HW 1

1 $\exists\ Pr_A(B) = Pr(B|A)$

$$Pr_A(B|C) = \frac{Pr_A(B\cap C)}{Pr_A(C)} = \frac{Pr(B\cap C\cap A)\cdot \cancel{Pr(A)}}{\cancel{Pr(A)}\cdot Pr(A\cap C)} \underset{B,C\subset A}{=} \frac{Pr(B\cap C)}{Pr(C)} = Pr(B|C)\ ✓$$

$У_1)$ $B, C\subset A:\ Pr_A(B\cap C) = Pr_A(B)\cdot Pr_A(C) \Rightarrow Pr(B\cap C) = Pr(B)\,Pr(C)$?

$$Pr_A(B)\,Pr_A(C) = Pr(B|A)\,Pr(C|A) = \frac{Pr(A\cap B)\,Pr(A\cap C)}{Pr^2(A)} = \frac{Pr(B)\,Pr(C)}{Pr^2(A)}$$

$$\| $$

$$Pr_A(B\cap C) = \frac{Pr(B\cap C\cap A)}{Pr(A)} = \frac{Pr(B\cap C)}{Pr(A)}$$

$\Rightarrow Pr(B\cap C)\,Pr(A) = Pr(B)\,Pr(C) \Rightarrow У_1$ - ложь

$У_2)$ $B, C\subset A:\ Pr(B\cap C) = Pr(B)\,Pr(C) \Rightarrow Pr_A(B\cap C) = Pr_A(B)\,Pr_A(C)$

$$Pr_A(B\cap C) = \frac{Pr(B\cap C)}{Pr(A)} = \frac{Pr(B)\,Pr(C)}{Pr(A)} = Pr_A(B)\,Pr_A(C)\,Pr(A) \Rightarrow У_2 \text{ - ложь}$$

$У_3)$ $A, B, C \in \Sigma:$
$$\left.\begin{aligned} Pr(A\cap B) &= Pr(A)\,Pr(B)\\ Pr(A\cap C) &= Pr(A)\,Pr(C)\\ Pr(B\cap C) &= Pr(B)\,Pr(C)\end{aligned}\right\} \Rightarrow Pr_A((A\cap B)\cap(A\cap C)) = Pr_A(A\cap B)\,Pr_A(A\cap C)$$

$$Pr_A(A\cap B)\,Pr_A(A\cap C) = \frac{Pr(A\cap B)}{Pr(A)}\cdot\frac{Pr(A\cap C)}{Pr(A)} = \frac{\cancel{Pr^2(A)}\,Pr(B)\,Pr(C)}{\cancel{Pr^2(A)}} = Pr(B\cap C)$$

$$Pr_A((A\cap B)\cap(A\cap C)) = \frac{Pr(A\cap B\cap C)}{Pr(A)} \neq Pr(B\cap C) \text{ в общем случае}$$

$\Rightarrow У_3$ - ложь

2 $D = \{d_2, d_4, d_6, d_8, d_{12}, d_{20}\}$

$N = \{1, 2, \dots, 20\}$

$d\in D,\ n\in N:\ Pr(d|n) = ?$

$$Pr(d|n) = \frac{Pr(n|d)\,Pr(d)}{\sum_i Pr(n|d_i)\,Pr(d_i)} = \frac{Pr(n|d)}{\sum_i Pr(n|d_i)}$$

X_n - с.в. равная значению, которое выпадет при втором броске

$$p_{X_n}(x) = \sum_d Pr(x|d)\cdot Pr(d|n) \quad \text{ф-ия распределения}$$

Проверка: $\sum_x p_{X_n}(x) = \sum_x\sum_d Pr(x|d)\cdot Pr(d|n) = \sum_d\sum_x Pr(x|d)\,Pr(d|n) =$

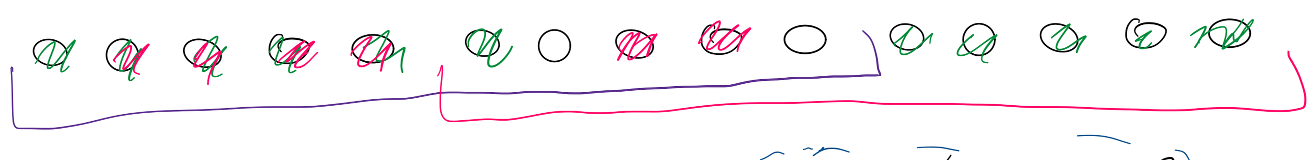
$= \sum_d Pr(d|n) = 1$

$$E[X_n] = \sum_x x\cdot p_{X_n}(x) = \sum_x x\cdot\sum_d Pr(x|d)\,Pr(d|n)$$

3 15 бросков

$Pr(A|B) = ?$ A - среди первых 10 бросков > 5 орлов

B - среди последних 10 бросков > 5 орлов



$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A\cap B)}{Pr(B)} = \frac{\frac{1}{2^{15}}\sum_{j=1}^{5}\binom{5}{j}\left(\sum_{k=6-j}^{5}\binom{5}{k}\right)^2}{\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}\cdot\frac{1}{2^{10}}}$$

выбираем шары по центру, а далее так, чтобы вып. A и B

4 $\exists$ мы вытащили конверт с суммой 2^n.

$A = (2^n, 2^{n+1}) \Rightarrow Pr(A) = p(1-p)^n \,\Big|\, \frac{6}{(\pi(n+1))^2}$

$B = (2^{n-1}, 2^n) \Rightarrow Pr(B) = p(1-p)^{n-1} \,\Big|\, \frac{6}{(\pi n)^2}$

X - сумма во 2 конверте

$$E[X] = 2^{n-1}\,Pr(B|A\cup B) + 2^{n+1}\,Pr(A|A\cup B) =$$

$$= 2^{n-1}\frac{Pr(B)}{Pr(A)+Pr(B)} + 2^{n+1}\frac{Pr(A)}{Pr(A)+Pr(B)}$$

$\frac{2^n}{E[X]} > 1$, тогда берем конверт 1, иначе 2 $(n>1)$

Если $n=0$, берем всегда 2 конверт

$$1)\ E[X] = 2^{n-1}\frac{\cancel{p(1-p)^{n-1}}}{\cancel{p(1-p)^{n-1}}(2-p)} + 2^{n+1}\frac{\cancel{p}(1-p)^{\cancel{n}}}{\cancel{p(1-p)^{n-1}}(2-p)} =$$

$$= \frac{2^{n-1}}{2-p}\left(1 + 4(1-p)\right) = \frac{2^{n-1}(5-4p)}{2-p}$$

$$\frac{2^n}{E[X]} = \frac{4-2p}{5-4p} \geqslant 1 \iff 4-2p \geqslant 5-4p$$

$2p \geqslant 1$

$p \geqslant \frac{1}{2}$

$$2)\ E[X] = 2^{n-1}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}} + 2^{n+1}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{2^{n-1}n^2(n+1)^2}{n^2+(n+1)^2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{(n+1)^2}\right) = \frac{2^{n-1}\left((n+1)^2+4n^2\right)}{(n+1)^2+n^2}$$

$$\frac{2^n}{E[X]} = \frac{2\left((n+1)^2+n^2\right)}{(n+1)^2+4n^2} = \frac{2(n+1)^2+2n^2}{(n+1)^2+4n^2} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}(n+1)^2}{(n+1)^2+4n^2} \geqslant 1$$

Ответ: при $n=0$ берем всегда 2 конверт

иначе 1) при $p\geqslant\frac{1}{2}$ берем 2 кон.

иначе 1

2) при $n = 1, 2$ берем 1 конв.

иначе 2

$3(n+1)^2 \geqslant (n+1)^2 + 4n^2$

$(n+1)^2 \geqslant 2n^2$

$n^2+2n+1 \geqslant 2n^2$

$n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$

$D = 4 - 4\cdot(-1) = 8 = (2\sqrt{2})^2$

$n_{1,2} = \frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$