2.6 Ukuran Risiko

Risiko dapat dideskripsikan sebagai suatu kejadian yang mungkin terjadi atau tidak terjadi dan dapat membawa kerugian secara finansial. Ukuran Risiko (*risk measure*) merupakan suatu pemetaan fungsional dari distribusi kerugian ke bilangan riil atau berdasarkan definisi dapat dinyatakan

Definisi 2.6 *Jika, X merupakan peubah acak tak negatif yang menyatakan loss maka risk measure dari X, yang dinotasikan dengan $\mathcal{H}(X)$, merupakan suatu fungsi bernilai riil (real-valued function)*

$$\mathcal{H}: X \to \mathbb{R}$$

dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan riil (Tse, 2009, halaman 117).

Ukuran risiko $\mathcal{H}(X)$ ditentukan tak negatif, dikarenakan X merupakan peubah acak yang tak negatif. Namun, hal ini berlaku jika yang dilakukan adalah pengukuran risiko asuransi. Jika pengukuran risiko yang dimaksud adalah untuk suatu portofolio asset, maka X dapat bernilai negatif maupun positif. Dalam kasus semacam itu ukuran risiko, $\mathcal{H}(X)$, juga dapat bernilai positif ataupun negatif. Dalam bidang aktuaria, ukuran risiko pertama kali digunakan dalam pengembangan prinsip penentuan premi (*premium principle*).

2.6.1 *Standard Deviation Premium Principle*

Ukuran risiko berdasarkan simpangan baku (*standard deviation*) atau dikenal pula sebagai *standard deviation premium principle* merupakan salah satu contoh ukuran risiko yang didasarkan pada premi, yaitu

$$\mathcal{H}(X) = E(X) + k\sqrt{Var(X)} \qquad (2.82)$$

untuk sebarang $k > 0$. *Standard deviation premium principle* dikembangkan dari prinsip penentuan premi murni (*net premium principle*), yaitu $\mathcal{H}(X) = E(X)$, dengan memasukkan *loading factor* k, yang proporsional dengan simpangan baku.

Simpangan baku merupakan suatu ukuran deviasi dari *mean* distribusi dengan variansi finit dan biasanya digunakan jika *underlying variable* berdistribusi normal. Simpangan baku merupakan statistik yang siap tersedia dan dengan mudah dapat dipahami, yang mengukur seberapa sering suatu kejadian menyimpang dari normal. Berdasarkan ukuran risiko ini, distribusi kerugian dengan sebaran yang lebih luas akan memiliki risiko yang lebih tinggi.

Sebagai pendeskripsi bentuk distribusi , simpangan baku terbatas. Ukuran risiko ini bukan suatu ukuran yang baik untuk jenis-jenis asuransi berisiko tinggi, yaitu distribusi-distribusi dengan ekor tebal (*heavy tailed*). Deskripsi yang lebih baik tentang *risk behavior* dari suatu distribusi dapat diperoleh dengan memperhatikan *higher moment*, yaitu momen ketiga dan keempat yang digunakan untuk mendiskripsikan derajat kecondongan (*skewness*) dan *kurtosis* (*peakness*).

2.6.2 *Capital Based Risk Measures*

1) *Value at Risk* atau *Quantile Risk Measure*

Value at Risk (VaR) merupakan salah satu ukuran risiko yang paling luas kegunaannya. Dalam konteks aktuaria, VaR dikenal sebagai ukuran risiko kuantil (*quantile risk measure*) atau *quantile premium principle*, di mana kuantil ke-α dinotasikan dengan Q_α. α menyatakan taraf kepercayaan (*confidence level*) dengan nilai yang biasanya diambil mendekati 1, seperti 95% atau 99%,

VaR selalu ditetapkan dengan suatu *confidence level* α. Sesuai dengan definisi kuantil ke-α, VaR_α menggambarkan bahwa terdapat sebesar α (dalam persen) data *loss* yang terletak di bawah VaR_α atau dapat dinyatakan pula bahwa peluang tidak akan ada *loss* yang bernilai lebih dari VaR_α adalah sebesar α. Menurut definsi, dinyatakan

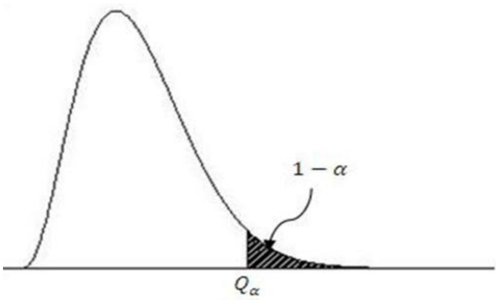
Definisi 2.7 *Misalkan X merupakan peubah acak yang menyatakan loss dengan fungsi distribusi kontinu $F_X(\cdot)$ dan confidence level α, dengan $0 \le \alpha \le 1$, Value at Risk pada confidence level α, dinotasikan dengan $VaR_\alpha(X)$, merupakan kuantil ke α dari X. Yaitu,*

$$\mathcal{H}(X) = VaR_\alpha(X) = Q_\alpha = F_X^{-1}(\alpha) \qquad (2.83)$$

dengan

$$F_X(Q_\alpha) = Pr(X \le Q_\alpha) = \alpha \qquad (2.84)$$

Karena α mendekati 1 maka peluang X lebih dari $VaR_\alpha(X)$ tidak akan lebih dari $1-\alpha$ (nilainya kecil).



Gambar 2.8 Kuantil ke α

Ketika $F_X(\cdot)$ merupakan suatu fungsi tangga, artinya X bukan merupakan suatu peubah acak kontinu, penggunaan $F_X^{-1}(\alpha)$ akan menimbulkan kendala karena kemungkinan besar tidak akan ditemukan suatu nilai $VaR_\alpha(X) = Q_\alpha$ yang tepat memenuhi $\Pr(X \leq Q_\alpha) = \alpha$. Dengan demikian definisi yang lebih umum untuk ukuran risiko $VaR_\alpha(X)$ dinyatakan sebagai

$$\mathcal{H}(X) = VaR_\alpha(X) = \inf\{x: F_X(x) = Pr(X \leq x) \geq \alpha\} \qquad (2.85)$$

(Tse (2009), halaman 120).

Model *Value-at-risk* menjumlahkan berbagai komponen *price risk* ke dalam suatu ukuran kuantitatif tunggal dari kerugian-kerugian yang mungkin terjadi selama periode waktu tertentu. Model ini menarik karena mampu menyampaikan risiko dari keseluruhan portofolio dalam satu bilangan.

VaR dapat disajikan sebagai suatu *simple risk indicator*. Namun, ukuran risiko ini mempunyai kekurangan karena gagal menyampaikan informasi yang lebih mengenai persentil lainnya. Dengan VaR hanya akan diketahui kapan suatu *bad event* terjadi, namun tidak diperoleh informasi mengenai apa yang terjadi setelah terjadinya *bad event* tersebut.

Dengan VaR, risiko pada suatu portofolio akan lebih besar dibandingkan jumlah risiko dari semua polis yang ada yang di dalam portofolio tersebut. Hal ini tidak diharapkan dimiliki oleh suatu ukuran risiko, itulah kenapa penggunaan VaR sebagai ukuran risiko bukan merupakan suatu bentuk manajemen risiko yang efektif.

Metode perhitungan VaR biasanya dibagi ke dalam model parametrik dan model non-parametrik. Model parametrik berdasarkan pada parameter-parameter statistik dari *risk factor distribution*, sedangkan model non-parametrik merupakan simulasi atau model historis. Salah satu metode perhitungan VaR yang paling umum adalah dengan Simulasi Monte Carlo.

2) *Conditional Tail Expectation*

Dari penjabaran mengenai ukuran risiko VaR_α pada point sebelumnya dapat dilihat bahwa ukuran risiko ini hanya berupa suatu nilai VaR_α yang memenuhi kondisi $Pr(X \leq VaR_\alpha) = \alpha$, dengan α mendekati 1 sehingga nilai VaR_α pasti berupa kerugian yang cukup besar. Padahal bukan hanya itu yang menjadi fokus perhatian dalam manajemen risiko. Pengamatan mengenai kejadian datangnya kerugian, dalam hal ini berupa klaim, yang bernilai lebih dari VaR_α sangat penting. Meskipun peluang munculnya cukup kecil, yaitu $1-\alpha$, nilai-nilai di atas VaR_α tidak bisa dianggap remeh karena bisa saja justru kejadian-kejadian tersebut merupakan *loss* yang bernilai sangat besar atau bahkan dapat dikategorikan ekstrim dan dapat memberikan dampak yang signifikan.

Conditional Tail Expectation (CTE) memberikan informasi mengenai seberapa besar risiko yang harus ditanggung jika kejadian-kejadian dengan kerugian di atas *threshold* (VaR_α) benar-benar terjadi. Seperti halnya VaR, CTE juga didefinisikan pada taraf kepercayaan α, dengan $0 \leq \alpha \leq 1$. CTE pada taraf kepercayaan α, diberikan oleh ukuran risiko VaR_α dapat dinyatakan dengan

$$CTE_\alpha\,(\mathrm{X}) = \mathrm{E}[\mathrm{X}|\mathrm{X} > Q_\alpha] = \mathrm{E}[\mathrm{X}|\mathrm{X} > VaR_\alpha\,(\mathrm{X})] \qquad (2.86)$$

dengan, Q_α menyatakan kuantil ke-α.

Namun, persamaan di atas tidak akan berlaku untuk peubah acak kerugian X yang diskrit. Untuk X yang diskrit, didefinisikan

$$\bar{\alpha} = \max\{\alpha' : Q_\alpha = Q_{\alpha'}\} \qquad (2.87)$$

Maka

$$CTE_\alpha = \frac{(\bar{\alpha}-\alpha)Q_\alpha + (1-\bar{\alpha})E[X|X>Q_\alpha]}{1-\alpha} \qquad (2.88)$$

dengan, $Pr(X \leq Q_\alpha) = \alpha$, dan merupakan rata-rata terboboti (*weighted average*) dari $VaR_\alpha = Q_\alpha$ dan $E[X - VaR_\alpha]$ (Hardy (2006), halaman 9).

Dari (2.86), diperoleh

$$\begin{aligned} CTE_\alpha\,(\mathrm{X}) &= \mathrm{E}[\mathrm{X}|\mathrm{X} > Q_\alpha] \\ &= \int_{Q_\alpha}^{\infty} x \frac{f_X(x)}{\Pr(X>Q_\alpha)} dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{Q_\alpha}^{\infty} x f_X(x) dx \qquad (2.89) \end{aligned}$$

Jelas bahwa, $\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$. Sehingga

$$CTE_\alpha\,(\mathrm{X}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{Q_\alpha}^{\infty} x dF_X(x) \qquad (2.90)$$

Misalkan $\xi = F_X(x)$, maka

i. $\xi = F_X(x) = \Pr(X \leq x)$

Dari definisi kuantil ke-α, yaitu $Pr(X \leq Q_\alpha) = \alpha$, maka dapat dinyatakan bahwa $\xi = Pr\left(X \leq Q_\xi\right)$ artinya $x = Q_\xi$

ii. $d\xi = dF_X(x)$

iii. untuk $x = Q_\alpha \Rightarrow \xi = \Pr(X \leq Q_\alpha) = \alpha$

untuk $x = \infty \Rightarrow \xi = \Pr(X \leq \infty) = F_X(\infty) = 1$

Dengan demikian, berdasarkan i, ii, dan iii persamaan (2.90) menjadi

$$CTE_\alpha\,(\mathrm{X}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 Q_\xi d\xi \qquad (2.91)$$

Dari sini, CTE_α dapat dinyatakan sebagai rata-rata kuantil yang lebih dari Q_α. Ruas kanan persamaan (2.91) dapat dinyatakan pula dengan

$$\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 Q_\xi d\xi = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\xi d\xi \qquad (2.92)$$

yang disebut sebagai *tail value-at-risk* dan dinotasikan dengan $TVaR_\alpha\,(\mathrm{X})$. Formula $TVaR_\alpha$ (X) tersebut dapat digunakan sebagai cara penulisan alternatif dari persamaan (2.88), baik untuk X yang kontinu maupun tidak kontinu. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa, $TVaR_\alpha$ ekuivalen dengan CTE_α (Tse (2009), halaman 124).

Terdapat beberapa pernyataan penting mengenai ukuran risiko VaR_α dan CTE_α, yaitu:

1. Jelas bahwa, CTE_α yang merupakan rata-rata kerugian yang nilainya lebih dari kuantil ke-α atau Q_α, nilainya akan lebih dari atau sama dengan nilai Q_α itu sendiri ($CTE_\alpha \geq Q_\alpha$). CTE_α akan sama dengan Q_α jika Q_α merupakan nilai maksimum dari peubah acak kerugian.
2. Untuk $\alpha = 0\%$, diperoleh

$$CTE_{0\%} = E[X|X > Q_0] = E[X] \qquad (2.93)$$

   Artinya, $CTE_{0\%}$ merupakan rata-rata kerugian (*mean loss*).
3. $Q_{0\%}$ merupakan minimum *loss*, karena

$$\Pr(X \leq Q_{0\%}) = 0 \qquad (2.94)$$

   Artinya tidak akan ada *loss* yang nilainya lebih kecil dari $Q_{0\%}$ ($Q_{0\%}$ adalah nilai *loss* terkecil). Sedangkan $Q_{50\%}$ merupakan median *loss*, karena berarti ada 50% atau setengah dari total data *loss* yang berada di bawah dan di atas $Q_{50\%}$.

(Hardy (2006), halaman 13).

Jika CTE dari suatu distribusi 1 lebih besar dibandingkan dengan CTE dari distribusi 2, maka hal tersebut mengindikasikan bahwa distribusi 1 memberikan peningkatan risiko ekstrim yang lebih dibandingkan dengan distribusi 2, saat kejadian-kejadian ekstrim yang diukur di atas suatu nilai tertentu.

Dengan CTE dapat dilakukan estimasi ekpektasi dari kerugian yang lebih besar dari VaR. Oleh karena itu, CTE lebih sederhana namun merupakan ukuran risiko yang lebih aman untuk memproteksi secara cukup pelaksanaan industri asuransi, pemegang saham dan *stakeholder* lainnya.

2.7 Koherensi (*Coherency*)

Pengukuran risiko merupakan elemen yang sangat penting dalam menetapkan *capital requirement*. Arztner dkk. (1999) mengusulkan empat aksioma untuk ukuran risiko dan menyatakan bahwa aksioma-aksioma ini harus dipenuhi oleh suatu ukuran risiko agar ukuran risiko tersebut dapat digunakan untuk mengelola risiko dengan baik. Ukuran risiko yang memenuhi keempat aksioma tersebut disebut sebagai ukuran risiko yang koheren (*coherent risk measure*). Adapun keempat aksioma yang dimaksud adalah sebagai berikut

Aksioma 2.9 *Translational Invariance (T/TI), yaitu untuk sebarang peubah acak kerugian* X *dan sebarang kontanta* $a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}(X + a) = \mathcal{H}(X) + a \tag{2.100}$$

Aksioma ini menyatakan bahwa, penambahan sejumlah konstanta a (positif maupun negatif) kepada risiko mengakibatkan ukuran risiko bertambah dengan jumlah yang sama.

Aksioma 2.10 *Subadditivity (S), yaitu untuk sebarang peubah acak kerugian* X *dan* Y

$$\mathcal{H}(X + Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) \tag{2.101}$$

Dari aksioma ini dapat diketahui bahwa, risiko tidak bisa berkurang dengan cara membagi bisnis menjadi bagian-bagian kecil dan dapat berarti juga bahwa *merger* tidak akan memunculkan risiko tambahan.

Aksioma 2.11 *Positive Homogenity atau Scale Invariance (SI), di mana untuk sebarang peubah acak kerugian* X *dan sebarang* $a \geq 0$.

$$\mathcal{H}(aX) = a\mathcal{H}(X) \tag{2.102}$$

Berarti mengubah unit kerugian tidak mengubah ukuran risiko, misalnya terjadi perubahan mata uang.

Aksioma 2.12 *Monotonicity (M), yang menyatakan bahwa untuk sebarang peubah acak kerugian* X *dan* Y *sedemikian sehingga* $X \leq Y$

$$\mathcal{H}(X) \leq \mathcal{H}(Y) \tag{2.103}$$

Berarti jika salah satu risiko (kerugian) lebih besar dari yang lain, ukuran risiko pun akan sama (kondisinya).

Jika, aksioma 2.9 diapplikasikan ke suatu ukuran risiko, $\mathcal{H}(X)$, yang koheren dan diasumsikan $X = 0$ untuk sebarang konstanta $a \geq 0$, maka

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(a) &= \mathcal{H}(X + a) && \text{dengan } X = 0 \\ &= \mathcal{H}(X) + a && \text{karena aksioma 2.9 berlaku} \\ &= \mathcal{H}(0) + a \\ &= a && (2.104) \end{aligned}$$

Hasil di atas menunjukkan bahwa jika suatu risiko merupakan konstanta, maka ukuran risiko koheren dari risiko tersebut adalah konstanta yang sama. Dengan demikian, untuk ukuran risiko yang didasarkan pada prinsip penentuan premi, *loading* untuk risiko yang berupa konstanta harus sama dengan 0. Akibatnya, ukuran risiko koheren yang demikian dikatakan memiliki *no unjustified loading*.

Jika, risiko X mempunyai *support* yang finit dengan nilai maksimum x_U, maka suatu risiko yang didefinisikan dengan $Y = x_U$ memenuhi $X \leq Y$. Dari aksioma 2.12, suatu ukuran risiko koheren harus memenuhi $\mathcal{H}(X) \leq \mathcal{H}(Y) = \mathcal{H}(x_U) = x_U$. Dengan demikian, ukuran risiko terbatas di atas oleh nilai maksimum dan premium yang memenuhi kondisi tersebut dikatakan mempunyai sifat *no ripoff* (Tse (2009), halaman 118).

Berikut ini akan dilakukan pengamatan terhadap koherensi dari ukuran risiko yang telah dipaparkan pada bagian sebelumnya.

1) *Standard deviation premium principle* :

$$\mathcal{H}(X) = E(X) + k\sqrt{Var(X)}, \quad \text{untuk sebarang } k > 0$$

i. Untuk sebarang peubah acak kerugian X dan $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X + a) &= E(X + a) + k\sqrt{Var(X + a)} \\ &= E(X) + a + k\sqrt{Var(X)} \\ &= \left(E(X) + k\sqrt{Var(X)}\right) + a \\ &= \mathcal{H}(X) + a \end{aligned}$$

Artinya, ukuran risiko ini memenuhi sifat pada aksioma 2.9.

ii. Untuk sebarang peubah acak kerugian X dan Y

$$\mathcal{H}(X + Y) = E(X + Y) + k\sqrt{Var(X + Y)}$$

$$= E(X) + E(Y) + k\sqrt{Var(X+Y)}$$
$$\leq E(X) + E(Y) + k\left(\sqrt{Var(X)} + \sqrt{Var(Y)}\right)$$
$$\leq \left(E(X) + k\sqrt{Var(X)}\right) + \left(E(Y) + k\sqrt{Var(Y)}\right)$$

Dengan demikian,

$$\mathcal{H}(X+Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$$

Jadi, aksioma 2.10 dipenuhi

iii. Untuk sebarang peubah acak kerugian X dan $a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}(aX) = E(aX) + k\sqrt{Var(aX)}$$
$$= aE(X) + k\sqrt{a^2 Var(X)}$$
$$= a\left[E(X) + k\sqrt{Var(X)}\right]$$
$$= a\mathcal{H}(X)$$

Artinya, ukuran risiko $\mathcal{H}(X)$ dapat memenuhi aksioma SI

iv. *Standard deviation premium principle* tidak memenuhi sifat *monotonicity*, hal tersebut akan diperlihatkan melalui contoh berikut ini. Jika didefinisikan

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0{,}25 & \text{untuk } X = 0, Y = 4 \\ 0{,}75 & \text{untuk } X = 4, Y = 4 \end{cases}$$

maka

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = \sum_x x\left[\sum_y f_{XY}(x,y)\right] = (0)(0{,}25) + (4)(0{,}75) = 3$$

dan

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = [(0)(0{,}25) + (4^2)(0{,}75)] - 3^2 = 3$$

serta

$$E(Y) = \sum_y y f_Y(y) = \sum_y y\left[\sum_x f_{XY}(x,y)\right] = (4)(0{,}25) + (4)(0{,}75) = 4$$

dengan

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = [(4^2)(0{,}25) + (4^2)(0{,}75)] - 4^2 = 0$$

Dengan demikian, untuk $k = 1$

$$\mathcal{H}(X) = E(X) + \sqrt{Var(X)} = 3 + \sqrt{3} > 4 + 0 = E(Y) + \sqrt{Var(Y)} = \mathcal{H}(Y)$$

Padahal jelas bahwa $X \leq Y$. Berarti, untuk sebarang peubah acak kerugian X dan Y dengan $X \leq Y$

$$\mathcal{H}(X) \leq \mathcal{H}(Y)$$

tidak selalu dipenuhi. Jadi, *standard deviation premium principle* tidak memenuhi sifat M.

Dari i, ii, iii, dan iv, karena aksioma 2.12 tidak dapat dipenuhi oleh ukuran risiko ini, maka *Standard Deviation premium principle* tidak bisa dikategorikan sebagai suatu ukuran risiko yang koheren.

i. Pembuktian bahwa VaR tidak memenuhi sifat pada aksioma 2.10 akan lebih mudah jika dilakukan dengan contoh penyangkal (*counter example*).

Misalkan terdapat dua risiko yang identik, X dan Y. Masing-masing mempunyai peluang terjadi 4% dan kerugian jika masing-masing X dan Y terjadi adalah 100 serta 0 apabila tidak terjadi, atau dapat dituliskan sebagai

$$X = Y = \begin{cases} 0 & , dengan\ peluang\ 0{,}96 \\ 100 & , dengan\ peluang\ 0{,}04 \end{cases}$$

Berarti untuk *confidence level*, $\alpha = 0{,}95$, $VaR_{0,95}(X) = VaR_{0,95}(Y) = 0$. Jika X dan Y saling bebas, maka peluang kerugian sebesar 0 adalah $(0{,}96)^2 = 0{,}9216$.

Sedangkan peluang terjadinya kerugian sebesar 200, yaitu saat X dan Y terjadi adalah sebesar $0{,}04^2 = 0{,}0016$. Ketika hanya salah satu kejadian terjadi, peluang total kerugian sebesar 100 adalah $1 - 0{,}9216 - 0{,}0016 = 0{,}0768$. Dari sini,

$$\begin{aligned} \Pr(X + Y \leq 100) &= \Pr(X + Y = 0) + \Pr(X + Y = 100) \\ &= 0{,}9216 + 0{,}0768 = 0{,}9984. \end{aligned}$$

Dengan demikian, kuantil ke-$0{,}95$ yang memenuhi $\Pr\left(X + Y \leq VaR_{0,95}(X + Y)\right) = 0{,}95$ adalah 100. Akibatnya

$$VaR_{0,95}(X + Y) = 100 > 0 = VaR_{0,95}(X) + VaR_{0,95}(Y)$$

Karena suatu ukuran risiko dikatakan memenuhi sifat *subadditivity* jika, $\mathcal{H}(X + Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$ berlaku untuk setiap peubah acak kerugian X dan Y, berarti sifat *subadditivity* tidak berlaku untuk ukuran risiko VaR

PENTING !!!

Penetapan nilai *loading faktor* k, *confidence level* α, dan indeks r tidak bersifat mutlak, artinya semua nilai tersebut bergantung pada kondisi data asuransi yang dianalisis serta berbagai faktor eksternal lainnya seperti dana operasional, investasi perusahaan, pajak, dan profit. Penetapan k dan α yang (sangat) besar serta r yang kecil (mendekati nol) akan memberikan *safety margin* yang (sangat) besar