

1 Следствия из аксиом

Аксиомы:

1. *Неотрицательность*: $\Pr(A) \geq 0$ для любого события A
2. *Нормализация*: $\Pr(\Omega) = 1$
3. *Счётная аддитивность*: A_1, \dots, A_n, \dots — последовательность попарно не пересекающихся событий, тогда мы имеем

$$\Pr\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \Pr(A_i).$$

Следствия:

- $\Pr(A) \leq 1$

$$\Pr(\Omega) = \Pr(A) + \Pr(\bar{A}) = 1$$

- $\Pr(\emptyset) = 0$

$$\Pr(\Omega) = \Pr(\emptyset) + \Pr(\Omega) = 1$$

- $\Pr(A) + \Pr(\bar{A}) = 1$

- $A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$

$$\Pr(B) = \Pr(B \setminus A \cup A) = \Pr(B \setminus A) + \Pr(A) \geq \Pr(A)$$

- $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(\bar{A} \cap B)$$

$$\Pr(B) = \Pr(\bar{A} \cap B) + \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

- $\Pr(A \cup B) \leq \Pr(A) + \Pr(B)$ — *Union bound, полуаддитивность (внешней меры)*

2 Бросание монетки

Вы бросаете монетку, пока не выпадет орел. Вероятность, что число бросков — четное?

$$\begin{aligned}\Omega &= \{P^n O\}_{n=0}^{+\infty} \\ \Pr(P^n O) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ \Pr(n : 2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

3 Брат или сестра короля

Король — из семьи с *двумя* детьми. Какова вероятность, что другой ребенок — девочка?

- Если родители короля планировали ровно двух детей
- Если родители думали рожать, пока не появится мальчик
- Если родители думали рожать детей, пока не появится два мальчика

$$\Omega = \{BB, BG, GB, GG\}$$

$$\Pr(G) = 2/3$$

4 Про Медведя

Три охотника, стреляют по медведю.

- A_1 — первый»> попал, $\Pr(A_1) = 0.6$
- A_2 — второй попал, $\Pr(A_2) = 0.4$
- A_3 — третий попал, $\Pr(A_3) = 0.2$

В медведе нашли две пули — B . Как честно поделить медведя?

$$\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

$$\Pr(110) = 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.8 = 0.192$$

$$\Pr(101) = 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.2 = 0.072$$

$$\Pr(011) = 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.032$$

$$\Pr(B) = \Pr(110) + \Pr(101) + \Pr(011) = 0.296$$

$$\Pr(A_1 \mid B) = \frac{\Pr(A_1 \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(110) + \Pr(101)}{\Pr(B)} = 0.89$$

$$\Pr(A_2 \mid B) = 0.75$$

$$\Pr(A_3 \mid B) = 0.35$$

5 Равномерные распределения

- Рубашки: белая, черная, синяя, красная
- Галстуки: зеленый, желтый, в крапинку
- Пиджаки: коричневый, черный

Какова вероятность одной конкретной комбинации: белая, желтый, коричневый

$$\frac{1}{\# \text{ of combinations}} = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{24}$$

Какова вероятность, что цвет пиджака и рубашки будет разным?

$$\frac{\# \text{ комбинаций с разными}}{\# \text{ комбинации}} = \frac{24 - 3}{24} = \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{24}$$

5.1 Перестановки

Бросаете 6 костей (d6). Какова вероятность, что все выпали разными числами?

$$\frac{6!}{6^6}$$

5.2 Сочетания

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Бросаем честную монету 10 раз

$$\Pr(\text{ровно 2 орла}) = \binom{10}{2}/2^{10}$$

$$\Pr(\text{ровно 3 орла} \mid \text{первые 2 броска — орлы}) = \binom{8}{1}/2^8$$

5.3 Разбиения

Множество размером n и разбиваем на подмножества размерами n_1, n_2, \dots, n_k

Число способов

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} = \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n_k}{n_k}$$

Колода из 52 карт. Вы раздаете по 4 карты 4-м игрокам. Вероятность, что каждого есть туз?

всего раздач:

$$\frac{52!}{(4!)^4 36!}$$

сначала раздали тузы, потом остается в