Второе домашнее задание

19 февраля 2021 г.

1 Шары и одна корзина

В корзину забрасывается n шаров, цвет каждого забрасываемого шара может быть либо черным, либо белым, причем равновероятно. Потом проводится эксперимент: k раз из корзины извлекается шар, записывается его цвет, и шар возвращается обратно. Какова вероятность того, что в урне только белые шары, если все шары, которые мы достали, — белые? Какова эта вероятность, если $k \leq n$ и шары не возвращаются в корзину во время эксперимента?

2 Шары и много корзин

Бросаем k шаров в одну из n корзин. Причем для каждого шара выбираем корзину равновероятно и независимо от выбора корзин для других шаров. Посчитайте матожидание и дисперсию числа непустых корзин.

3 Шары и маленькие корзины

Из ВУЗа выпускаются k студентов, и они хотят это отметить. В городе есть n различных заведений, где это можно сделать (театры, музеи и т.д.), но вместимость каждого заведения — не более r человек. Каждый студент случайным образом равновероятно выбирает одно из заведений и направляется в него. Если оно оказывается заполненным — студента не впускают, и он идет домой отмечать с друзьями онлайн. Определите матожидание числа студентов, отмечавших выпускной дома. Считайте, что другие жители города выбираться в этот день в те же заведения не рискуют.

4 Случайный вектор

Пусть есть случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)$, где все X_i — какие-то дискретные случайные величины. Если известно, что существует матожидание каждой из этих величин, то существует ли матожидание длины этого вектора $Z = \sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$? Верно ли обратное: если существует матожидание Z, то существует матожидание каждого X_i?

5 Календарь

Вычислите матожидание числа дней в этом году, если известно число дней в прошлом году. Учитывайте все особенности Григорианского календаря.

6 Анализы крови

N людей сдают кровь на качественный анализ (результат анализа — либо “положительный”, либо “отрицательный”). Так как каждый тест довольно дорогостоящий, лаборатория прибегает к следующей оптимизации. Люди объединяются в группы по k человек, и образцы крови всех людей одной группы смешиваются. Смешанная кровь тестируется, и если результат отрицательный, то у всех людей из этой группы считается отрицательный результат. В этом случае проводится ровно один тест. Однако если результат на смешанном образце положительный, то образцы крови каждого человека из этой группы тестируются отдельно. В этом случае проводится $k + 1$ тест. Посчитайте матожидание числа проведенных тестов, если известно, что у каждого из N сдающих анализ вероятность положительного результата p. Как лучше всего выбрать k при известном p? Не обязательно давать точный ответ, достаточно описать алгоритм подбора k.

7 Анализы крови 2

В предыдущей задаче имеет ли смысл разбивать группу, у которой был смешанный тест, на более мелкие группы? Имеет ли смысл делать это более одного раза? Предложите оптимальную стратегию, минимизирующую ожидаемое число тестов.