Curvas e Superfícies - Lista 5

Wellington José Leite da Silva[1]

[1]Escola de Matemática Aplicada da FGV (EMAP), Brazil

Problema 1: Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Mostre que: F é injetora se, e só se, a imagem da base canônica de $\mathbb{R}^2$ forma um conjunto de vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ ou, equivalentemente, se a matriz associada de F tem posto 2. (obs.: Repare que este resultado está sendo usado para o conceito de superfície regular).

Solução:

- ($\Rightarrow$) Suponha F injetora, seja a base canônica de $\mathbb{R}^2$ $\{e_1, e_2\}$. Por absurdo suponha que $F(e_1) = \alpha F(e_2),\ \alpha \in \mathbb{R}^2$, como F é uma aplicação linear

$$F(e_1) = F(\alpha e_2) \Rightarrow e_1 = \alpha e_2$$

absurdo, pois e_1 e e_2 são uma base canônica de $\mathbb{R}^2$, então $F(e_1)$ e $F(e_2)$ são L.I.

- ($\Leftarrow$) Suponha $F(e_1)$ e $F(e_2)$ L.I. Queremos provar que $\forall a, b \in \mathbb{R}^2,\ F(a) = F(b) \Rightarrow a = b$, podemos escrever $a = a_1e_1 + a_2e_2$ e $b = b_1e_1 + b_2e_2$ (pois $e_1,\ e_2$ é uma base canônica). Então

$$\begin{aligned} F(a_1e_1 + a_2e_2) = F(b_1e_1 + b_2e_2) &\Rightarrow (a_1 - b_1)F(e_1) + (a_2 - b_2)F(e_2) = 0 \\ &\Rightarrow a_1 - b_1 = a_2 - b2 = 0 \\ &\Rightarrow a_1 = b_1 \text{ e } a_2 = b_2 \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

Logo, F é injetiva.

Problema 2: Mostre que o paraboloide hiperbólico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$ é uma superfície regular. Desenhe o paraboloide em um ambiente gráfico juntamente com o plano tangente e um vetor normal à superfície. Faça o desenho de forma a poder variar o ponto aonde o plano tangente é exibido.

Solução:
Tome o seguinte difeomorfismo $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$X(x, y) = (x, y, x^2 - y^2$$

Então queremos mostrar que $X : \mathbb{R}^2 \to S$ é uma aplicação bijetora. E de fato pela definição X é injetora, e é sobrejetora pois $\forall s = (s_1, s_2, s_3) \in S$, sendo $s_3 = s_1^2 - s_2^2$, então $s = (s_1, s_2, s_1^2 - s_2^2)$. Logo $X(s_1, s_2) = s$ e X é sobrejetora.

Temos também que as derivadas parciais de X são

$$X_x(x, y) = (1, 0, 2x)$$

$$X_y(x, y) = (0, 1, 2y)$$

Que são $X_x \neq 0$ e $X_y \neq 0$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e L.I. Logo, a superfície é regular.

E aqui temos a visualização do plano tangente e do vetor normal num certo ponto:

```
u, v, a, b = var("u v a b")

# Define a point and a function
p = (0, 0)

X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)

# Take the partial derivatives
Xu = X.diff(u)

Xv = X.diff(v)

# Config a plot
P1 = parametric_plot3d(X(u, v),
                       (u, -5, 5),
                       (v, -5, 5),
                       opacity=.7)

P2 = parametric_plot3d(a*Xu(p[0], p[1]) + b*Xv(p[0], p[1])
                                        + X(p[0], p[1]),
                       (a, -2, 2),
                       (b, -2, 2),
                       opacity=.7,
                       color='green')

normalvec = arrow(X(p[0], p[1]),
                  Xu(p[0], p[1]).cross_product(Xv(p[0], p[1]))
                      + X(p[0], p[1]),
                  color='red')

# Plot
show(P1 + P2 + normalvec, figsize=8)
```

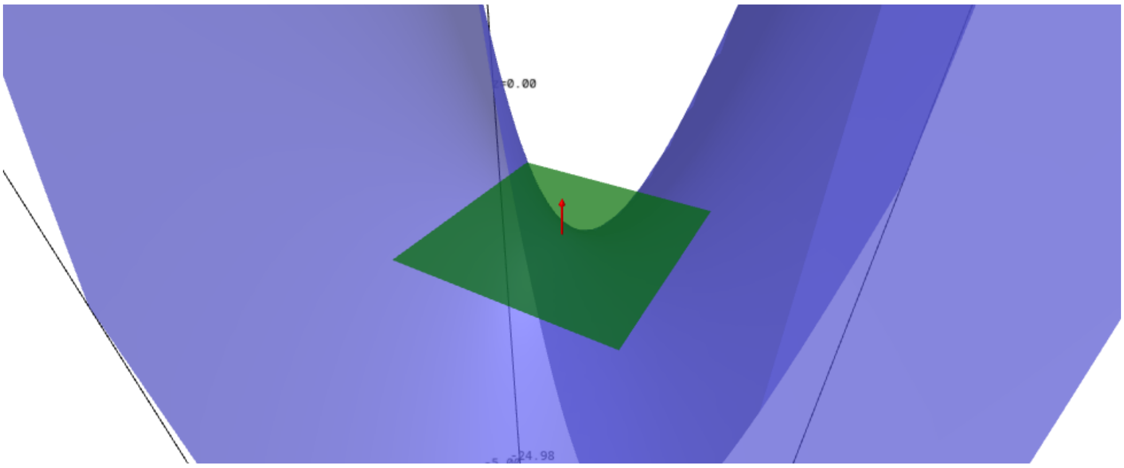

Figure 1. Ex. 2

Problema 3: Mostre que, se $f(u,v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u,v) \in U$, aberto de $\mathbb{R}^2$, então a aplicação $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$ é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função f.

Solução:
Aqui queremos generalizar o item anterior, então de forma análoga queremos mostrar que X é uma aplicação bijetora $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, analogamente X é injetora por definição e é sobrejetiva pois $\forall (u,v) \in U$ a projeção, ou seja, para qualquer ponto (u,v), ou seja, para qualquer ponto $(a, b, f(a,b))$ temos um correspondente na projeção que é (a,b). E calculando as derivadas parciais de X

$$X_u(u,v) = (1, 0, f_u)$$

$$X_v(u,v) = (0, 1, f_v)$$

Note que, X_u e X_v são L.I., então trata-se de uma superfície regular.

Problema 4: Considere o hiperboloide de uma folha

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

Mostre que, para todo θ, a reta

$$(x - z)\cos(\theta) = (1 - y)\sin(\theta), (x + z)\sin(\theta) = (1 + y)\cos(\theta)$$

está contida em S, e que, todo ponto do hiperboloide está em alguma dessas linhas. Desenhe o hiperboloide e as linhas em um ambiente gráfico. Deduza que a superfície pode ser coberta por uma única parametrização.

Solução:
Aqui temos que provar a ida e a volta

(⇒) $\forall\theta$ tome $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que satisfazem

$$(x - z)\cos(\theta) = (1 - y)\sin(\theta) \tag{1}$$

$$(x + z)\sin(\theta) = (1 + y)\cos(\theta) \tag{2}$$

Temos então, 3 casos para θ:

1. $\theta = k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$, então, por 1, $\sin(\theta) = 0 \Rightarrow x = z$ e por 2 $y = -1$. Em particular, vale que $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
2. $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$, então por 1, $y = 1$ e por 2 $x = -z$ e também vale $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
3. Se θ não entra nos casos anteriores, seguimos fazendo o produto das equações já que nesse caso $\cos(\theta)\sin(\theta) \neq 0$, então

$$(x - z)(x + z) = (1 + y)(1 - y) \iff x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

(⇐) Agora seja $p = (x, y, z)$ um ponto em S, sabemos que vale $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ então (pela primeira parte) vale que

$$(x - z)(x + z) = (1 + y)(1 - y) \tag{3}$$

Então, podemos parametrizar por coordenadas polares da seguinte forma

$$x - z = r_1 \sin(\theta)$$
$$1 - y = r_1 \cos(\theta)$$

Caso $x - z \neq 0$ ou $1 - y \neq 0$, temos que $r_1 \neq 0$ (pois é qualquer θ), assim substituindo em 3 chegamos que

$$(x+z)\sin(\theta) = (1+y)\cos(\theta)$$

e se $x - z = 0$ e $1 - y = 0$ vale que

$$(x-z)\cos(\theta) = (1-y)\sin(\theta)$$

De forma análoga para a parametrização

$$x + z = r_2\cos(\theta)$$
$$1 + y = r_2\sin(\theta)$$

podemos substituir em 3 e obter o mesmo resultado. E para a parametrização como a superfície é formada por um conjunto de retas podemos tomar o vetor direção dessas retas e escrever uma parametrização com ele vezes um parâmetro.

Problema 5: Considere uma curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)), s \in\subset \mathbb{R}$. Seja o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas retas que passam por $\alpha(s)$, paralelas ao eixo O_z. Dê uma condição suficiente que deve satisfazer a curva α para que S seja o traço de uma superfície parametrizada regular.

Solução:
Temos que a superfície S é um exemplo de superfície regrada, pois é gerada por retas paralelas a (0,0,1), então tomemos um ponto $p \in S$ sabemos que p está em uma dessas retas, por construção podemos tomar esse p como uma função de 2 variáveis, onde

$$p(s,t) = \alpha(s) + t(0,0,1)$$

Onde s determina uma reta da superfície e t determina um ponto dessa reta. Como α é regular então essa função p também é em particular

$$p_s(s,t) = (x_s(s,t), y_s(s,t), z_s(s,t)) \neq 0$$

e

$$p_t(s,t) = (0,0,1)$$

Então,

$$p_s \times p_t = (y_s, -x_s, 0)$$

Então, devemos ter $y_s \neq 0$ ou $x_s \neq 0$. Logo, a condição suficiente é que $\alpha'(s)$ não seja um múltiplo de $(0, 0, 1)$ para $\forall s \in I$

Problema 6: Mostre que o cilindro circular

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

pode ser descrito por uma parametrização global, isto é, que existe um atlas composto só por uma única carta.

Solução:
Uma parametrização que descreve o cilindro é dada tomando $U = \{(u, v) \mid 0 < u^2 + v^2 < \pi\}$ e tomando a parametrização $C : U \to \mathbb{R}^3$ como sendo

$$C(u, v) = \left(\frac{u}{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{v}{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}, \tan((u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{2} \right)$$

de fato, C perto ta borda gera a “parede” do cilindro e longe as bases.