Curvas e Superfícies - Lista 3

Wellington José Leite da Silva[1]

[1]Escola de Matemática Aplicada da FGV (EMAP), Brazil

Problema 1: Verifique a regularidade e calcule o comprimento de arco e a curvatura das seguintes curvas, quando possível:

1. (retas) $\alpha(t) = (a + ct, b + dt), t \in \mathbb{R}$;
2. $\alpha(t) = (t, t^4), t \in \mathbb{R}$;
3. (círculos) $\alpha(s) = (a + rcos(r/s), b + r\sin(r/s)), s \in \mathbb{R}, r > 0$;
4. (cardióide) $\alpha(t) = (\cos(t)(2\cos(t) - 1), \sin(t)(2\cos(t) - 1)), t \in \mathbb{R}$;
5. (catenária) $\alpha(t) = (t, \cosh(t)), t \in \mathbb{R}$.

Solução:

1. Como $\alpha'(t) = (c, d)$ e tratasse de uma reta, deve ser $c \neq 0$ e $d \neq 0$, portanto, é regular. O comprimento de arco é

$$L_0^t(\alpha) = \int_0^t (c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} ds = \sqrt{c^2 + d^2} t$$

Para a curvatura, temos que $\alpha''(t) = (0, 0)$, então

$$K_\alpha(t) = \frac{\langle J(\alpha'(t)), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = 0$$

2. Como $\alpha'(t) = (1, 4t^3)$, então α é regular, pois o primeiro componente é sempre não nulo. O seu comprimento de arco é dado por

$$L_0^t(\alpha) = \int_0^t (1 + 16t^6)^{\frac{1}{2}} ds$$

E para a curvatura

$$\begin{aligned} K_\alpha(t) &= \frac{\langle J(\alpha'(t)), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} \\ &= \frac{1}{(1 + 16t^6)^{\frac{3}{2}}} \langle J(1, 4t^3), (0, 12t^2) \rangle \\ &= \frac{12t^2}{(1 + 16t^6)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

3. Temos que, $\alpha'(t) = \left(-\sin(\frac{s}{r}, \cos(\frac{s}{r})\right)$, caso seja $-\sin(\frac{s}{r}) = 0 \iff r = k\pi,\ k \in \mathbb{N}$. Mas se $r = k\pi$, então $-\cos(\frac{s}{r}) \neq 0$. Logo α é regular.
O comprimento de arco é dado por

$$L_0^t(\alpha) = \int_0^t 1 ds = t$$

E para a curvatura $\alpha''(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos(\frac{s}{r}), \frac{1}{r}\sin(\frac{s}{r})\right)$. Então,

$$\begin{aligned} K_\alpha(s) &= \frac{\langle J(\alpha'(t)), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

4. Temos que, $\alpha'(t) = (\sin(t)(1 - 4\cos(t)), \cos(t)(2\cos(t) - 1) - 2\sin^2(t))$, caso seja

$$\begin{aligned} \sin(t)(1 - 4\cos(t)) = 0 &\Rightarrow \sin(t) = 0 \text{ ou } 1 - 4\cos(t) = 0 \\ &\Rightarrow t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \cos(t) = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \cos(t)(2\cos(t) - 1) - 2^2(t) \neq 0 \end{aligned}$$

Então α é regular. O comprimento de arco é dado por

$$\begin{aligned} L_0^t(\alpha) = &\int_0^t (\sin^2(s)(1 - 4\cos(s))^2 + \cos^2(s)(2\cos(s) - 1)^2 - \\ &- 4\sin^2(s)\cos(s)(2\cos(s) - 1) + 4\sin^4(s))^{\frac{1}{2}} ds \\ &= 4\left(\sqrt{2} - \sqrt{1 - \cos(t)} - \cot\left(\frac{t}{s}\right)\right) \end{aligned}$$

Então, usando o seguinte código em *sagemath*

```
curva(t) = (2 * (cos(t))^2 - cos(t), 2 * cos(t) * sin(t) - sin(t))

curva_t = curva.derivative(t)
curva_tt = curva_t.derivative(t)

curva_t_rotation(t) = (- curva_t[1], curva_t[0])

curvatura = curva_t_rotation.dot_product(curva_tt)/norm(curva_t)^3
curvatura = curvatura.simplify_full()

pretty_results((r"K(s)", curvatura), use_colon=True)
```

Calculamos a curvatura

$$\begin{aligned} K_\alpha(t) &= \frac{\langle J(\alpha'(t)), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} \\ &= -\frac{3(2\cos(t) - 3)}{(4cos(t) - 5)\sqrt{-4\cos(t) + 5}} \end{aligned}$$

5. Temos que, $\alpha'(t) = (1, \sinh(t))$, então α é regular, pois $\alpha'(t) \neq (0,0)\ \forall t \in \mathbb{R}$. Usando o *sagemath* chegamos no seguinte resultado para o comprimento de arco

$$\begin{aligned} L_0^t(\alpha) &= \int_0^t \|\alpha'(s)\| ds \\ &= \int_0^t (1+\sinh^2(t))^{\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{(2t)} - 1\right) e^{-t} \end{aligned}$$

E também analogamente ao item *(d)* calculamos a curvatura

$$\begin{aligned} K_\alpha(t) &= \frac{\langle J(\alpha'(t)), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} \\ &= \frac{1}{\cosh^2(t)} \end{aligned}$$

Problema 2: Considere a elipse $\beta(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), t \in \mathbb{R}$, onde $a > 0, b > 0$ e $a \neq b$. Obtenha os valores de t onde a curvatura de β é máxima e mínima.

Solução:
Temos que, $\beta'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t))$ e $\beta''(t) = -\beta(t)$, então calculando a curvatura

$$\begin{aligned} K_\beta(t) &= \frac{\langle J(\alpha'(t)), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} \\ &= \frac{\langle(-b\cos(t), -a\sin(t)), (-a\cos(t), b\sin(t))\rangle}{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos(t))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{ab}{(a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Como a e b são constantes a curvatura é mínima quando o denominador $(a^2+(b^2-a^2)\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}$ for máximo e máximo quando o denominador for mínimo. Em particular $a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2(t)$ então no intervalo a^2 e b^2, onde os extremos são atingidos por $cos(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ e $\cos(t) = \pm 1 \Rightarrow t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, sendo os pontos de máximo ou mínimo de acordo coma a validade das expressões $a > b$ e $b > a$.

Problema 3: Seja $I = (-a, a), a > 0$ um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, o qual é simétrico com respeito à origem. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco.

1. Mostre que $\beta : I \to \mathbb{R}^2$, em que $\beta(s) = \alpha(-s)$, é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco e que satisfaz $\kappa_\beta(s) = -\kappa_\alpha(-s), \forall s \in I$.

2. Desenhe em ambiente computacional um par de parametrizações de uma curva que ilustre o fato demonstrado no item anterior.

Solução:

1. Como α e β são regulares, temos que, $\beta'(s) = -\alpha'(-s)$, então $\|\beta'(s)\| = \|-\alpha'(-s)\| = 1,\ \forall s$, então β é regular e também está parametrizada por comprimento de arco. E vale que $\beta''(s) = \alpha''(-s)$, ou seja

$$
\begin{aligned}
K_\beta(s) &= \langle J(\beta'(s)), \beta''(s)\rangle \\
&= -\langle J(\alpha'(s)), \alpha''(s)\rangle \\
&= -K_\alpha(s)
\end{aligned}
$$

2. Tomando, por exemplo, a curva $\alpha(s) = (r\cos(\frac{s}{r}), r\sin(\frac{s}{r})),\ s \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, mostrada em link.

Problema 4: Reproduza, no ambiente computacional de sua preferência, os vetores α' e α'' para uma curva α de sua preferência com duas parametrizações distintas, sendo uma a parametrização por comprimento de arco. Use como referência o arquivo **.ggb** mostrado em aula.

Solução:
Escolhendo a curva

$$c1(t) = (r\sin(t), r\cos(t))$$

e sua respectiva parametrização

$$c2(t) = \left(\sin\left(\frac{t}{r}\right), \cos\left(\frac{t}{r}\right)\right)$$

Temos os seguintes vetores em geogebra: link.

Problema 5: Reproduza, no ambiente computacional de sua preferência, a representação gráfica da *Tangente Indicatrix*, conforme exemplificado no arquivo **.ggb** apresentado em aula. Teste com a curva de sua preferência.

Solução:
Usando a curva

$$c(t) = (t^2, \sin(t) - \cos(t))$$

Temos a representação da tangente indicatrix em geogebra: link.

Problema 6: Considerando o conceito de derivada como aproximação linear. Considere a aplicação:

$$f(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to (x^3 + y^3, x^3 - y^3)$$

determine suas derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$.

Solução:
Como dado em aula vamos usar a noção de derivada como aproximação linear, então

$$\begin{aligned} T(h_1, h_2) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((x, y) + t(h_1, h_2)) - f(x, y)}{t} \\ &= (3x^2 h_1 + 3y^2 h_2, 3x^2 h_1 - 3y^2 h_2) \end{aligned}$$

Então conseguimos calcular as derivadas em x

$$f'(x) = T = \begin{bmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 3x^2 & -3y^2 \end{bmatrix}$$

De forma análoga conseguimos a segunda derivada

$$f''(x) = \left[\begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix} \right]$$

Problema 7: Uma aplicação $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dita *movimento rígido* quando preserva distâncias. Isto é:

$$||\Phi(p) - \Phi(q)|| = ||p - q||$$

Verifica-se que todo movimento rígido se escreve em forma única como composta de uma transformação linear ortogonal e uma translação, ou seja:

$$\Phi(p) = Ap + p_0, \forall p \in \mathbb{R}^2$$

em que $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um operador linear ortogonal e p_0 um ponto de $\mathbb{R}^2$. Diz-se que Φ é *direto* ou *inverso*, conforme $\det(A) = 1$ ou -1 respectivamente. Verifique que Φ é diferenciável e calcule $\Phi'(p)$ e $\Phi''(p)$.

Solução:
Seja uma função $r(p) = \Phi(a + p) - \Phi(a) - Ap,\ a, p \in \mathbb{R}^2$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0} \frac{\|r(p)\|}{\|p\|} &= \frac{\|\Phi(a+p) - \Phi(a) - Ap\|}{\|p\|} \\
&= \frac{\|A(a+p) + p_0 - Aa - p_0 - Ap\|}{\|p\|} \\
&= \frac{0}{\|p\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

E usando a aproximação pelo plano tangente (wiki)

$$f(a + p) = f(a) + J_f(a)p + r(p)$$

Então Φ é diferenciável e suas derivadas são

$$\Phi'(a) = J_\Phi(a) = A$$

e

$$\Phi''(a) = 0$$

Problema 8: Mostre que uma matriz de rotação e uma matriz de reflexão são aplicações lineares ortogonais e, portanto, podem ser interpretadas como um movimento rígido.

Solução:
Para a matriz de rotação é uma aplicação linear sobre o angulo onde

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

E é uma aplicação linear ortogonal, pois $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ e $\sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) = 0$ vide wiki

Também a reflexão é uma aplicação linear no angulo onde

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

E análogo ao caso anterior é uma aplicação linear ortogonal, pois $\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) = 1$ e $\cos(2\theta)\sin(2\theta) - \sin(2\theta)\cos(2\theta) = 0$. Então M_2 é uma aplicação linear ortogonal. E por fim M_1 e M_2 são movimentos rígidos com $A = M_1$ e $A = M_2$ e $p_0 = 0$.

Problema 9: Mostre que movimentos rígidos levam retas em retas e círculos em círculos.

Solução:
Seja Φ um movimento rígido qualquer da forma $\Phi(p) = Ap + p_0$. Para reta seja A_1, A_2 e A_3 pontos de uma certa reta e tome $a_{12} = d(A_1, A_2)$ e $a_{23} = d(A_2, A_3)$ como as distâncias dos pontos. Por definição de movimento rígido vale $\|\Phi(A_1) - \Phi(A_2)\| = A(A_1 - A_2) = Aa_{12}$ e $\|\Phi(A_2) - \Phi(A_3)\| = Aa_{23}$. Então $\Phi(A_1)$, $\Phi(A_2)$ e $\Phi(A_3)$ são colineares e, portanto Φ leva uma reta numa reta.

Agora para a circunferência tome um certo ponto P de um círculo e C o seu centro, temos que

$$\|\Phi(P) - \Phi(C)\| = \|P - C\| = r$$

Então $\Phi(P)$ está no círculo de centro $\Phi(C)$ e raio r. Como Φ^{-1} também é um movimento rígido podemos encontrar P a partir de $\Phi(P)$ na respectiva circunferência de centro $\Phi(C)$ e raio r. Então Φ leva círculo em círculo.

Problema 10: Exemplifique, em ambiente computacional, movimentos rígidos sendo aplicados em uma curva de sua preferência.

Solução:
Usando a curva $c(t) = (\sin(t), \cos(t))$

Fazemos um movimento rígido da curva em geogebra: link.