Curvas e Superfícies - Lista 6

Wellington José Leite da Silva[1]

[1]Escola de Matemática Aplicada da FGV (EMAP), Brazil

Problema 1: Desenhar a superfície dada por

$$X(u, v) = ((2\cos(u) - 1)\cos(u), (2\cos(u) - 1)\sin(u), v)$$

Observar que a superfície proposta é parametrizada regular, mas não é superfície regular. Desenhar um plano tangente em um ponto que evidencie este fato

Solução:
Note que,

$$X_u = (-4\cos u \sin u + \sin u, 2\cos^2 u - 2\sin^2 u - \cos u, 0)$$

$$X_v = (0, 0, 1)$$

A parametrização X é regular, porém a superfície tem auto interseção observe o plot.

```
a, b, u, v = var('a b u v')

p1 = (1, 0)
p2 = (-1, 0)

X(u, v) = ((2 * cos(u) - 1) * cos(u),
           (2 * cos(u) - 1) * sin(u),
           v)

# Take the partial derivatives
Xu = X.diff(u)

Xv = X.diff(v)


S = parametric_plot3d(X(u, v),
                      (u, -pi, pi),
                      (v, -pi, pi),
                      mesh=True,
```

```
                      opacity=.7)

P1 = parametric_plot3d(a*Xu(p1[0], p1[1]) + b*Xv(p1[0], p1[1])
                                          + X(p1[0], p1[1]),
                       (a, -2, 2),
                       (b, -2, 2),
                       opacity=.7,
                       color='green')

P2 = parametric_plot3d(a*Xu(p2[0], p2[1]) + b*Xv(p2[0], p2[1])
                                         + X(p2[0], p2[1]),
                       (a, -2, 2),
                       (b, -2, 2),
                       opacity=.7,
                       color='green')

show(S + P1 + P2, figsize=8)
```

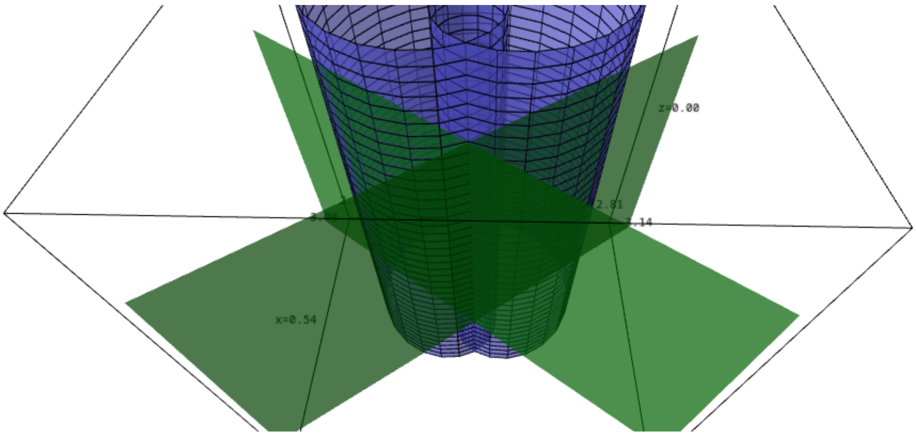

Figure 1. Superfície com auto interseção

Problema 2: Definida na pág. 42 do livro do Ronaldo. Desenhar o segmento de reta que forma a helicoide, fazendo uma animação de modo a percorrer a superfície.

Solução:
Usando os vetores da superfície podemos encontrar a reta dado um ponto p do plano 2-dimensional.

```
a, u, v = var('a u v')

p = (1, 2)

X(u, v) = (v * cos(u), v * sin(u), u)

# Take the partial derivatives
Xu = X.diff(u)

Xv = X.diff(v)

```

```

S = parametric_plot3d(X(u, v),
                      (u, -pi, pi),
                      (v, -pi, pi),
                      mesh=True,
                      opacity=.7)

R = parametric_plot3d((X(p[0], p[1]) + a * Xv(p[0], p[1])),
                      (a, -2 * pi, pi),
                      opacity=.7,
                      thickness=3,
                      color='red')

show(S + R, figsize=8)
```

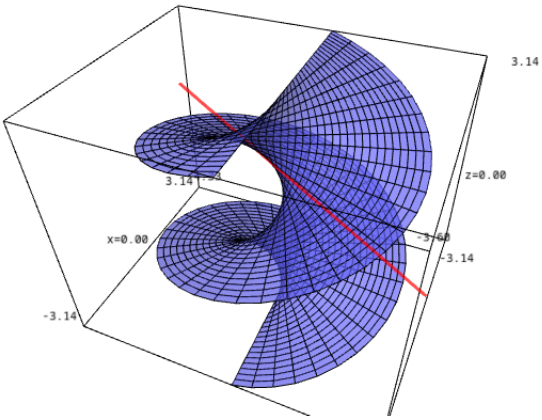

Figure 2. Helicoide

Problema 3: Reproduzir a demonstração do Ronaldo de que o Helicoide é superfície regular e representar o argumento graficamente.

Solução:
Seguindo como no livro. Seja a aplicação

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$$

Note que, X é um difeomorfismo e que gera uma superfície regular (helicoide) de fato $\forall(x, y, z)$ na helicoide podemos produzir uma aplicação da helicoide no plano $\mathbb{R}^2$ com a seguinte função f

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (\frac{x}{\cos(z)}, z), & \cos(z) \neq 0 \\ (\frac{y}{\sin(z)}, z), & \sin(z) \neq 0 \end{cases}$$

Que está bem definida, e pode-se notar que f é bijetora, diferenciável e $f(X(\mathbb{R}^2)) = \mathbb{R}^2$. Logo X é um difeomorfismo.

```
u, v = var('u v')

X(u, v) = (v * cos(u), v * sin(u), u)

# Take the partial derivatives
Xu = X.diff(u)

Xv = X.diff(v)


S = parametric_plot3d(X(u, v),
                      (u, -pi, pi),
                      (v, -pi, pi),
                      mesh=True,
                      opacity=.7)

show(S, figsize=8)
```

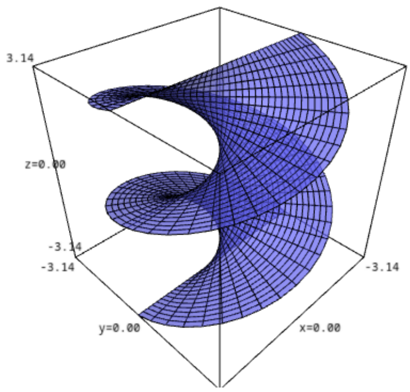

Figure 3. Helicoide

Problema 4: Definida na pág. 43 do livro do Ronaldo. Desenhar o hiperboloide de uma folha, e uma curva direcional sobre ele, como exemplificado na figura 2.9 do livro

Solução:
Aqui podemos vez que ao variar o z sempre obtemos uma curva fechada (circulo) que está contida no hiperboloide.

```
u, v = var('u v')

# Let z a height
z = 1

# Def curve
X(s, t) = (cos(s) - t * sin(s), sin(s) + t * cos(s), t)

```

```
# Take the partial derivatives
Xu = X.diff(u)

Xv = X.diff(v)


S = parametric_plot3d(X(s, t),
                      (s, -pi, pi),
                      (t, -pi, pi),
                      mesh=True,
                      opacity=.7)

# Curve closed
C = parametric_plot3d((cos(s) - z * sin(s), sin(s) + z * cos(s), z),
                      (s, -pi, pi),
                      mesh=True,
                      thickness=5,
                      color='red',
                      opacity=.7)

show(S + C, figsize=8)
```

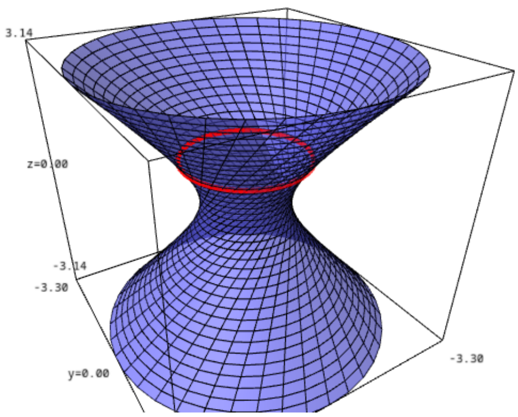

Figure 4. Hiperboloide

Problema 5: (ponto extra) Mostrar uma transição suave entre o Helicoide e o Hiperboloide de uma folha ou o cilindro.

Solução:

Problema 6: Mostre que as superfícies

$$X(u, v) = (u + v, u - v, 4uv),\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

$$Y(s,t) = (s, t, s^2 - t^2),\ (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

têm o mesmo traço.

Solução:

Vamos provar que os subconjuntos do $X, Y \in \mathbb{R}^3$ determinadas pelas funções dadas são iguais

($\subset$**)** $\forall x \in X\ \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x = (u+v, u-v, 4uv)$. Seja $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tal que

(i) $u + v = s$
(ii) $u - v = t$
(iii) $4uv = s^2 - t^2$

$$\begin{aligned} 4uv &= 4uv + u^2 - u^2 + v^2 - v^2 \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 - t^2 &= (u+v)^2 - (u-v)^2 \\ &= u^2 + 2uv + v^2 - u^2 + 2uv - v^2 \\ &= 4uv \end{aligned}$$

Então, $x \in Y$

($\supset$**)** $\forall y \in Y\ \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y = (s, t, s^2 - t^2$ e seja $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ onde

(i) $s = u + v$
(ii) $t = u - v$
(iii) $s^2 - t^2 = 4uv$

Usando (i) e (ii) em (iii)

$$\begin{aligned} 4uv &= 4uv + u^2 - u^2 + v^2 - v^2 \\ &= (u+v)^2 - (u-v)^2 \\ &= s^2 - t^2 \end{aligned}$$

Então, $y \in X$ e logo os conjuntos determinados pelas superfícies X e Y são iguais.