

# Шестое домашнее задание: непрерывные с.в.

19 марта 2021 г.

## 1 Десятичная запись числа

Выбираем  $X \sim U(0, 1)$ , его точно можно записать как бесконечную десятичную дробь:

$$X = \sum_{i=1}^{+\infty} X_i 10^{-i},$$

где все  $X_i \in [0..9]$ . Докажите, что любая пара  $X_i, X_j$  — независимые с.в.

## 2 Экспоненциальные с.в.

Пусть есть  $n$  независимых случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ , и все они следуют  $\text{Exp}(\lambda)$ , то есть  $f_{X_i} = \lambda e^{-\lambda x}$ .

Покажите, что у случайных величин  $Y = \max_{i=1..n} \{X_i\}$  и  $Z = X_1 + \frac{X_2}{2} + \dots + \frac{X_n}{n}$  одинаковое распределение.

## 3 Неравенство Йенсена

Докажите, что если функция  $g(x)$  непрерывна и выпукла вверх, то для любой с.в.  $X$  с конечным матожиданием верно, что

$$g(E(X)) \geq E(g(x)),$$

а если она выпукла вниз, то наоборот

$$g(E(X)) \leq E(g(x)),$$

## 4 Пара независимых с.в.

Пусть с.в.  $X$  и  $Y$  независимы, и  $Y$  имеет симметричное распределение (то есть функции распределения  $Y$  и  $-Y$  совпадают). Докажите, что для любого  $r \in [1, 2]$  верно, что

$$E(|X + Y|^r) \leq E(|X|^r) + E(|Y|^r),$$

если все матожидания конечны.

## 5 Независимые нормальные распределения

Найдите распределение случайной величины  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , если известно, что  $X$  и  $Y$  следуют стандартному нормальному распределению  $N(0, 1)$ .

## 6 Дискретная плюс непрерывная

Пусть  $X$  — непрерывная с.в., а  $Y$  — просто какая-то с.в. Докажите, что  $Z = X + Y$  является непрерывной с.в. (то есть имеет плотность вероятности)

## 7 Два распада частицы

Одна частица единичной массы распадается на две частицы массы  $X$  и  $1 - X$ , причем  $X$  — с.в. с плотностью вероятности  $f_X(x)$ , такой, что

- $f_X(x) = 0$ , если  $x \notin [0, 1]$
- $f_X(x) = f_X(1 - x)$  (симметрия).

Обозначим  $X_1$  и  $X_2$  — массы меньшей и большей частицы соответственно. Каждая из этих частиц распадается по такому же закону, и у нас остается четыре частицы с массами

- $X_{11}$  — меньшая часть меньшей частицы.
- $X_{12}$  — большая часть меньшей частицы.

- $X_{21}$  – меньшая часть большей частицы.
- $X_{22}$  – большая часть большей частицы.

Определите плотность вероятности  $X_{11}$  и совместную плотность вероятности  $X_{11}$  и  $X_{22}$ .

## 8 Измерение скорости

В России на дорогах не штрафуют при превышении скорости на не более, чем 20 км/ч. Оправдывается это тем, что у спидометра и у радара, которым измеряют скорость, есть погрешность, которая складывается. Допустим, что погрешность радара и погрешность спидометра следуют нормальному распределению  $N(0, \sigma^2)$ . Определите распределение показаний спидометра машины при известном показании радара.

## 9 Ожидание на остановке

Вы приходите на остановку маршрутки, которая ходит каждые 10 минут, но вы не можете знать, как давно уехала предыдущая маршрутка. Но вы видите, что еще  $N$  человек уже ждут маршрутку. Определите плотность вероятности с.в.  $T$ , равной времени, через которое отправится следующая маршрутка, если известно, что число людей на остановке следует распределению Пуассона с параметром  $t$ , равным времени, которое прошло с отправления предыдущей маршрутки. То есть через  $t$  минут после отправления предыдущего рейса  $\Pr(N = n) = \frac{t^n}{n!} e^{-t}$ .