hw2

1

A - все шары белые

B - вытащили подряд к белых шаров и возвращали каждый в корзину

1) $$\Pr(A|B)=\frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(B)}=\frac{\Pr(A)}{\Pr(B)}=\frac{\cancel{\frac{1}{2^n}}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\underbrace{\binom{n}{i}\cancel{\frac{1}{2^n}}}_{\text{в корзине } i \text{ белых шаров}}\cdot\underbrace{\left(\frac{i}{n}\right)^k}_{\text{вероятность вытащить } k \text{ белых шаров}}}=\frac{n^k}{\sum\limits_{i=1}^{n}\binom{n}{i}i^k}$$

2) C - вытащили подряд к белых шаров и не возвращали в корзину

$$\Pr(A|C)=\frac{\Pr(A)}{\Pr(C)}=\frac{\cancel{\frac{1}{2^n}}}{\sum\limits_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\cancel{\frac{1}{2^n}}\cdot\frac{i}{n}\cdot\frac{i-1}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{i-k+1}{n-k+1}}=\frac{1}{\sum\limits_{i=k}^{n}\frac{\cancel{n!}\,\cancel{i!}\,(n-k)!}{\cancel{i!}\,(n-i)!\,(i-k)!\,\cancel{n!}}}=$$

$$=\frac{1}{(n-k)!\sum\limits_{i=k}^{n}\frac{1}{(n-i)!\,(i-k)!}}$$

2

X - число непустых корзин

к шаров n корзин

$$E[X]=\sum_{i=1}^{\min(n,k)} i\cdot p_X(i)=\sum_{i=1}^{\min(n,k)} i\cdot\frac{1}{n^k}\binom{n}{i}\binom{k-1}{i-1}$$

$$D[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\sum_{i=1}^{\min(n,k)} i^2\cdot\frac{1}{n^k}\binom{n}{i}\binom{k-1}{i-1}-\left(\sum_{i=1}^{\min(n,k)} i\,\frac{1}{n^k}\binom{n}{i}\binom{k-1}{i-1}\right)^2$$

3

X - сколько студентов отмет. дома

X_i - сколько студентов не попали в i заведение

$$E[X]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=n\cdot E[X_1]=n\cdot\sum_{m=\tau+1}^{k}(m-\tau)\,p_X(m-\tau)=$$

$$=n\cdot\sum_{m=\tau+1}^{k}(m-\tau)\binom{k}{m}\left(\frac{1}{n}\right)^m\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-m}$$

4

$X=(X_1,\ldots,X_n)$ $\qquad Z=\sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2}$

1) $\forall i: E[|X_i|]<+\infty \Rightarrow E[Z]<+\infty$?

2) $E[Z]<+\infty \Rightarrow \forall i: E[|X_i|]<+\infty$

1) Докажем, что $\sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2}\le|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_n|$

по индукции

1. База $\sqrt{X_1^2}=|X_1|\le|X_1|$ ✓

2. И.П.: $\sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2}\le|X_1|+\ldots+|X_n|$

$$\sqrt{\underbrace{X_1^2+\ldots+X_n^2}_{a}+\underbrace{X_{n+1}^2}_{b}}=\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\overbrace{|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_n|}^{\text{И.П.}}+|X_{n+1}|$$

$a+b\le a+b+\underbrace{2\sqrt{ab}}_{\ge0}$ $\qquad$ чтд.

$$E[|Z|]=E\left[\sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2}\right]\le\sum_{i=1}^{n}E[|X_i|]\le\underbrace{n}_{<+\infty}\cdot\underbrace{\max_{i=1\ldots n}E[|X_i|]}_{<+\infty}$$

$\Rightarrow E[|Z|]<+\infty$

2) Очевидно, что $\forall i: \sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2}\ge|X_i|$

$\Rightarrow +\infty\ge E[Z]\ge E[|X_i|]\Rightarrow$ для каждого X_i сущ. матожидание

5

Распределение високосных годов происходит следующим образом:

- год, номер которого кратен 400, — високосный;
- другие года, номера которых кратны 100, — невисокосные;
- другие года, номер которых кратен 4, — високосные;
- остальные года — невисокосные.

} период 400 лет

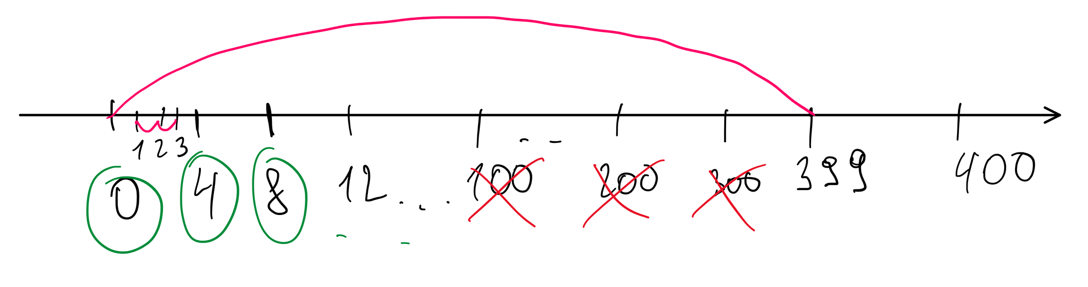
d - число дней в прошлом году

D - с.в. характеризующая число дней в этом году

$$E[D|d=366]=365\cdot\underbrace{p_D(365|366)}_{1}+366\cdot\underbrace{p_D(366|366)}_{0}=365$$

$$E[D|d=365]=365\cdot p_D(365|365)+366(1-p_D(365|365))=365\cdot\frac{206}{303}+366\cdot\left(1-\frac{206}{333}\right)=$$

$$=365+\frac{97}{303}\approx 365,32$$



$$p_D(365|365)=\frac{p_D(365\cap365)}{p_D(365)}=\frac{\frac{206}{400}}{\frac{303}{400}}=\frac{206}{303}$$

6

$X_{N,k,p}$ - с.в. хар. кол-во пров. тестов

$$X_{N,k,p}=\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor\cdot Y_{k,p}+Y_{N\%k,p}$$

$Y_{k,p}$ - с.в. хар. кол-во тестов в группе из к человек

$$E[Y_{k,p}]=(1-p)^k+(k+1)(1-(1-p)^k)=1+k(1-(1-p)^k)$$

$$E[X_{N,k,p}]=\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor(1+k(1-q^k))+1+(N\%k)(1-q^{N\%k})$$

оптимальное к найдем с помощью лин. поиска