

Curso de Curvas e Superfícies - Parte II

Wellington José Leite da Silva¹

¹Escola de Matemática Aplicada da FGV (EMAP), Brazil

Apresentação

Continuando com o que foi construído na parte I apresentamos aqui uma linha de aprendizado do curso de curvas e superfícies apresentando definições, teoremas, exemplos, etc. Separados em Superfícies abordando definições e visualizações, Topologia abordando a teoria e primeira e segunda formas fundamentais onde é abordado a teoria e implementação.

Com intuito de auxiliar o aprendizado aos tópicos apresentados e fornecer uma forma de visualização computacional apresentamos exemplos com códigos em *SageMath* [The Sage Developers 2022]. Aqui seguimos o livro [de Lima 2016] como principal e o [do Carmo 2010] como complementar. Adicionando sempre que possível, exemplos de visualizações em *SageMath*. As implementações, códigos usados para as mesmas assim como o *Tex* deste documento se concentram no repositório curvas-superfícies ¹ que está disponível abertamente no github.

Todos os códigos apresentados nos exemplos podem ser facilmente generalizados para outros casos, é recomendável como forma de aprendizado rodar os códigos apresentados com outros exemplos de escolha do leitor.

1. Superfícies

Definição 1 (Superfície) *O subconjunto S de \mathbb{R}^3 é uma **superfície** se $\forall p \in S$, existe um aberto U em \mathbb{R}^2 e um aberto W em \mathbb{R}^3 contendo p tal que $S \cap W$ é **homeomorfo** a U .*

Exemplo 1.1 *Como exemplo de superfície temos a esfera de raio unitário no \mathbb{R}^3 . Que pode ser obtida da seguinte forma em SageMath*

```
1 # Define the superficie
2 hip(u, v) = (cosh(u)*cos(v), cosh(u)*sin(v), u)
3
4 # Plot
5 parametric_plot3d(hip, (u, -2, 2), (v, 0, 2*pi), mesh=True)
```

¹<https://github.com/wellington36/curvas-superficies>

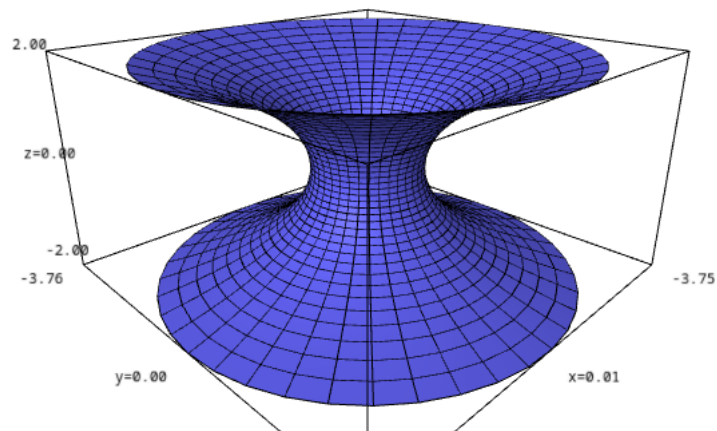


Figure 1. Hiperboloide

Definição 2 (Atlas) Uma coleção de parametrizações que cobrem uma superfície S é dita *atlas de S* e cada uma das parametrizações é dita uma *carta*.

Exemplo 1.2 (Um atlas para a esfera) Uma esfera não pode ser coberta por uma única parametrização, porém podemos cobrir ela com 2 parametrizações da seguinte forma

```

1 # Define the parameterizations
2 esfera1(u, v) = (2 * u/(1 + u^2 + v^2),
3                  2 * v/(1 + u^2 + v^2),
4                  (u^2 + v^2 - 1)/(1 + u^2 + v^2))
5
6 esfera2(u, v) = (2 * u/(1 + u^2 + v^2),
7                  2 * v/(1 + u^2 + v^2),
8                  -(u^2 + v^2 - 1)/(1 + u^2 + v^2))
9
10 # Plot
11 E1 = parametric_plot3d(esfera1, (u, -1, 1), (v, -1, 1),
12                          mesh=True, color='white')
13
14 E2 = parametric_plot3d(esfera2, (u, -1, 1), (v, -1, 1),
15                          mesh=True, color='red')
16
17
18 show(E1 + E2)

```

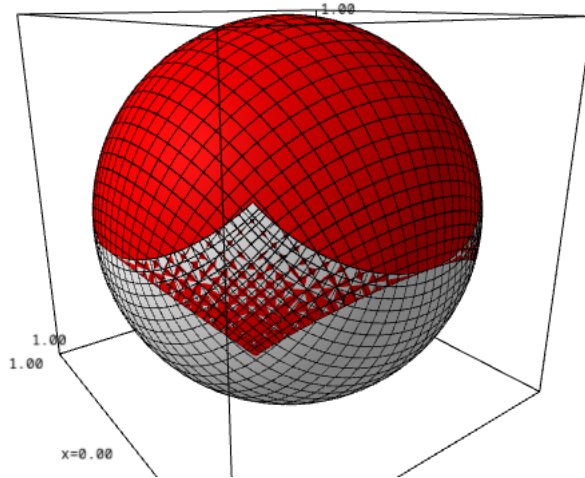


Figure 2. Esfera com 2 parametrizações

Definição 3 (Curvas regulares enquanto subconjuntos) Diz-se que um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ é uma **curva regular**, quando para cada $p \in C$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e um difeomorfismo $\alpha : I \rightarrow \alpha(I) \subset C$ em que $\alpha(I)$ é um aberto relativo de C .

Definição 4 (Superfícies Regulares) Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma **superfície regular**, quando é localmente difeomorfo a \mathbb{R}^2 . Mais precisamente, quando, $\forall p \in S$, existe um difeomorfismo

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$$

onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 e V é um aberto relativo de S . A aplicação X é dita, então uma parametrização local de S em p .

Exemplo 1.3 (Superfícies regulares) Pela definição de superfície regular, temos que, as seguintes superfícies são regulares: plano, gráficos de funções de 2 variáveis, esferas, superfícies de revolução, etc.

Definição 5 Sendo o difeomorfismo de uma superfície da forma

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in V$$

definimos as **derivadas parciais** de X como sendo

$$X_u(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)$$

$$X_v(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)$$

e se X_u e X_v são L.I. então produzem um plano tangente no ponto p .

Proposição 1 Se S é uma superfície regular temos que:

- (a) A aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é diferenciável de C^∞ quando x, y e z tem derivadas parciais de todas as ordens.
- (b) Para todo $q : (u, v) \in U$, a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva, nesse caso, garante-se a existência do plano tangente $T_p S$.

Teorema 1 (Função Inversa) Seja F diferenciável e $p \in A$ tal que dF_p é injetora. Então existe uma vizinhança $U \subset A$ de p . Tal que $F(U)$ é aberto em \mathbb{R}^n e a restrição F_U é um difeomorfismo de U sobre $F(U)$.

Definição 6 (Valor Regular) Dados um aberto $O \subset \mathbb{R}^3$ e uma função diferenciável $\varphi : O \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $q \in \mathbb{R}$ é **valor regular** de φ quando $\forall p \in \varphi^{-1}(\{q\}) \subset O$ a derivada

$$d\varphi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

é não nula, isto é, $\nabla \varphi(p) \neq 0$

Proposição 2 A **imagem inversa** de um valor regular de uma função diferenciável definida em um aberto do \mathbb{R}^3 , quando não vazia, é uma superfície regular.

Topologia

Definição 7 (Bola aberta) Dado $a \in \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$, a **bola aberta** de centro a e raio r em \mathbb{R}^n é o conjunto

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$$

e respectivamente definimos **bola fechada** como

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \geq r\}$$

Definição 8 (Conjunto Limitado) Um conjunto é dito **limitado** quando existe uma bola que o contém, ou seja,

$$\exists a \in \mathbb{R}^n \text{ e } r > 0 \text{ t.q. } X \subset B(a, r)$$

Definição 9 (Aplicação limitada) Dado um conjunto A uma **aplicação** $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita limitada quando seu conjunto imagem é limitado.

Definição 10 (Conjunto aberto) Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito **aberto** quando $\forall a \in A \exists r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$ (e a é dito ponto interior de A).

Definição 11 (Aplicação aberta) Diz-se que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **aberta** quando $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto.

Proposição 3 (Propriedades dos abertos) Propriedades fundamentais dos conjuntos abertos

1. O conjunto vazio e o espaço \mathbb{R}^n são abertos.
2. A **intersecção** de uma família finita de abertos é aberta.
3. A **união** de uma família qualquer de abertos é aberta.

Definição 12 (Espaço topológico) Um espaço topológico é um par (X, T) em que X é um conjunto e T é uma família de subconjuntos de X , chamados abertos, que satisfazem as propriedades acima. Diz-se, então, que a família T define uma topologia

Teorema 2 Uma sequência (X_k) em \mathbb{R}^n converge para $a \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\forall r > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$ então $x_k \in B(a, r)$.

Definição 13 (Conjunto fechado) Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito **fechado** quando seu complementar é aberto.

Proposição 4 (Propriedades dos fechados) Propriedades fundamentais dos conjuntos fechados

1. O conjunto vazio e o espaço \mathbb{R}^n são fechados.
2. A **intersecção** de uma família qualquer de fechados é um conjunto fechado.
3. A **união** de uma família finita de fechados é fechado.

Definição 14 (Aplicação fechada) Diz-se que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **fechada** quando leva fechados de \mathbb{R}^n em fechados de \mathbb{R}^m .

Definição 15 (Aderência) Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é dito **aderente** a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se existe uma sequência de pontos de X que convergem para a .

Definição 16 (Fecho) O **fecho** de X , denotado por \overline{X} , é o conjunto formado por todos os pontos de \mathbb{R}^n que são aderentes a X .

Teorema 3 $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\iff \overline{F} = F$.

Definição 17 (Bordo) A **fronteira** (ou **bordo**) de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n - X}$.

Definição 18 (Aberto relativo) Sejam X subconjunto de \mathbb{R}^n e $A \subset X$. Diz-se que A é **aberto relativo** a X ou **aberto relativamente** à X quando existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = U \cap X$.

Definição 19 (Cisão) Uma **cisão** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição do mesmo em dois conjuntos disjuntos que são ambos, abertos em X , isto é, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que

- $X = A \cup B$
- $A \cap B = \emptyset$
- A e B abertos em X

Definição 20 (Conexidade) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito **conexo** se a única cisão que admite é a trivial ($X = X \cup \emptyset$) caso contrario é dito desconexo.

Definição 21 (Homeomorfismo) Diz-se que dois espaços (X_1, T_1) e (X_2, T_2) . São **homeomorfos** quando existe bijeção $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ tal que para quaisquer abertos $A_1 \in T_1$ e $A_2 \in T_2$ tem-se que $\varphi(A_1) \in T_2$ e $\varphi^{-1}(A_2) \in T_1$. Logo φ é dito **homeomorfismo**.

Definição 22 (Continuidade) Dados $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow Y$ é **contínua** em $a \in X$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $x \in X$ e $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Teorema 4 Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo se e só se f e f^{-1} são contínuas.

Definição 23 (Isomorfismo) É uma aplicação que preserva uma estrutura e pode ser revertida com uma aplicação inversa.

Primeira Forma Fundamental

Teorema 5 (Teorema da função inversa) *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável e $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ isomorfismo. Então, existem abertos $V \subset U$ e $W \subset F(U)$, tais que se $p \in V$, então $F(p) \in W$ e $F|_V : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo.*

Definição 24 (Vetor tangente) *Dado um ponto p de uma superfície regular S , diz-se que $w \in \mathbb{R}^n$ é um **vetor tangente** a S em p , se existe uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, $\varepsilon > 0$, tal que, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.*

Teorema 6 (Primeira forma fundamental) *Seja S uma superfície regular e $p \in S$. A primeira forma fundamental de S em p*

$$I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

é a forma quadrática associada à restrição do produto interno canônico de \mathbb{R}^3 ao plano tangente de S em p , $T_p S$, isto é

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle^2 = \|w\|^2, \quad w \in T_p S$$

Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ de S , as funções

$$E(u, v) = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle$$

$$F(u, v) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle$$

$$G(u, v) = \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle$$

São os coeficientes da primeira forma fundamental de S relativos a X , isto é, a matriz de $I_{X(u,v)}$ com respeito a base $\{X_u, X_v\}$, de $T_{X(u,v)}S$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

$E \forall w = aX_u(u, v) + bX_v(u, v) \in T_{X(u,v)}S$ tem-se

$$I_{X(u,v)}(w) = a^2 E(u, v) + 2abF(u, v) + b^2 G(u, v)$$

Exemplo 1.4 (A primeira forma numa superfície) *Em sagemath vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície enneper.*

```

1 # Define a cart (for exemple enneper)
2 card(u, v) = (u - (u^3)/3 + u*v^2, v - (v^3)/3 + v*u^2, u^2 - v^2)
3
4 # Partial derivatives
5 x_u = derivative(card, u)
6 x_v = derivative(card, v)
7
8 # First fundamental form
9 E = x_u.dot_product(x_u)
10 F = x_u.dot_product(x_v)
11 G = x_v.dot_product(x_v)
12
13 # Simplificacao
14 E = E.full_simplify().canonicalize_radical()
15 F = F.full_simplify().canonicalize_radical()
16 G = G.full_simplify().canonicalize_radical()
17
18 pretty_results((r"E", E), (r"F", F), (r"G", G))

```

$$\begin{aligned}
 E &= u^4 + v^4 + 2(u^2 + 1)v^2 + 2u^2 + 1 \\
 F &= 0 \\
 G &= u^4 + v^4 + 2(u^2 + 1)v^2 + 2u^2 + 1
 \end{aligned}$$

Teorema 7 (Área) *Seguindo a primeira forma fundamental a área de uma superfície S um certo conjunto D é dada por*

$$A_S(D) = \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Exemplo 1.5 (Área de uma superfície num intervalo de u e v) *Vamos usar o teorema acima para calcular área de uma superfície (no caso vamos usar um toro) dado os intervalos de u e v , primeiro encontramos os coeficientes da primeira forma e depois aplicamos o Teorema 7.*


```

1 # Define the cart (for exemple toro)
2 a = var('a')
3
4 card(u,v) = ((a + cos(u))*cos(v), (a + cos(u))*sin(v), sin(u))
5
6 # Set interval to u and v
7 I = [(0, 2 * pi), (0, 2 * pi)]
8
9 # Partial derivatives
10 x_u = derivative(card, u)
11 x_v = derivative(card, v)
12
13 # First fundamental form
14 E = x_u.dot_product(x_u)
15 F = x_u.dot_product(x_v)
16 G = x_v.dot_product(x_v)
17
18 # Simplify
19 E = E.full_simplify().canonicalize_radical()
20 F = F.full_simplify().canonicalize_radical()
21 G = G.full_simplify().canonicalize_radical()
22
23 # Using theorem to find area
24 A = integrate(integrate(E * G - F^2, u, I[0][0], I[0][1]),
25               v, I[1][0], I[1][1])
26
27 A = A.full_simplify()
28
29 # plot
30 pretty_results((r"Area", A))

```

$$Area = 4\pi^2 a^2 + 2\pi^2$$

Segunda forma fundamental

Definição 25 (Campo) Dada uma parametrização regular S , chama-se **campo** em S toda aplicação $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$

Proposição 5 Um campo é dito:

- *unitário*, se $\|f(p)\| = 1, \forall p \in S$.
- *tangente*, se $f(p) \in T_p S, \forall p \in S$.
- *normal*, se $f(p) \in T_p S^\perp, \forall p \in S$.

Definição 26 (vetor normal) Sendo S uma superfície, seja

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$$

$\forall p \in S$ seja $q = X^{-1}(p)$, podemos então definir o vetor normal em S no ponto p como $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$, como

$$N(p) = \frac{X_u(q) \times X_v(q)}{\|X_u(q) \times X_v(q)\|}$$

Definição 27 (Superfície orientável) Uma superfície regular S é **orientável** quando se pode definir um campo normal unitário e diferenciável.

Definição 28 (Atlas coerente) Dada duas parametrizações de A , X e Y e p no conjunto imagem de ambas, então $Y^{-1} \circ X$ tem determinante jacobiano maior que 0 em $X^{-1}(p)$.

Teorema 8 Uma superfície regular S é **orientável** se, e só se, admite um atlas coerente.

Definição 29 (Aplicação normal de Gauss) Seja S uma superfície regular orientável, N campo normal unitário diferenciável em S , isto é, $\|N(p)\| = 1, \forall p \in S$

$$N : S(\text{superfície}) \rightarrow E_1(\text{esfera de raio 1})$$

é dita uma **aplicação normal de Gauss**, $\forall p \in S$, $T_p S = \{N(p)\}^\perp = T_{N(p)} E_1$, temos dN_p é um operador linear de $T_p S$.

Teorema 9 (Segunda forma fundamental) Seja S uma superfície regular orientável, N aplicação normal de Gauss de S

$$I_p(w) \langle -dN_p w, w \rangle, \quad w \in T_p S$$

Dado uma parametrização

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \subset S$$

tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$, temos que, $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0$,
então

$$\langle -dN_p w, w \rangle = \langle N(p), \alpha''(0) \rangle$$

e os coeficientes da segunda forma são

$$\begin{aligned} e(u, v) &= \langle -dN_p X_u, X_u \rangle = \langle N \circ X, X_{uu} \rangle \\ f(u, v) &= \langle -dN_p X_u, X_v \rangle = \langle N \circ X, X_{uv} \rangle \\ g(u, v) &= \langle -dN_p X_v, X_v \rangle = \langle N \circ X, X_{vv} \rangle \end{aligned}$$

Exemplo 1.6 (A segunda forma numa superfície) Em *sagemath* vamos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental de um toro.

```

1 # Define the cart (for exemple toro)
2 a = var('a')
3
4 cart(u, v) = ((a + cos(u))*cos(v), (a + cos(u))*sin(v), sin(u))
5
6 # Find partial derivatives
7 x_u = derivative(cart, u)
8 x_v = derivative(cart, v)
9
10 x_uu = derivative(x_u, u)
11 x_uv = derivative(x_u, v)
12 x_vv = derivative(x_v, v)
13
14 # Find normal vector
15 normal = x_u.cross_product(x_v)(u, v)
16
17 normal_unit = normal / normal.norm()
18 normal_unit = vector_simplify(normal_unit,
19                               use_canonical_form=True)
20
21 # Second fundamental form
22 l = normal_unit.dot_product(x_uu)
23 m = normal_unit.dot_product(x_uv)
24 n = normal_unit.dot_product(x_vv)
25
26 # Simplify
27 l = l.full_simplify().canonicalize_radical()
28 m = m.full_simplify().canonicalize_radical()
29 n = n.full_simplify().canonicalize_radical()
30
31 pretty_results((r"L", l), (r"M", m), (r"N", n))

```

$$\begin{aligned}
 L &= 1 \\
 M &= 0 \\
 N &= a \cos(u) + \cos(u)^2
 \end{aligned}$$

References

- de Lima, R. F. (2016). *INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL*.
- do Carmo, M. (2010). *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Textos Universitários: Ciências médicas. Sociedade Brasileira de Matemática.
- The Sage Developers (2022). *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.5)*. <https://www.sagemath.org>.