

Curso de Curvas e Superfícies - Parte I

Wellington José Leite da Silva¹

¹Escola de Matemática Aplicada da FGV (EMAP), Brazil

Apresentação

Apresentamos aqui uma linha de aprendizado do curso de curvas e superfícies apresentando definições, teoremas, exemplos e etc. Separados em 6 seções sendo elas: Curvas regulares, Difeomorfismo e Reparametrização, Curvatura, Teorema Fundamental de Curvas Plana, Curvas Regulares no \mathbb{R}^3 e Teorema Fundamental das Curvas Espaciais.

Com intuito de auxiliar o aprendizado aos tópicos apresentados e fornecer uma forma de visualização computacional apresentamos exemplos com códigos em *SageMath* [The Sage Developers 2022]. Aqui seguimos o livro [de Lima 2016] como principal e o [do Carmo 2010] como complementar. Adicionando sempre que possível, exemplos de visualizações em *SageMath*. As implementações, códigos usados para as mesmas assim como o *Tex* deste documento se concentram no repositório curvas-superfícies ¹ que está disponível abertamente no github.

Todos os códigos apresentados nos exemplos podem ser facilmente generalizados para outros casos, é recomendável como forma de aprendizado rodar os códigos apresentados com outros exemplos de escolha do leitor.

1. Curvas regulares

Definição 1 Uma *curva parametrizada* α em \mathbb{R}^n é uma aplicação $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sendo $I \subset \mathbb{R}$ aberto, da forma

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I$$

onde x e y são funções diferenciáveis de t .

Exemplo 1.1 (Curva parametrizada diferenciável) A curva

$$\alpha(t) = (1/2 \cos(t) + 1/3 \sin(4t), 1/2 \sin(t) + 1/3 \cos(4t))$$

¹<https://github.com/wellington36/curvas-superfícies>

é um exemplo de curva parametrizada diferenciável e podemos visualizar no sage-math da seguinte forma

```

1 # Curve definition
2 curve_alpha(t) = (1/2 * cos(3 * t) + 1/3 * sin(t),
3                   1/2 * sin(3 * t) + 1/3 * cos(t))
4
5 # Plot
6 parametric_plot(curve_alpha, (t, 0, 2*pi), thickness=2)

```

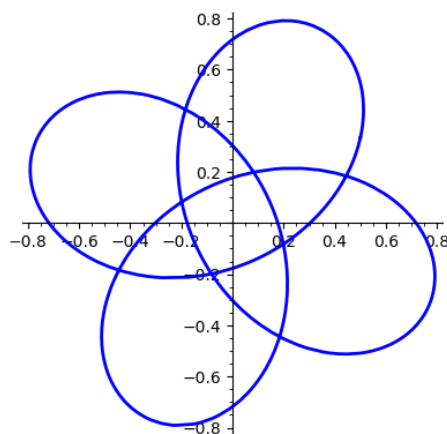


Figure 1. Curva parametrizada

Definição 2 O conjunto imagem de uma curva γ , $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ é dito o **traço** de γ .

Definição 3 (Vetor tangente) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ com $\gamma_i(t)$ diferenciáveis $\forall i, i = 1 \dots n$, o vetor

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

é chamado **vetor tangente de γ em t**

Exemplo 1.2 (Vetores tangentes) Vamos mostrar os vetores tangentes a uma certa curva, aqui usamos o projeto SageManifolds² uma extensão do SageMath para geometria diferencial que está incluso no Sage, então podemos visualizar vetores tangentes a uma curva da seguinte forma

```

1 # Define dimension and variables
2 M = Manifold(2, 'M')
3 X.<x,y> = M.chart()
4
5 # Define curve
6 c = M.curve([1/2 * cos(t) + 1/3 * sin(4 * t),

```

²<https://sagemanifolds.obspm.fr/index.html>

```

7          1/2 * sin(t) + 1/3 * cos(4 * t)], (t, 0, 2*pi))
8
9 # Vectors tangent
10 v = c.tangent_vector_field() ; v
11
12 # Plot
13 show(c.plot(thickness=2, aspect_ratio=1) +
14       v.plot(chart=X, number_values=30, scale=.2))

```

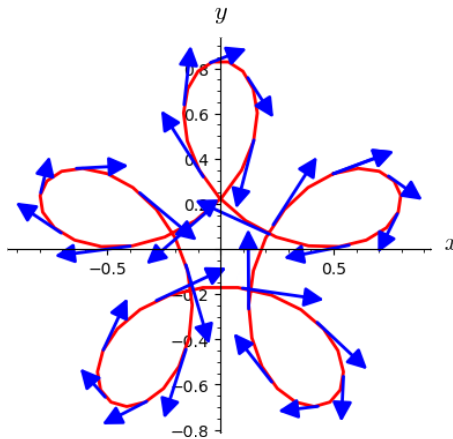


Figure 2. Vetores tangentes

Definição 4 (Curvas regulares) Seja $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada diferenciável. Diz-se que γ é **regular**, quando $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Definição 5 (Comprimento de arco) O **comprimento de arco** de α , de $\alpha(a)$ até $\alpha(b)$ definido por $L_a^b(\alpha)$ é

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Exemplo 1.3 (Comprimento de arco) O comprimento de arco da curva $\alpha(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ pode ser encontrada fazendo

```

1 # Define curve
2 curve_alpha(s) = (2 * cos(s), 2 * sin(s))
3
4 # Calculate the derivative
5 x = get_vector_arguments(curve_alpha).pop()
6 curve_alpha_x = curve_alpha.derivative(x)
7
8 # Calcular comprimento de arco de 0 a t
9 t = var("t")
10 assume(t>0)
11 s = integrate(norm(curve_alpha_x), (x,0,t))
12 s = s.simplify_full()

```

```

13
14 # Plot equation
15 pretty_results((r"\int_0^t || C'(x) || dx", s))

```

$$\int_0^t \|C'(x)\| dx = 2t$$

Definição 6 Se $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma c.p.³, sua **velocidade no ponto** $\gamma(t)$ é $\|\gamma'(t)\|$, e a curva é dita com **velocidade unitária** se $\|\gamma'(t)\| = 1, \forall t \in (a, b)$ e é parametrizada por comprimento de arco.

Teorema 1 Toda curva regular pode ser reparametrizada por comprimento de arco.

2. Difeomorfismo e Reparametrizacão

Definição 7 (Difeomorfismo) Dado os conjuntos abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Uma bijeção $f : U \rightarrow V$ é dita **difeomorfismo** quando f e f^{-1} são diferenciáveis.

Definição 8 (Reparametrização) A curva $\beta(s)$ é dita uma **reparametrização** de $\alpha(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular quando dados $I_0 \subset \mathbb{R}$ e $\phi : I_0 \rightarrow I$ difeomorfismo. Temos $\beta(S) = \alpha(\phi(S))$.

Definição 9 Seja $\alpha(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\beta(S) : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Então

- $\beta(S)$ é uma reparametrização positiva de α se $\phi'(S) > 0, \forall S$
- $\beta(S)$ é uma reparametrização negativa de α se $\phi'(S) < 0, \forall S$

Definição 10 Qualquer reparametrização de uma c.p. regular é regular (i.e. difeomorfismos preservam regularidade).

Exemplo 2.1 (Reparametrização por difeomorfismo) Seja a seguinte curva (que vou chamar aqui de flor)

$$\alpha(t) = (\cos(t) + \sin(4t), \sin(t) + \cos(4t))$$

podemos reparametrizar digamos pela função $\phi(t) = 2t + 1$ da seguinte forma, como de costume usando `sagemath`

³curva parametrizada

```

1 # Curve definition
2 alpha(t) = (cos(t) + sin(4 * t), sin(t) + cos(4 * t))
3
4 # Reparametrization
5 phi(x) = 2 * x + 1
6 beta(t) = alpha(phi(t))
7
8 # Plot
9 parametric_plot(alpha, (t,0, 2*pi), thickness=2)
10 parametric_plot(beta, (t,0, 2*pi), thickness=2, color='red')

```

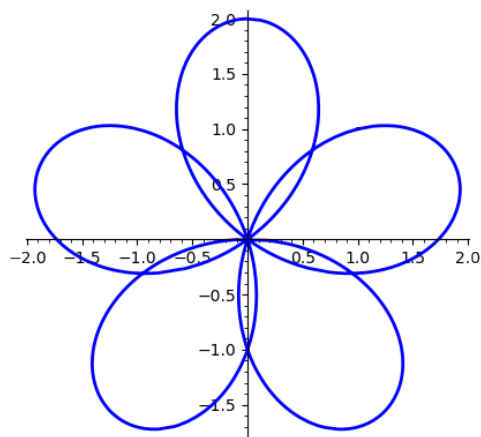


Figure 3. Curva α

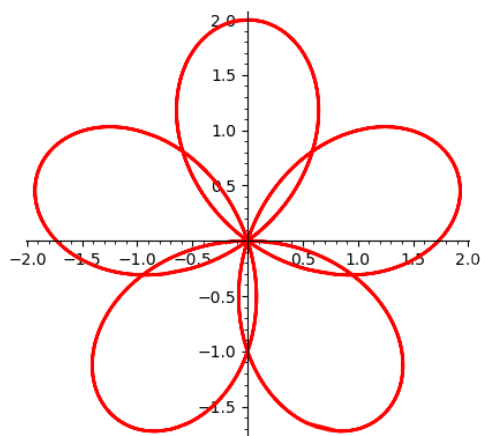


Figure 4. Curva α reparametrizada

Aqui ϕ é um difeomorfismo gerando uma reparametrização de α em particular o traço das curvas se mantém e β é uma reparametrização positiva

Proposição 1 A função L (comprimento de arco) é um difeomorfismo.

Definição 11 Toda curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ admite reparametrização por comprimento de arco.

Exemplo 2.2 (Reparametrização por comprimento de arco) Usaremos aqui a mesma curva usada para calcular o comprimento de arco no caso o círculo de raio 2 $\alpha(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$, com ela podemos obter sua parametrização por comprimento de arco fazendo os seguintes passos

```

1 # Curve definition
2 alpha(s) = (2 * cos(s), 2 * sin(s))
3
4 # Identify curve parameter
5 x = get_vector_arguments(alpha).pop()
6
7 # Calculate the derivatives
8 alpha_x = alpha.derivative(x)
9
10 # Calculate arc length from 0 to t
11 t = var("t")
12 assume(t>0)
13 comp_arco = integrate(norm(alpha_x), (x,0,t))
14
15 t = comp_arco.arguments()[0]
16
17 # Find t in terms of s
18 s = var("s")
19 param_comp_arco = solve(s == comp_arco, t)[0]
20
21 # Replace original parameter in curve
22 alpha_subs = alpha(t).subs(param_comp_arco)
23 alpha_subs = vector_simplify(alpha_subs)
24
25 # Reset function argument
26 alpha_param(s) = tuple(coord for coord in alpha_subs)
27
28 # New curve plot
29 print("Curva reparametrizada:")
30 pretty_results((r"\alpha(s)", alpha_param), use_colon=True)

```

Curva reparametrizada:

$$\alpha(s) : s \mapsto \left(2 \cos\left(\frac{1}{2}s\right), 2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right) \right)$$

A mesma sequência de comandos pode ser facilmente reproduzida em outras curvas.

3. Curvatura

Definição 12 (Função Ângulo) Dada uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow S^1$, onde S^1 é o círculo de \mathbb{R}^2 com centro na origem e raio 1, diz-se que $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função-ângulo** de γ , quando

$$\gamma(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))), \forall s \in I$$

Definição 13 (Curvatura) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ unit-speed. Designando-se o vetor tangente de α em $s \in I$ por $T(s)$, podemos afirmar que a curva $T(s) : I \rightarrow S^1$ admite função ângulo

$$T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))), \forall s \in I$$

Daí a **curvatura** de α em $s \in I$ é definida por

$$K(s) = \theta'(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$$

Exemplo 3.1 (Exemplo curvatura) A curvatura da curva $\alpha(t) = (2 \sin(t), 2 \cos(t))$, pode ser calculada fazendo

```

1 # Curve definition
2 curve(t) = (2 * cos(t), 2 * sin(t))
3
4 # Calculate the derivatives
5 curve_t = curve.derivative(t)
6 curve_tt = curve_t.derivative(t)
7
8 # Calculate J(c'(t))
9 curve_t_rotation(t) = (- curve_t[1], curve_t[0])
10
11 # Calculate the curvature
12 curvatura = curve_t_rotation.dot_product(curve_tt)/norm(curve_t)^3
13 curvatura = curvatura.simplify_full()
14
15 # Plot
16 pretty_results((r"K(s)", curvatura), use_colon=True)
```

$$K(s) : \frac{1}{2}$$

Em geral, a curvatura de $\alpha(t) = (r \sin(t), r \cos(t))$, $\forall r \in \mathbb{R} - \{0\}$ é $K_\alpha(t) = \frac{1}{r}$

4. Teorema Fundamental de Curvas Plana

Teorema 2 (Função-ângulo diferenciável) Seja $\gamma : I \rightarrow S^1$ uma curva diferenciável. Então, γ admite uma função ângulo $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, a qual é diferenciável. Além disso, toda função-ângulo de γ , a qual é diferenciável, difere de θ por uma constante.

Corolário 2.1 Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e seja $\beta(s) = \alpha(\theta(s))$ a parametrização por comprimento de arco de α , a curvatura de α em $t \in I$ é $K_\alpha(t)$, e, por definição é a curvatura de β em $\theta^{-1}(t)$, isto é

$$K_\alpha := K_\beta(\theta^{-1}(t))$$

Definição 14 (Diedro de Frenet) Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Dado $s \in I$, o vetor $N(s) = JT(s)$ é dito o vetor normal de α em $s \in I$. A base ortonormal de \mathbb{R}^2 formado por $T(s)$ e $N(s)$ é chamada **Diedro de Frenet** em s .

Exemplo 4.1 (Diedro de Frenet) Vamos encontrar aqui os vetores T e N do Diedro de Frenet da curva $\alpha(t) = (\sin(2t), \cos(t))$

```

1 # Curve definition
2 alpha(t) = (sin(2 * t), cos(t))
3
4 # Diedro de Frenet
5 T(t) = alpha.derivative(t)/norm(alpha.derivative(t))
6
7 N(t) = (- T[1], T[0])
8
9 # Plot
10 pretty_results((r"T(t)", T))
11 pretty_results((r"N(t)", N))

```

$$T(t) : t \mapsto \left(\frac{2 \cos(2t)}{\sqrt{4 \cos(2t)^2 + \sin(t)^2}}, -\frac{\sin(t)}{\sqrt{4 \cos(2t)^2 + \sin(t)^2}} \right)$$

$$N(t) : t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{4 \cos(2t)^2 + \sin(t)^2}}, \frac{2 \cos(2t)}{\sqrt{4 \cos(2t)^2 + \sin(t)^2}} \right)$$

Definição 15 (Movimento Rígido) $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita **movimento rígido**, quando preserva distancia, isto é, para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}^2$

$$\|\Phi(p) - \Phi(q)\| = \|p - q\|$$

Teorema 3 Seja $\Phi : A + p_0$ um movimento rígido direto de \mathbb{R}^2 e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Então, $\beta = \Phi \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular de \mathbb{R}^2 , parametrizada por comprimento de arco, tal que

$$K_\alpha(s) = K_\beta(s) \forall s \in I$$

Teorema 4 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas Planas) Sejam I um intervalo aberto da reta e $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

1. Então existe uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, unit-speed, cuja função curvatura coincide com K .
2. Além disso, para toda $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, unit-speed, que cumpre $K_\beta = K$, existe um movimento rígido $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha = \Phi \circ \beta$

Exemplo 4.2 (Construção de curva a partir da curvatura) Pelo teorema acima podemos construir uma curva a partir de uma função diferenciável (que será a curvatura) tomando, por exemplo, a função $K(t) = 1/t$ que seguimos da seguinte forma e obtemos uma curva cuja curvatura é K .

```

1 # Define curvature and theta_0
2 curvatura(t) = 1/t
3 theta_0 = 0
4
5 # Identify the Curve Parameter
6 t = curvatura.arguments()[0]
7
8 # Build Angle Function
9 theta(t) = integrate(curvatura(t), t) + theta_0
10
11 # Build Curve From Angle Function

```

```

12 aux(t) = (cos(theta(t)), sin(theta(t)))
13
14 curva_ang(t) = integrate(aux(t), t)
15
16 curva_ang = vector_simplify(curva_ang)
17
18 # Export function with n-tuple
19 curva_construida = tuple(coord for coord in curva_ang)
20
21 # Plot
22 parametric_plot(curva_construida, (t, 0, 2 * pi), thickness=2)
23 #pretty_results((r"C(t)", curva_construida))

```

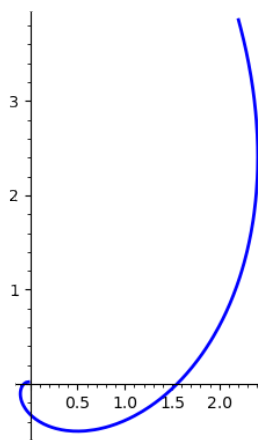


Figure 5. Curva pela curvatura

5. Curvas Regulares no \mathbb{R}^3

Definição 16 (Curvas no \mathbb{R}^3) As curvas diferenciáveis no \mathbb{R}^3 , são definidas de forma análoga ao \mathbb{R}^2 , isto é, uma **curva no \mathbb{R}^3** é uma aplicação diferenciável de um intervalo I (aberto) em \mathbb{R}^3 , da forma

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I$$

Onde x , y e z são diferenciáveis, e a curva é dita **regular** quando

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0), \quad t \in I$$

Exemplo 5.1 (Curva no \mathbb{R}^3) A curva

$$\alpha(t) = (2t \sin(50t), 3t \cos(50t), t^2)$$

É um exemplo de curva regular no \mathbb{R}^3

```
1 # Curve definition
2 alpha(t) = (2 * t * sin(50 * t), 3 * t * cos(50 * t), t^2)
3
4 # Plot
5 parametric_plot(alpha, (t, 0, 2*pi), thickness=2)
```

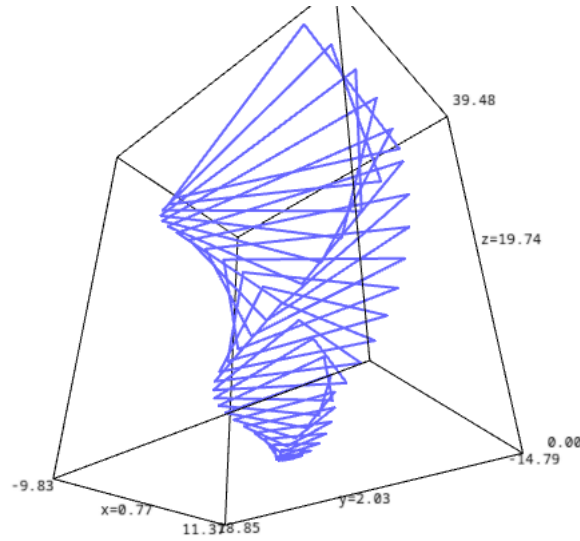


Figure 6. Curva no \mathbb{R}^3

Proposição 2 De forma análoga vale para \mathbb{R}^3 que

- Comprimento de arco é invariável por reparametrização.
- Toda curva regular admite reparametrização unit-speed ($\|\alpha'(t)\| = 1$).

Definição 17 (Curvatura no \mathbb{R}^3) Dada uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular parametrizada por comprimento de arco, a **curvatura** de α em $s \in I$ é definida como

$$K_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\|$$

Definição 18 (2-regular) Seja uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ unit-speed, e $K_\alpha(s) > 0, \forall s$, ou seja, $\alpha''(s) \neq 0, \forall s$. Então dizemos que α é **2-regular**.

Definição 19 (Triedro de Frenet) Para α 2-regular, seja $T(s) = \alpha'(s)$ (vetor tangente), $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ (vetor normal) e $B(s) = T(s) \times N(s)$ (vetor binormal). Com estes

vetores estabelecemos um referencial chamado **Triedro de Frenet** formado pelos vetores $\{T(s), N(s), B(s)\}$, onde,

$$\begin{cases} B(s) = T(s) \times N(s) \\ N(s) = B(s) \times T(s) \\ T(s) = N(s) \times B(s) \end{cases}$$

Definição 20 (Curvatura e Torção) *Seja uma curva α 2-regular em \mathbb{R}^3 não necessariamente parametrizada por comprimento de arco, então a **curvatura** e a **torção** de α são definidas respectivamente como*

$$K_\alpha(t) = \frac{\|\alpha''(t) \times \alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$\mathcal{T}(t) = \frac{\langle (\alpha'(t) \times \alpha''(t)), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

Exemplo 5.2 (Curvatura geral) *Podemos calcular a curvatura no \mathbb{R}^3 da seguinte forma*

```
1 # Curve
2 alpha(t) = (sin(2 * t), cos(2 * t), t)
3
4 # Calculate the derivatives
5 alpha_t = alpha.derivative(t)
6 alpha_tt = alpha_t.derivative(t)
7
8 # Apply General Curvature Formula
9 curvature = norm(alpha_t.cross_product(alpha_tt)) / norm(alpha_t)^3
10 curvature = curvature.simplify_full()
11
12 pretty_results(("r"K(t)", curvature))
```

$$K(t) = \frac{4}{5}$$

Exemplo 5.3 (Torção) *Seguindo a mesma ideia do exemplo acima podemos calcular a torção*

```
1 # Curve
2 alpha(t) = (sin(2 * t), cos(2 * t), t)
3
4 # Calculate the derivatives
5 alpha_t = alpha.derivative(t)
```

```

6 alpha_tt = alpha_t.derivative(t)
7 alpha_ttt = alpha_tt.derivative(t)
8
9 # Get Vector Product of Velocity and Acceleration Vectors
10 prod_veloc_acel = alpha_t.cross_product(alpha_tt)
11
12 # Apply General Twist Formula
13 torcao = (prod_veloc_acel * alpha_ttt) / norm(prod_veloc_acel)^2
14 torcao = torcao.simplify_full()
15
16 pretty_results((r"\mathcal{T}(t)", torcao))

```

$$\mathcal{T}(t) = -\frac{2}{5}$$

Teorema 5 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva 2-regular unit-speed, então*

$$\alpha \text{ é plana} \iff \mathcal{T}(s) \equiv 0, \forall s \in I$$

Teorema Fundamental das Curvas Espaciais

Teorema 6 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas Espaciais) *Sejam I um intervalo aberto, $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva diferenciável e $\mathcal{T} : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável*

1. *Então existe uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, unit-speed, tal que K e \mathcal{T} concedem com a curvatura e torção de α respectivamente*
2. *Além disso, $\forall \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, unit-speed, que cumpre $K_\beta = K$ e $\mathcal{T}_\beta = \mathcal{T}$ existe um movimento rígido $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(s) = \Phi(\beta(s))$*

References

de Lima, R. F. (2016). *INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL*.

do Carmo, M. (2010). *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Textos Universitários: Ciências médicas. Sociedade Brasileira de Matemática.

The Sage Developers (2022). *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.5)*. <https://www.sagemath.org>.