Curvas e Superfícies - Lista 1

Wellington José Leite da Silva[1]

[1]Escola de Matemática Aplicada da FGV (EMAP), Brazil

Problema 1: Encontrar uma curva (parametrizada) $\alpha(t) : t \in I \to \mathbb{R}^2$; cujo traço seja o círculo $x^2 + y^2 = 1$; de maneira que t percorra o círculo no sentido anti-horário e tenhamos $\alpha(0) = (0, 1)$. Faça o desenho em Geogebra, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva.

Solução:
Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ a curva que desejamos, como o ponto $(0, 1)$ pertence à curva $x^2 + y^2 = 1$ que queremos satisfazer, podemos usar uma igualdade trigonométrica $sen^2(t) + cos^2(t) = 1$ de forma que $x(t) = sen(t)$ e $y(t) = cos(t)$, satisfazemos a traço e vale que (0, 1) pertence à curva. Porém, como queremos no sentido anti-horário tomamos $x(t) = -sen(t)$ que não modifica o traço, mas inverte o sentido. Logo, uma curva que satisfaz é

$$\alpha(t) = (-sen(t), cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Gráfico Geogebra: link

Problema 2: A *limaçon* (ou caracol de Pascal) é a curva parametrizada

$$\gamma(t) = ((1 + 2cos(t)) \cdot cos(t),\ (1 + 2cos(t)) \cdot sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

Faça o desenho desta curva. Observe que o ponto (0, 0) pertence ao traço da curva, e ache o vetor tangente nesse ponto.

Solução:
Avaliando a curva no ponto (0, 0), sabemos que deve valer

$$(1 + 2cos(t))cos(t) = 0 \ e \ (1 + 2cos(t))sen(t) = 0$$

Ou seja, $cos(t) = -1/2$, onde $t = \frac{2}{3}\pi$ ou $t = \frac{4}{3}\pi$ quando $t \in [0, 2\pi]$, e o vetor tangente dessa curva pode ser escrito como:

$$\gamma'(t) = (-(1 + 4cos(t))sen(t), cos(t) + 2(cos^2(t) - sen^2(t)))$$

Juntando nossas 2 informações temos 2 vetores tangentes:

$$\gamma'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1.5\right)$$

$$\gamma'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1.5\right)$$

Gráfico Geogebra: link

Problema 3: A *Cissoide de Diocles* é a curva definida implicitamente pela equação:

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$$

Encontre uma parametrização para está curva. Faça o desenho em Geogebra, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. Busque informações para entender qual o fenômeno modelado por está curva que a tornou famosa. (Dica: use $y = xt$ para encontrar uma parametrização da curva).

Solução:
Usando a dica consideramos $y = xt$ aplicando à equação temos:

$$x^3 + x^3t^2 - 2ax^2t^2 = 0$$

$$x^2(x + xt^2 - 2at^2) = 0$$

Se $x = 0$ a igualdade vale, então considere $x \neq 0$, logo

$$\begin{aligned} x + xt^2 - 2at^2 = 0 \ &\Rightarrow \ x(1 + t^2) = 2at^2 \\ &\Rightarrow \ x = 2a\frac{t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Então, a parametrização é

$$\alpha(t) = 2a\frac{t^2}{1+t^2}(1,t)$$

Gráfico Geogebra: link

Problema 4: O *Folium de Descartes* é definido implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em Geogebra, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. A descrição implícita desta curva da origem a uma família de curvas da forma

$$F_\varepsilon(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - \varepsilon.$$

Observe, usando o Geogebra, a mudança no traço da curva ao mudar de elemento da família (ex.: $\varepsilon = -\frac{1}{10}$)

Solução:
Tomando como no item anterior $y = xt$ (se $x = 0$ a equação vale, logo suponha $x \neq 0$)

$$\begin{aligned} x^3 + x^3t^3 = 3x^2t \;&\Rightarrow\; x^3(1+t^3) = 3x^2t \\ &\Rightarrow\; x(1+t^3) = 3t \\ &\Rightarrow\; x = 3\frac{t}{1+t^3} \end{aligned}$$

Então a curva fica

$$\gamma(t) = 3\frac{t}{1+t^2}(1,t)$$

Gráfico Geogebra: link

Problema 5: Verifique que a aplicação $\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), t \in \mathbb{R}$, com a e b constantes não-nulas, é uma curva parametrizada diferenciável. Descreva o traço de α.

Solução:
Temos que, α é uma curva parametrizada, pois, é da forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e $\mathbb{R}$ é aberto, falta mostrarmos ser diferenciável. Para tal, tome a curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tal que $x(t) = -a \cdot sen(t)$ e $y(t) = b \cdot cos(t)$, ou seja, as derivadas de α, e vamos provar que de fato γ é a diferenciável de α. Ou seja

$$
\begin{aligned}
(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t) - h \cdot \gamma(t)}{\mid h \mid} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(a(cos(t+h) - cos(t) + h \cdot sen(t)),\ b(sen(t+h) - sen(t) - h \cdot \cos(t)))}{\mid h \mid} \\
&= (a,b) \cdot \left(\lim_{h \to 0} \frac{cos(t+h) - cos(t) h \cdot sen(t)}{\mid h \mid},\ \lim_{h \to 0} \frac{sen(t+h) - sen(t) - h \cdot cos(t)}{\mid h \mid} \right) \\
&\overset{(\star)}{=} (0,0)
\end{aligned}
$$

$(\star)$ Usando que: $cos'(t) = -sen(t)$ e $sen'(t) = cos(t)$

E note que, a curva $\alpha(t) = (acos(t), bsen(t))$ descreve uma elipse de acordo com a e b (vide gráfico).

Gráfico Geogebra: link

Problema 6: Obtenha uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(0) = (2,0)$ e $\alpha'(t) = (t^2, e^t)$

Solução:
Note que, a curva é regular, pois $e^t \neq 0$ para todo t, então temos que, (sendo C um ponto constante)

$$
\begin{aligned}
\alpha(t) &= \int_0^t \alpha'(x) dx + C \\
&= \int_0^t (x^2, e^x) dx + C \\
&= (t^3/3, e^t - 1) + C \\
&\overset{(\star)}{=} (t^3/3 + 2, e^t - 1)
\end{aligned}
$$

$(\star)$ Note que: $(2,0) = \alpha(0) = (0,0) + C \ \Rightarrow\ C = (2,0)$

Gráfico Geogebra: link

Problema 7: Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Prove que

$$||\alpha'(t)||$$

é constante se, e somente se, para cada $t \in I$, o vetor $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

Solução:

Supondo $\|\alpha(t)\| = c$ e $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, então $\forall t \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&\|\alpha(t)\|^2 = c^2 \\
\iff &\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = c^2 \\
\iff &(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = c^2 \\
\iff &2(x''(t).x'(t) + y''(t).y'(t)) = 0 \\
\iff &\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0 \\
\iff &\alpha'(t) \perp \alpha''(t)
\end{aligned}$$

Problema 8: Prove que, se uma curva regular $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$, é tal que $x'(t) \neq 0, \forall t \in I$, então o traço de α é o gráfico de uma função diferenciável.

Solução:
Vamos mostrar que o gráfico do traço de α pode ser escrita como uma função $f : x(I) \to y(I)$ tal que f é diferenciável, para tal. Seja $A = (x(t_1), y(t_1))$ e $B = (x(t_2), y(t_2))$ pontos quaisquer da curva α com $t_1 > t_2$, usando o teorema do valor médio temos que

$$x(t_1) - x(t_2) = x'(t_1)(t_1 - t_2) \neq 0$$

pois, $t_1 - t_2 > 0$ e $x'(t_1) \neq 0$ (aqui também podemos tomar t_2. Dai temos que $\forall t_1, t_2$ com $t_1 > t_2$, $x(t_1) \neq x(t_2)$. Agora podemos definir $f : x(I) \to y(I)$ de forma que $f(x(I)) = y(I), \forall t \in I$.

Agora temos que provar que f é diferenciável. Seja $a \in x(I)$ e $h \in \mathbb{R}$ de forma que $a + h \in x(I)$, tome t_1 e t_2 tais que $a + h = x(t_1)$ e $a = x(t_2)$, assim

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{y(t_2)-y(t_1)}{x(t_2)-x(t_1)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}}{\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}} \\
&= \frac{\lim_{h\to 0}\frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}}{\lim_{h\to 0}\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}} \\
&= \frac{y'(t_2)}{x'(t_2)}
\end{aligned}$$

Logo, f é diferenciável.

Problema 9: Considere a espiral logarítmica $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cdot cos(t), e^t \cdot sen(t))$. Desenhe a curva em ambiente computacional e mostre que o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vetor tangente em $\gamma(t)$ não depende de t.

Solução:

Temos que,

$$\gamma'(t) = (e^t(cos(t) - sen(t)), e^t(sen(t) + cos(t)))$$

Tomando o cos do angulo (no caso $\theta(t)$), temos o seguinte

$$\begin{aligned}
cos(\theta(t)) &= \frac{\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle}{\|\gamma(t)\|\|\gamma'(t)\|} \\
&= \frac{e^{2t}(cos^2(t) - cos(t)sen(t) + sen^2 + sen(t)cos(t))}{\sqrt{2}e^{2t}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Como o cos do angulo é constante e o angulo é sempre menor que π só existe um valor para $\theta(t)$, então o angulo é constante.

Gráfico Geogebra: link