Actuarial Computation and Simulation

Week 5: Introduction to Risk Measures (Coherent Risk Axioms, Variance vs CVaR vs EVaR)

Aprida Siska Lestia

September 7, 2025

Learning objectives

- Memahami konsep *risk measure* dan empat aksioma koheren (Artzner et al., 1999).
- Menelaah Variance, VaR, CTE (TVaR), CVaR, dan EVaR beserta kelebihan/kelemahannya.
- Membedakan Variance vs CVaR vs EVaR dari sisi sensitivitas ekor (tail).
- Praktik: menghitung CVaR & EVaR pada data return sintetis dan membandingkannya dengan Variance.

Jenis Risiko dan Kegunaan Ukuran Risiko

Jenis-jenis risiko:

1. Risiko pasar
   (kerugian akibat perubahan pada harga dan kondisi pasar)
2. Risiko kredit
   (risiko dari nasabah)
3. Risiko operasional
   (risiko bisnis yang bukan risiko pasar atau kredit)

Kegunaan ukuran risiko:

1. Menentukan modal
2. Menentukan premi
3. Manajemen risiko internal
4. Melaporkan kebijakan eksternal

Definisi Ukuran Risiko

Gagasan inti: fungsi yang memetakan distribusi kerugian (loss) $\rightarrow$ bilangan riil yang merepresentasikan besaran risiko.

Notasi: untuk peubah acak kerugian X (konvensi aktuaria: $X \geq 0$ untuk loss), risk measure ditulis $\rho(X) \in \mathbb{R}$.

Definisi:

Suatu ukuran risiko dari kerugian acak X, notasi $\rho(X)$, adalah fungsi bernilai riil

$$\rho : X \rightarrow \mathbb{R},$$

dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil. Peubah acak X tak negatif.

Prinsip Premi dalam Ukuran Risiko

Misalkan mean dan variansi kerugian acak X adalah μ_X dan σ_X^2.

Expected-value principle premium:

$$\rho(X) = (1+\theta)\mu_X = \mu_X + \theta\mu_X,$$

dimana $\theta \geq 0$ adalah *premium loading factor*. Ukuran risiko dikatakan *pure premium* saat $\theta = 0$.

Variance principle premium:

$$\rho(X) = \mu_X + \alpha\sigma_X^2,$$

dimana $\alpha \geq 0$ adalah *loading factor*.

Aksioma Risk Measure Koheren

- Arztner dkk. (1999) mengusulkan empat aksioma untuk ukuran risiko dan menyatakan bahwa aksioma-aksioma ini harus dipenuhi oleh suatu ukuran risiko agar ukuran risiko tersebut dapat digunakan untuk mengelola risiko dengan baik.
- Ukuran risiko yang memenuhi keempat aksioma tersebut disebut sebagai ukuran risiko yang koheren (coherent risk measure).
- Risk measure ρ dikatakan **koheren** jika untuk semua X, Y dan $\lambda > 0$:

  1. **Monotonicity**: $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.
  2. **Translation Invariance**: $\rho(X + a) = \rho(X) + a$.
  3. **Positive Homogeneity**: $\rho(aX) = a\rho(X)$.
  4. **Subadditivity**: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

  Catatan: Subadditivity $\Rightarrow$ ada insentif diversifikasi; sangat penting dalam manajemen risiko.

Aksioma Koherensi Ukuran Risiko

(T) Untuk setiap X dan konstanta tak negatif a,

$$\rho(X + a) = \rho(X) + a$$

(S) Untuk setiap X dan Y,

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

(PH) Untuk setiap X dan konstanta tak negatif a,

$$\rho(aX) = a\,\rho(X)$$

(M) Untuk setiap X dan Y sehingga $X \leq Y$,

$$\rho(X) \leq \rho(Y)$$

Standard Deviation Premium Principle (ringkas)

Bentuk umum (premi murni + loading proporsional simpangan baku)

$$\pi(X) = \mathbb{E}[X] + k\,\sqrt{\mathrm{Var}(X)}, \quad k > 0.$$

Kelebihan: sederhana, intuitif, historis penting dalam premium principle.
Keterbatasan:

- Tidak fokus pada ekor; kurang tepat untuk heavy tail.
- *Tidak memenuhi Monotonicity* pada konstruksi tertentu $\Rightarrow$ **tidak koheren**.

Value-at-Risk (VaR) (rekap)

Definisi (kontinu)

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha),$$

yakni kuantil ke-α dari loss X (probabilitas α loss $\leq \mathrm{VaR}_\alpha$).

Pro: satu angka yang mudah dikomunikasikan (regulasi, limit).

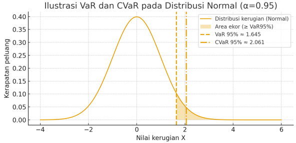
Kontra:

- Abaikan *seberapa besar* kerugian setelah melewati VaR.
- **Tidak subadditive** (counterexample i.i.d. Bernoulli losses) $\Rightarrow$ **tidak koheren**.

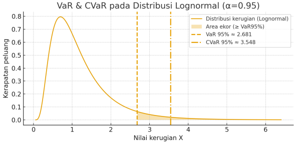
Ilustrasi:

- Prob. kerugian $> \mathrm{VaR}_\alpha = 1 - \alpha$.
- Cocok sebagai *threshold*, bukan ukuran ekor rata-rata.

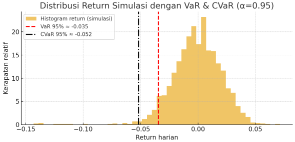
Ilustrasi VaR & CVaR pada Berbagai Distribusi/Return



Normal ($\alpha = 0.95$): VaR dan CVaR pada ekor kanan



Lognormal (ekor lebih berat): jarak CVaR dari VaR lebih besar



Histogram return simulasi: VaR & CVaR pada ekor kiri

Conditional Tail Expectation (CTE)

CTE memperhatikan informasi pada distribusi ekor di luar VaR.

CTE pada level peluang δ, notasi $CTE_\delta(X)$, didefinisikan sebagai

$$CTE_\delta(X) = E[X \mid X > x_\delta],$$

dengan x_δ adalah kuantil ke-δ dari X.

CTE dan Hubungannya dengan VaR

$$CTE_\delta(X) = E[X \mid X > VaR_\delta(X)], \quad X \text{ kontinu.}$$

Ekspektasi di atas yang berpusat pada nilai $VaR_\delta(X)$:

$$E[X - VaR_\delta(X) \mid X > VaR_\delta(X)],$$

disebut **Conditional VaR** dan dinotasikan $CVaR_\delta(X)$.

$$CVaR_\delta(X) = E[X - VaR_\delta(X) \mid X > VaR_\delta(X)] = CTE_\delta(X) - VaR_\delta(X).$$

Ketika X kontinu, $VaR_\delta = x_\delta$ dan *mean shortfall*-nya adalah

$$E[(X - x_\delta)_+] = E[X - x_\delta \mid X > x_\delta]\, P(X > x_\delta).$$

Sehingga,

$$E[(X - x_\delta)_+] = (1 - \delta)\, CVaR_\delta,$$

atau

$$\frac{1}{1-\delta} E[(X - x_\delta)_+] = CVaR_\delta = CTE_\delta(X) - x_\delta.$$

Evaluasi CTE dalam Bentuk Integral

Untuk X kontinu dengan pdf $f_X(x)$ dan cdf $F_X(x)$:

$$CTE_\delta = E[X \mid X > x_\delta] = \frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} x\,dF_X(x).$$

Atau dengan transformasi $u = F_X(x)$:

$$CTE_\delta = \frac{1}{1-\delta}\int_{\delta}^{1} VaR_u(X)\,du.$$

Ringkasan: CTE, CVaR, TVaR

- $CTE_\delta(X) = E[X \mid X > VaR_\delta(X)]$
- $CVaR_\delta(X) = CTE_\delta(X) - VaR_\delta(X)$
- $TVaR_\delta(X) = \dfrac{1}{1-\delta} \int_\delta^1 VaR_u(X)\, du$

Interpretasi: CTE $\equiv$ rata-rata kuantil yang melampaui x_δ (tail average), sehingga sering juga disebut **Tail VaR**.

Entropic Value-at-Risk (EVaR)

Definisi EVaR

EVaR dengan *confidence level* $1 - \alpha$ (atau pada *risk level* α), didefinisikan sebagai

$$\mathrm{EVaR}_{1-\alpha}(X) := \inf_{\theta>0} \frac{1}{\theta}\Big(\ln M_X(\theta) - \ln \alpha \Big), \quad \alpha \in (0,1],$$

dengan $M_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}]$ adalah moment generating function (mgf).

Sifat utama:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) \;\leq\; \mathrm{CVaR}_\alpha(X) \;\leq\; \mathrm{EVaR}_\alpha(X),$$

sehingga EVaR lebih konservatif dibanding VaR dan CVaR.

EVaR (Entropic VaR)

Intuisi: menggunakan momen eksponensial untuk mengontrol ekor (dorong kebijakan konservatif).
Relasi hierarki: $\mathrm{VaR}_\alpha \le \mathrm{CVaR}_\alpha \le \mathrm{EVaR}_\alpha$.
Catatan praktis: butuh estimasi MGF/CGF; robust untuk tail tebal, tapi bisa lebih konservatif.
Contoh untuk kerugian berdistribusi normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X) = \mu + z_\alpha \sigma,$$

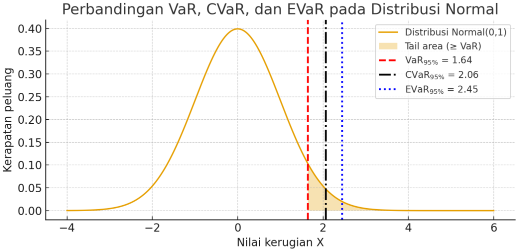
$$\mathrm{CVaR}_{1-\alpha}(X) = \mu + \frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha}\,\sigma,$$

$$\mathrm{EVaR}_{1-\alpha}(X) = \mu + \sqrt{-2\ln\alpha}\,\sigma.$$

Perbandingan ringkas

- **Variance**: sensitif ke deviasi dari mean (dua sisi), tidak fokus ekor.
- **VaR**: batas kuantil; mudah dikomunikasikan, **tidak koheren**.
- **CTE/TVaR = CVaR**: rata-rata ekor di atas VaR; **koheren**.
- **EVaR**: konservatif, berbasis momen eksponensial; **koheren**, upper bound.

$$\boxed{\mathrm{VaR}_\alpha \le \mathrm{CVaR}_\alpha = \mathrm{CTE}_\alpha \le \mathrm{EVaR}_\alpha}$$



Koherensi: ringkasan hasil penting

Memenuhi koheren

- CTE/CVaR, EVaR

Tidak koheren

- **VaR**: gagal Subadditivity (counterexample risiko Bernoulli i.i.d.).
- **Std. Dev. premium principle**: gagal Monotonicity pada konstruksi tertentu.

Implikasi praktis

- Diversifikasi: gunakan ukuran yang subadditive.
- Manajemen ekor: gunakan ukuran yang menangkap *tail risk* (CVaR/EVaR).
- Variance tetap berguna untuk *dispersion*, tapi bukan pengganti tail risk.

Lab/Practice (sesuai silabus)

Tujuan: Menghitung CVaR & EVaR pada data return sintetis dan membandingkan dengan Variance.

Langkah:

1. Simulasikan return i.i.d. (mis. Normal(μ, σ)) dan heavy-tail (mis. t-ν kecil atau lognormal).
2. Tentukan $\alpha \in \{0.90, 0.95, 0.99\}$.
3. Hitung: Variance, VaR_α, CVaR_α, EVaR_α.
4. Bandingkan numerik & buat plot distribusi dengan garis vertikal pada mean, VaR, CVaR, EVaR.

Notebook Phyton : ACS_Week04.ipynb

Arahan Diskusi Hasil (Ringkas)

- **Urutan konsisten:** $\mathrm{VaR}_\alpha \leq \mathrm{CVaR}_\alpha \leq \mathrm{EVaR}_\alpha$.
- **Ekor berat** $\Rightarrow$ *gap* membesar (Lognormal, t(3), Pareto, Loglogistic $>$ Weibull $>$ Normal).
- Dampak α: makin besar α (90% $\rightarrow$ 95% $\rightarrow$ 99%), ketiga ukuran naik; **EVaR** naik paling cepat.
- **Variance** mengukur dispersi rata-rata; **CVaR/EVaR** menangkap *tail loss* (lebih relevan untuk ekstrem, modal/premi).
- **Returns (ekor kiri):** analisis sebagai loss $L = -R$; outlier negatif mendorong VaR/CVaR/EVaR.
- Catatan numerik: EVaR memakai MGF; untuk ekor *sangat* berat (mis. Pareto) EVaR bisa efektif tak hingga.

Tugas Lanjutan: Pareto, Loglogistic, Weibull

Tujuan: Uji kepekaan ukuran risiko terhadap bentuk ekor.

Instruksi singkat:

1. **Simulasi loss** (kanan):
   - Pareto (α, x_m), contoh: $\alpha \in \{1.5, 2.5\}$, $x_m = 1$.
   - Loglogistic (α, β), contoh: $\alpha \in \{1.8, 2.2\}$, $\beta = 1$.
   - Weibull (k, λ), contoh: $k \in \{0.8, 1.5\}$, $\lambda = 1$.
2. Hitung untuk $\alpha \in \{0.90, 0.925, 0.95, 0.975, 0.99\}$:
   Mean, Var, VaR, CVaR, EVaR ($\Rightarrow$ tabel .csv).
3. **Visual:**
   - Histogram + garis *Mean*/VaR/CVaR/EVaR (1 gambar per level α).
   - *Risk curves* (1 gambar): VaR/CVaR/EVaR vs α untuk tiap distribusi.
4. **Diskusi:**
   - Bandingkan *gap* VaR-CVaR-EVaR dan keterkaitan dengan ekor.
   - Pareto: jelaskan mengapa EVaR dapat sangat besar (MGF tidak ada untuk $\theta > 0$).
   - Sensitivitas parameter (mis. Pareto $\alpha = 1.5$ vs 2.5; Weibull $k < 1$ vs > 1).