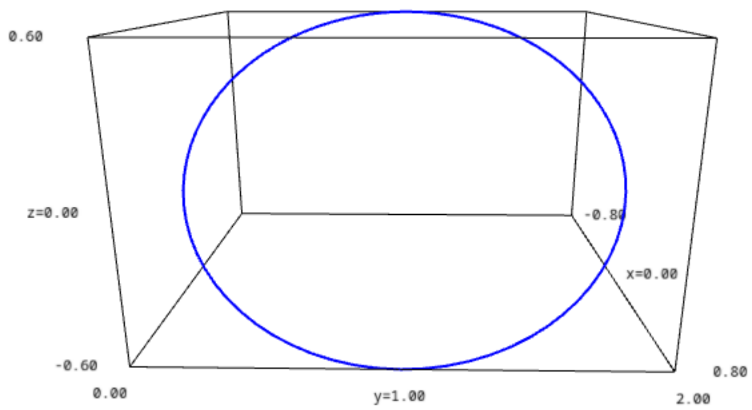

Figure 7. Ex. 11

Note que, os pontos $A = (4/5, 1, -3/5)$ e $B = (-4/5, 1, 3/5)$ são extremidades do círculo, então

$$\frac{A+B}{2} = \frac{(4/5, 1, -3/5) + (-4/5, 1, 3/5)}{2} = (0, 1, 0) \quad \textbf{(o centro)}$$

e

$$\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{64}{25} + \frac{36}{25}}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1 \quad \textbf{(o raio)}$$