Ukuran Risiko untuk Distribusi Besar Klaim X

Seperti yang telah dinyatakan sebelumnya, distribusi-distribusi besar klaim (*claim severity*) yang dibahas di dalam tesis ini merupakan distribusi-distribusi yang *skewed to the right*, artinya terdapat ketidaksimetrisan distribusi besar klaim, dengan klaim-klaim bernilai besar mempunyai peluang yang kecil. Akibatnya, rataan (*mean*) dari distribusi tersebut tidak dapat dijadikan sebagai ukuran pusat data untuk mengamati karakteristik data. Apalagi jika distribusi tersebut mempunyai ekor yang tebal, yaitu distribusi dengan peluang yang cukup besar untuk klaim-klaim bernilai tinggi. Pada kasus seperti ini, nilai rataan tidak dapat menggambarkan besarnya pengaruh ketebalan ekor tersebut.

Dalam bidang asuransi, informasi mengenai karakteristik ekor (yang menyatakan klaim-klaim bernilai besar) sangat dibutuhkan, karena meskipun peluang kemunculannya kecil, bagian ekor tersebut dapat memberikan dampak yang signifikan pada portofolio secara keseluruhan. Klaim-klaim bernilai besar yang merupakan risiko bagi pihak perusahaan asuransi tersebut, perlu dijelaskan oleh suatu nilai riil yang merupakan ukuran risiko.

1) Gamma $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta})$

Peubah acak X yang menyatakan besar klaim yang berdistribusi gamma dengan parameter β dan θ memiliki rataan dan variansi seperti yang dinyatakan pada persamaan (2.25) dan (2.26). Dengan demikian, *standard devitation premium principle* untuk X berdasarkan persamaan (2.82), adalah

$$\mathcal{H}(X) = \beta\theta + k\sqrt{\beta\theta^2} = \beta\theta + k\theta\sqrt{\beta} = \theta\left(\beta + k\sqrt{\beta}\right) \qquad (3.1)$$

untuk sebarang $k > 0$. Karena bentuk fungsi distribusi dari X yang berupa fungsi *incomplete gamma*, Q_α yang memenuhi

$$F_X(Q_\alpha) = Pr(X \leq Q_\alpha) = \alpha$$

tidak dapat ditentukan secara analitik. Akibatnya, *Value at Risk* (VaR) sebagai ukuran risiko, sulit ditentukan secara analitik. Sedangkan *Conditional Tail Expectation* (CTE) diperoleh berdasarkan persamaan (2.89), yaitu

$$CTE_\alpha\,(\mathrm{X}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{Q_\alpha}^{\infty} x f_X(x)dx$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_{Q_\alpha}^{\infty} x \frac{1}{\Gamma(\beta)\theta^\beta} x^{\beta-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \frac{\theta\beta}{(1-\alpha)}\left[1 - \Gamma\left(\beta + 1; \frac{Q_\alpha}{\theta}\right)\right] \quad , \; 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad (3.2)$$

2) Weibull $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})$

Untuk data besar klaim yang berdistribusi Weibull dengan parameter τ dan θ, ukuran risiko berdasarkan *standard deviation premium principle* berupa

$$\mathcal{H}(X) = \theta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) + k\sqrt{\theta^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)\right]}$$

$$= \theta\left\{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) + k\sqrt{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)\right]}\right\} \qquad (3.4)$$

untuk sebarang $k > 0$. Selanjutnya akan ditentukan Q_α yang memenuhi $F_X(Q_\alpha) = \alpha$, yaitu

$$F_X(Q_\alpha) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{Q_\alpha}{\theta}\right)^\tau\right] = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \exp\left[-\left(\frac{Q_\alpha}{\theta}\right)^\tau\right] = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{Q_\alpha}{\theta}\right)^\tau = ln(1 - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow Q_\alpha = \theta[-ln(1 - \alpha)]^{1/\tau} \quad , \; 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad (3.5)$$

Dengan demikian, kuantil ke-α dari distribusi Weibull adalah

$$F_X^{-1}(\alpha) = Q_\alpha = \theta[-ln(1 - \alpha)]^{1/\tau}$$

sehingga

$$\mathcal{H}(X) = VaR_\alpha(X) = \theta[-ln(1 - \alpha)]^{1/\tau}, \; 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad (3.6)$$

Dari sini, diperoleh ukuran risiko CTE, yaitu

$$CTE_\alpha\,(\mathrm{X}) = \frac{Q_\alpha}{1-\alpha} e^{-\left(\frac{Q_\alpha}{\theta}\right)^\tau}\left[1 + \left(\frac{Q_\alpha}{\theta}\right)^{-\tau}\right], 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad (3.7)$$

3) Pareto $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta})$

Besar klaim dengan distribusi Pareto, berdasarkan *standard deviation premium principle* memiliki ukuran risiko

$$\mathcal{H}(X) = \frac{\theta}{(\beta-1)} + k\sqrt{\frac{\beta\theta^2}{(\beta-1)^2(\beta-2)}}$$

$$= \frac{\theta}{(\beta-1)}\left[1 + k\sqrt{\frac{\beta}{(\beta-2)}}\right] \quad , \qquad \beta > 2 \tag{3.9}$$

untuk sebarang $k > 0$. Ukuran risiko untuk distribusi Pareto berdasarkan persamaan (3.9), hanya dapat ditentukan apabila $\beta > 2$. Jika parameter β bernilai kurang dari atau sama dengan 2, maka momen ke-2 dari distribusi ini tidak ada. Kuantil-α, yang memenuhi $F_X(Q_\alpha) = \alpha$, adalah

$$F_X(Q_\alpha) = 1 - \left(\frac{\theta}{Q_\alpha+\theta}\right)^\beta = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\theta}{Q_\alpha+\theta}\right)^\beta = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\theta}{Q_\alpha+\theta}\right) = (1-\alpha)^{1/\beta}$$

$$\Leftrightarrow \quad Q_\alpha \quad = \frac{\theta}{(1-\alpha)^{1/\beta}} - \theta$$

dengan demikian,

$$F_X^{-1}(\alpha) = Q_\alpha = \frac{\theta}{(1-\alpha)^{1/\beta}} - \theta$$

yang dapat digunakan dalam penentuan ukuran risiko VaR dari distribusi Pareto, yaitu

$$\mathcal{H}(X) = VaR_\alpha(X) = \frac{\theta}{(1-\alpha)^{1/\beta}} - \theta, \quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{3.10}$$

Dengan mengamati nilai-nilai di atas $VaR_\alpha(X)$, diperoleh

$$CTE_\alpha\,(\mathrm{X}) = \frac{(Q_\alpha+\theta)^{-\beta}}{1-\alpha}\left\{\frac{\beta}{\beta-1}\theta^\beta Q_\alpha + \frac{1}{\beta-1}\theta^{\beta+1}\right\} \tag{3.11}$$

dengan $\beta > 1$ dan $0 \le \alpha \le 1$.

4) Lognormal $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})$

Dari nilai *mean* dan variansi distribusi lognormal yang diperoleh pada Bab II, diperoleh ukuran risiko menggunakan *standard deviation premium principle*, yaitu

$$\mathcal{H}(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} + k\sqrt{e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)}$$

$$= e^\mu\sqrt{e^{\sigma^2}} + ke^\mu\sqrt{e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)}$$

$$= e^{\mu}\sqrt{e^{\sigma^2}}\left[1 + k\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}\right] \quad (3.13)$$

untuk sebarang $k > 0$. Selanjutnya, VaR diperoleh dengan mencari nilai Q_α yang memenuhi $F_X(Q_\alpha) = \alpha$, yaitu

$$F_X(Q_\alpha) = \Phi\left(\frac{lnQ_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{lnQ_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \; lnQ_\alpha = \sigma\Phi^{-1}(\alpha) + \mu$$

$$\Leftrightarrow \; Q_\alpha = \exp\left[\sigma\Phi^{-1}(\alpha) + \mu\right]$$

Dari sini, diperoleh formula kuantil ke-α yaitu

$$F_X^{-1}(\alpha) = Q_\alpha = \exp\left[\sigma\Phi^{-1}(\alpha) + \mu\right]$$

dengan $\Phi^{-1}(\cdot)$ merupakan invers fungsi distribusi dari suatu distribusi normal standar. Dengan demikian, ukuran risiko *Value at Risk* untuk distribusi lognormal adalah

$$\mathcal{H}(X) = VaR_\alpha(X) = \exp\left[\sigma\Phi^{-1}(\alpha) + \mu\right], \; 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.14)$$

Ukuran risiko *Conditional Tail Expectation* diturunkan dengan menggunakan fungsi kepadatan peluang dari distribusi lognormal dan $VaR_\alpha(X) = Q_\alpha$ sehingga diperoleh

$$CTE_\alpha\,(\mathrm{X}) = \left(\frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{1-\alpha}\right)\left\{1 - \Phi\left(\frac{lnQ_\alpha - \mu}{\sigma} - \sigma\right)\right\}, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.15)$$

dengan $\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$, menyatakan fungsi distribusi dari suatu distribusi normal standar.

5) Loglogistik $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\theta})$

Jika suatu data besar klaim dimodelkan dengan distribusi loglogistik, maka diperoleh ukuran risiko berdasarkan *standard deviation premium principle*, yaitu

$$\mathcal{H}(X) = E(X) + k\sqrt{Var(X)}$$

$$= \theta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) + k\sqrt{\theta^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)\Gamma\left(1 - \frac{2}{\gamma}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\right]}$$

$$= \theta\left\{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) + k\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)\Gamma\left(1 - \frac{2}{\gamma}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)}\right\}, \quad \gamma > 2 \quad (3.17)$$

untuk sebarang $k > 0$.Ukuran risiko berdasarkan *standard deviation premium principle* untuk distribusi ini hanya dapat diperoleh untuk nilai parameter $\gamma > 2$. Saat nilai parameter γ kurang dari atau sama dengan 2, distribusi ini tidak mempunyai momen ke-2. Jika demikian, maka variansi tidak akan dapat ditentukan, sehingga ukuran risiko berdasarkan persamaan di atas juga tidak dapat diperoleh.

VaR_α dapat diperoleh melalui manipulasi fungsi distribusi berikut ini

$$F_X(Q_\alpha) = \frac{{Q_\alpha}^\gamma}{\theta^\gamma + {Q_\alpha}^\gamma} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad {Q_\alpha}^\gamma = \alpha(\theta^\gamma + {Q_\alpha}^\gamma)$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha){Q_\alpha}^\gamma = \alpha\theta^\gamma$$

$$\Leftrightarrow \quad Q_\alpha = \theta\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/\gamma}$$

Dengan demikian, formula kuantil ke-α yang sekaligus merupakan ukuran risiko *Value at Risk* dengan *confidence level* α untuk distribusi ini adalah

$$\mathcal{H}(X) = VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \theta\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/\gamma}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad (3.18)$$

Ukuran risiko *Conditional Tail Expectation* untuk distribusi loglogistik sulit diperoleh secara analitik karena bentuk integralnya yang rumit, yaitu

$$CTE_\alpha\,(\mathrm{X}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{Q_\alpha}^{\infty} x f_X(x)dx$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_{Q_\alpha}^{\infty} x\,\frac{\gamma\left(x/_\theta\right)^\gamma}{x\left[1+\left(x/_\theta\right)^\gamma\right]^2}dx$$

$$= \frac{\gamma}{1-\alpha}\int_{Q_\alpha}^{\infty} \frac{\left(x/_\theta\right)^\gamma}{\left[1+\left(x/_\theta\right)^\gamma\right]^2}dx \quad , \; 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad (3.19)$$

CONTOH

Berikut ini diberikan contoh model-model distribusi besar klaim, X, dengan *mean* $75.000.000$ dan simpangan baku $150.000.000$.

Tabel 3.3 Contoh Model Distribusi Besar Klaim (X)

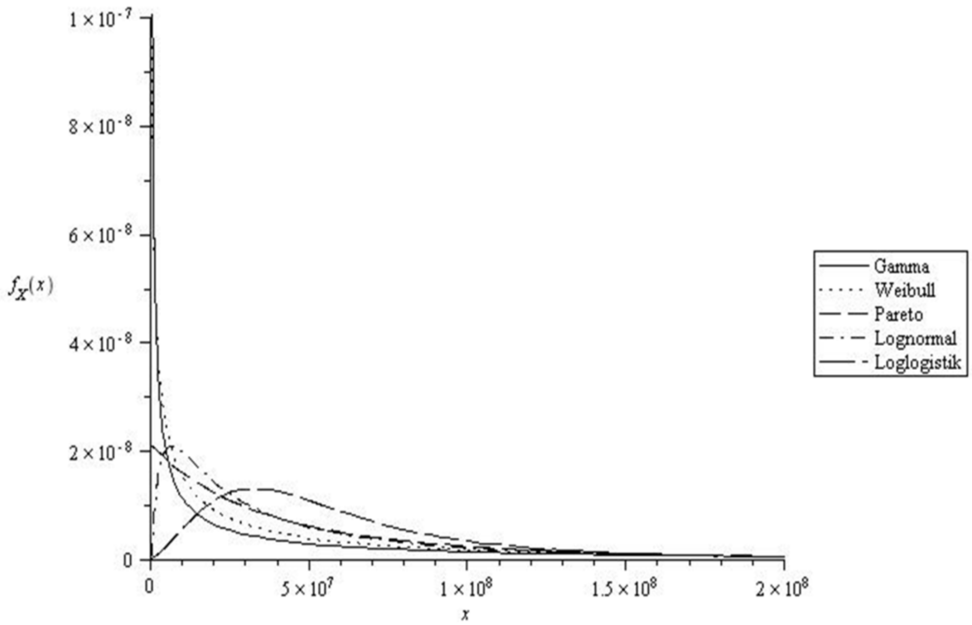
Distribusi X	**Estimasi Parameter**
Gamma	$\hat{\beta} = 0{,}25$ $\hat{\theta} = 300.000.000$
Weibull	$\hat{\theta} = 43.143.716{,}6142$ $\hat{\tau} = 0{,}5427$
Pareto	$\hat{\beta} = 2{,}6667$ $\hat{\theta} = 1{,}25 \times 10^8$
Lognormal	$\hat{\mu} = 17{,}3283$ $\hat{\sigma} = 1{,}2686$
Loglogistik	$\hat{\gamma} = 2{,}1938$ $\hat{\theta} = 51.869.696{,}6535$

HASIL

Tabel. 3.4 Ukuran Risiko untuk Distribusi X secara Analitik (Teori)

Distribusi	***S. D. Premium Principle***		**VaR**		**CTE**	
	$k = 1$	$k = 2$	$\alpha = 0{,}75$	$\alpha = 0{,}95$	$\alpha = 0{,}75$	$\alpha = 0{,}95$
Gamma	225.000.000	375.000.000	– [a]	–	257.230.000	594.510.000
Weibull	225.000.000	375.000.000	78.761.000	325.800.000	135.540.000	434.170.000
Pareto	225.000.000	375.000.000	85.224.000	259.410.000	211.360.000	490.060.000
Lognormal	225.000.000	375.000.000	78.921.000	270.290.000	217.140.000	530.070.000
Loglogistik	225.000.000	375.000.000	85.585.000	198.520.000	–	–

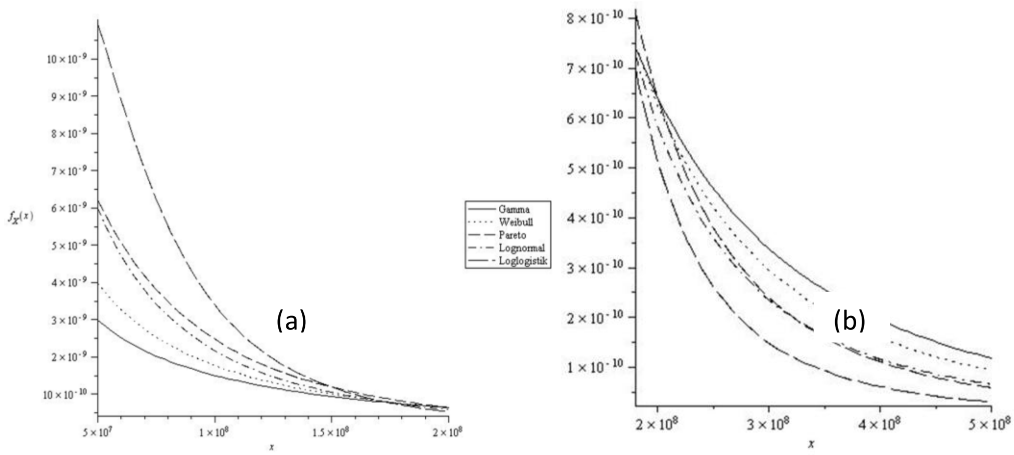
Asumsi yang diambil pada model ini cukup ekstrim, karena ditetapkan bahwa simpangan baku besarnya dua kali nilai rataan (*mean*) atau mempunyai koefisien variansi sama dengan dua. Dengan demikian, semua distribusi tersebut mempunyai sebaran yang luas atau dapat dikatakan bahwa jika X merupakan peubah acak yang menyatakan besar klaim, maka terdapat peluang bahwa klaim yang diajukan dapat bernilai jauh lebih besar dari pada rataannya. Berdasarkan taksiran parameter yang diperoleh, fungsi kepadatan peluang dari distribusi X tersebut diperlihatkan pada Gambar 3.2.



ıt disajikan

dan di atas

Gambar 3.2 Grafik fungsi kepadatan peluang peubah acak besar klaim, X



Gambar 3.3 Kurva distribusi peluang X, (a) untuk besar klaim, $50.000.000 \leq x \leq 200.000.000$, (b) untuk besar klaim, $200.000.000 \leq x \leq 500.000.000$