# Derivadas

Asier López Gordón
Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), CSIC

7 de septiembre de 2022

## 1. Motivación

Supongamos que queremos estudiar como una cierta función $f(x)$ cambia al cambiar el parámetro $x$. Por ejemplo, si un ascensor se encuentra a una altura $x(t)$ en el tiempo $t$, nos gustaría saber cómo de rápido se mueve. Para ello calculamos su velocidad entre el tiempo $t$ y el tiempo $t+h$, esto es, la distancia que ha recorrido entre esos dos puntos dividida por el lapso de tiempo trascurrido:

$$v \simeq \frac{x(t+h)-x(t)}{h}.$$

Esta es una velocidad promedio, para conocer la velocidad en un tiempo concreto deberíamos tomar $h$ arbitrariamente pequeño, es decir, tomar el límite:

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}.$$

En general, la derivada de una función $f(x)$ en el punto $x$ se define como

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Las notaciones $f'(x)$ y $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ se conocen como notación de Newton y de Leibniz, respectivamente.

## 2. Propiedades

Sean $f, g$ dos funciones cualesquiera. La derivada tiene las propiedades siguientes:

- Linealidad
$$\left(af+bg\right)'(x) = af'(x) + bg'(x),$$
para cualesquiera números $a, b \in \mathbb{R}$.

- Regla de Leibniz (o regla del producto)
$$\left(f\cdot g\right)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

- Regla de la cadena
$$\left(f\circ g\right)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

## 3. Funciones habituales

Las reglas de derivación más importantes que memorizar son las que siguen:

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | $0$ |
| $x^r$ | $nx^{r-1}$ |
| $e^{ax}$ | $ae^{ax}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |

con $a, r \in \mathbb{R}$.

Combinándolas con las propiedades mencionadas más arriba, uno puede obtener fácilmente otras derivadas habituales. Otras tablas de derivadas incluyen además las reglas

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2},$$

y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

En realidad, no hace falta sabérselas. La primera no es más que la regla de la cadena aplicada a la función $g \circ f(x)$, con $g(x) = \frac{1}{x}$, mientras que la segunda es la regla del producto aplicada a $f \cdot h$, con $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

Otra propiedad que conviene saberse es:

$$\boxed{y^x = e^{x \ln y}}.$$

A partir de la misma podemos obtener

$$\frac{\mathrm{d}(y^x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(e^{x \ln y})}{\mathrm{d}x} = \ln y \; e^{x \ln y} + x \; e^{x \ln y} \frac{\mathrm{d} \ln y}{\mathrm{d}x} = \ln y \; y^x + x \; y^x \frac{1}{y'}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) &= \ln a \; a^x, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x) &= \ln x x^x + x^{x+1}. \end{aligned}$$