Repaso de Geometría Diferencial

Asier López Gordón
asier.lopez@icmat.es
www.alopezgordon.xyz

Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT-CSIC), Madrid

Joint work with Jesús Aguado

May 25, 2022

CSIC
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

ICMAT
Instituto de Ciencias Matemáticas

Hoja 1. Ejercicio 9

Sean M una variedad y $f, g : M \to \mathbb{R}$ dos funciones suaves tales que $f^6 + g^{10} \equiv 1$. Explica por qué es $(f^3, g^5) : M \to \mathbb{S}^1$ una aplicación suave entre variedades.

Recordemos que una aplicación entre variedades $F : M \to N$ se dice **diferenciable** si para cada $x \in M$ existe una carta (U, φ) alrededor de x y una carta (V, ψ) alrededor de $F(x)$ tales que $F(U) \subseteq V$ y $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable (en el sentido de cálculo en $\mathbb{R}^n$).

- Recordemos que $\mathbb{S}^1 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
- Sean $F, G : M \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por $F(p) = (f(p))^3$ y $G(p) = (g(p))^5$ para cada $p \in M$.

- Sea
$$\begin{aligned} H : M &\to \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto (F(p), G(p)). \end{aligned}$$
Claramente, $\mathrm{Im} H \subseteq \mathbb{S}^1$.
- Por lo tanto, $\tilde{H} : M \to \mathbb{S}^1$, con $H = i \circ \tilde{H}$ es la aplicación que estamos considerando. Nos basta entonces probar que $\tilde{H}$ es suave.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, "\tilde{H}"] & \\ \mathbb{R}^2 & \mathbb{S}^1 \arrow[l, hook', "i"] \end{tikzcd}$$

- Consideremos la carta $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \varphi_{\mathbb{R}^2})$ de $\mathbb{R}^2$ con $\varphi_{\mathbb{R}^2}(x, y) = (\rho, \theta)$ las coordenadas polares usuales.

- Consideremos la carta adaptada $(\mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}, \varphi_N)$ de $\mathbb{S}^1$ dada por

$$\begin{aligned} \varphi_N^{-1} : (0, 2\pi) &\to \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\} \\ \theta &\mapsto (\cos\theta, \sin\theta), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} T \coloneqq \varphi_{\mathbb{R}^2} \circ i \circ \varphi_N^{-1} : (0, 2\pi) &\to \{1\} \times (0, 2\pi) \\ \theta &\mapsto (1, \theta). \end{aligned}$$

- Claramente T es biyectiva. Además, T y T^{-1} son diferenciables, luego T es un difeomorfismo.
- Consideremos una carta cualquiera (U, ψ) de M.
- Queremos probar que $\tilde{H}$ es diferenciable, i.e., que $\varphi_N \circ \tilde{H} \circ \psi^{-1}$ lo es.
- Sabemos que H es diferenciable, esto es, $\varphi_{\mathbb{R}^2} \circ H \circ \psi^{-1}$ es diferenciable.

- Ahora,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{R}^2} \circ H \circ \psi^{-1} &= \varphi_{\mathbb{R}^2} \circ i \circ \tilde{H} \circ \psi^{-1} \\ &= (\varphi_{\mathbb{R}^2} \circ i \circ \varphi_N^{-1}) \circ (\varphi_N \circ \tilde{H} \circ \psi^{-1}) \\ &= T \circ (\varphi_N \circ \tilde{H} \circ \psi^{-1}),\end{aligned}$$

así que, al ser T difeo.,

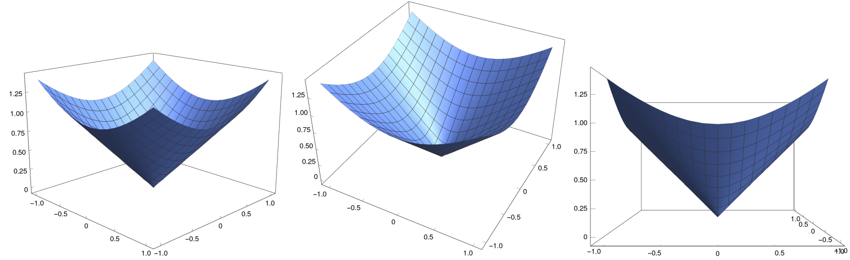
$$T^{-1} \circ (\varphi_{\mathbb{R}^2} \circ H \circ \psi^{-1}) = (\varphi_N \circ \tilde{H} \circ \psi^{-1})$$

es diferenciable.

- Con esto probamos que $\tilde{H}$ es diferenciable en $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$.
- Análogamente, si tomamos la carta $(\mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}, \varphi_S)$ podemos probar que $\tilde{H}$ es diferenciable en $\mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}$.
- Como estas cartas suaves cubren $\mathbb{S}^1$, $\tilde{H}$ es diferenciable.

$\square$

Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$.



1 (2 pts.)

Demostrar que la aplicación $\varphi : M \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y, z) = (x, y)$ dota a M de una estructura de variedad diferenciable. ¿Es variedad orientable? ¿Y compacta?

Como vimos cuando os di la brasa con el fibrado tangente, para dotar a un conjunto M de estructura de n-variedad diferenciable podemos considerar una colección de subconjuntos $U_\alpha \subseteq M$ y de aplicaciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ que verifiquen una serie de condiciones (para garantizar que M sea Hausdorff y segundo numerable y dotarlo de una estructura diferenciable).

- En este caso, nuestra colección de subconjuntos y aplicaciones estará formada únicamente por el M y φ, de modo que únicamente hay que comprobar que φ sea una biyección entre M y un abierto $\varphi(M) \subseteq \mathbb{R}^2$.

- En efecto, $\varphi(M) = \mathbb{R}^2$ y podemos escribir la inversa explícitamente como $\varphi^{-1}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, de modo que φ es un homeomorfismo de M a $\mathbb{R}^2$.
- Al haber una única carta, no hay que comprobar que las funciones de transición sean suaves, basta declarar que (M, φ) es suave, dotando así a M de estructura diferenciable.
- Por este mismo motivo, M es orientable.

M es **orientable** si $\exists$ atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ en el que $|D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x))| > 0 \ \forall x \in \varphi_i(U_i \cap U_j) \ \forall i, j$.

- La compacidad es invariante bajo homeomorfismos, de modo que M no es compacta (al ser homeomorfa a $\mathbb{R}^2$).

2 (2pts.)

Consideremos el abierto de M definido por $M^* = M \setminus \{(0,0,0)\}$ con su estructura de variedad inducida y $\mathbb{R}^3$ con la estructura usual de variedad. Decidir si las aplicaciones inclusión $j : M^* \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ e $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ son inclusiones.

Una **inmersión** es una aplicación diferenciable $F : M \to N$ cuya diferencial es inyectiva en cada punto, i.e., $\operatorname{rank} \mathrm{d}F_p = \dim M \ \forall p \in M$.

- La inclusión i no es ni siquiera diferenciable, pues $i \circ \varphi^{-1}(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$ no es diferenciable en $p = (0,0,0)$ (con $\varphi(p) = (0,0)$).
- Sin embargo, si quitamos ese punto sí obtenemos una inclusión diferenciable: $j \circ \varphi^{-1}(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$, con $(x,y) \neq (0,0)$.

- El rango de la diferencial no es más que el rango de la jacobiana. En este caso,

$$D(j \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix},$$

que es de rango 2 en todo punto. Como $\operatorname{rank} \mathrm{d}F_p = \dim M^*$, es una inmersión.

- Más aun, j es una inmersión inyectiva, por lo que (por definición) M^* es una **subvariedad** de $\mathbb{R}^3$.

3 (3pts.)

Denotemos por (x, y) las coordenadas de la carta φ y por (x, y, z) las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^3$.

a) Encontrar la curva integral del campo $X = \frac{\partial}{\partial x}$ en M^* con origen en un punto $(x_0, y_0, z_0) \in M^*$.

b) Sea $(x_0, y_0, z_0) \in M^*$. Encontrar las curvas integrales con origen en (x_0, y_0, z_0) de los campos $Y = \frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathbb{R}^3$ y $Z = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{z}\frac{\partial}{\partial z}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Decir si tales curvas están contenidas en M.

a) - Sea $\gamma : \mathbb{R} \to M^*$ la curva integral buscada, dada por $\gamma = \varphi^{-1} \circ \alpha$, con $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.

- Las curvas integrales satisfacen $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, i.e.,

$$x'(t) = 1,$$
$$y'(t) = 0,$$

con la condición inicial $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$ o, en coordenadas, $\alpha(0) = (x_0, y_0)$.

- La solución del sistema de arriba es $\alpha(t) = (t + x_0, y_0)$, luego

$$\gamma(t) = (t + x_0, y_0, \sqrt{(t + x_0)^2 + y_0^2}).$$

- Equivalentemente, podemos decir que el flujo $\psi : \mathbb{R} \times M^* \to M^*$ de X viene dado por

$$\psi_t : \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right) \mapsto \left(t + x, y, \sqrt{(t + x)^2 + y^2}\right)$$

b)

- Sea $\beta_{(Y)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva integral de Y, con $\beta_{(Y)}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.[1]
- Ahora tenemos que resolver

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= 1, \\
y'(t) &= 0, \\
z'(t) &= 0,
\end{aligned}
$$

con la condición inicial $\beta_{(Y)}(0) = (x_0, y_0, z_0)$.
- La solución es

$$\beta_{(Y)}(t) = (x_0 + t, y_0, z_0) = \left(x_0 + t, y_0, \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right),$$

que no está contenida en M^* (pues $z(t)^2 \neq x(t)^2 + y(t)^2$).
- Sea $\beta_{(Z)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ la curva integral de Z, con $\beta_{(Z)}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

- Ahora tenemos que resolver

$$x'(t) = 1,$$
$$y'(t) = 0,$$
$$z'(t) = \frac{x(t)}{z(t)},$$

con la condición inicial $\beta_{(Z)}(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

- La solución es

$$\beta_{(Z)}(t) = \left(x_0 + t, y_0, \sqrt{(x_0 + t)^2 + y_0^2} \right),$$

que sí está contenida en M^* (pues $z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$).

- De hecho, $\beta_{(Z)} = \gamma$ del apartado a).

[1] Como ahora estamos en $\mathbb{R}^3$ la carta es la identidad y no hay que hacer distinción entre la curva y su expresión en coordenadas.

4 (2 pts.)

Encontrar –si existen– campos X_1 y X_2 en M^* tales que $j_*(X_1) = Y$ y $j_*(X_2) = Z$, donde $j_* = \mathrm{d}j$ representa la aplicación diferencial de la aplicación inclusión.

- Probemos que no existe X_1 por reducción al absurdo.
- Supongamos que existe $X_1 \in \mathfrak{X}(M^*)$ tal que $j_*(X_1) = Y$. Sea β la curva integral de X_1 en M^* con $\beta(0) = (x_0, y_0, z_0) \in M^*$. Entonces,

$$\beta'(t) = X_{1|\beta(t)}.$$

- Luego
$$Y_{|j\circ\beta(t)} = j_* X_{1|j\circ\beta(t)} = j_*(\beta'(t)) = (j \circ \beta)'(t),$$
de modo que $j \circ \beta$ es la curva integral de Y con origen en $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

- Pero, como vimos $\mathrm{Im}\beta_{(Y)} \not\subset M^*$ para cualquier punto inicial, luego $\nexists\ X_1$.
- Por otra parte, hemos visto que una curva integral $\beta_{(Z)}$ de Z, con origen en $(x_0, y_0, z_0) \in M^*$, sí está contenida en M^*; y coinciden con las del campo X: $\beta_{(Z)} = \gamma$.
- Como coinciden las curvas integrales, han de coincidir los campos en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, es decir, $i_*(X) = Z$.
- En efecto, la jacobiana de i en un punto de coordenadas (x, y) es

$$Di_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix},$$

luego

$$\mathrm{d}i(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{z}\frac{\partial}{\partial z}.$$

- Si no supiésemos de antemano que $i_*(X) = Z$, con X el del apartado a), bastaría coger un campo arbitrario $X = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(M^*)$ y resolver

$$Di(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = Z.$$

5 (1pto.)

Decidir si los flujos de los campos Y y Z en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ conmutan.

- Los flujos de los campos conmutan (i.e., el flujo de $X \circ Y$ y el de $Y \circ X$ coinciden) si y sólo si los campos conmutan.
- Basta entonces estudiar el conmutador de los campos, el corchete de Lie: $[Y, Z] := Y \circ Z - Z \circ Y$.
- Le damos de merendar a nuestros campos una función $f \circ C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ arbitraria. Tenemos:

$$Y \circ Z(f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{z}\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{x}{z}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z},$$

$$Z \circ Y(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{x}{z}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x},$$

luego $[Y, Z] = \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z} \neq 0$.