Curso de Curvas e Superfícies - Parte II

Wellington José Leite da Silva[1]

[1]Escola de Matemática Aplicada da FGV (EMAP), Brazil

Apresentação

Continuando com o que foi construído na parte I apresentamos aqui uma linha de aprendizado do curso de curvas e superfícies apresentando definições, teoremas, exemplos, etc. Separados em Superfícies abordando definições e visualizações, Topologia abordando a teoria e primeira e segunda formas fundamentais onde é abordado a teoria e implementação.

Com intuído de auxiliar o aprendizado aos tópicos apresentados e fornecer uma forma de visualização computacional apresentamos exemplos com códigos em *SageMath* [The Sage Developers 2022]. Aqui seguimos o livro [de Lima 2016] como principal e o [do Carmo 2010] como complementar. Adicionando sempre que possível, exemplos de visualizações em *SageMath*. As implementações, códigos usados para as mesmas assim como o *Tex* deste documento se concentram no repositório curvas-superficies [1] que está disponível abertamente no github.

Todos os códigos apresentados nos exemplos podem ser facilmente generalizados para outros casos, é recomendável como forma de aprendizado rodar os códigos apresentados com outros exemplos de escolha do leitor.

1. Superfícies

Definição 1 (Superfície) *O subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ é uma **superfície** se $\forall p \in S$, existe um aberto U em $\mathbb{R}^2$ e um aberto W em $\mathbb{R}^3$ contendo p tal que $S \cap W$ é **homeomorfo** a U.*

Exemplo 1.1 *Como exemplo de superfície temos a esfera de raio unitário no $\mathbb{R}^3$. Que pode ser obtida da seguinte forma em SageMath*

```
# Define the superficie
hip(u,v) = (cosh(u)*cos(v), cosh(u)*sin(v), u)

# Plot
parametric_plot3d(hip, (u, -2, 2), (v, 0, 2*pi), mesh=True)
```

[1]https://github.com/wellington36/curvas-superficies

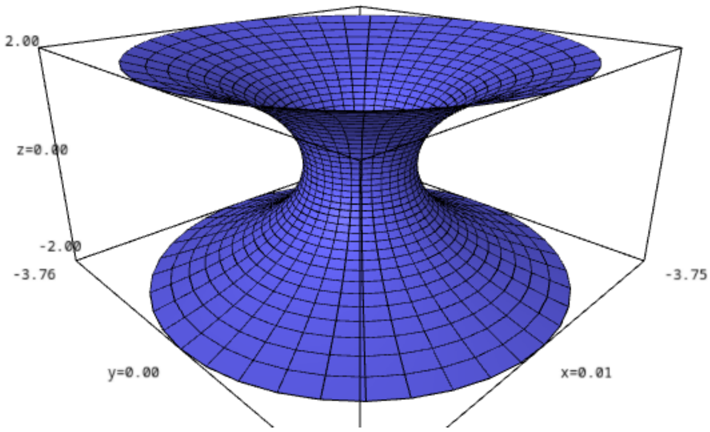

Figure 1. Hiperboloide

Definição 2 (Atlas) *Uma coleção de parametrizações que cobrem uma superfície S é dita* ***atlas de S*** *e cada uma das parametrizações é dita uma* ***carta****.*

Exemplo 1.2 (Um atlas para a esfera) *Uma esfera não pode ser coberta por uma única parametrização, porem podemos cobrir ela com 2 parametrizações da seguinte forma*

```
# Define the parameterizations
esfera1(u, v) = (2 * u/(1  +u^2 + v^2),
                 2 * v/(1 + u^2 + v^2),
                 (u^2 + v^2 - 1)/(1 + u^2 + v^2))

esfera2(u, v) = (2 * u/(1  +u^2 + v^2),
                 2 * v/(1 + u^2 + v^2),
                 -(u^2 + v^2 - 1)/(1 + u^2 + v^2))

# Plot
E1 = parametric_plot3d(esfera1, (u, -1, 1), (v, -1, 1),
                       mesh=True, color='white')

E2 = parametric_plot3d(esfera2, (u, -1, 1), (v, -1, 1),
                       mesh=True, color='red')


show(E1 + E2)
```

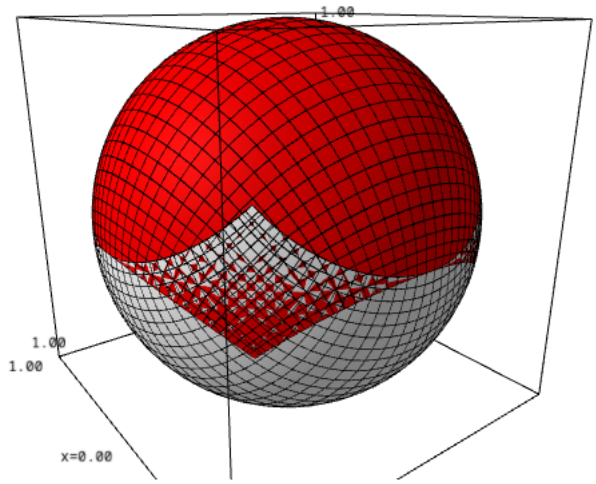

Figure 2. Esfera com 2 parametrizações

Definição 3 (Curvas regulares enquanto subconjuntos) *Diz-se que um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ é uma **curva regular**, quando para cada $p \in C$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e um difeomorfismo $\alpha : I \to \alpha(I) \subset C$ em que $\alpha(I)$ é um aberto relativo de C.*

Definição 4 (Superfícies Regulares) *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma **superfície regular**, quando é localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, quando, $\forall p \in S$, exite um difeomorfismo*

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$$

onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$ e V é um aberto relativo de S. A aplicação X é dita, então uma parametrização local de S em p.

Exemplo 1.3 (Superfícies regulares) *Pela definição de superfície regular, temos que, as seguintes superfícies são regulares: plano, gráficos de funções de 2 variáveis, esferas, superfícies de revolução, etc.*

Definição 5 *Sendo o difeomorfismo de uma superfície da forma*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\ (u, v) \in V$$

*definimos as **derivadas parciais** de X como sendo*

$$X_u(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)$$

$$X_v(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)$$

e se X_u e X_v são L.I. então produzem um plano tangente no ponto p.

Proposição 1 *Se S é uma superfície regular temos que:*

(a) A aplicação $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ é diferenciável de C^∞ quando x, y e z tem derivadas parciais de todas as ordens.
(b) Para todo $q : (u,v) \in U$, a diferencial de X em q, $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva, nesse caso, garante-se a existência do plano tangente T_pS.

Teorema 1 (Função Inversa) *Seja F diferenciável e $p \in A$ tal que dF_p é injetora. Então existe uma vizinhança $U \subset A$ de p. Tal que $F(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e a restrição F_U é um difeomorfismo de U sobre $F(U)$.*

Definição 6 (Valor Regular) *Dados um aberto $O \subset \mathbb{R}^3$ e uma função diferenciável $\varphi : O \to \mathbb{R}$. Dizemos que $q \in \mathbb{R}$ é **valor regular** de φ quando $\forall p \in \varphi^- 1(\{q\}) \subset O$ a derivada*

$$d\varphi_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

é não nula, isto é, $\nabla\varphi(p) \neq 0$

Proposição 2 *A **imagem inversa** de um valor regular de uma função diferenciável definida em um aberto do $\mathbb{R}^3$, quando não vazia, é uma superfície regular.*

Topologia

Definição 7 (Bola aberta) *Dado $a \in \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$, a **bola aberta** de centro a e raio r em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$$

*e respectivamente definimos **bola fechada** como*

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \geq r\}$$

Definição 8 (Conjunto Limitado) *Um conjunto é dito **limitado** quando existe uma bola que o contém, ou seja,*

$$\exists a \in \mathbb{R}^n \text{ e } r > 0 \text{ t.q. } X \subset B(a, r)$$

Definição 9 (Aplicação limitada) *Dado um conjunto A uma **aplicação** $f : A \to \mathbb{R}^n$ é dita limitada quando seu conjunto imagem é limitada.*

Definição 10 (Conjunto aberto) *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito **aberto** quando $\forall a \in A \exists r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$ (e a é dito ponto interior de A).*

Definição 11 (Aplicação aberta) *Diz-se que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é **aberta** quando $\forall A \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto}, f(A) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto.*

Proposição 3 (Propriedades dos abertos) *Propriedades fundamentais dos conjuntos abertos*

1. *O conjunto vazio e o espaço $\mathbb{R}^n$ são abertos.*
2. *A **intersecção** de uma família finita de abertos é aberta.*
3. *A **união** de uma família qualquer de abertos é aberta.*

Definição 12 (Espaço topológico) *Um espaço topológico é um par (X, T) em que X é um conjunto e T é uma família de subconjuntos de X, chamados abertos, que satisfazem as propriedades acima. Diz-se, então, que a família T define uma topologia*

Teorema 2 *Uma sequência (X_k) em $\mathbb{R}^n$ converge para $a \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\forall r > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$ então $x_k \in B(a, r)$.*

Definição 13 (Conjunto fechado) *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito **fechado** quando seu complementar é aberto.*

Proposição 4 (Propriedades dos fechados) *Propriedades fundamentais dos conjuntos fechados*

1. *O conjunto vazio e o espaço $\mathbb{R}^n$ são fechados.*
2. *A **intersecção** de uma família qualquer de fechados é um conjunto fechado.*
3. *A **união** de uma família finita de fechados é fechado.*

Definição 14 (Aplicação fechada) *Diz-se que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é **fechada** quando leva fechados de $\mathbb{R}^n$ em fechados de $\mathbb{R}^m$.*

Definição 15 (Aderência) *Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é dito **aderente** a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se existe uma sequência de pontos de X que convergem para a.*

Definição 16 (Fecho) *O **fecho** de X, denotado por $\overline{X}$, é o conjunto formado por todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ que são aderentes a X.*

Teorema 3 *$F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\Longleftrightarrow \overline{F} = F$.*

Definição 17 (Bordo) *A fronteira (ou bordo) de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n - X}$.*

Definição 18 (Aberto relativo) *Sejam X subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $A \subset X$. Diz-se que A é **aberto relativo** a X ou **aberto relativamente** à X quando existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = U \cap C$.*

Definição 19 (Cisão) *Uma **cisão** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição do mesmo em dois conjuntos disjuntos que são ambos, abertos em X, isto é, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que*

- $X = A \cup B$
- $A \cap B = \emptyset$
- *A e B abertos em X*

Definição 20 (Conexidade) *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito **conexo** se a única cisão que admite é a trivial ($X = X \cup \emptyset$) caso contrario é dito desconexo.*

Definição 21 (Homeomorfismo) *Diz-se que dois espaços (X_1, T_1) e (X_2, T_2). São **homeomorfos** quando existe bijeção $\varphi : X_1 \to X_2$ tal que para quaisquer abertos $A_1 \in T_1$ e $A_2 \in T_2$ tem-se que $\varphi(A_1) \in T_2$ e $\varphi^{-1}(A_2) = T_1$. Logo φ é dito **homeomorfismo**.*

Definição 22 (Continuidade) *Dados $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to Y$ é **contínua** em $a \in X$ se $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que $x \in X$ e $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.*

Teorema 4 *Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ uma bijeção $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se e só se f e f^{-1} são continuas.*

Definição 23 (Isomorfismo) *É uma aplicação que preserva uma estrutura e pode ser revertida com uma aplicação inversa.*

Primeira Forma Fundamental

Teorema 5 (Teorema da função inversa) *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável e $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ isomorfismo. Então, existem abertos $V \subset U$ e $W \subset F(U)$, tais que se $p \in V$, então $F(p) \in W$ e $F|_v : V \to W$ é um difeomorfismo.*

Definição 24 (Vetor tangente) *Dado um ponto p de uma superfície regular S, diz-se que $w \in \mathbb{R}^n$ é um **vetor tangente** a S em p, se existe uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $\varepsilon > 0$, tal que, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.*

Teorema 6 (Primeira forma fundamental) *Seja S uma superfície regular e $p \in S$. A **primeira forma fundamental** de S em p*

$$I_p : T_pS \to \mathbb{R}$$

é a forma quadrática associada à restrição do produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$ ao plano tangente de S em p, T_pS, isto é

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle^2 = \|w\|^2, \; w \in T_pS$$

Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to X(U) \subset S$ de S, as funções

$$E(u, v) = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle$$

$$F(u, v) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle$$

$$G(u, v) = \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle$$

São os coeficientes da primeira forma fundamental de S relativos a X, isto é, a matriz de $I_{X(u,v)}$ com respeito a base $\{X_u, X_v\}$, de $T_{X(u,v)}S$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

E $\forall w = aX_u(u, v) + bX_v(u, v) \in T_{X(u,v)}S$ tem-se

$$I_{X_{(u,v)}}(w) = a^2E(u,v) + 2abF(u,v) + b^2G(u,v)$$

Exemplo 1.4 (A primeira forma numa superfície) *Em sagemath vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície enneper.*

```
# Define a cart (for exemple enneper)
card(u,v) = (u - (u^3)/3 + u*v^2, v - (v^3)/3 + v*u^2, u^2 - v^2)

# Partial derivatives
x_u = derivative(card, u)
x_v = derivative(card, v)

# First fundamental form
E = x_u.dot_product(x_u)
F = x_u.dot_product(x_v)
G = x_v.dot_product(x_v)

# Simplificacao
E = E.full_simplify().canonicalize_radical()
F = F.full_simplify().canonicalize_radical()
G = G.full_simplify().canonicalize_radical()

pretty_results((r"E", E), (r"F", F), (r"G", G))
```

$$E = u^4 + v^4 + 2\left(u^2+1\right)v^2 + 2\,u^2 + 1$$
$$F = 0$$
$$G = u^4 + v^4 + 2\left(u^2+1\right)v^2 + 2\,u^2 + 1$$

Teorema 7 (Área) *Seguindo a primeira forma fundamental a área de uma superfície S um certo conjunto D é dada por*

$$A_S(D) = \int_D \sqrt{EG - F^2}dudv$$

Exemplo 1.5 (Área de uma superfície num intervalo de u e v) *Vamos usar o teorema acima para calcular área de uma superfície (no caso vamos usar um toro) dado os intervalos de u e v, primeiro encontramos os coeficientes da primeira forma e depois aplicamos o Teorema 7.*

```
# Define the cart (for exemple toro)
a = var('a')

card(u,v) = ((a + cos(u))*cos(v), (a + cos(u))*sin(v), sin(u))

# Set interval to u and v
I = [(0, 2 * pi), (0, 2 * pi)]

# Partial derivatives
x_u = derivative(card, u)
x_v = derivative(card, v)

# First fundamental form
E = x_u.dot_product(x_u)
F = x_u.dot_product(x_v)
G = x_v.dot_product(x_v)

# Simplify
E = E.full_simplify().canonicalize_radical()
F = F.full_simplify().canonicalize_radical()
G = G.full_simplify().canonicalize_radical()

# Using theorem to find area
A = integrate(integrate(E * G - F^2, u, I[0][0], I[0][1]),
              v, I[1][0], I[1][1])

A = A.full_simplify()

# plot
pretty_results((r"Area", A))
```

$$Area = 4\,\pi^2 a^2 + 2\,\pi^2$$

Segunda forma fundamental

Definição 25 (Campo) *Dada uma parametrização regular S, chama-se* ***campo*** *em S toda aplicação $f : S \to \mathbb{R}^3$*

Proposição 5 *Um campo é dito:*

- *unitário, se $\|f(p)\| = 1,\ \forall p \in S$.*
- *tangente, se $f(p) \in T_pS,\ \forall p \in S$.*
- *normal, se $f(p) \in T_pS^{\perp},\ \forall p \in S$.*

Definição 26 (vetor normal) *Sendo S uma superfície, seja*

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to X(U) \subset S$$

$\forall p \in S$ seja $q = X^{-1}(p)$, podemos então definir o vetor normal em S no ponto p como $N : X(U) \to \mathbb{R}^2$, como

$$N(p) = \frac{X_u(q) \times X_v(q)}{\|X_u(q) \times X_v(q)\|}$$

Definição 27 (Superfície orientável) *Uma superfície regular S é **orientável** quando se pode definir um campo normal unitário e diferenciável.*

Definição 28 (Atlas coerente) *Dada duas parametrizações de A, X e Y e p no conjunto imagem de ambas, então $Y^{-1} \circ X$ tem determinante jacobiano maior que 0 em $X^{-1}(p)$.*

Teorema 8 *Uma superfície regular S é **orientável** se, e só se, admite um atlas coerente.*

Definição 29 (Aplicação normal de Gauss) *Seja S uma superfície regular orientável, N campo normal unitário diferenciável em S, isto é, $\|N(p)\| = 1, \forall p \in S$*

$$N : S\textit{(superfície)} \to E_1\textit{(esfera de raio 1)}$$

*é dita uma **aplicação normal de Gauss**, $\forall p \in S,\ T_pS = \{N(p)\}^\perp = T_{N(p)}E_1$, temos dN_p é um operador linear de T_pS.*

Teorema 9 (Segunda forma fundamental) *Seja S uma superfície regular orientável, N aplicação normal de Gauss de S*

$$I_p(w)\langle -dN_pw, w\rangle,\ w \in T_pS$$

Dado uma parametrização

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \subset S$$

tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$, temos que, $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ \langle N(\alpha(s)), \alpha'(s)\rangle = 0$, então

$$\langle -dN_p w, w\rangle = \langle N(p), \alpha''(0)\rangle$$

e os coeficientes da segunda forma são

$$\begin{aligned} e(u,v) &= \langle -dN_p X_u, X_u\rangle = \langle N\circ X, X_u u\rangle \\ f(u,v) &= \langle -dN_p X_u, X_v\rangle = \langle N\circ X, X_u v\rangle \\ g(u,v) &= \langle -dN_p X_v, X_v\rangle = \langle N\circ X, X_v v\rangle \end{aligned}$$

Exemplo 1.6 (A segunda forma numa superfície) *Em sagemath vamos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental de um toro.*

```
# Define the cart (for exemple toro)
a = var('a')

cart(u,v) = ((a + cos(u))*cos(v), (a + cos(u))*sin(v), sin(u))

# Find partial derivatives
x_u = derivative(cart, u)
x_v = derivative(cart, v)

x_uu = derivative(x_u, u)
x_uv = derivative(x_u, v)
x_vv = derivative(x_v, v)

# Find normal vector
normal = x_u.cross_product(x_v)(u,v)

normal_unit = normal / normal.norm()
normal_unit = vector_simplify(normal_unit,
                              use_canonical_form=True)

# Second fundamental form
l = normal_unit.dot_product(x_uu)
m = normal_unit.dot_product(x_uv)
n = normal_unit.dot_product(x_vv)

# Simplify
l = l.full_simplify().canonicalize_radical()
m = m.full_simplify().canonicalize_radical()
n = n.full_simplify().canonicalize_radical()

pretty_results((r"L", l), (r"M", m), (r"N", n))
```

$$
\begin{aligned}
L &= 1 \\
M &= 0 \\
N &= a\cos(u) + \cos(u)^2
\end{aligned}
$$

References

de Lima, R. F. (2016). *INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL*.

do Carmo, M. (2010). *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Textos Universitarios: Ciencias médicas. Sociedade Brasileira de Matemática.

The Sage Developers (2022). *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.5)*. `https://www.sagemath.org`.