Четвертое домашнее задание: непрерывные с.в.

6 марта 2021 г.

1 Про функцию распределения

Покажите, что для любой с.в. функция распределения имеет не более, чем счетное число точек разрыва.

2 Функция распределения как случайная величина

Пусть есть какая-то с.в. X, у которой есть *непрерывная* функция распределения $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$. Пусть есть другая с.в. $Y = F_X(X)$. Найдите распределение Y.

3 Из непрерывной в дискретную

Приведите пример непрерывной с.в. X с плотностью вероятности $f_X(x)$ и *непрерывной* функции $g(x)$, так, чтобы с.в. $Y = g(X)$ была дискретной.

4 Полезная формула 1

Докажите, что если с.в. X имеет функцию распределения $F_X(x)$, то верно, что

$$E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))\, dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx$$

Заметьте, что X может быть как дискретной, так и непрерывной с.в. (смешанные пока не рассматриваем).

5 Полезная формула 2

Докажите, что если неотрицательная с.в. X имеет функцию распределения $F_X(x)$, то для всех $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ верно, что

$$E(X^\alpha) = |\alpha| \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \left(1 - F_X(x)\right) dx$$

Заметьте, что X может быть как дискретной, так и непрерывной с.в. (смешанные пока не рассматриваем).

6 Логнормальная с.в.

Пусть $X \sim N(0,1)$. Найти плотность вероятности, матожидание и дисперсию с.в. $Y = e^X$.

7 Еще одно распределение

Пусть

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax^\alpha e^{-x/\beta}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти коэффициент нормализации A, матожидание и дисперсию с.в. X с этой плотностью вероятности.

8 Свойства функции распределения

Докажите, что для любой функции распределения $F(x)$ верно, что

1. $\lim_{x\to\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{1}{z} dF(z) = 0$
2. $\lim_{x\to 0+} x \int_x^{+\infty} \frac{1}{z} dF(z) = 0$