

# Лекция 5. Непрерывные с.в., часть 2

10 марта 2021 г.

## 1 Условная плотность вероятности

Напомним трактовку плотность вероятности. Это то, сколько вероятностной массы приходится на маленький интервал значений с.в.:

$$f_X(x)\delta \approx \Pr(X \in [x, x + \delta])$$

Но вероятностная мера может меняться при условии, что произошло событие  $A$ . В этом случае определяем

$$f_{X|A}(x)\delta \approx \Pr(X \in [x, x + \delta] \mid A)$$

Точное определение: плотность вероятности с.в.  $X$  при условии  $A$  есть такая функция  $f_{X|A}(x)$ , что для любого измеримого множества  $B$  верно, что

$$\Pr(X \in B \mid A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$

*NB:* у нас опять просто поменялась вероятностная мера. То есть у условной плотности вероятности будут все те же свойства:

- $f_{X|A}(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$

Вычисляем аналогично условной функции вероятности. Пусть  $x \in A$ , тогда

$$\begin{aligned} f_{X|A}(x)\delta \approx \Pr(X \in [x, x + \delta] \mid A) &= \frac{\Pr(X \in [x, x + \delta] \cap X \in A)}{\Pr(A)} \\ &= \frac{\Pr(X \in [x, x + \delta])}{\Pr(A)} \approx \frac{f_X(x)\delta}{\Pr(A)} \end{aligned}$$

Поэтому строго говоря, она вычисляется так:

$$f_{X|A}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{\Pr(A)}, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

То есть масштабируем плотность вероятности по событию  $A$ .

Иногда придется иметь дело с условной функцией распределения:

$$F_{X|A}(x) = \Pr(X \leq x \mid A)$$

## 2 Условное матожидание

Условное матожидание определяем аналогично:

$$E(X \mid A) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A}(x) dx$$

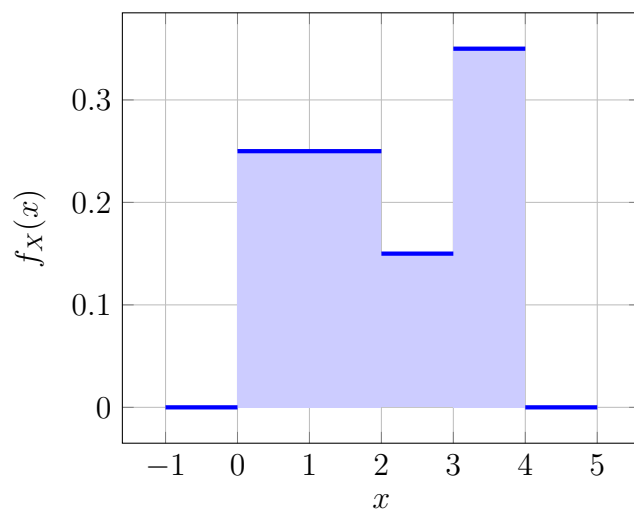
Работает то же самое правило и для функций от с.в. (у нас просто новая плотность вероятности при условии  $A$ ):

$$E(g(X) \mid A) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|A}(x) dx$$

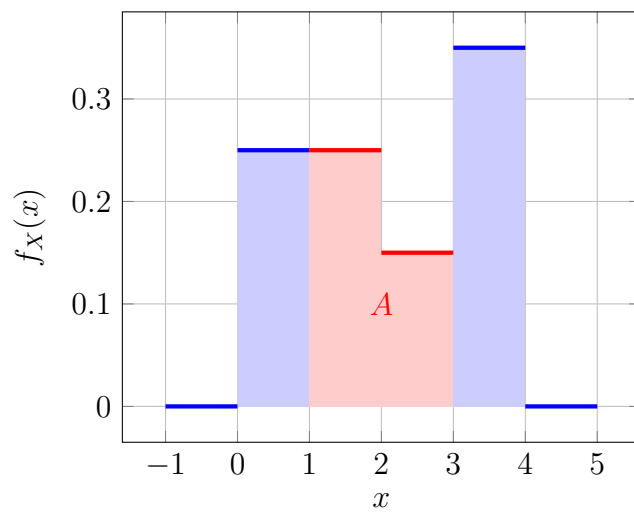
## 3 Пример условных с.в.

Рассмотрим частично равномерное распределение:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.25, & x \in [0, 2) \\ 0.15, & x \in [2, 3) \\ 0.35, & x \in [3, 4] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

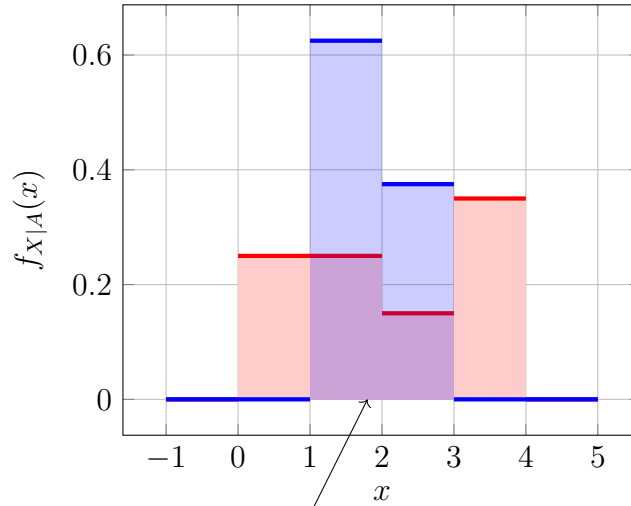


Пусть  $A = [1, 3]$ . Тогда  $\Pr(A) = 0.25 \cdot 1 + 0.15 \cdot 1 = 0.4$



Значит, новая плотность вероятности выглядит так:

$$f_{X|A}(x) = \begin{cases} \frac{0.25}{0.4} = 0.625, & x \in [1, 2) \\ \frac{0.15}{0.4} = 0.375, & x \in [2, 3) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



Вот тут центр масс

$$E(X | A) = \int_1^2 t \cdot 0.625 dt + \int_2^3 t \cdot 0.375 dt = 1.875$$

## 4 Беспамятство экспоненциального распределения

Как уже говорилось, экспоненциальное распределение очень похоже на геометрическое. В том числе вот почему. Пусть продолжительность жизни лампочки  $T$  следует  $\text{Exp}(\lambda)$ . Следует ли поменять лампочку после того, как она проработала время  $t$ ? Посмотрим, сколько она еще проживет, то есть распределение  $T - t$  при условии  $T \geq t$ .

$$\begin{aligned} F_{(T-t)|T \geq t}(x) &= \Pr(T - t \geq x | T > t) = \frac{\Pr(T - t \geq x \cap T > t)}{\Pr(T > t)} \\ &= \frac{\Pr(T \geq x + t)}{\Pr(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x}, \end{aligned}$$

то есть распределение точно то же, как если мы заменим лампочку на новую.

## 5 Полные вероятность и матожидание

Напомним: пусть есть разбиение  $\Omega$  на  $\{A_i\}$  (не более, чем счетное), тогда

$$\begin{aligned} \Pr(B) &= \Pr(A_1) \Pr(B | A_1) + \dots + \Pr(A_n) \Pr(B | A_n) + \dots \\ p_X(x) &= \Pr(A_1) p_{X|A_1}(x) + \dots + \Pr(A_n) p_{X|A_n}(x) + \dots \end{aligned}$$

Ничего не меняется и в непрерывном случае. Сначала функция распределения:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq x) = \Pr(A_1) \Pr(X \leq x \mid A_1) + \cdots + \Pr(A_n) \Pr(X \leq x \mid A_n) + \cdots \\ &= \Pr(A_1) F_{X|A_1}(x) + \cdots + \Pr(A_n) F_{X|A_n}(x) + \cdots \end{aligned}$$

Дифференцируем, получаем:

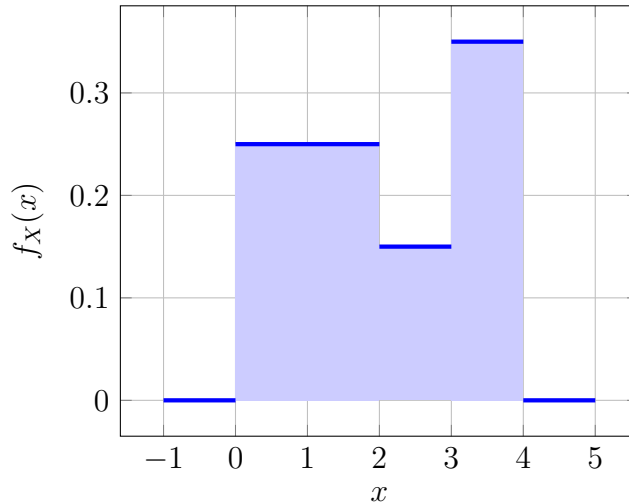
$$f_X(x) = \Pr(A_1) f_{X|A_1}(x) + \cdots + \Pr(A_n) f_{X|A_n}(x) + \cdots$$

Умножаем на  $x$  и интегрируем по всему  $\mathbb{R}$ :

$$E(X) = \Pr(A_1) E(X \mid A_1) + \cdots + \Pr(A_n) E(X \mid A_n) + \cdots$$

Пример (который уже был):

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.25, & x \in [0, 2) \\ 0.15, & x \in [2, 3) \\ 0.35, & x \in [3, 4] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



Посчитаем матожидание

$$\begin{aligned} E(X) &= \Pr(X \in [0, 2)) E(X \mid X \in [0, 2)) \\ &\quad + \Pr(X \in [2, 3)) E(X \mid X \in [2, 3)) \\ &\quad + \Pr(X \in [3, 4)) E(X \mid X \in [3, 4)) \end{aligned}$$

Заметим, что на каждом отрезке матожидание – это положение центра масс, то есть середина отрезка. Поэтому

$$E(X) = 0.5 \cdot 1 + 0.15 \cdot 2.5 + 0.35 \cdot 3.5 = 2.1$$

## 6 Смешанные распределения

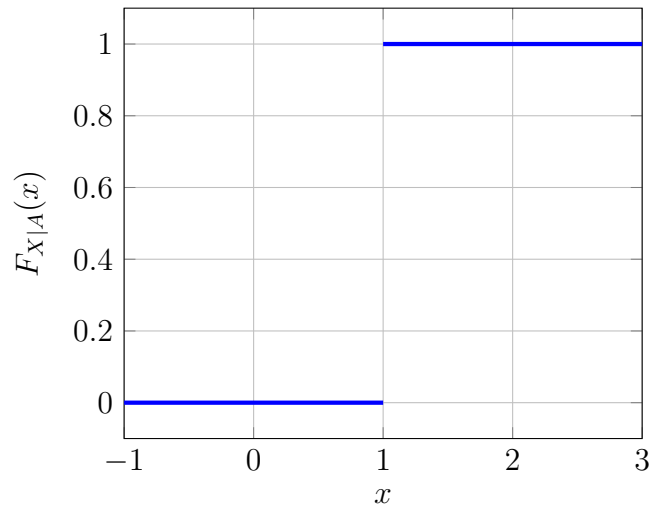
Иногда с.в. могут быть ни дискретными, ни непрерывными, например. Пусть у нас есть следующий эксперимент. Сначала бросаю честную монетку, потом, если выпал орел, то выбираю случайное число из отрезка  $[0, 2]$  (равномерно). Случайная величина  $X$  при этом равна 1 в случае решки и равна выбранному числу в случае орла.

У данной с.в. нет функции вероятностей, как нет и плотности вероятности. Функция распределения все-таки есть. Как ее посчитать? По формуле полной вероятности, которая работает и для функции распределения. Пусть  $A$  — событие "выпала решка"

$$F_X(x) = F_{X|A}(x) \Pr(A) + F_{X|\bar{A}}(x) \Pr(\bar{A})$$

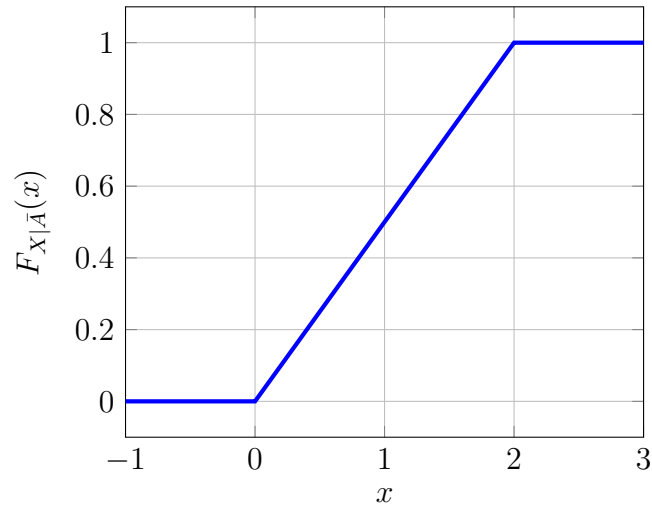
Заметим, что если  $A$ , то  $X = 1$  с вероятностью 1. То есть,

$$F_{X|A}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



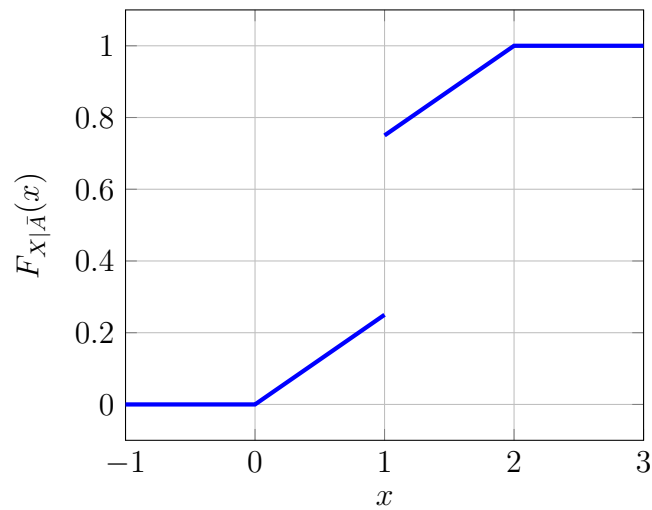
А если  $\bar{A}$ , то  $X$  следует равномерному распределению на отрезке  $[0, 2]$ .

$$F_{X|\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/2, & x \in [0, 2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



Итоговая функция распределения выглядит так:

$$F_X(x) = \frac{1}{2}F_{X|A}(x) + \frac{1}{2}F_{X|\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/4, & x \in [0, 1) \\ x/4 + 1/2, & x \in [1, 2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



## 7 Векторы из непрерывных с.в.

Пусть у нас есть 2 непрерывных с.в.  $X$  и  $Y$ . Тогда можно говорить о совместной плотности вероятности:

$$f_{X,Y}(x, y)\delta^2 \approx \Pr(X \in [x, x + \delta] \cap Y \in [y, y + \delta])$$

Более строго: если у нас есть такая функция  $f_{X,Y}(x,y)$ , такая что для любого измеримого множества  $A \subset \mathbb{R}^2$  верно

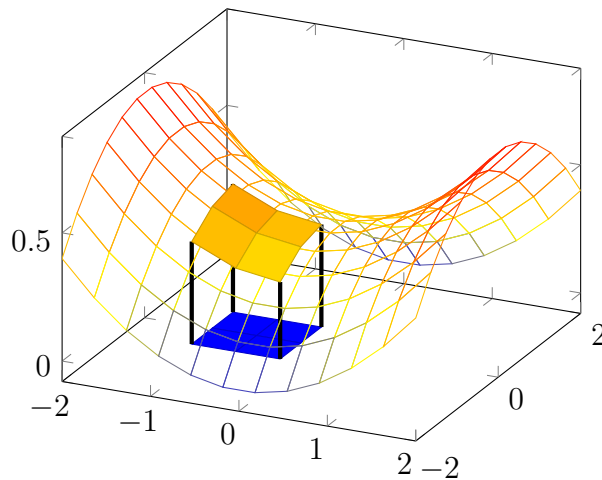
$$\Pr((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y) dx dy,$$

то с.в.  $X$  и  $Y$  называются совместно непрерывными, а  $f_{X,Y}(x,y)$  называется их совместной плотностью вероятности

Свойства, аналогичные совместной функции вероятности, только суммы заменены интегралами:

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$

Как визуализировать:



Чтобы посчитать вероятность, что  $X$  попадает в какое-то событие, надо просто посчитать объем подграфика на этом событии

*NB:* Одномерные события имеют вероятность ноль. Например, событие  $Y = X$ .

## 8 Маргинальные распределения

Покажем, что

$$\begin{cases} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx \end{cases}$$

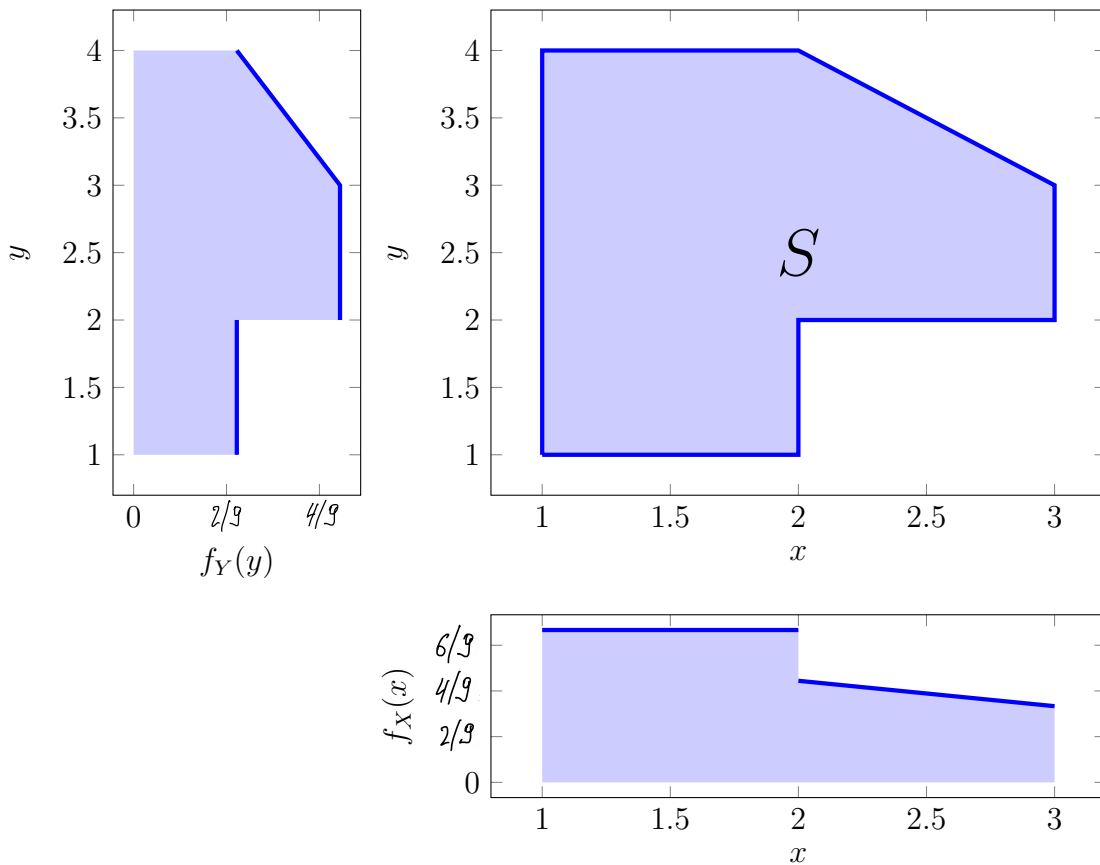
Для этого рассмотрим функцию распределения  $X$ :



$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(t, y) dy \right) dt \quad f_X(x) = F'_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

**Пример:** равномерное распределение на множестве  $S$  площадью 4.5

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|S|}, & \text{если } (x, y) \in S, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



## 9 Более двух с.в. и функции от многих с.в.

Совместное распределение может быть задано на более, чем одной с.в., тогда есть плотность вероятности  $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ . Все то же самое, что было со многими дискретными с.в., только вместо сумм интегралы:

- $f_{X,Y,Z}(x, y, z) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z) dx dy dz = 1$

И на многих с.в. мы также можем задавать функции, которые будут по сути новыми с.в.:  $Z = g(X, Y)$ . Их матожидание считается так:

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

При этом имеет место быть линейность матожидания:

$$E\left(\sum_i a_i X_i\right) = \sum_i a_i E(X_i)$$

## 10 Совместная функция распределения

Для нескольких с.в. определим функцию распределения:

$$F_{X,Y}(x, y) = \Pr(X \leq x \cap Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt \right) ds$$

Также можно заметить:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

## 11 С.в., условные на других с.в.

Было в дискретном случае:

[x принадлежит A] =  
1, если TRUE  
0, если FALSE

- $p_{X,Y}(x, y)$  — совместная функция вероятности
- $p_{X|A}(x) = \frac{p_{X,Y}(x, y) \cdot [y \in A]}{\Pr(A)}$  — условная функция вероятности (где  $[\cdot]$  — скобка Айверсона)
- $p_{X|Y}(x | y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$  — функция вероятности  $X$ , условная на  $Y$  (определена только для таких  $y$ , что  $p_Y(y) > 0$ )

То же самое есть для непрерывного случая:

- $f_{X,Y}(x, y)$  — совместная плотность вероятности
- $f_{X|A}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y) \cdot [y \in A]}{\Pr(A)}$  — условная плотность вероятности
- $f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$  — плотность вероятности  $X$ , условная на  $Y$  (определена только для таких  $y$ , что  $p_Y(y) > 0$ )

Чуть ближе к формальному определению:

$$\begin{aligned}\Pr(X \in [x, x + \delta] \mid Y \in [y, y + \varepsilon]) &= \frac{\Pr(X \in [x, x + \delta] \cap Y \in [y, y + \varepsilon])}{\Pr(Y \in [y, y + \varepsilon])} \\ &\approx \frac{f_{X,Y}(x, y)\delta\varepsilon}{f_Y(y)\varepsilon} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}\delta\end{aligned}$$

И совсем формальное. Если существует такая функция  $f_{X|Y}(x \mid y)$ , что для всех  $y$  и для всех  $A$  верно

$$\Pr(X \in A \mid Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x \mid y)dx,$$

то эта функция называется условной плотностью вероятности  $X$  при условии  $Y$ .

Опять при условиях  $y$  у нас просто появляется новая вероятностная мера. Для всех  $y : f_Y(y) > 0$  мы имеем

- $f_{X|Y}(x \mid y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x \mid y)dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dx}{f_Y(y)} = 1$

Из последнего видно, что стоит воспринимать условную плотность как срез совместной плотности по какому-то значению с.в.. Заметьте, что при этом вероятность этого среза равна нулю (одномерное множество), поэтому только терминами условности на события тут не обойтись.