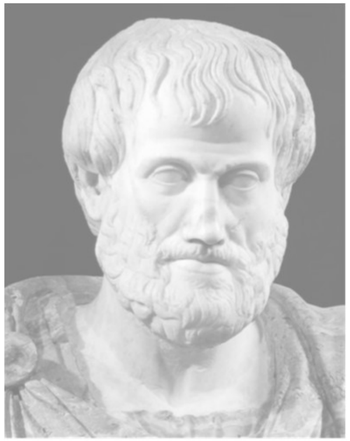
DINAMICA

ovvero

la relazione fra il moto

e le sue cause

Un po' di storia …



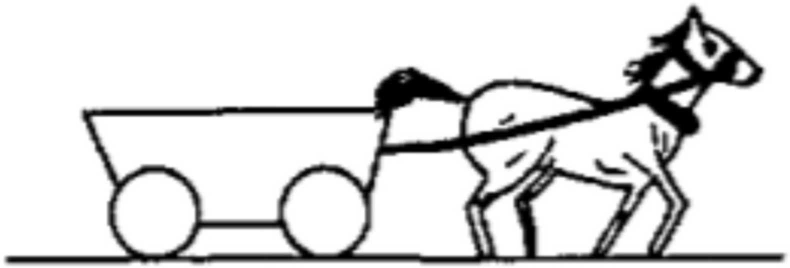
Aristotele
(384-322 a. C.)

Per Aristotele, esistevano due categorie di moto:

- Naturale (celeste, terrestre)
- Violento

Inoltre:

- Il corpo raggiunge la quiete (v=0) quando la forza F viene rimossa

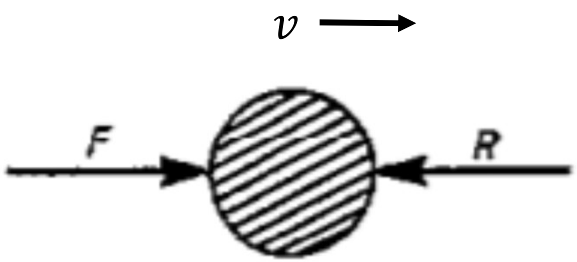


- Il moto avviene sempre all'interno di un fluido (l'aria, un liquido, o l'etere per i moti celesti) che offre resistenza R

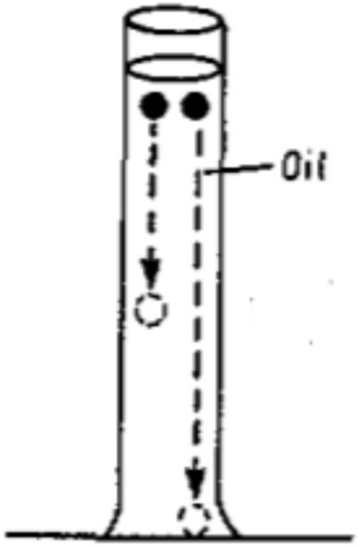
Forza e velocità

In linguaggio moderno, potremmo dire che, per Aristotele:

$$v \propto F/R$$



Oggi sappiamo che questo in generale è sbagliato, ma ci sono casi in cui è corretto:



Caduta di sfere di ugual raggio ma diversa massa in un fluido; R è data dalla viscosità del fluido

Problemi e paradossi

Il moto di un proiettile rappresentava un problema: qual è la forza che mantiene la velocità? Si pensava che il mezzo non solo offrisse la resistenza, ma anche (in qualche modo) la spinta!

Il moto nel vuoto era ritenuto impossibile, sia perché non c’era modo di sostenere la velocità, sia poiché in assenza di resistenza la velocità sarebbe stata infinita

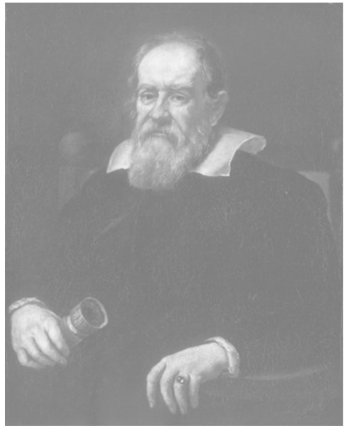
Sviluppi nel medioevo

Giovanni Filòpono (490-570 d.C.) propose che $v \propto F - R$; il moto è quindi possibile nel vuoto. Suggerì che il proiettile possedesse un «impeto», il quale cala progressivamente fino ad annullarsi.

Jean Buridan (1300 – 1358) sviluppò ulteriormente l'idea dell'impeto, ipotizzando che permanesse in assenza di forze resistenti. Definì l'impeto come qualcosa di proporzionale alla massa e alla velocità.

Galileo e la caduta libera

Corpi di massa diversa cadono allo stesso modo se si elimina la resistenza dell'aria.



Galileo Galilei
(1564-1642)

La più grande camera da vuoto del mondo:
https://www.youtube.com/watch?v=QyeF-_QPSbk

Caduta libera sulla luna: https://www.youtube.com/watch?v=KDp1tiUsZw8

IL PRINCIPIO D'INERZIA

(a.k.a. 1° principio della dinamica)

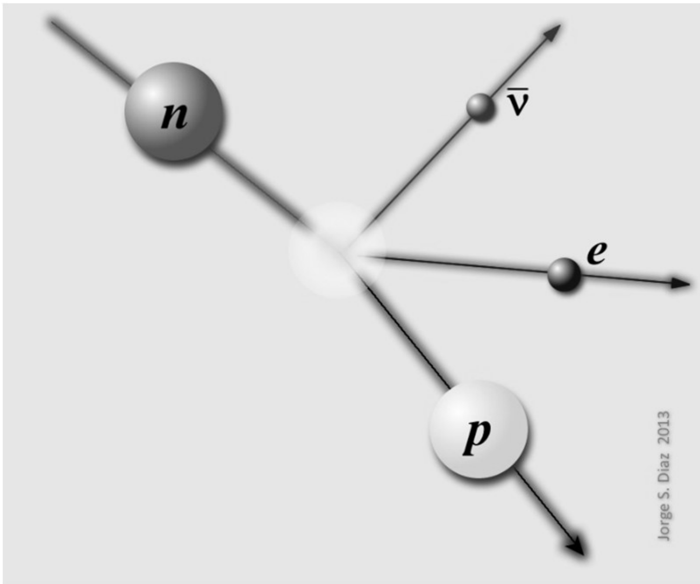
Enunciato «classico»: un corpo mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se non viene perturbato

In linguaggio moderno, più precisamente, se la somma (vettoriale) delle forze esterne agenti su di esso è nulla

COSA NON VA IN QUESTO ENUNCIATO?

Semplicemente, ci sono casi in cui è FALSO….

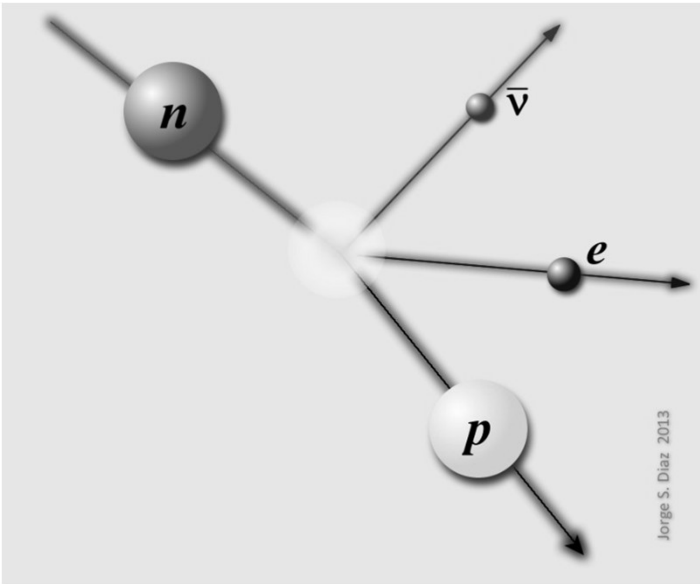
Esempio: decadimento del neutrone libero



LA QUANTITA' DI MOTO

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La quantità di moto totale prima e dopo il decadimento è la stessa!



IL PRINCIPIO D’INERZIA

(rivisitato)

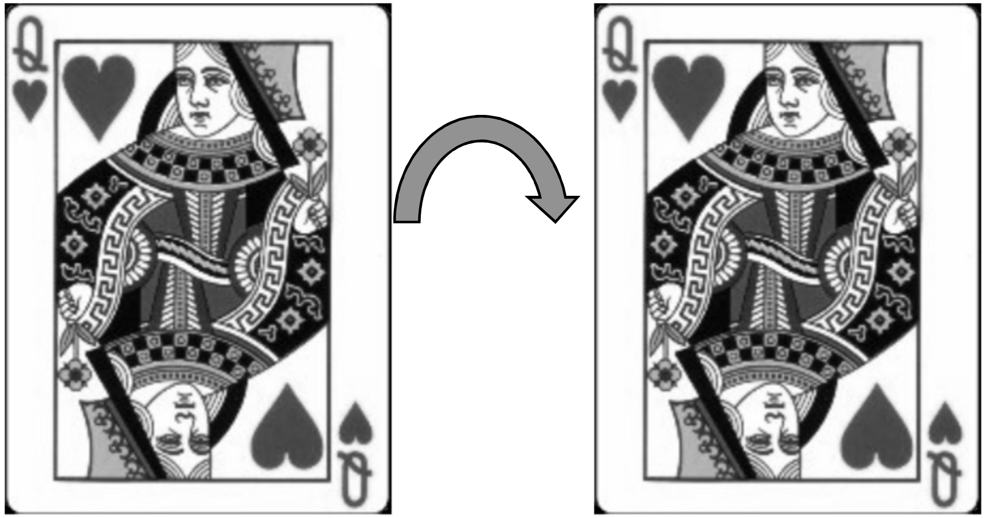
la quantità di moto di un sistema isolato si conserva (ovvero, rimane costante nel tempo)

$$\Downarrow$$

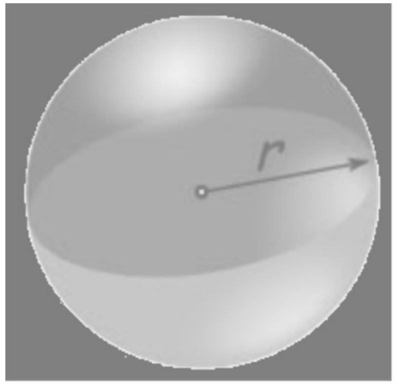
la quantità di moto dell’universo si conserva!

Grandezze conservate e Simmetrie della Natura

Concetto e definizione di simmetria



Invariante per rotazioni di 180 °



- Quali operazioni di simmetria hanno?
- Chi è più simmetrico?

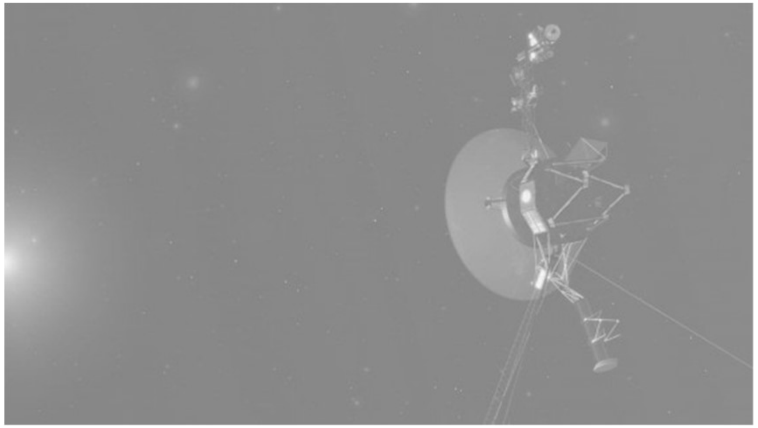
Grandezze conservate e Simmetrie della Natura

- 1882: nasce a Erlangen da famiglia ebraica (padre docente di matematica)
- 1907: laurea in matematica a Erlangen
- 1915: chiamata da Hilbert e Klein a Goettingen
- La sua assunzione come docente era ostacolata dai colleghi maschi; Hilbert, che la sosteneva, protestò: «non vedo come il sesso del candidato possa essere un argomento contro la sua ammissione come privatdozent. Dopo tutto questa è un’università, non un bagno pubblico!»
- 1918: pubblica il lavoro oggi noto come «Teorema di Noether», ritenuto da alcuni «la spina dorsale della fisica moderna»
- 1919: ottiene la qualifica di docente, e può lavorare (gratis)
- 1923: primo stipendio (ovviamente inferiore a quello dei colleghi)
- 1933: leggi razziali in Germania. Emmy si trasferisce negli Stati Uniti, in Pennsylvania, dove insegna al Bryn Mawr College.

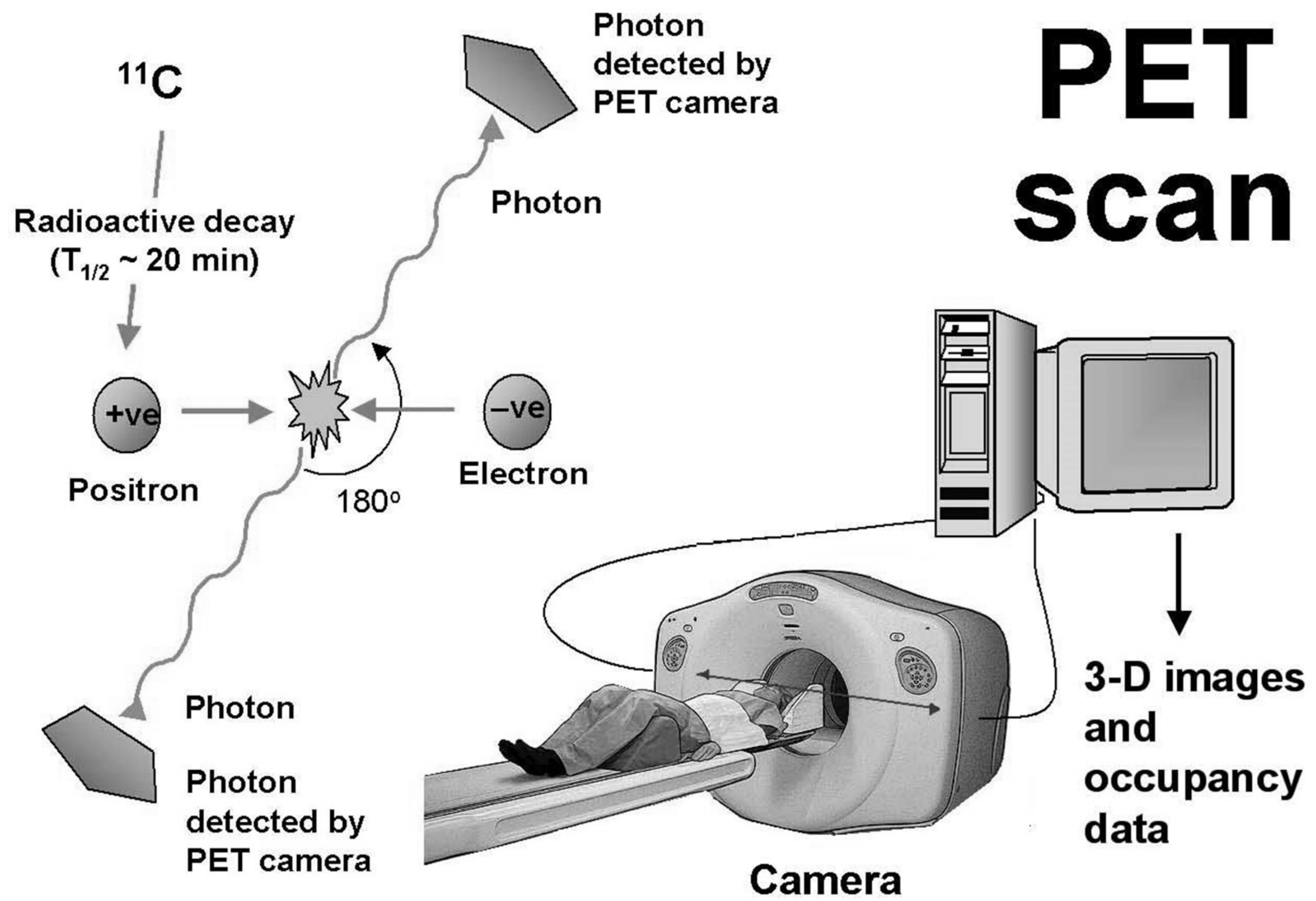
Emmy Noether
(1882-1935)

Quale Simmetria è associata alla conservazione di $\vec{p}$?

Risposta: la **simmetria traslazionale** dello spazio



Un'applicazione moderna: la Positron Emission Tomography



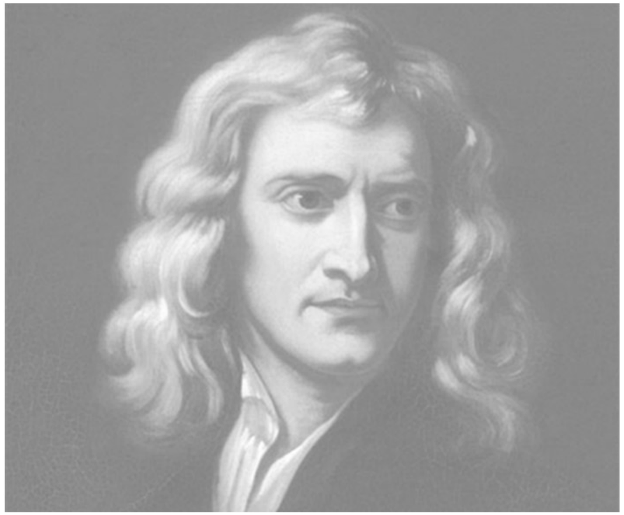
IL 2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$$\vec{F} = \boxed{m}\,\boxed{\vec{a}}$$

quantità cinematica

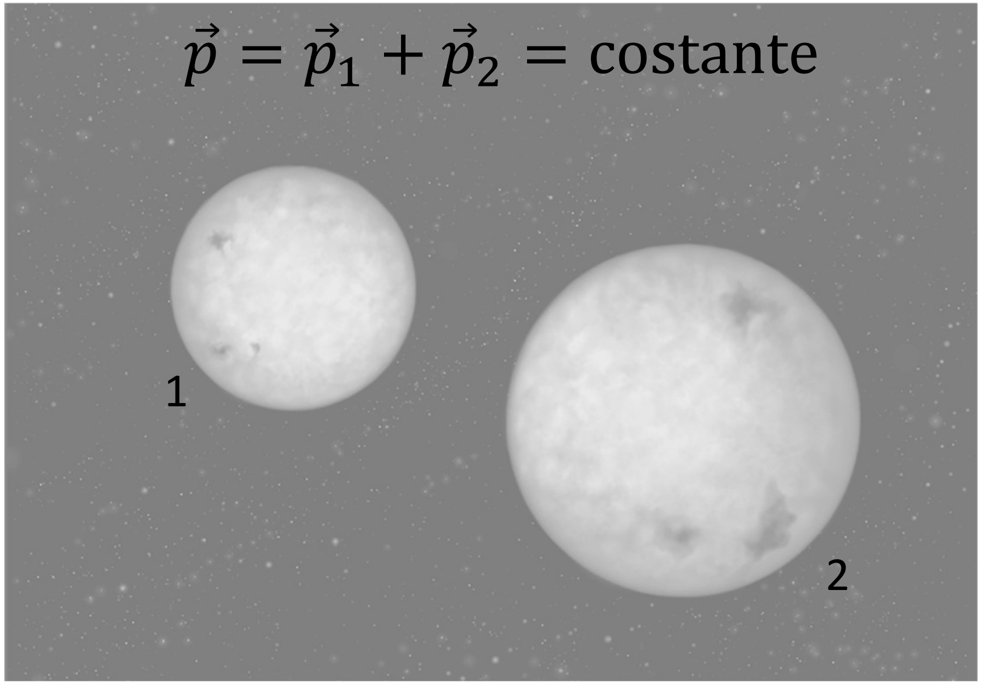
causa del moto

proprietà intrinseca



$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

AZIONE E REAZIONE ?



Artist's view: sistema binario di nane rosse
(https://www.universetoday.com/96160/impossible-binary-star-systems-found/)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

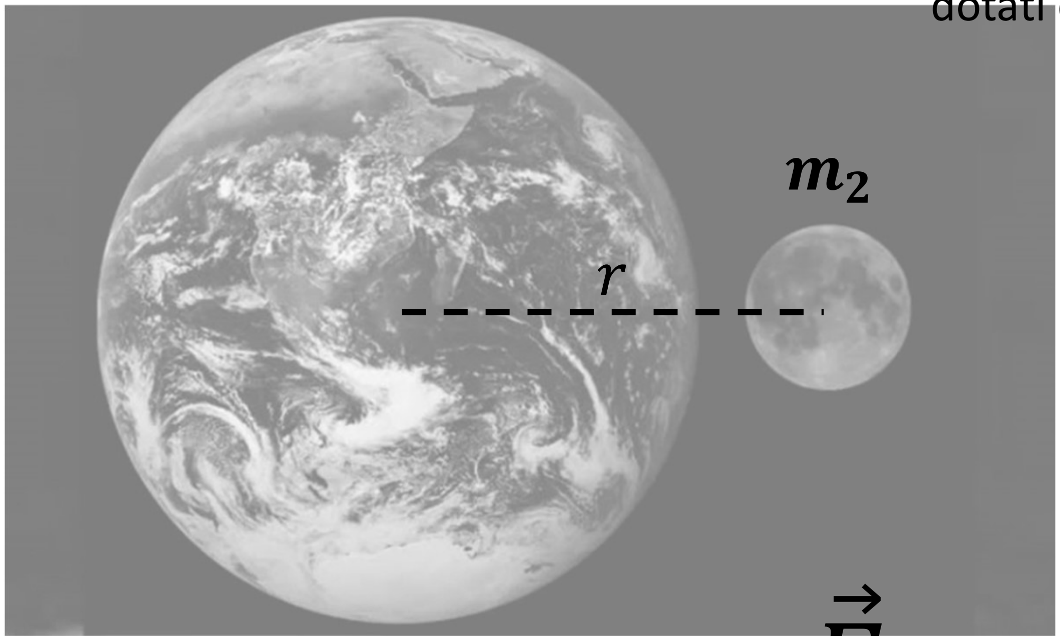
$$\Longrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

LE FORZE, O «INTERAZIONI» FONDAMENTALI, OGGI

INTERAZIONE GRAVITAZIONALE

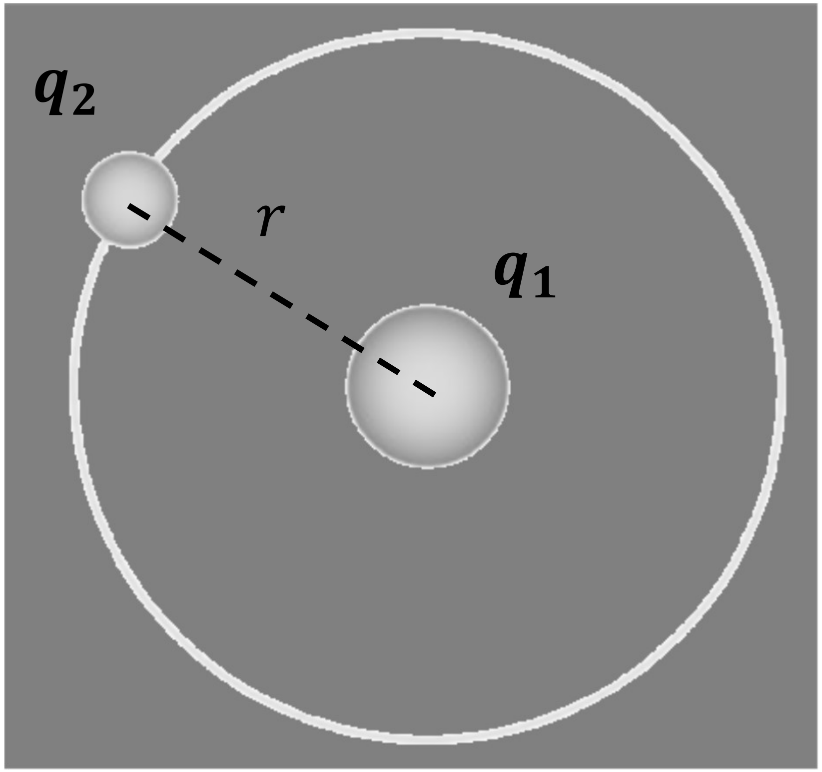
Sempre attrattiva, si esercita fra oggetti dotati di massa (o energia, come i fotoni)

m_1



$$\vec{F} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{r}$$

INTERAZIONE ELETTRODEBOLE



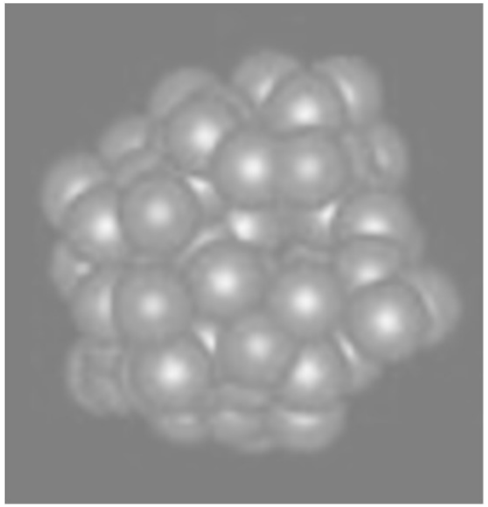
L'interazione elettrica, repulsiva o attrattiva, si esercita fra oggetti dotati di carica elettrica, quali protoni ed elettroni negli atomi e nella materia

Fra particelle sub-atomiche è circa 10^{40} volte più intensa della forza di gravità

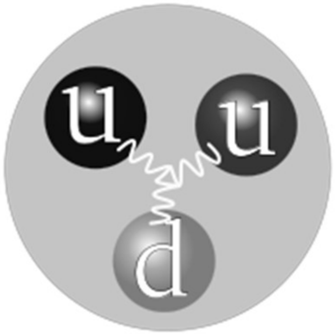
$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

L'interazione detta «debole» è responsabile di vari decadimenti radioattivi, quali il beta.

INTERAZIONE NUCLEARE FORTE



Nucleo atomico



Protone (schema)

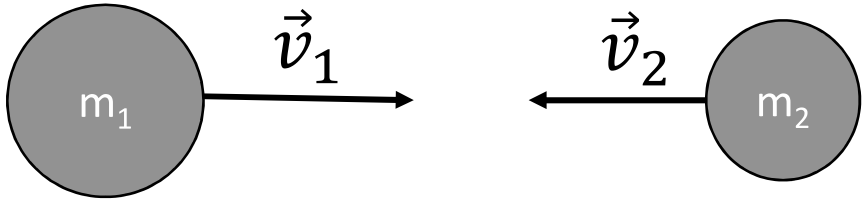
- Responsabile della coesione di neutroni e protoni all'interno dei nuclei atomici
- Lega fra loro i quark a formare protoni e neutroni
- E' l'interazione rilevante nello studio dei processi di fissione e fusione nucleare, nonché della nucleosintesi stellare

DINAMICA

Esempi e applicazioni

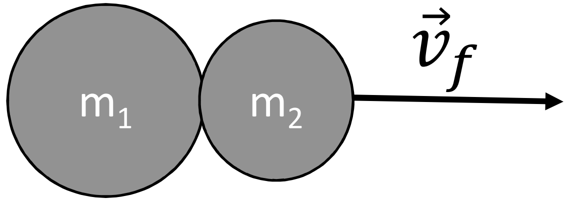
dei principi fondamentali

Urti – conservazione q. di moto



$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Se rimangono attaccate (urto anelastico)

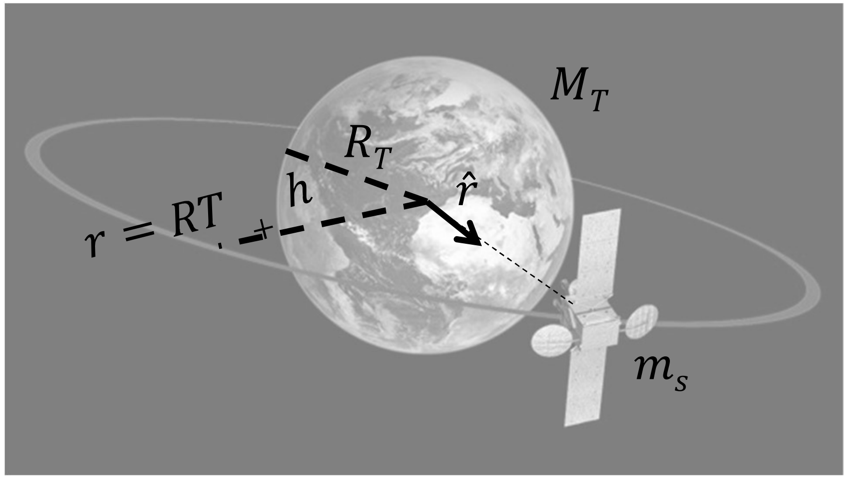


$$(m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

Imponendo l'uguaglianza della quantità di moto prima e dopo l'urto, si ottiene:

$$v_f = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Gravità su scala «planetaria»



Quale è la forza su m_s?

$$\vec{F} = -G\frac{M_T m_s}{r^2}\hat{r}$$

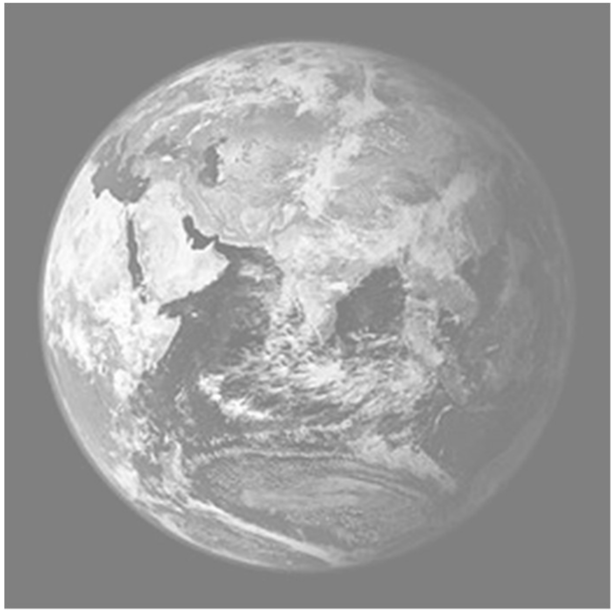
Quale è l'accelerazione?

$$\vec{a} = -\omega^2 r\hat{r}$$

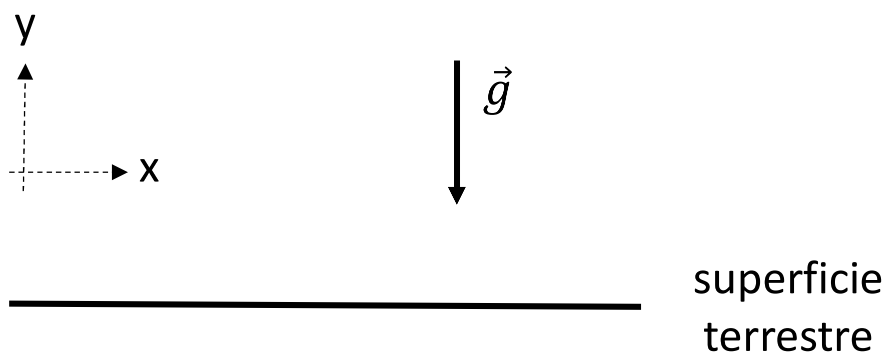
Imponendo $\vec{F} = m_s\vec{a}$, si ottiene: $r^3 = \frac{GM_T}{4\pi^2}T^2$

Usando $M_T = 5.972 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, si può trovare r se è noto T e viceversa.
Come esempio, per un satellite geostazionario (T=23h 56 minuti e 4.09 s=86164.09 s, pari alla durata del giorno siderale), il raggio dell'orbita risulta essere $r_{geos} = 42168$ km. Il raggio medio della terra è $R_T = 6371$ km, da cui $h = 35797$ km.

Gravità vicino alla superficie



$$\vec{F} \approx -G\frac{M_T m}{R_T^2}\hat{r} \equiv m\vec{g}$$

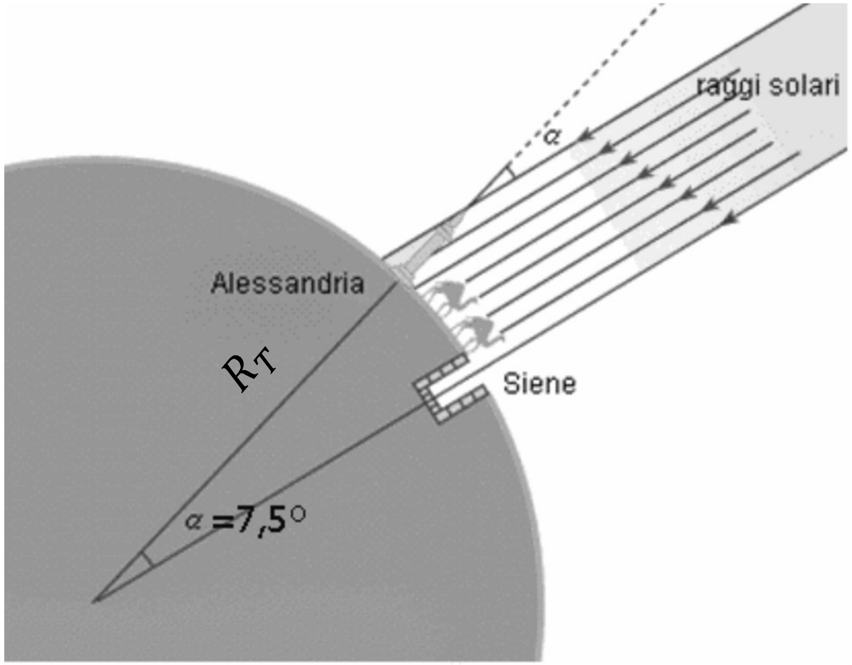


Ove $\vec{g}$ è un vettore diretto verso il basso perpendicolarmente alla superficie terrestre, il cui modulo fornisce l'accelerazione locale di gravità. Chiamiamo $\vec{g}$ "campo gravitazionale": la forza gravitazionale (forza peso) agente su una qualunque massa m è data dal prodotto $m\vec{g}$.

Nel sistema di coordinate mostrato in figura, il moto è di tipo balistico con accelerazione diretta verso le y negative e pari a g in modulo. Usando i versori:

$$\vec{g} = \vec{a} = -g\hat{y}$$

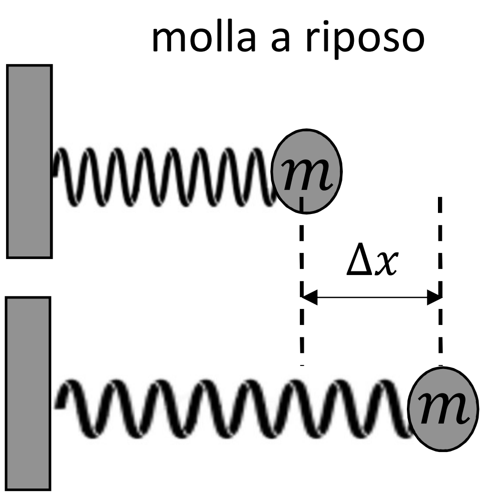
Misura «storica» del raggio terrestre



Eratostene di Cirene (276-194 a.C.) fornì una buona stima del raggio terrestre usando il ragionamento geometrico illustrato sopra. Quando il sole è allo zenit a Siene (attuale Assuan), ad Alessandria d'Egitto forma un angolo $\alpha = 7.5°$. La distanza fra i due luoghi era nota essere 5000 stadi (circa 800 km).

Riuscite a stimare R_T?

Forza elastica - molla



$$F = -k \cdot \Delta x$$

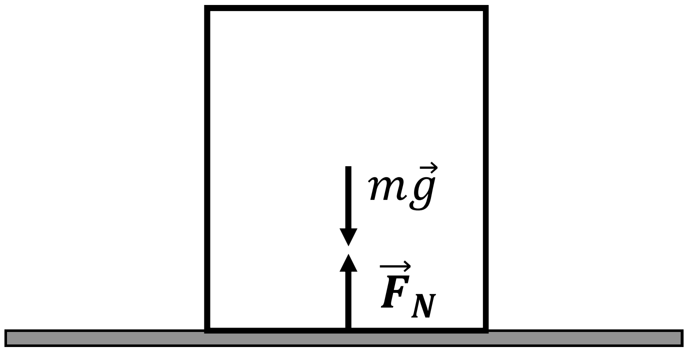
Ha origine nelle forze elettriche fra gli atomi costituenti del materiale. E’ sempre una forza «di richiamo», che si oppone alla variazione di lunghezza. Per una data molla, k è una costante che ne quantifica la rigidità.

Spesso si pone $x = 0$ nel punto di riposo, cosicché:
$\Delta x = x$
L’equazione della dinamica diventa quindi:
$-kx = ma$ ovvero l’accelerazione è proporzionale allo spostamento ma di segno opposto. Cosa vi ricorda?

Moto armonico con $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Quanto vale la forza che la massa esercita sulla molla?

Corpo su un piano orizzontale

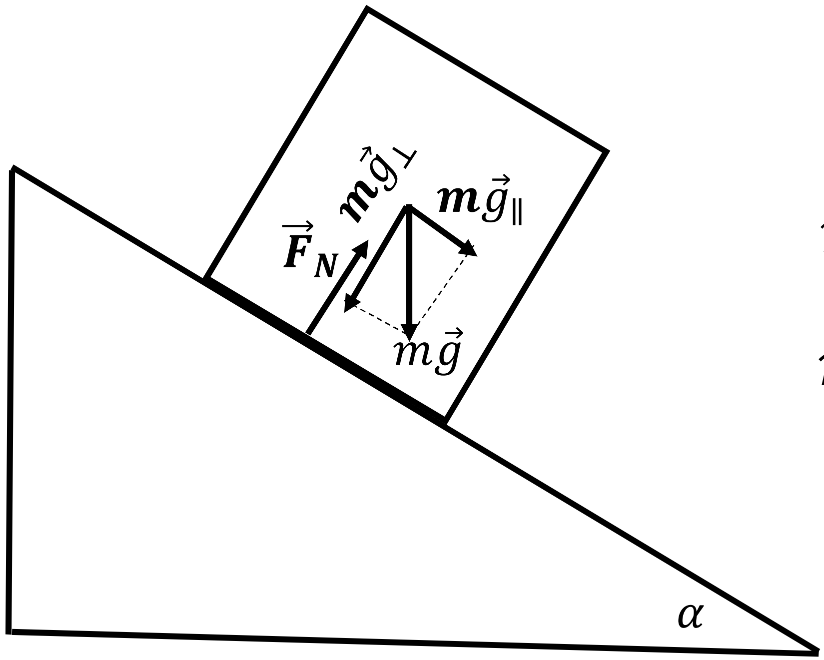


$$m\vec{g} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{N}} = \mathbf{0}$$
$$\vec{a} = \mathbf{0}$$

Il corpo è in equilibrio, quindi la somma delle forze agenti su di esso è nulla. In modo simile ad una molla che si oppone alla compressione, il piano esercita sul corpo una forza perpendicolare al piano stesso, detta **forza normale** $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{N}}$, uguale ed opposta alla forza gravitazionale $m\vec{g}$. Anche se in molti casi non si vede a occhio nudo, il piano si deforma leggermente (pensate a una molla con k molto grande) sotto l'azione della forza che il corpo esercita su di esso.

Quale sarebbe il valore di $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{N}}$ in assenza di gravità?

Corpo su un piano inclinato



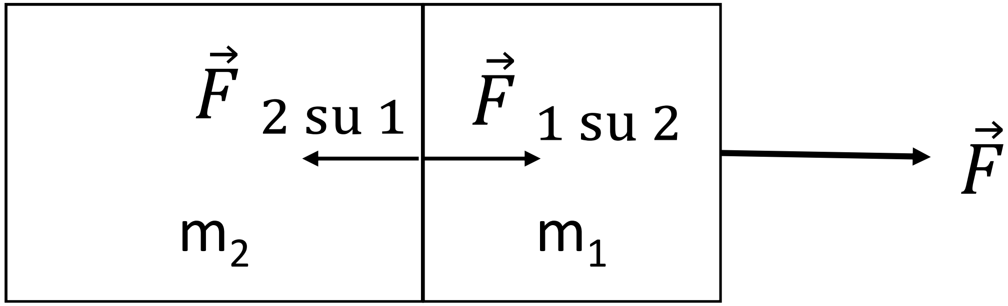
$$m\vec{g} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{m}\vec{g}_\parallel =$$

$$\boldsymbol{m}\vec{g}_\perp + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{0}$$

La forza normale equilibra la componente della forza peso perpendicolare al piano, il cui modulo è $mg\cos(\alpha)$. Rimane solo la componente parallela al piano, il cui modulo è $mg\mathrm{sen}(\alpha)$.
Nella direzione parallela al piano si ha quindi un moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione minore di quella di gravità, ovvero:

$$a = g\mathrm{sen}(\alpha)$$

Forze esterne e forze interne



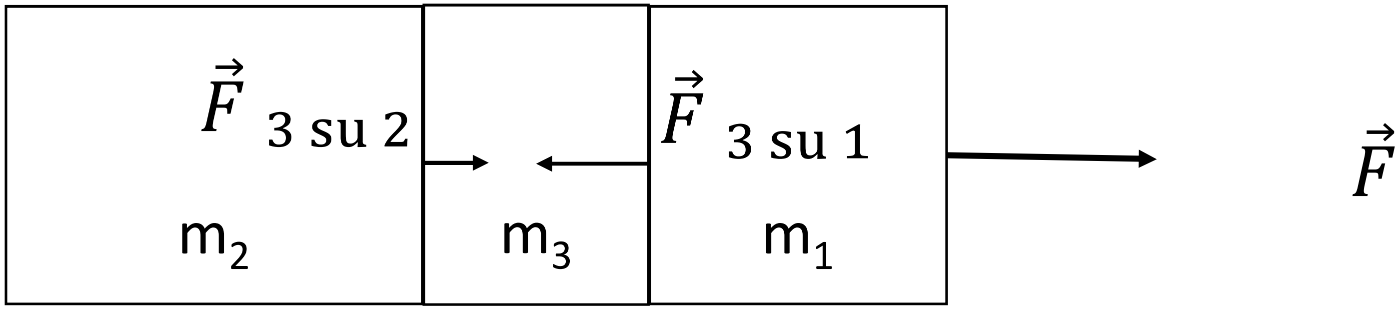
L'accelerazione del sistema (m_1 e m_2) sarà: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_1+m_2}$ ove $\vec{F}$ è la <u>forza esterna</u> al sistema

Quali sono le forze che agiscono sulla sola m_2? $\vec{F}_{\text{1 su 2}} = m_2\vec{a}$

E su m_1? $\vec{F} + \vec{F}_{\text{2 su 1}} = m_1\vec{a}$

Sommando queste relazioni si vede che $\vec{F}_{\text{1 su 2}} + \vec{F}_{\text{2 su 1}} = 0$; la <u>somma delle forze interne è nulla</u>

Forze esterne e forze interne

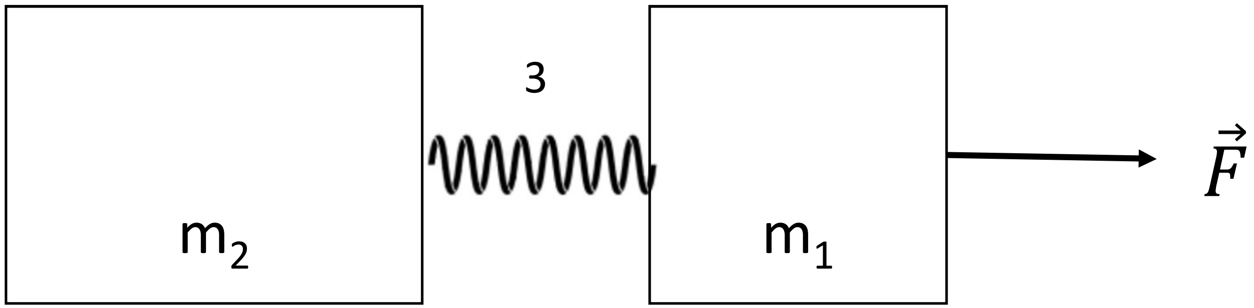


Esercizio: calcolare $\vec{F}_{\text{3 su 2}}$ e $\vec{F}_{\text{3 su 1}}$

$$\vec{F}_{\text{3 su 2}} = m_2\vec{a} = m_2\vec{F}/(m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\vec{F}_{\text{3 su 1}} = -\vec{F} + m_1\vec{a} = -(m_2 + m_3)\vec{F}/(m_1 + m_2 + m_3)$$

Forze interne elastiche



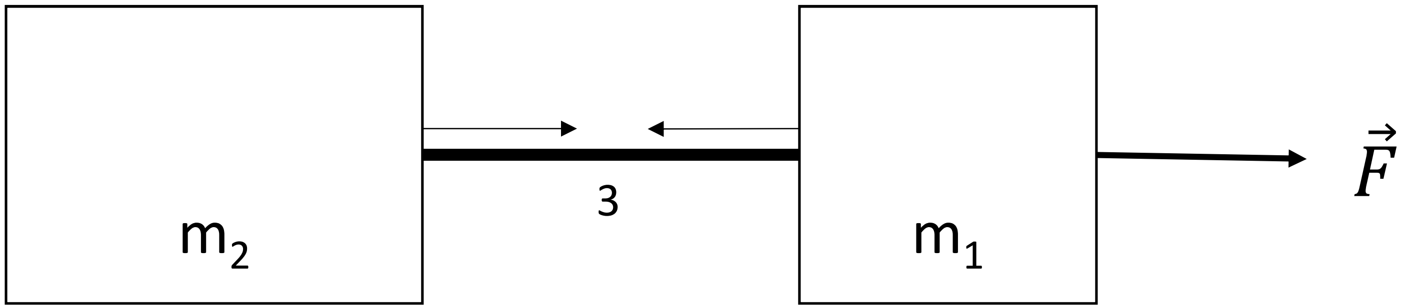
Immaginiamo di sostituire al blocco 3 una molla di massa trascurabile; ponendo $m_3 = 0$ si ottiene:

$$\vec{F}_{\,3\text{ su }2} = m_2\vec{F}/(m_1 + m_2) \qquad \vec{F}_{\,3\text{ su }1} = -m_2\vec{F}/(m_1 + m_2)$$

Vediamo quindi che la molla (di massa trascurabile) esercita su m_1 e m_2 una forza di ugual modulo e direzione, ma verso opposto. Notare che se $\vec{F}$ fosse diretta verso sinistra, la molla sarebbe compressa. Quanto vale la variazione di lunghezza della molla?

$$\Delta x = \frac{m_2}{k}\frac{F}{m_1 + m_2}$$

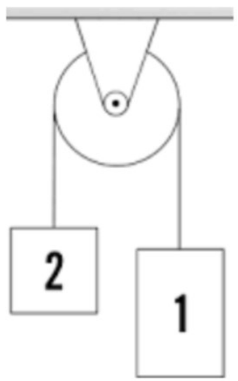
La tensione in una fune



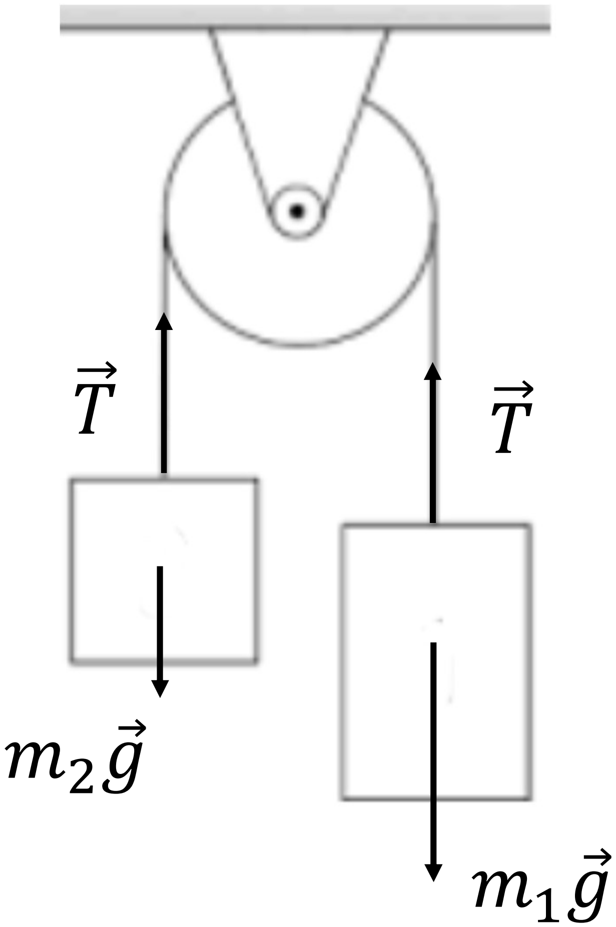
Pensate alla fune come ad una molla con k molto grande che resiste solo agli allungamenti.
Viene chiamata «tensione» T il modulo della forza che una fune esercita sulle masse ad essa attaccate.

$$\left|\vec{F}_{\,3\text{ su }2}\right| = \left|\vec{F}_{\,3\text{ su }1}\right| \equiv T$$

Tale tensione si mantiene anche se la fune è soggetta a curvatura, come nella carrucola in figura:



La macchina di Atwood



$$m_1 g - T = m_1 a$$

$$m_2 g - T = -m_2 a$$

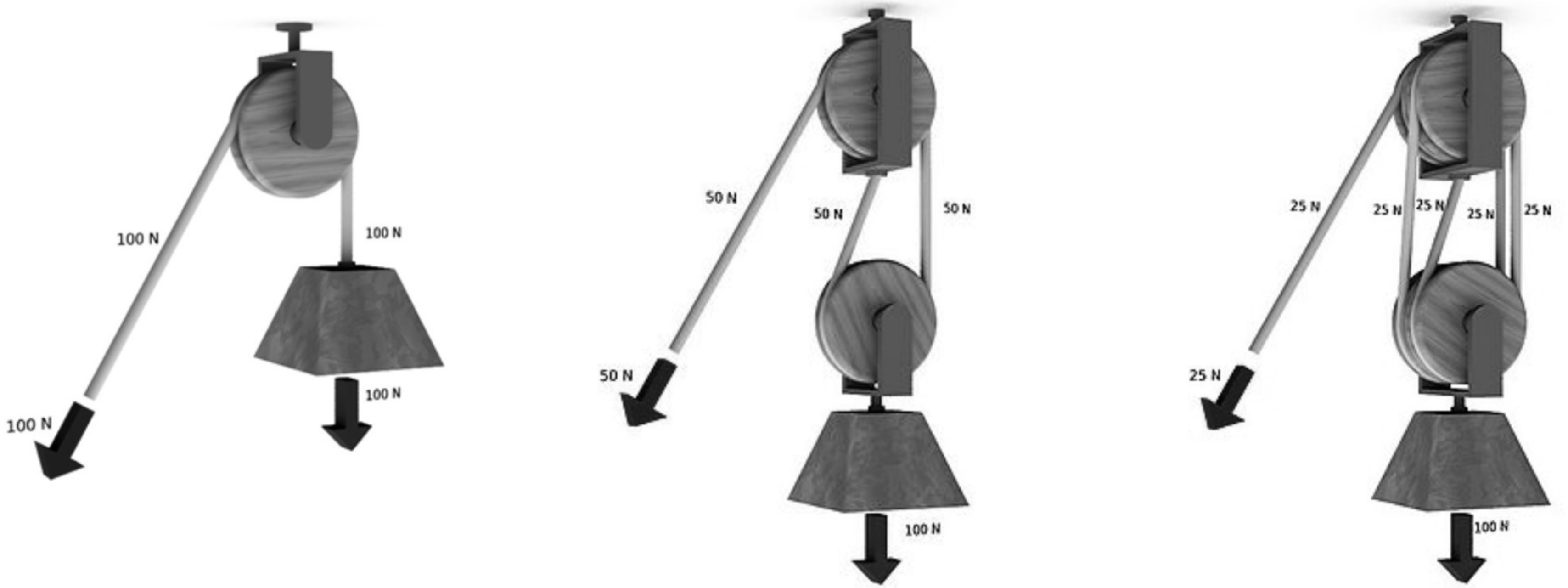
Risolvendo il sistema si trova:

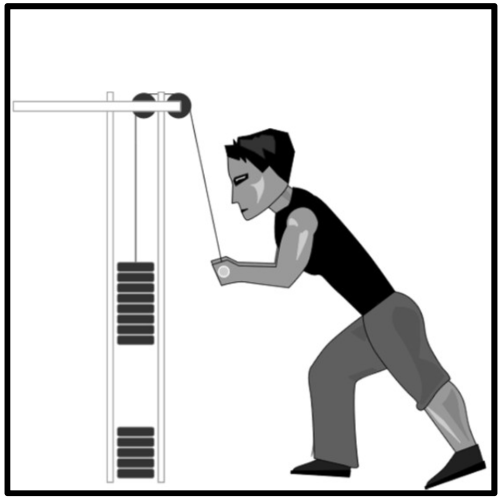
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

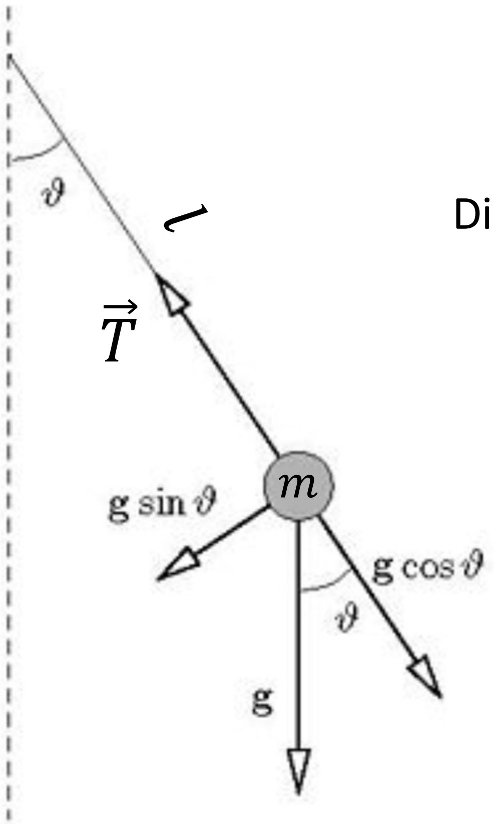
Ipotizziamo un verso dell'accelerazione (da verificare a posteriori): $\downarrow \vec{a}$

La macchina di Atwood - varianti





Il pendolo semplice



Direzione radiale: $T - mg\cos(\vartheta) = mv^2/l$

Direzione tangenziale: $-mg\,\mathrm{sen}(\vartheta) = ma = ml\vartheta''$

Per piccole oscillazioni si ha:

$$\mathrm{sen}(\vartheta) \approx \vartheta$$

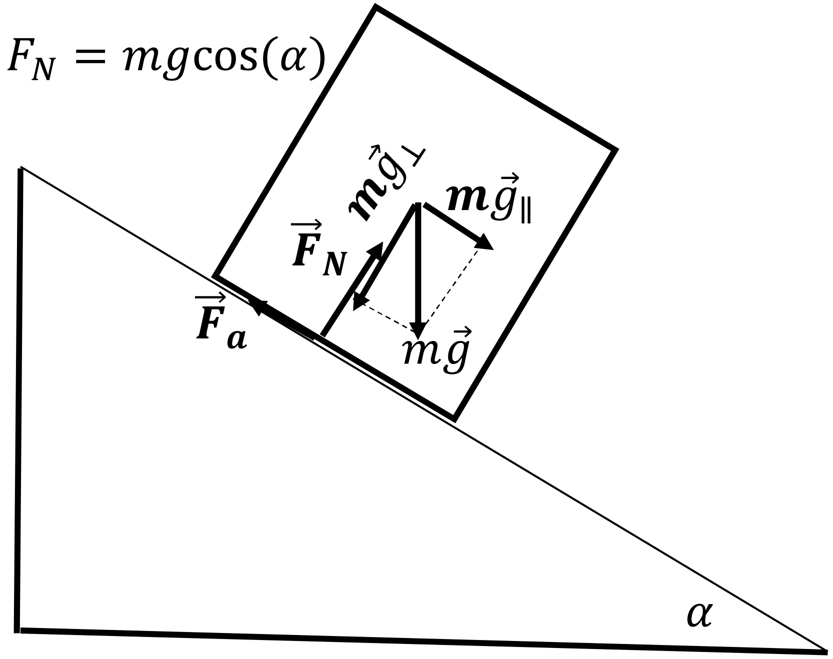
E la seconda equazione diventa:

$$\vartheta'' = -\frac{g}{l}\vartheta$$

Cosa vi ricorda?

Moto armonico con $\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow$ periodo $= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Attrito di scorrimento



- Si oppone sempre al moto
- Può variare fra 0 e un valore massimo proporzionale al modulo della forza normale:

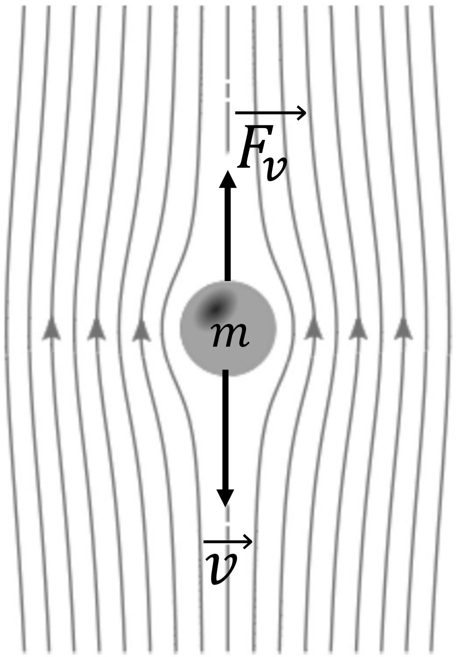
$$F_a \leq \mu_s F_N$$

- Ove il coefficiente di attrito statico μ_s dipende dalla natura e dalla rugosità delle superfici a contatto

- L'angolo α_{max} di massima pendenza per l'equilibrio statico su piano inclinato è dato dalla relazione $\mu_s = \tan(\alpha_{max})$

- Quando il corpo è in movimento, la forza di attrito vale $F_a = \mu_d F_N$; il coefficiente di attrito dinamico μ_d è minore di quello statico: $\mu_d < \mu_s$

Attrito viscoso



- Moto «laminare» a bassa velocità all'interno di un fluido
- Forza proporzionale alla velocità, ma di segno opposto:

$$\overrightarrow{F_v} = -b\overrightarrow{v}$$

- Per una sfera: $b = 6\pi r\eta$ ove r è il raggio e η la viscosità del fluido (formula di Stokes)

- Si raggiunge la velocità limite quando la somma delle forze è zero; se consideriamo solo la forza di gravità e l'attrito viscoso (no spinta di Archimede), abbiamo:

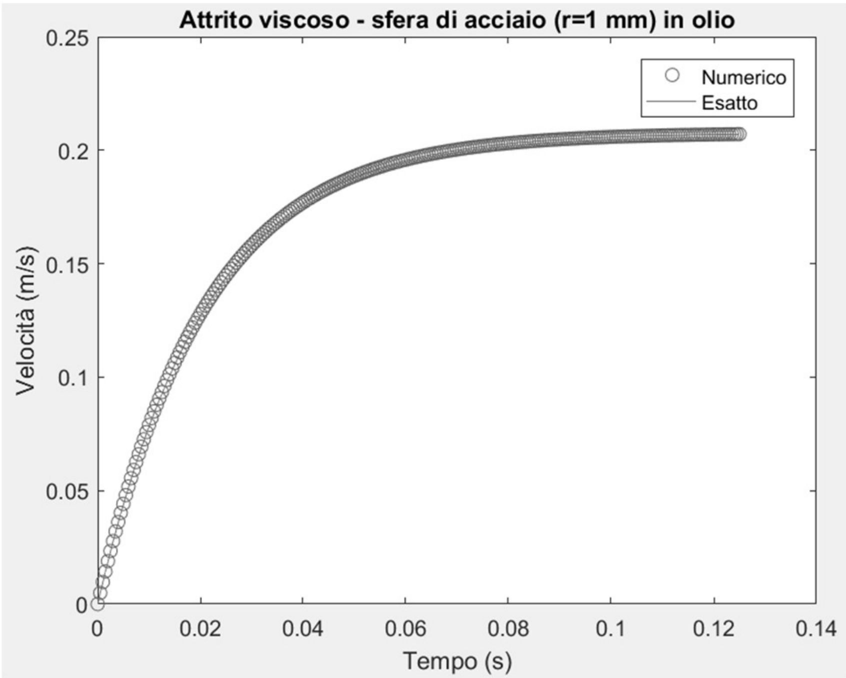
$$v_{lim} = mg/b$$

Come pensava Aristotele!

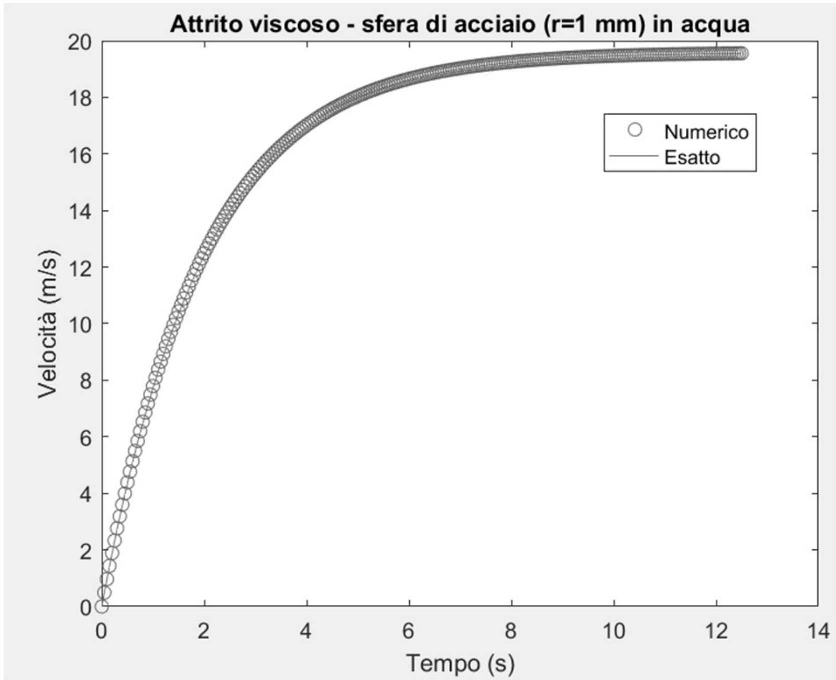
Attrito viscoso

L'analisi completa del moto fornisce:

$$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - exp\left(-\frac{bt}{m}\right)\right)$$



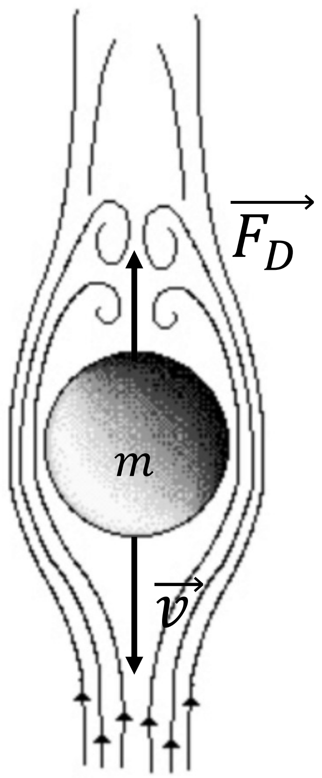
corretto



sbagliato

Viscosità bassa, velocità limite sovrastimata

Resistenza aerodinamica



Soluzione esatta:
$v(t) = \sqrt{g/k} \cdot \tanh(\sqrt{gk} \cdot t)$

- Moto ad alta velocità all'interno di un fluido con turbolenza
- Forza proporzionale al quadrato della velocità :

$$F_D = \frac{1}{2} C S \rho v^2$$

- Dove *C* è il coefficiente di resistenza aerodinamica, *S* la sezione frontale, ρ la densità del fluido.
- Si raggiunge la velocità limite quando la somma delle forze è zero; in questo caso si ottiene $v_{lim} = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}}$

https://www.youtube.com/watch?v=kbZGcfF9UfA

Caduta libera con attrito o resistenza aerodinamica – calcolo numerico

Homework challenge:

Calcolo numerico di posizione e velocità in funzione del tempo

Confronto grafico con la soluzione esatta

CONDIZIONI INIZIALI

$$t(1) = 0; dt = 0.01$$

$v(1) = 0$ (o altro valore)

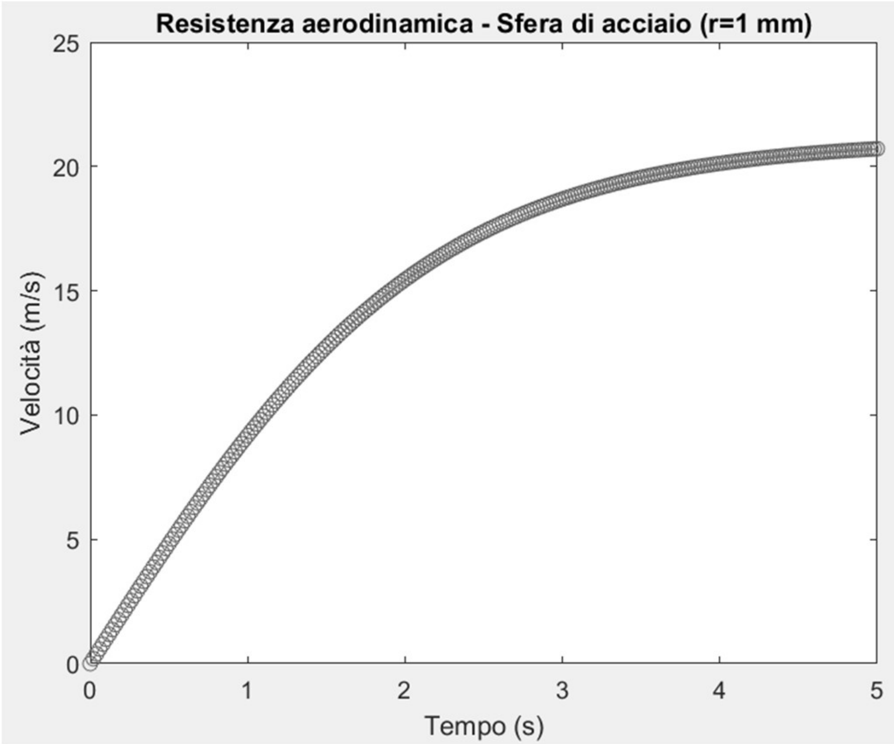
$$y(1) = 0$$

CALCOLO DEI VALORI SUCCESSIVI IN UN CICLO

$$t(n+1) = t(n) + dt$$

$$v(n+1) = v(n) + \frac{F}{m}(n)dt$$

$$y(n+1) = y(n) + v(n)dt$$



Esempio ottenuto con MATLAB

DINAMICA

elementi di relatività

Principio di relatività (galileiana)

Il primo principio della dinamica è valido in una particolare classe di sistemi di riferimento, detti «sistemi inerziali»
Infatti, in base alla composizione galileiana delle velocità, se un corpo è in quiete o in moto rettilineo uniforme in un sistema, lo è anche in tutti in tutti quelli che sono in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso

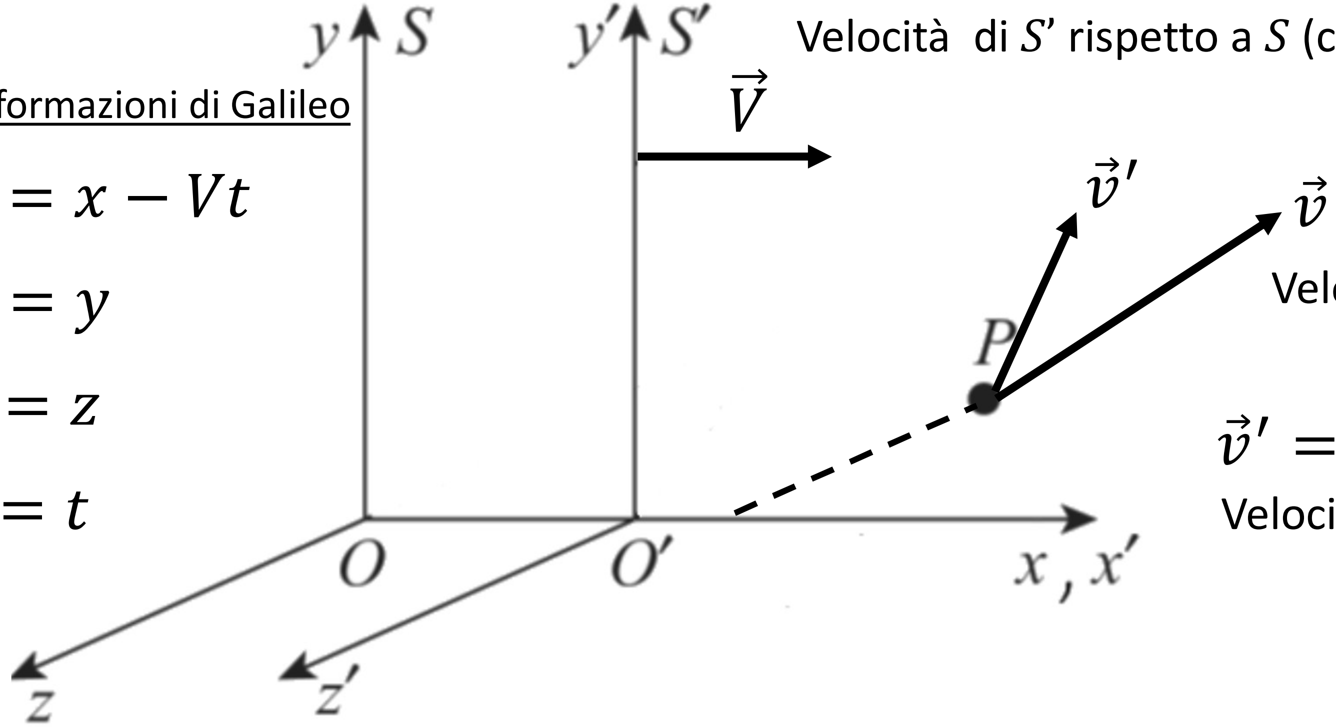
<u>Trasformazioni di Galileo</u>

$$x' = x - Vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$



Velocità di S’ rispetto a S (costante)

Velocità di *P* rispetto a S

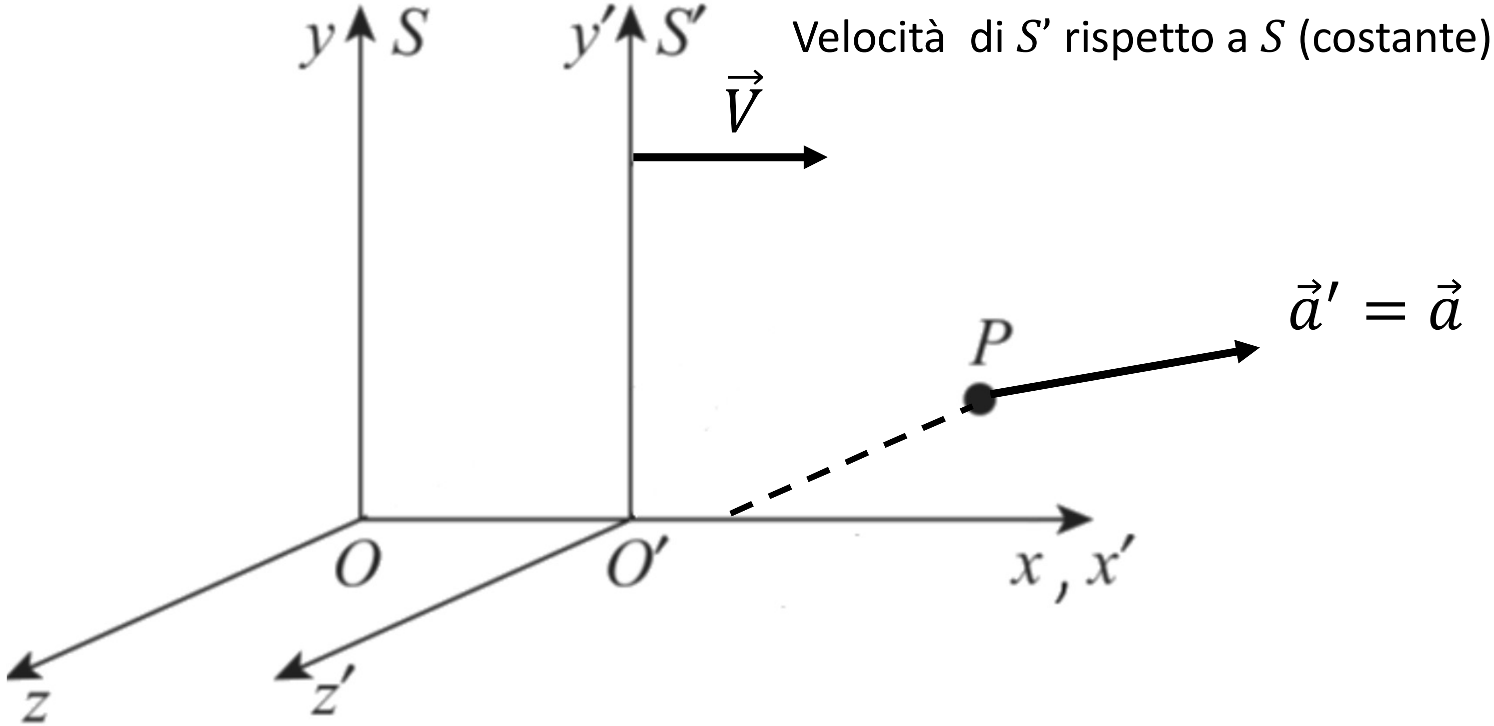
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

Velocità di *P* rispetto a S’

Principio di relatività (galileiana)

La legge fondamentale della dinamica, $\vec{F} = m\vec{a}$, è anch'essa valida in tutti i sistemi inerziali

Le leggi della fisica sono invarianti rispetto a una trasformazione galileiana



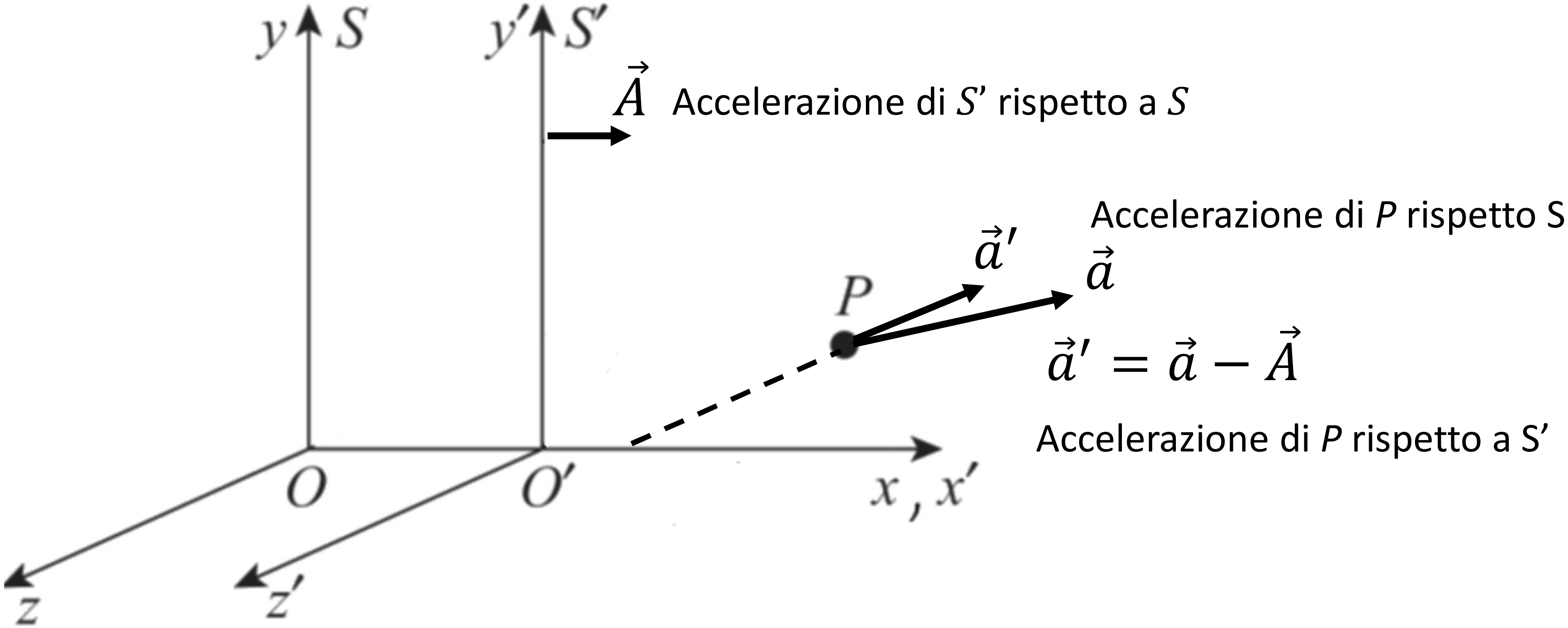
la grandezza cardine della dinamica non è la velocità, ma <u>l'accelerazione</u>

Problema: sistemi non inerziali

In un qualunque sistema accelerato rispetto ai sistemi inerziali, $\vec{F} = m\vec{a}$ non è più valida
Ad esempio, nel caso in figura, mentre la forza ha la stessa espressione nei due sistemi ($\vec{F} = \vec{F}'$) , l'accelerazione è diversa:

$$\vec{F}' \neq m\vec{a}\,'$$

S' è un sistema di riferimento non inerziale



Spazio e tempo per Newton

Quindi, in un sistema di riferimento accelerato rispetto al suolo, quale un sistema in caduta libera nel campo gravitazionale, le leggi delle dinamica non sono applicabili direttamente.

Per tale motivo vengono introdotte correzioni artificiose note come «forze apparenti» da sommare alle forze reali per continuare ad applicare la legge di Newton.

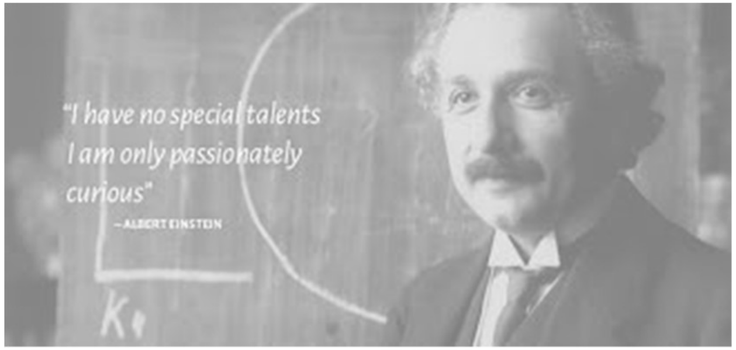
Un esempio «popolare» è la forza «centrifuga» che sembra essere all'opera in un sistema di riferimento rotante.

Newton credeva nell'esistenza di un sistema di riferimento con dignità superiore a tutti gli altri, nel quale era possibile applicare le leggi della dinamica. Tale sistema, aveva origine nel sole e assi orientati verso alcune stelle fisse: *lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale e immobile.*[1]

Altrettanto assoluto era per Newton il tempo: *Il tempo assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato durata.*[1]

1 Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687)

La «insoddisfazione» di Einstein



Ulm, 3.14 1879
Princeton, 4.18 1955

- Einstein non era soddisfatto del concetto di spazio e tempo assoluti. Voleva restituire pari dignità a tutti i sistemi di riferimento.
- Inoltre era profondamente turbato dalla contraddizione fra la meccanica di Galileo – Newton e l'elettrodinamica di Maxwell, per la quale la velocità della luce è costante e uguale in tutti i sistemi di riferimento.

https://www.youtube.com/watch?v=yuD34tEpRFw

La relatività «ristretta» (1905)

- Si applica a sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo uniforme (no accelerazione)
- La velocità della luce è costante in tutti i sistemi di riferimento (**max information speed**).
- Le trasformazioni di Galileo vengono sostituite con le trasformazioni di Lorentz.
- Le misure di intervalli di tempo e di distanze dipendono dal sistema di riferimento.

Trasformazioni di Lorentz

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

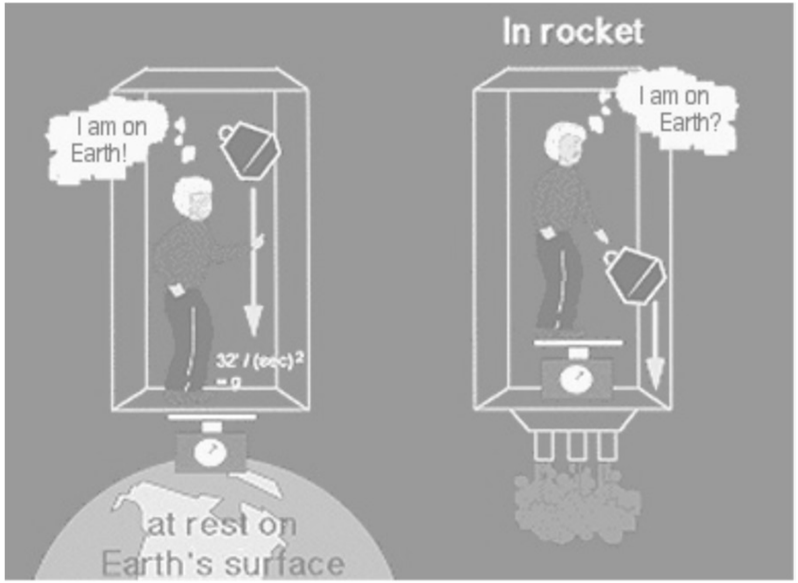
Dilatazione dei tempi

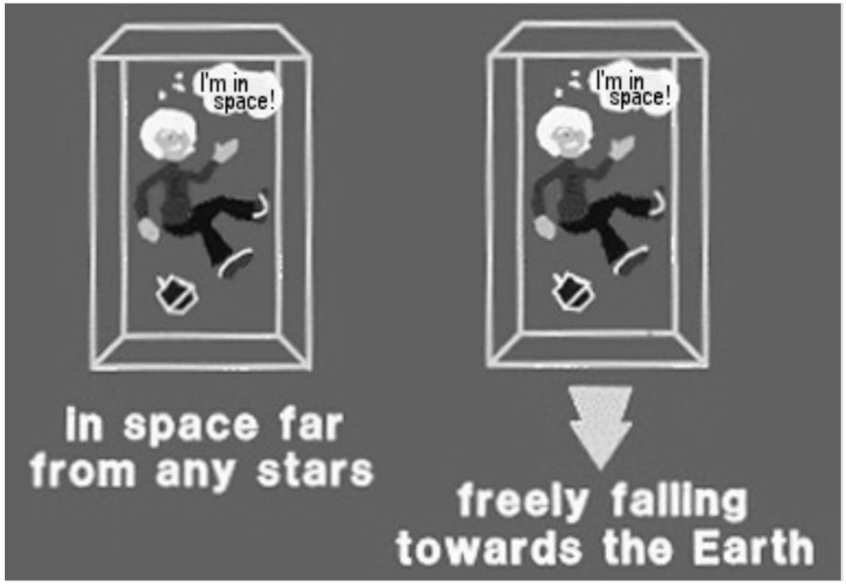
$$E = mc^2$$

Equivalenza massa-energia

Il pensiero più felice (1907)

Principio di equivalenza: l'effetto della gravità è indistinguibile da quello dell'accelerazione.
Massa inerziale e massa gravitazionale sono equivalenti.

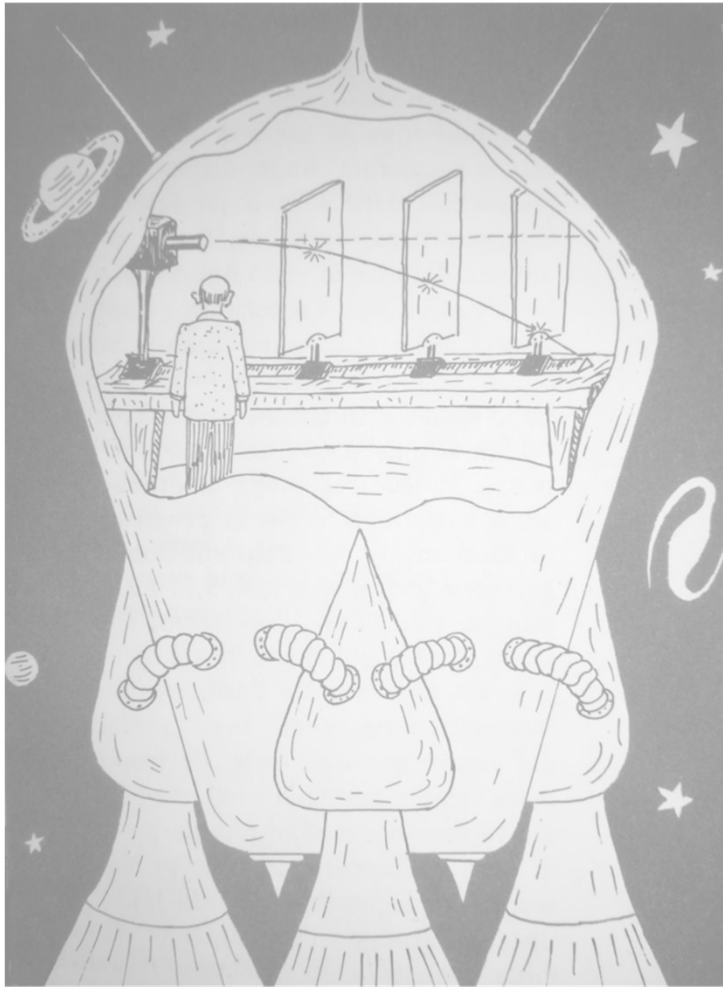




https://www.youtube.com/watch?v=0jjFjC30-4A

https://www.physicsoftheuniverse.com/topics_relativity_gravity.html

La relatività «generale» (1915)



da G. Gamow, «Biografia della Fisica»

Se l'accelerazione causa la deviazione dei raggi luminosi dalla linea retta, tale effetto deve essere prodotto anche dal campo gravitazionale.
https://www.youtube.com/watch?v=vF4DENWd_ts

e tutto – buchi neri, onde gravitazionali – è contenuto qui:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Equazione di campo di Einstein

Simulazione dell'assenza di peso:
https://www.youtube.com/watch?v=_bQAMjYmwhI