ENERGIA

Energia

- Ci sono diverse forme di energia: gravitazionale, cinetica, elettrica, termica, elastica, chimica, radiante, nucleare, e di massa
- L’energia cinetica, legata al movimento, è rappresentata dalla forma: $K = (1/2)mv^2$
- L’energia è una grandezza scalare. La sua unità di misura è il Joule (kg m^2 s^{-2}).
- L’energia fluisce da una forma all’altra e, nelle sue varie forme, si conserva

Energia

«Esiste una legge che governa tutti i fenomeni naturali conosciuti fino ad oggi. Non si conosce eccezione a questa legge – essa è esatta nel limite delle nostre conoscenze. La legge è chiamata conservazione dell'energia. Essa stabilisce che vi è una certa quantità, che chiamiamo energia, che non cambia nei molteplici cambiamenti subiti dalla natura. (…) Non è la descrizione di un meccanismo o di un fenomeno concreto, è soltanto il fatto singolare di poter calcolare un numero, e dopo aver osservato i mutamenti capricciosi della natura, ricalcolarlo ottenendo sempre lo stesso risultato.»
Richard P. Feynman

La conservazione dell'energia di un sistema, secondo il **teorema di Noether**, è associata alla sua simmetria rispetto a traslazioni temporali

Definizioni di «lavoro»

«L'Italia è una Repubblica democratica, fondata sul **lavoro**. La sovranità appartiene al popolo, che la esercita nelle forme e nei limiti della Costituzione.»
(Articolo 1 della Costituzione Italiana)

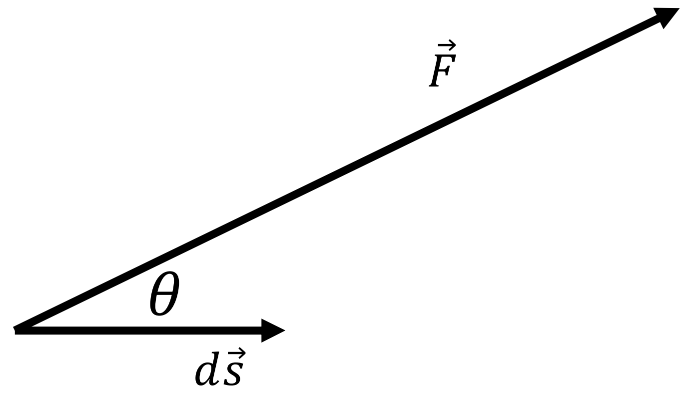
Dal dizionario Zanichelli:

1 - Impiego di energia per il conseguimento di un determinato fine
..
3 - Occupazione retribuita
..
..
..

7 (fis.) Lavoro di una forza, grandezza scalare, data dal prodotto dello spostamento del punto di applicazione di una forza per la componente della forza lungo la direzione dello spostamento

Il lavoro

Definiamo prima il lavoro dL compiuto da una forza $\vec{F}$ agente su un corpo durante uno spostamento $d\vec{s}$ infinitesimo, così piccolo da poter considerare costante la forza.

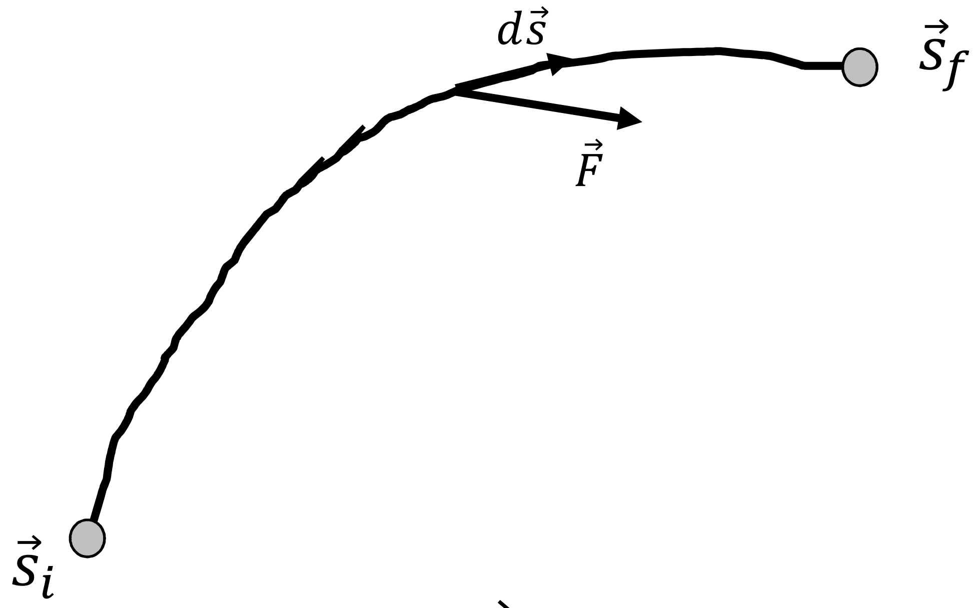


$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$
$$= F\, ds \cos(\theta)$$

L'unità di misura nel SI è il Joule (J) (kg m^2 s^{-2})

Il lavoro

Integrando dL si ottiene il lavoro totale L compiuto da una forza $\vec{F}$ in uno sposamento non infinitesimo, durante il quale la forza non è necessariamente costante.



$$L = \int_{\vec{s}_i}^{\vec{s}_f} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

La potenza

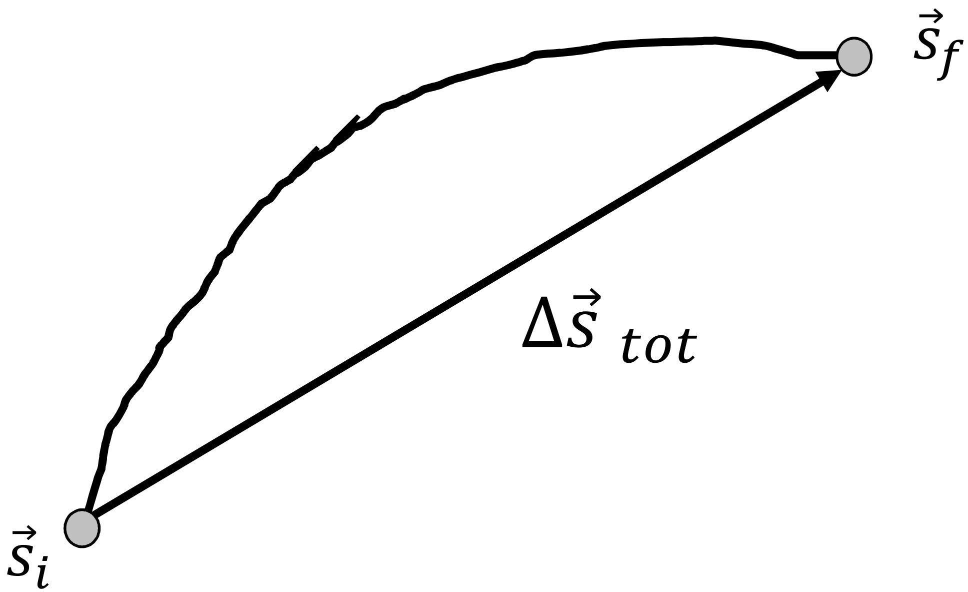
Il l lavoro compiuto da una forza per unità di tempo viene chiamato potenza, e si misura in Watt (W).

$$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

ESEMPI

Lavoro di una forza costante

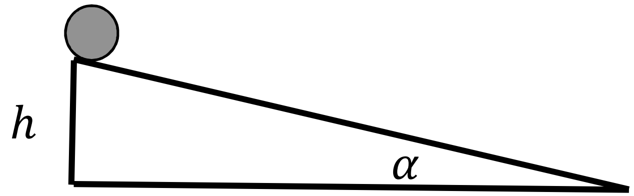
Formula generale



$$L = \int_{\vec{s}_i}^{\vec{s}_f} \vec{F}\cdot d\vec{s} \quad = \vec{F}\cdot\int_{\vec{s}_i}^{\vec{s}_f} d\vec{s} \quad = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s}_{\,tot}$$

Lavoro di una forza costante

Applicazioni



Forza di gravità «locale» $m\vec{g}$

Nella discesa: $L = mgh$

Nella salita: $L = -mgh$

Forza di attrito $-\mu_d F_N$

Nella discesa: $L = -\mu_d mgh \cdot \cot(\alpha)$

Nella salita: $L = -\mu_d mgh \cdot \cot(\alpha)$

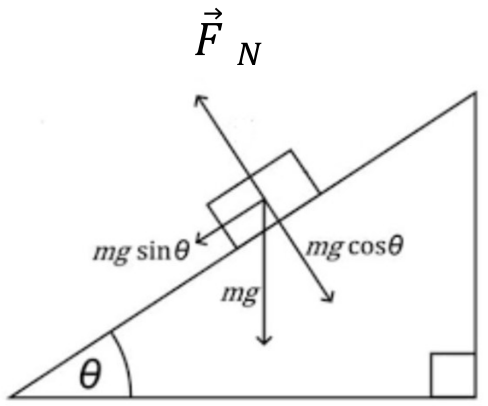
Quale lavoro compie la forza normale?

Quanto lavoro compie la gravità in un’oscillazione completa di un pendolo?

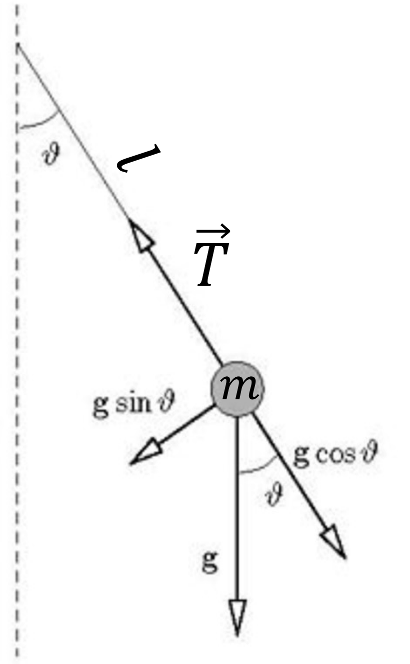
Forza perpendicolare allo spostamento

Il lavoro compiuto è ovviamente zero

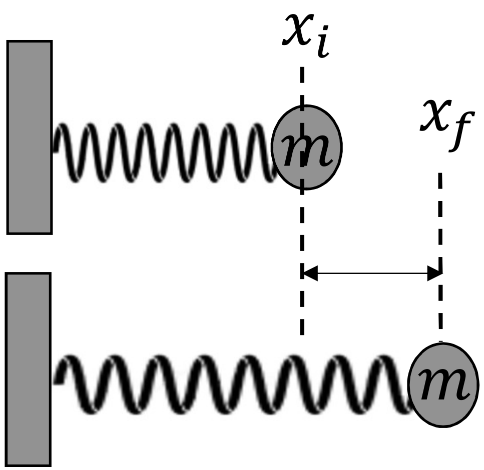
Forza normale



Tensione della fune nel pendolo



Lavoro della forza elastica



$$L = \int_{x_i}^{x_f} -kx \cdot dx = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right)$$

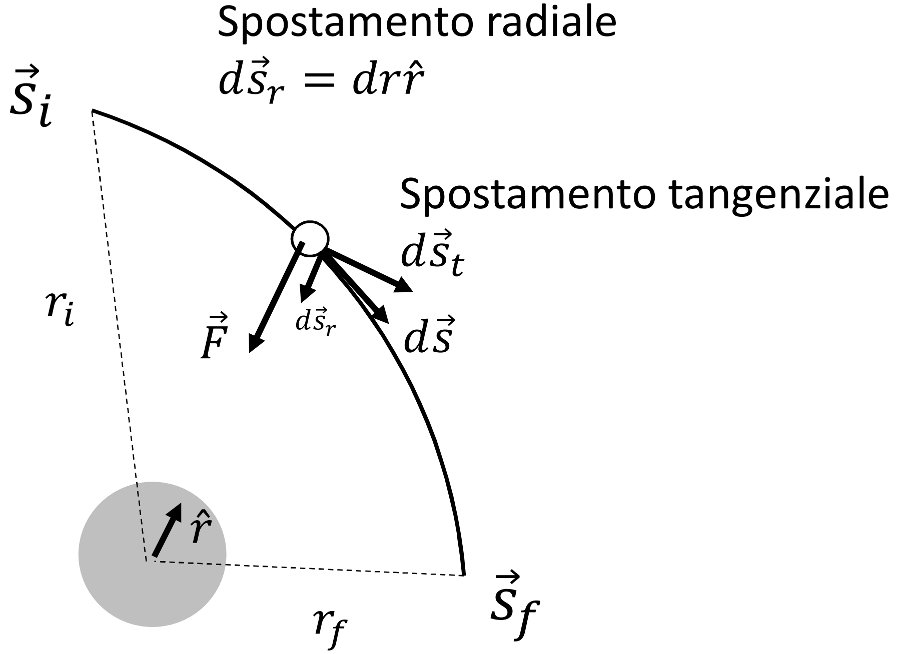
Quanto lavoro compie la molla nell’andare da un estremo all’altro?
E da un estremo al centro?
E dal centro a un estremo?

Lavoro della forza gravitazionale

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{s}_r = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr$$

$$L = \int_{r_i}^{r_f} -G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = \frac{Gm_1 m_2}{r_f} - \frac{Gm_1 m_2}{r_i}$$



Quanto lavoro compie fra due punti qualsiasi di un’orbita circolare?

Lavoro ed energia cinetica

Il lavoro totale, compiuto dalla somma di tutte le forze agenti su un corpo, è uguale alla variazione della sua energia cinetica

$$L_{TOT} = \int_{\vec{s}_i}^{\vec{s}_f} \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{s}_i}^{\vec{s}_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{s}_i}^{\vec{s}_f} m\vec{v} \cdot d\vec{v} =$$

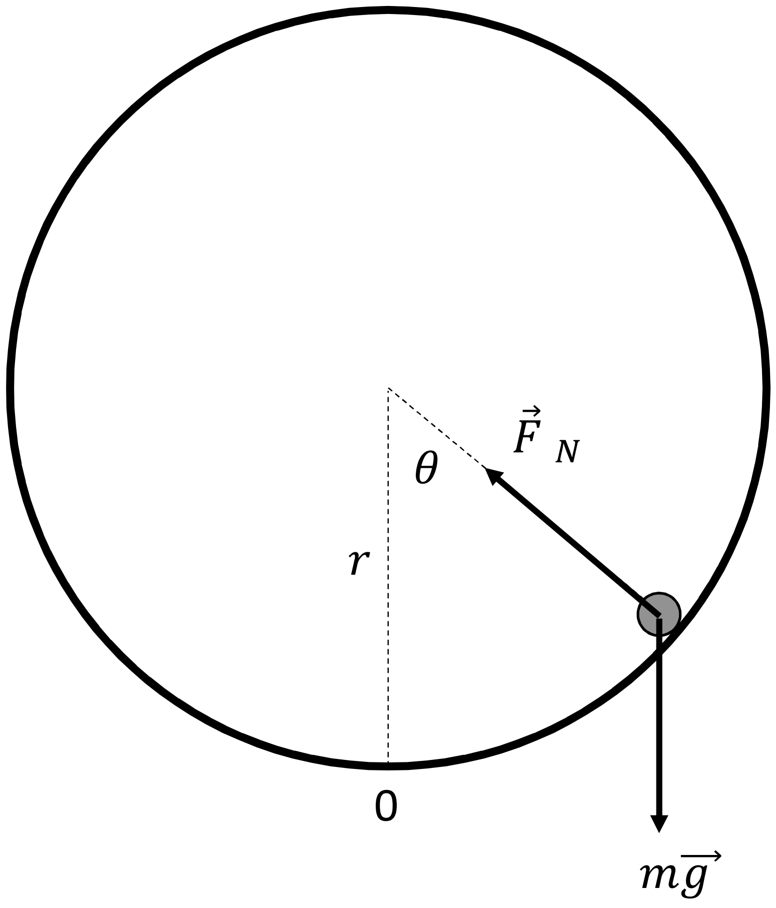
$$\int_{\vec{s}_i}^{\vec{s}_f} \frac{m}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{m}{2} v_f^2 - \frac{m}{2} v_i^2 = K_f - K_i$$

Applicazione semplice : moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\frac{m}{2} v_f^2 - \frac{m}{2} v_i^2 = ma \cdot s \Rightarrow v_f^2 = v_i^2 + 2as$$

Lavoro ed energia cinetica

Un'applicazione più complessa è l'analisi del «giro della morte»



Il teorema precedente, considerando che la forza normale non compie lavoro, ci dice che:

$$v^2 = v_0^2 - 2(1 - \cos(\theta))gr$$

In direzione radiale abbiamo:

$$F_N - mg\cos(\theta) = mv^2/r$$

In direzione tangenziale:

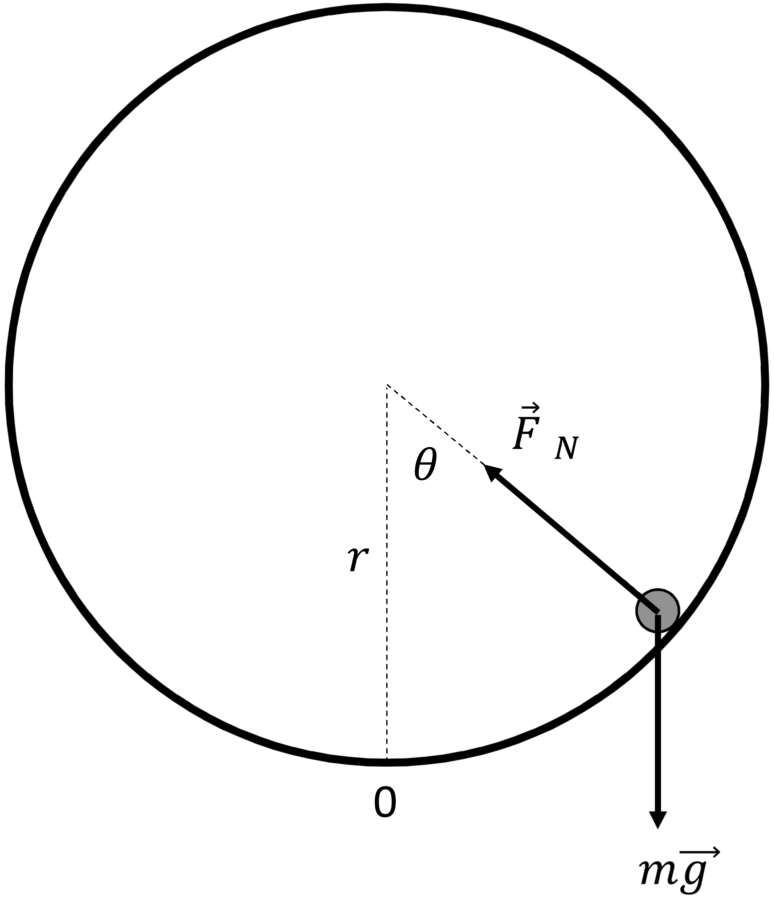
$$-mg\text{sen}(\theta) = mr\theta''$$

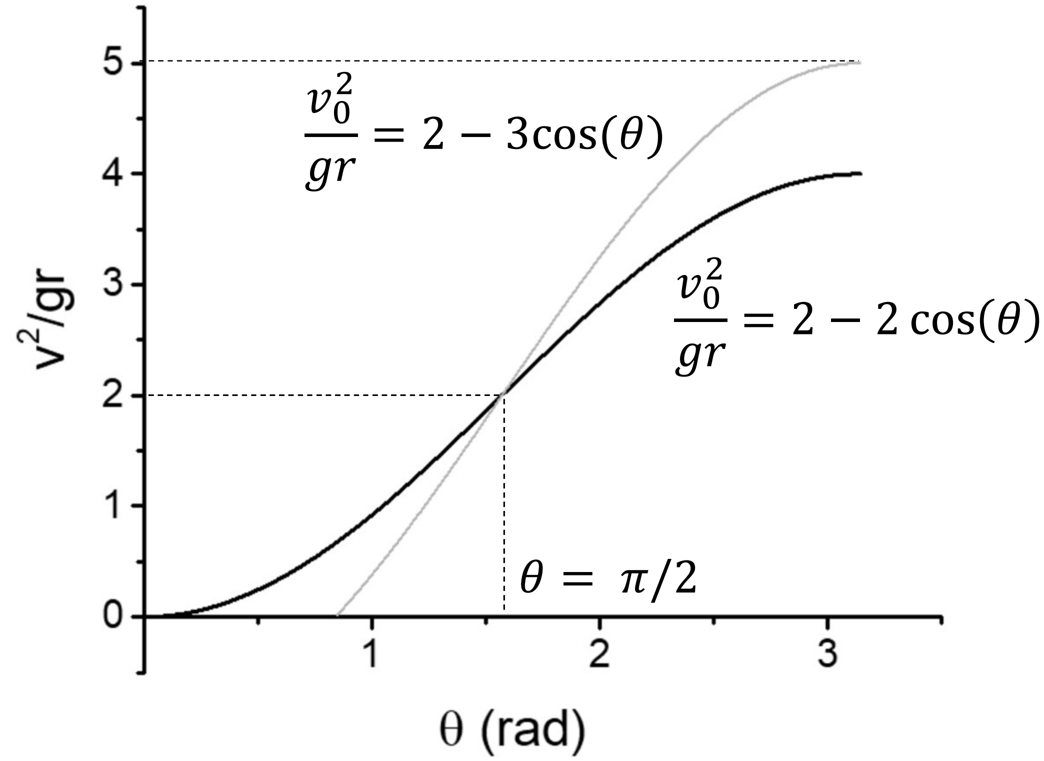
La massa rimane aderente alla guida fintanto che $F_N > 0$, ovvero:

$$mg\cos(\theta) + mv^2/r > 0$$

$$\frac{v_0^2}{gr} > 2 - 3\cos(\theta)$$

Lavoro ed energia cinetica





$\frac{v_0^2}{gr} < 2$: non raggiunge $\theta = \pi/2$

$2 < \frac{v_0^2}{gr} < 5$: si stacca prima di raggiungere la massima altezza ($\theta = \pi$)

$\frac{v_0^2}{gr} > 5$: compie giri completi senza staccarsi

ENERGIA

Forze conservative e energia potenziale
Energia meccanica
Potenziale e campo gravitazionale
Forze dissipative e conversione di lavoro in calore

Lavoro ed energia potenziale

In molti casi abbiamo visto che è possibile scrivere il lavoro nella forma:

$$L = U(\vec{s}_i) - U\left(\vec{s}_f\right)$$

dove U è una funzione della posizione. Esempi:

Gravità locale: $U(h) = mgh$
Gravità «planetaria»: $U(r) = -GMm/r$
Forza elastica: $U(x) = (1/2)kx^2$

In altre parole, il lavoro non dipende dal percorso, ma solo dalle coordinate dei punti iniziale e finale.

Lavoro ed energia potenziale

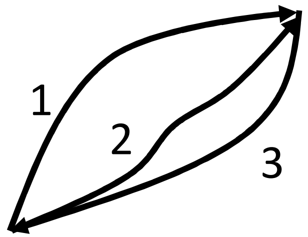
La forze per le quali è possibile scrivere

$$L = U(\vec{s}_i) - U\left(\vec{s}_f\right) \equiv U_i - U_f$$

Si dicono «conservative». La funzione U si chiama «energia potenziale». Essa esprime la capacità di compiere lavoro positivo (nello spostare un corpo verso punti di bassa energia).

La funzione U è definita a meno di una costante additiva, che fissa lo «zero» dell'energia potenziale.

Condizione necessaria e sufficiente è che il lavoro su un qualunque percorso chiuso sia nullo. Infatti:



$$L_1 + L_3 = 0$$

$$L_2 + L_3 = 0$$

$$\Longrightarrow L_1 = L_2$$

Energia meccanica

Se tutte le forze in gioco sono conservative, possiamo scrivere:

$$L = U_i - U_f = -\Delta U$$

D'altra parte, per il teorema del lavoro e dell' energia cinetica, si ha anche:

$$L = K_f - K_i = \Delta K$$

Uguagliando si ottiene:

$$U_f + K_f = U_i + K_i$$

La somma di energia cinetica ed energia potenziale è chiamata «energia meccanica» E. Quindi, se **tutte** le forze sono conservative, si ha:

$$E_f = E_i$$

ovvero, l'energia meccanica si conserva durante il moto.

Conservazione dell' energia meccanica

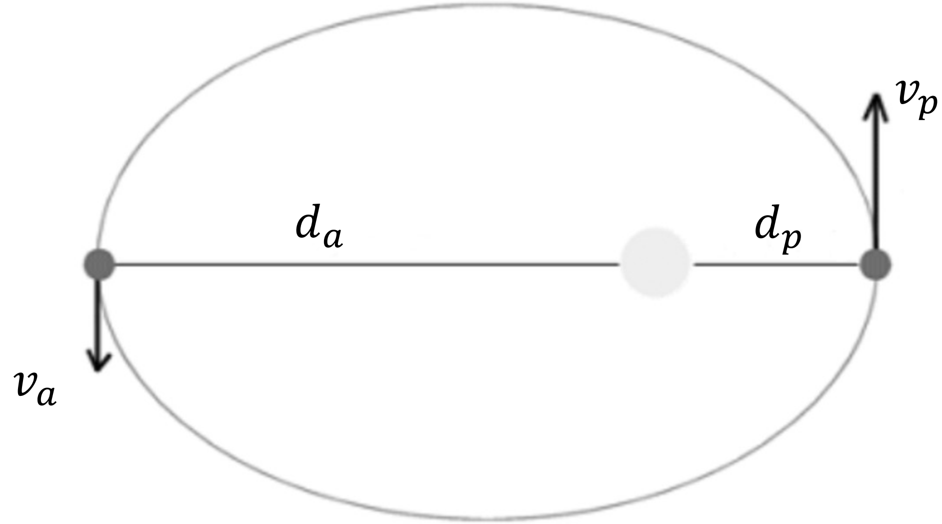
Applichiamo quanto appreso all'orbita ellittica della terra intorno al sole. Calcolare la velocità all'afelio v_a sapendo che:

$d_p = 147.1 \cdot 10^6$ km (distanza al perielio)

$d_a = 152.1 \cdot 10^6$ km (distanza all'afelio)

$v_p = 30.29$ km/s (velocità al perielio)

$M_\odot \ = \ 1.988 \cdot 10^{30}$ kg (massa solare)

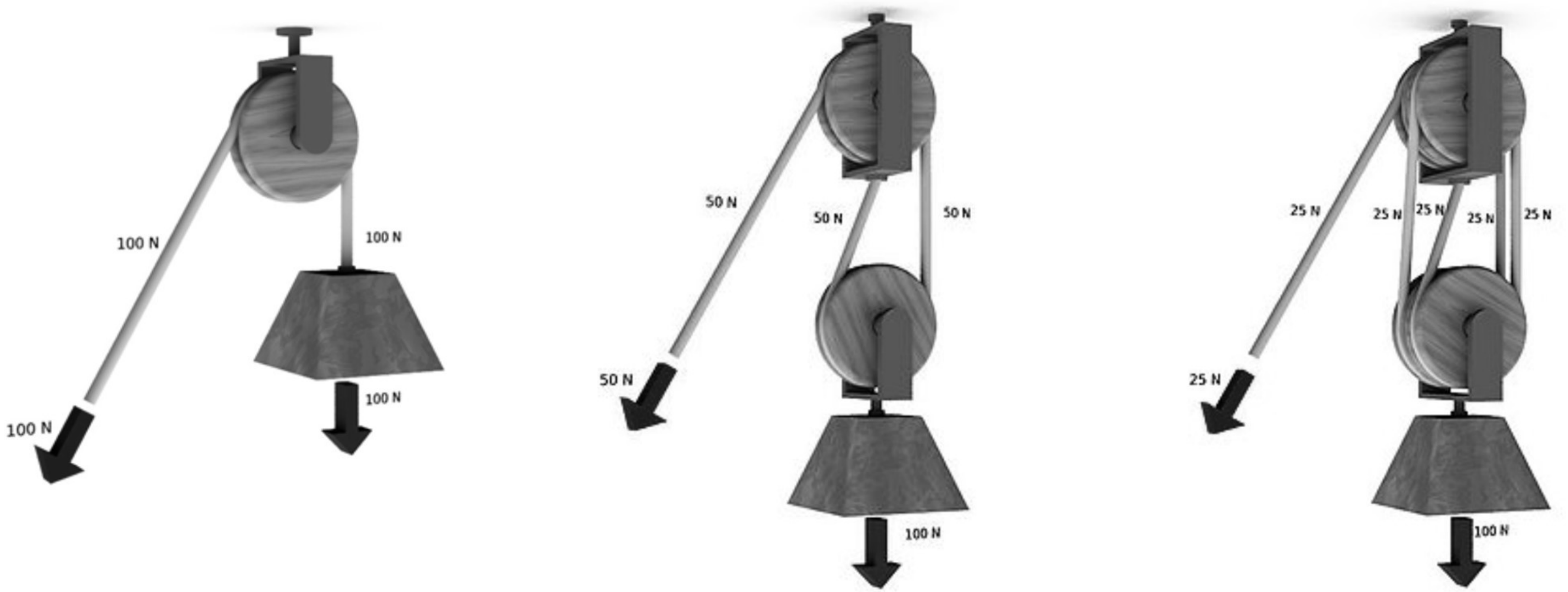


$$\frac{-GM_\odot M_T}{d_p} + \frac{M_T v_p^2}{2} = \frac{-GM_\odot M_T}{d_a} + \frac{M_T v_a^2}{2}$$

$$v_a = \sqrt{v_p^2 + 2GM_\odot \left(\frac{1}{d_a} - \frac{1}{d_p}\right)} = 29.29 \text{ km/s}$$

Si veda lo script *Planetary_Motion.m* per una simulazione del moto su orbita ellittica.

Lavoro, energia potenziale e carrucole



Riesaminate questo problema alla luce dei concetti di lavoro e energia potenziale.
Immaginate di sollevare la massa in tutti i casi di 1 metro a velocità costante.
Quanto lavoro compite nei tre casi?
Spiegate i termini coinvolti nella conservazione dell’energia.

Potenziale gravitazionale

Il potenziale gravitazionale rappresenta l'effetto di una o più masse sullo spazio circostante. Per definirlo si considera una massa sonda» m, molto più piccola di tutte le altre così da non perturbarne la posizione. Il potenziale gravitazionale è semplicemente il rapporto fra l'energia potenziale U e il valore della massa sonda m:

$$V = U/m$$

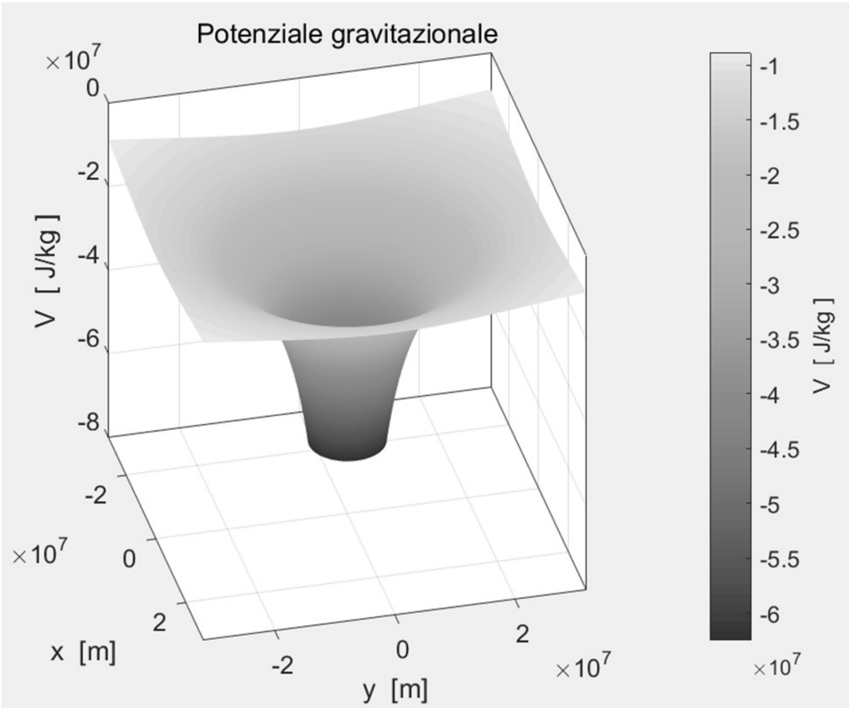
Calcoliamo ad esempio il potenziale generato dal pianeta terra. Esso è una funzione della sola distanza dal centro:

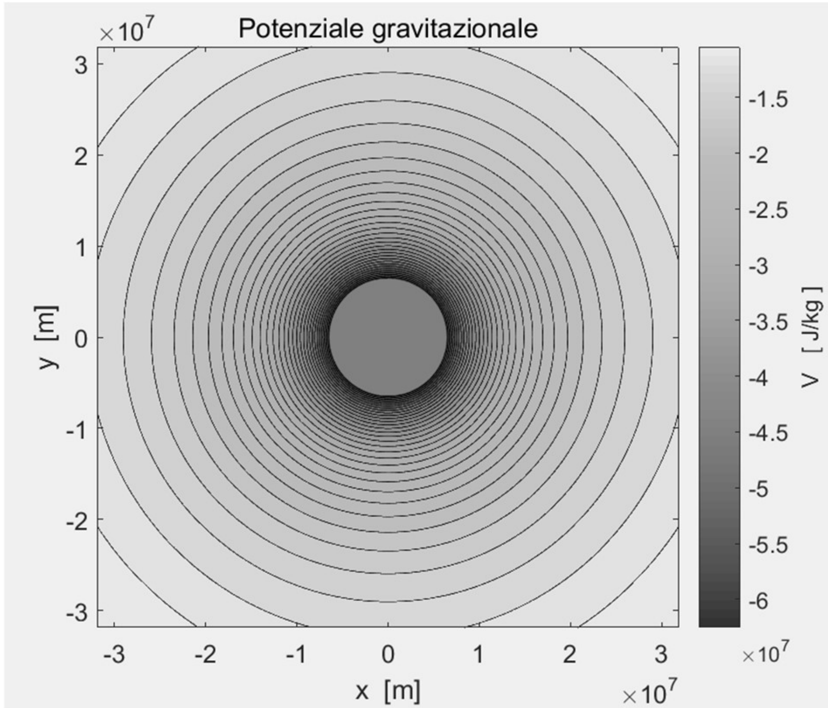
$$V(r) = \frac{U(r)}{m} = \frac{-GM_T m}{rm} = \frac{-GM_T}{r}$$

Il significato fisico e l'utilità del concetto di potenziale è: se conosco V, posso calcolare l'energia potenziale U associata a una qualunque massa M (purché «abbastanza» piccola) come $U = MV$. Il potenziale gravitazionale si misura in J/kg.

Potenziale gravitazionale

Potenziale gravitazionale terrestre $V(r) = \frac{-GM_T}{r}$



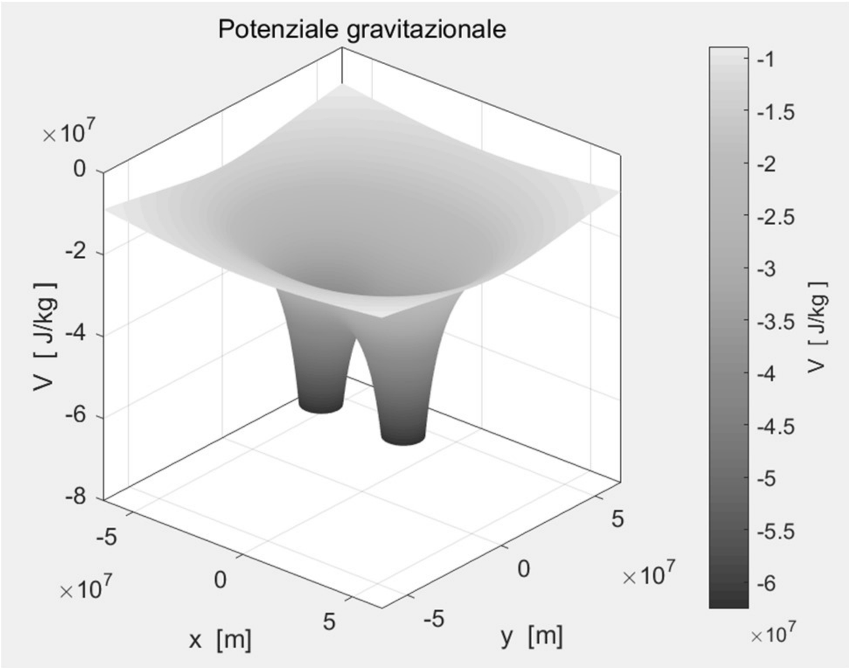


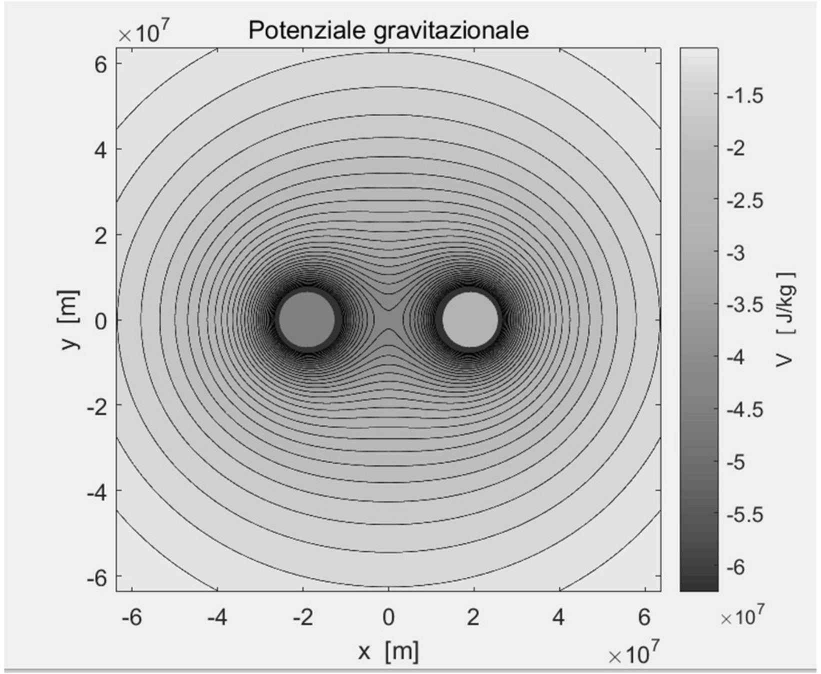
Le figure riportano il calcolo su un piano qualunque (data la simmetria sferica del problema). A destra sono riportate le linee equipotenziali (analogia con le curve di livello di una mappa geografica). La variazione di V fra una linea e l'altra è costante. Più sono vicine le linee, maggiore è la forza gravitazionale. Le linee sono il risultato dell'intersezione fra le superfici equipotenziali (sfere in questo caso) e il piano in esame.

Si veda lo script *Gravitational_Potential_Field.m* per la generazione della grafica.

Potenziale gravitazionale

Potenziale gravitazionale generato da due masse pari a quella terrestre



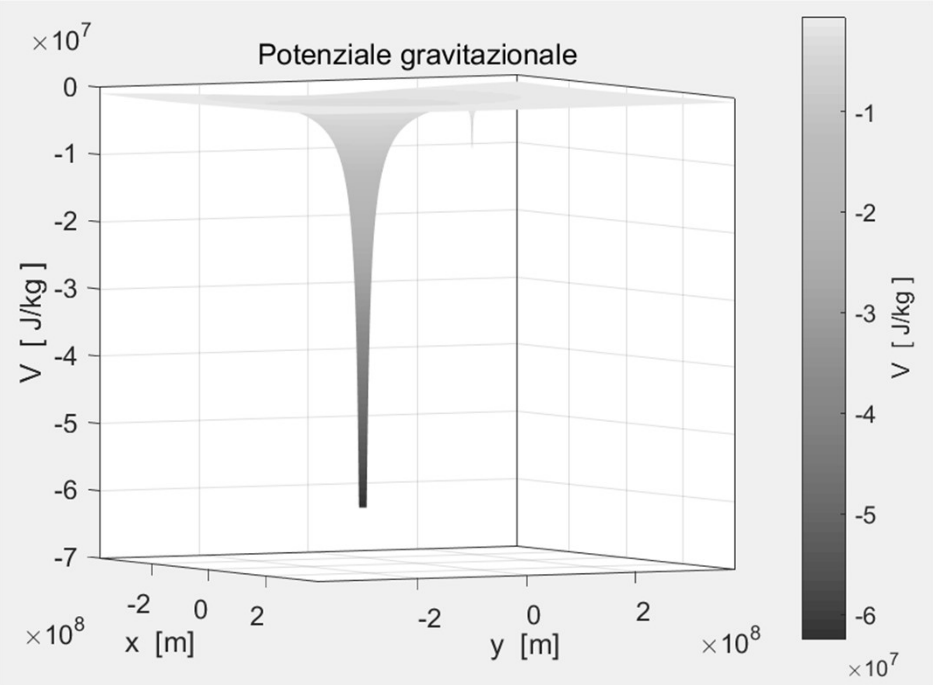


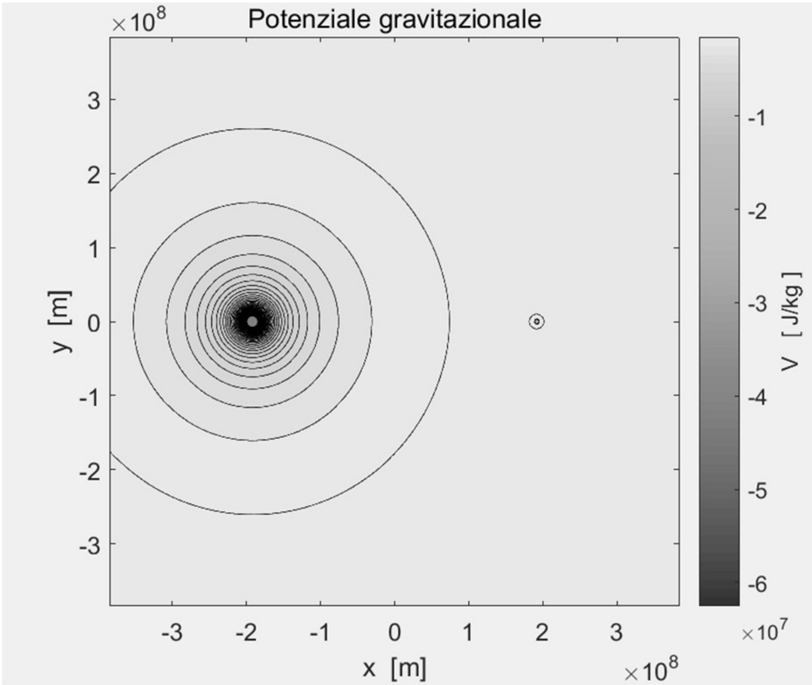
Le figure riportano il calcolo su un piano contenente entrambe le masse. Nel punto medio del segmento congiungente i centri la forza gravitazionale è nulla e le linee equipotenziali si diradano.

Si veda lo script *Gravitational_Potential_Field.m* per la generazione della grafica.

Potenziale gravitazionale

Potenziale gravitazionale del sistema terra - luna





Si veda lo script *Gravitational_Potential_Field.m* per la generazione della grafica.

Campo gravitazionale

Il campo gravitazionale rappresenta l'effetto di una o più masse sullo spazio circostante. Si definisce in modo analogo al potenziale gravitazionale ma partendo dall'espressione della forza anziché dell'energia potenziale. Si considera una massa sonda» m, molto più piccola di tutte le altre così da non perturbarne la posizione. Il campo gravitazionale è semplicemente il rapporto fra la forza agente su m e il valore stesso di m:

$$\vec{g} = \vec{F}/m$$

Calcoliamo ad esempio il campo gravitazionale del pianeta terra (all'esterno di esso). Esso è una funzione della sola distanza dal centro:

$$\vec{g}(r) = \frac{\vec{F}(r)}{m} = \frac{-GM_T}{r^2}\hat{r}$$

Il significato fisico e l'utilità del concetto di campo è: se conosco $\vec{g}$, posso calcolare la forza agente su una qualunque M (purché «abbastanza» piccola) come $\vec{F} = M\vec{g}$. Il campo gravitazionale ha chiaramente le dimensioni di un'accelerazione.

Relazione fra energia potenziale e forza

In 1-D, poiché $dL = Fdx$ e $dL = -dU$, si ha:

$$F(x) = -dU/dx$$

ovvero la forza è la derivata (cambiata di segno) dell'energia potenziale rispetto alla coordinata spaziale. Si pensi al caso della molla: $U(x) = \frac{kx^2}{2}$, e $-\frac{dU}{dx} = -kx = F(x)$

L'estensione al caso 3-D è immediata; le tre componenti del vettore forza sono date dalle **derivate parziali** di U rispetto alle coordinate x, y, z ovvero:

$$\vec{F}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \equiv -\vec{\nabla} U(x, y, z)$$

Dove è stato definito l'operatore $\vec{\nabla}$, detto **gradiente**.

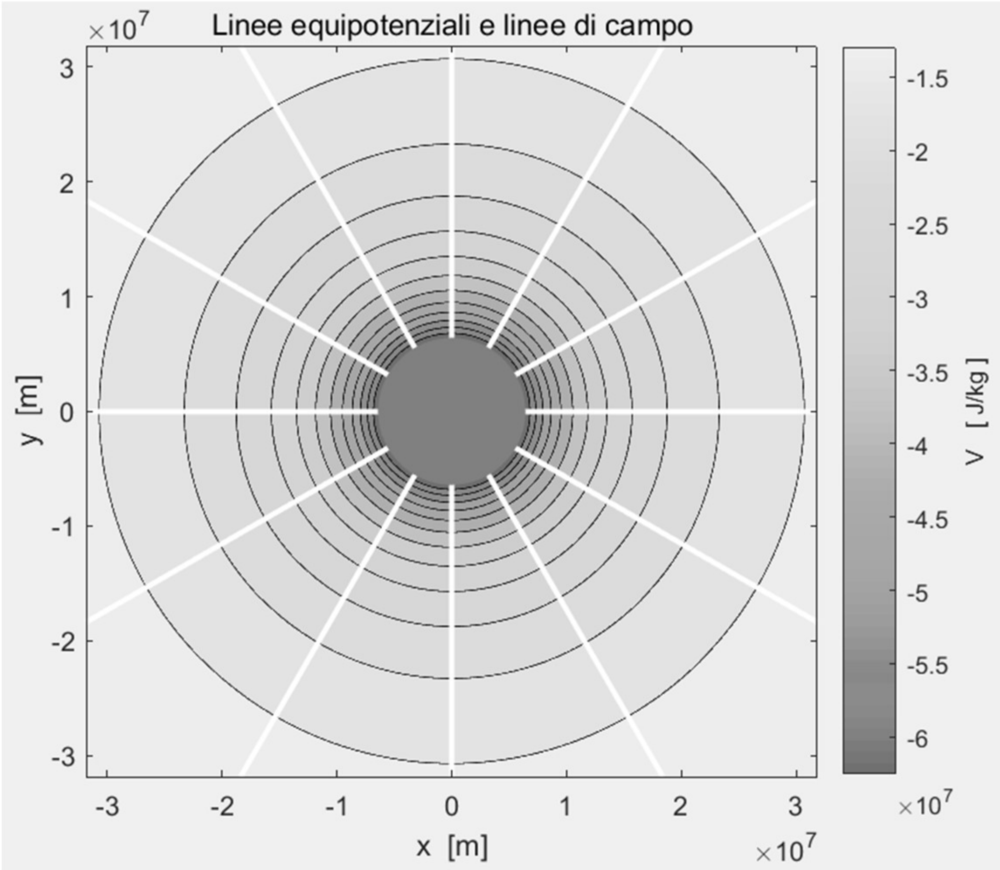
La stessa relazione sussiste fra campo gravitazionale e potenziale:

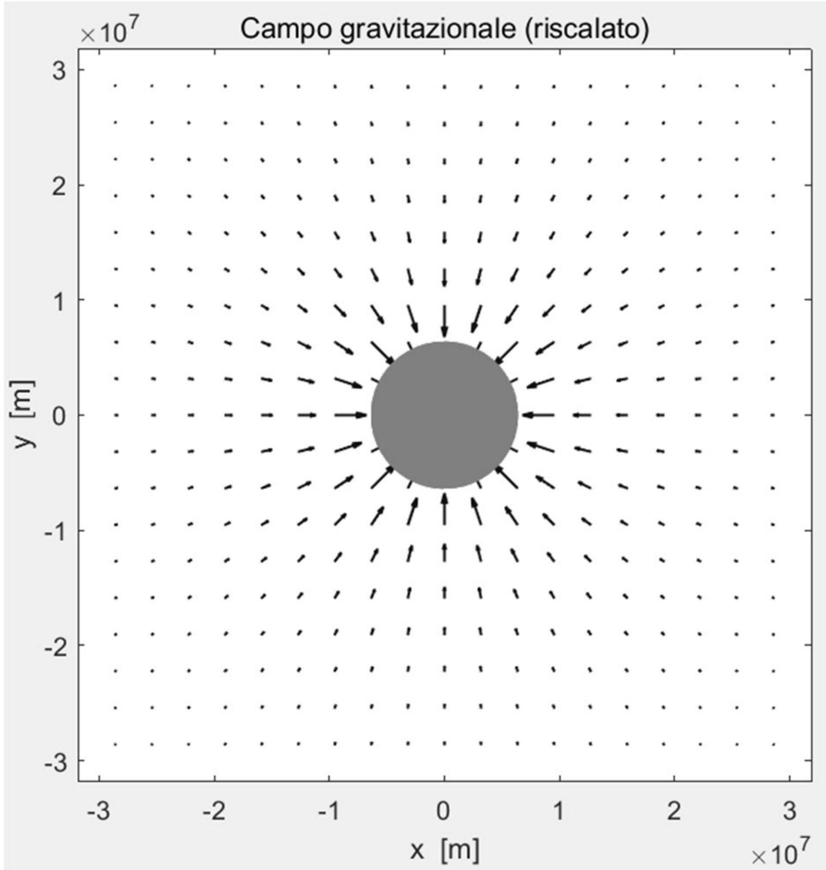
$$\vec{g}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \equiv -\vec{\nabla} V(x, y, z)$$

Il gradiente è più elevato laddove la funzione cambia più rapidamente, ovvero dove le superfici (o linee) equipotenziali sono più ravvicinate.

Potenziale e campo gravitazionale

Campo gravitazionale terrestre



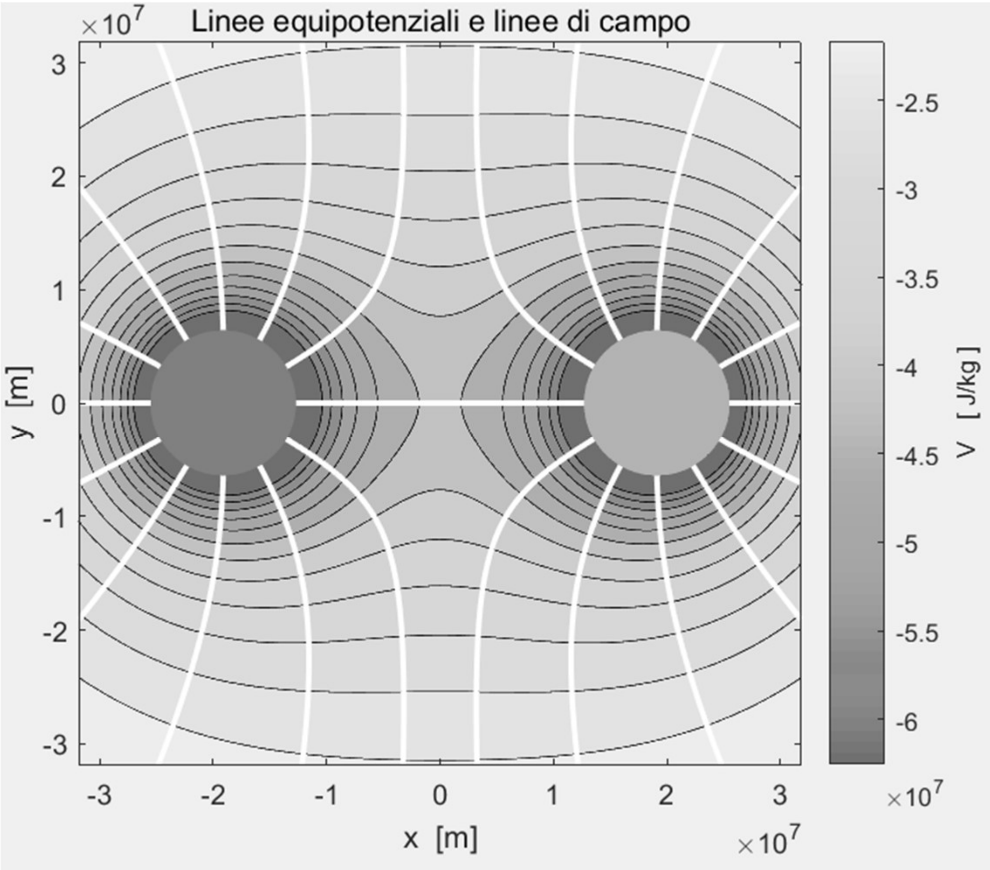


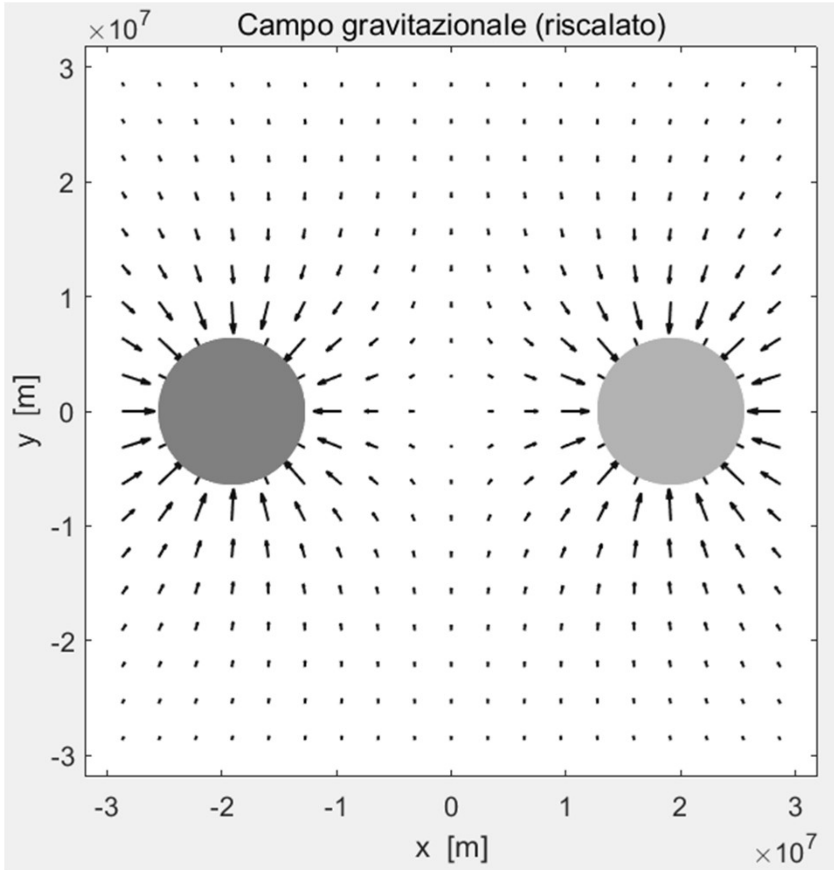
Il campo gravitazionale, rappresentato dalle linee bianche a sinistra e dai vettori blu a destra, è sempre perpendicolare alle linee equipotenziali (in realtà superfici nello spazio 3-D) ed è più intenso laddove le linee sono più ravvicinate.

Si veda lo script *Gravitational_Potential_Field.m* per la generazione della grafica.

Potenziale e campo gravitazionale

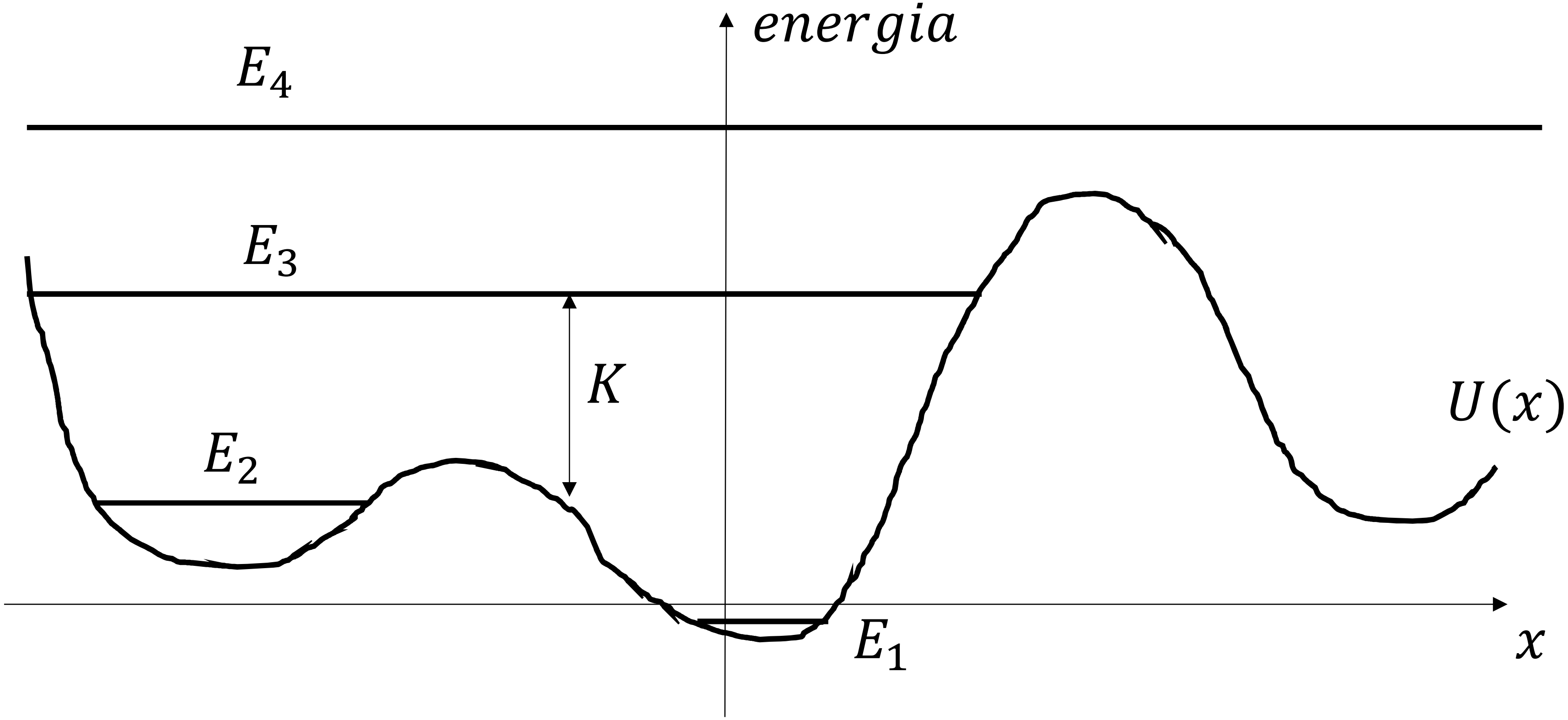
Campo gravitazionale generato da due masse pari a quella terrestre





Si veda lo script *Gravitational_Potential_Field.m* per la generazione della grafica.

Analisi grafica del moto 1-D



Poiché l’energia cinetica K è sempre ≥ 0, si ha $E \geq U$; le zone dove $U > E$ sono «proibite»
K si può ottenere per differenza, $K = E - U$
I punti di intersezione, ove $E = U$, forniscono gli estremi del moto.
In prossimità dei minimi x_{min} di U, il moto è di tipo armonico con $\omega = \sqrt{U''(x_{min})/m}$

ESERCIZI E APPLICAZIONI

1. Calcolare la velocità di fuga, ovvero la velocità che deve avere una sonda spaziale in uscita dall'atmosfera per poter raggiungere distanza «infinita» dalla terra (senza ulteriore propulsione)
2. Si consideri una molla con k=1000 N/m posta in verticale nel campo gravitazionale terrestre agganciata ad una massa m=1 kg. A) Scrivere e graficare l'energia potenziale della massa m in funzione dell'altezza z scegliendo z=0 dove la forza elastica è nulla; B) determinare la posizione di equilibrio; C) sapendo che z_{max}=5 cm, scrivere l'espressione che fornisce v in funzione di z
3. Esercizio 1 del compito del 21/06/2017
4. Esercizio 1 del compito del 03/07/2017 (assegnato per casa)
5. Esercizio 1 del compito del 06/02/2018 (assegnato per casa)

Forze non conservative

Il lavoro della forza di attrito è sempre negativo e come tale non può essere nullo lungo un percorso chiuso. La forza di attrito è quindi «non conservativa». Per le forze non conservative non si può definire un'energia potenziale. Scriviamo il lavoro totale come:

$$L = L_c + L_{nc} = U_i - U_f + L_{nc}$$

Dove L_c è il lavoro delle forze conservative e L_{nc} quello delle forze non conservative.

Poiché si ha sempre $L = K_f - K_i$, in questo caso si ottiene:

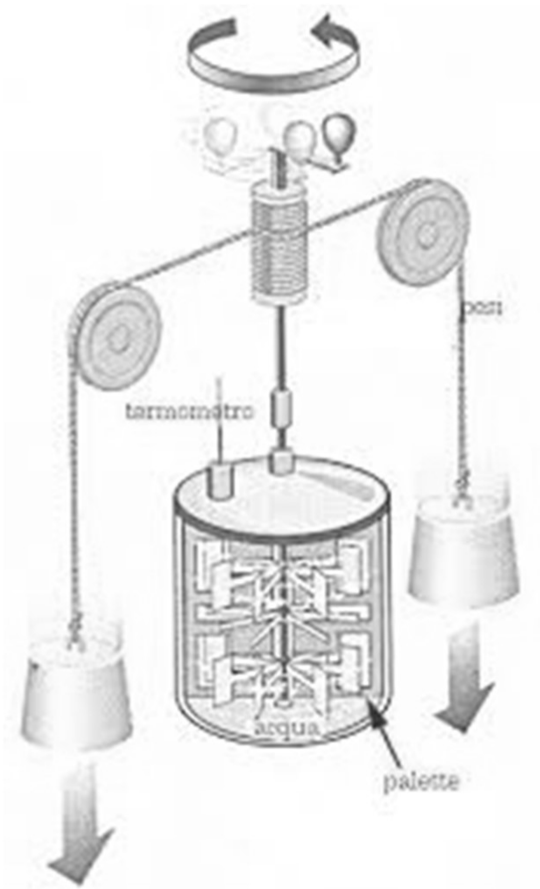
$$E_f = E_i + L_{nc} \text{ o anche } \Delta E = L_{nc}$$

quindi l'energia meccanica non si conserva. Poiché L_{nc} è generalmente negativo, si avrà una diminuzione di energia meccanica.

In quale altra forma è «fluita» l'energia meccanica mancante?

Equivalenza energia meccanica - calore

Ad opera delle forze di attrito l'energia meccanica viene convertita in calore. L'equivalenza fra lavoro e calore venne evidenziata mediante la celebre esperienza del mulinello di Joule (1840) ed è alla base del primo principio della termodinamica.



$$\Delta U = -M_{tot} g h$$

$$\Delta K = M_{tot} v^2 / 2$$

$$\Delta U + \Delta K = \Delta E < 0$$

La misura dell'aumento di temperatura permette di determinare il calore Q generato tramite attrito nell'acqua. Si trova sempre

$$-\Delta E = 4.186 Q$$

dove Q è espresso in calorie e E in Joule. In altre parole, 1 caloria equivale a 4.186 Joule e il calore è una forma di energia. Esprimendo Q in Joule, abbiamo la conservazione dell'energia nelle sue diverse forme:

$$\Delta U + \Delta K + Q = 0$$

ESERCIZI E APPLICAZIONI

1. Esercizio 1 del compito del 16/01/2018
2. Esercizio 2 del compito del 17/01/2017 (assegnato per casa)
3. Esercizio 1 del compito del 09/01/2019 (assegnato per casa)
4. Esercizio 1 del compito del 18/02/2019 (assegnato per casa)