Cônes et cylindres

Ellipse

i di dibole

Hyperbol

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

# M53 - Partie 3

novembre 2015

Cônes et cylindres

Cylindre

ourbes de niveau:

Ellips

i di diboi

Hyperbo

Niveaux des form quadratiques

Coniques e quadriques Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{R}$  et  $O \in \mathcal{E}$ .

#### Définition

Un ensemble  $\mathcal C$  est dit cône de centre  $O \in \mathcal C$  si pour tout  $M \in \mathcal C \setminus \{O\}$ ,  $\mathcal C$  contient la droite  $\langle O, M \rangle$ . Et on dit que  $\mathcal C$  est de base  $\mathcal B \subset \mathcal C$  si pour tout  $M \in \mathcal C \setminus \{O\}$ , card  $(\langle O, M \rangle \cap \mathcal B) = 1$ .

#### Définition-Proposition

Soient  $O \in \mathcal{E}$  et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  non vide, on dit que  $\mathcal{C}$  est le cône de centre O engendré par  $\mathcal{F}$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite

- $\blacksquare$   $\mathcal C$  est le plus petit cône de centre  $\mathcal C$  contenant  $\mathcal F$ .
- $\blacksquare$   $\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{\mathcal{O},\lambda}(\mathcal{F})$ , où  $H_{\mathcal{O},\lambda}$  est l'homothétie de centre  $\mathcal{O}$  et de rapport  $\lambda$

Cônes et cylindres

Cylindre

Courbes de nive

Ellips

Niveaux des form

Coniques e quadriques Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{R}$  et  $O \in \mathcal{E}$ .

#### Définition

Un ensemble  $\mathcal{C}$  est dit cône de centre  $O \in \mathcal{C}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$ ,  $\mathcal{C}$  contient la droite  $\langle O, M \rangle$ . Et on dit que  $\mathcal{C}$  est de base  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$ , card  $(\langle O, M \rangle \cap \mathcal{B}) = 1$ .

#### Définition-Proposition

Soient  $O \in \mathcal{E}$  et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  non vide, on dit que  $\mathcal{C}$  est le cône de centre O engendré par  $\mathcal{F}$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite

🔟 C est le plus petit cône de centre O contenant F

 $\mathbb{Z} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$ , où  $H_{O,\lambda}$  est l'homothétie de centre O et de rapport  $\lambda$ 

Cônes et cylindres

Cylindre

Courbes de nive

Ellipse

. .

Niveaux des forme

Coniques e quadriques Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{R}$  et  $O \in \mathcal{E}$ .

#### Définition

Un ensemble  $\mathcal{C}$  est dit cône de centre  $O \in \mathcal{C}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$ ,  $\mathcal{C}$  contient la droite  $\langle O, M \rangle$ . Et on dit que  $\mathcal{C}$  est de base  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$ , card  $(\langle O, M \rangle \cap \mathcal{B}) = 1$ .

#### Définition-Proposition

Soient  $O \in \mathcal{E}$  et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  non vide, on dit que  $\mathcal{C}$  est le cône de centre O engendré par  $\mathcal{F}$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite

C est le plus petit cône de centre O contenant F

 $\mathbb{Z} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$ , où  $H_{O,\lambda}$  est l'homothétie de centre O et de rapport  $\lambda$ 

Cônes et cylindres
Cône

ourbes de nive

Ellipse

Lilous auto a

Niveaux des forme

Coniques e quadriques Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{R}$  et  $O \in \mathcal{E}$ .

#### Définition

Un ensemble  $\mathcal C$  est dit cône de centre  $O \in \mathcal C$  si pour tout  $M \in \mathcal C \setminus \{O\}$ ,  $\mathcal C$  contient la droite  $\langle O, M \rangle$ . Et on dit que  $\mathcal C$  est de base  $\mathcal B \subset \mathcal C$  si pour tout  $M \in \mathcal C \setminus \{O\}$ , card  $(\langle O, M \rangle \cap \mathcal B) = 1$ .

#### Définition-Proposition

Soient  $O \in \mathcal{E}$  et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  non vide, on dit que  $\mathcal{C}$  est le cône de centre O engendré par  $\mathcal{F}$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- $oldsymbol{1}$   ${\mathcal C}$  est le plus petit cône de centre  ${\mathcal O}$  contenant  ${\mathcal F}$
- $\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$ , où  $H_{O,\lambda}$  est l'homothétie de centre O et de rapport  $\lambda$ .

Cônes et cylindres

ourbes de nive

Ellipse

Niveaux des form

Coniques e quadriques Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{R}$  et  $O \in \mathcal{E}$ .

#### Définition

Un ensemble  $\mathcal C$  est dit cône de centre  $O \in \mathcal C$  si pour tout  $M \in \mathcal C \setminus \{O\}$ ,  $\mathcal C$  contient la droite  $\langle O, M \rangle$ . Et on dit que  $\mathcal C$  est de base  $\mathcal B \subset \mathcal C$  si pour tout  $M \in \mathcal C \setminus \{O\}$ , card  $(\langle O, M \rangle \cap \mathcal B) = 1$ .

#### Définition-Proposition

Soient  $O \in \mathcal{E}$  et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  non vide, on dit que  $\mathcal{C}$  est le cône de centre O engendré par  $\mathcal{F}$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- **1**  $\mathcal{C}$  est le plus petit cône de centre O contenant  $\mathcal{F}$ .
- $\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$ , où  $H_{O,\lambda}$  est l'homothétie de centre O et de rapport  $\lambda$ .

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{R}$  et  $O \in \mathcal{E}$ .

#### Définition

Un ensemble  $\mathcal{C}$  est dit cône de centre  $O \in \mathcal{C}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$ ,  $\mathcal{C}$ contient la droite  $\langle O, M \rangle$ . Et on dit que  $\mathcal{C}$  est de base  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$ , card  $(\langle O, M \rangle \cap \mathcal{B}) = 1$ .

#### Définition-Proposition

Soient  $O \in \mathcal{E}$  et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  non vide, on dit que  $\mathcal{C}$  est le cône de centre Oengendré par  $\mathcal{F}$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- 1  $\mathcal C$  est le plus petit cône de centre  $\mathcal O$  contenant  $\mathcal F$ .
- $\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} \langle O, M \rangle.$

Cônes et cylindres
Cône

ourbes de nive

Lilipse

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{R}$  et  $O \in \mathcal{E}$ .

#### Définition

Un ensemble  $\mathcal{C}$  est dit cône de centre  $O \in \mathcal{C}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$ ,  $\mathcal{C}$  contient la droite  $\langle O, M \rangle$ . Et on dit que  $\mathcal{C}$  est de base  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$ , card  $(\langle O, M \rangle \cap \mathcal{B}) = 1$ .

#### Définition-Proposition

Soient  $O \in \mathcal{E}$  et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  non vide, on dit que  $\mathcal{C}$  est le cône de centre O engendré par  $\mathcal{F}$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- **1**  $\mathcal{C}$  est le plus petit cône de centre O contenant  $\mathcal{F}$ .
- **3**  $C = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_{O,\lambda}(\mathcal{F})$ , où  $H_{O,\lambda}$  est l'homothétie de centre O et de rapport  $\lambda$ .

es et cylindres

Cylindre Courbes de niveaux

Courbes de nive

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cône standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

**1** 
$$C = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

 $\square$  C est le cône de centre 0 engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$ 

 $\mathbb{Z}$  C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x=z,y=0\}$ .

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les **coniques** (ellipses, paraboles et hyperboles ) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

es et cylindres

Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cône standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

C est le cône de centre 0 engendré par le cercle {x² + y² = 1, z = 1}.
 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle {x - z y = 0}.

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les **coniques** (ellipses, paraboles et hyperboles ) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cône standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

es et cylindres

Cylindre

Courbes de niv

Ellips

Lile on a sile o

Niveaux des form

Coniques e quadriques On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cône standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

- **2** C est le cône de centre 0 engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droité vectorielle  $\{x=z,y=0\}$ .

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les **coniques** (ellipses, paraboles et hyperboles ) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cône standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

1 
$$C = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

- **2** C est le cône de centre 0 engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$ .
- $\mathcal{C}$  est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite *vectorielle*  $\{x = z, y = 0\}$ .

Cônes et cylindres Cône Cylindre

Ellipse

i ai aboi

Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cône standard  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

1 
$$C = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

- **2** C est le cône de centre 0 engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x=z,y=0\}$ .

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les coniques (ellipses, paraboles et hyperboles de l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

Cônes et cylindres

Cône

Cylindre

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques quadriques

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cône standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

1 
$$C = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

- **2** C est le cône de centre 0 engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x=z,y=0\}$ .

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les coniques (ellipses, paraboles et hyperboles, éventuellement dégénérées en des droites ou en un point) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

Cônes et cylindres

Cône

Cylindre

Courbes de niveaux

Ellipse

r al abu

пурегроїє

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cône standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

1 
$$C = \{x^2 + y^2 = z^2\} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

- **2** C est le cône de centre 0 engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x=z,y=0\}$ .

Les intersections du cône standard avec les hyperplans non vectoriels sont les coniques (ellipses, paraboles et hyperboles, éventuellement dégénérées en des droites ou en un point) qui vont être l'objet d'étude de cette troisième partie du cours.

Cônes et cylindres

Cône

Courbes de niveaux

Ellipse

.....

Niveaux des forme

Coniques e

- I L'espace tout entier  $\mathbb{R}^n$  est un cône de centre 0 et de base « la moitié » de la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ .
- 2 Toute réunion d'espaces vectoriels est un cône de centre 0.
- 3  $C = \{x^2 = yz\}$  est un cône de centre 0 et de base l'ellipse  $\{x^2 + (y-1)^2 = 1, y+z=2\}$ .
- Les images directes et inverses d'un cône par des applications affines sont des cônes.

Cônes et cylindres

Cône

Courbes de niveaux

Ellips

Niveaux des forme

Coniques quadriques

- I L'espace tout entier  $\mathbb{R}^n$  est un cône de centre 0 et de base « la moitié » de la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ .
- 2 Toute réunion d'espaces vectoriels est un cône de centre 0
- 3  $C = \{x^2 = yz\}$  est un cône de centre 0 et de base l'ellipse  $\{x^2 + (y-1)^2 = 1, y+z=2\}$ .
- 4 Les images directes et inverses d'un cône par des applications affines sont des cônes.

Cônes et cylindres

Cône Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

11.......

Niveaux des forme

Coniques e

- I L'espace tout entier  $\mathbb{R}^n$  est un cône de centre 0 et de base « la moitié » de la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ .
- 2 Toute réunion d'espaces vectoriels est un cône de centre 0.
- 3  $C = \{x^2 = yz\}$  est un cône de centre 0 et de base l'ellipse  $\{x^2 + (y-1)^2 = 1, y+z=2\}$ .
- 4 Les images directes et inverses d'un cône par des applications affines sont des cônes.

Cônes et cylindres

**Cône** Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

Lile on a sile o

Niveaux des forme

Coniques et

- I L'espace tout entier  $\mathbb{R}^n$  est un cône de centre 0 et de base « la moitié » de la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ .
- 2 Toute réunion d'espaces vectoriels est un cône de centre 0.
- 3  $C = \{x^2 = yz\}$  est un cône de centre 0 et de base l'ellipse  $\{x^2 + (y-1)^2 = 1, y+z=2\}$ .
- 4 Les images directes et inverses d'un cône par des applications affines sont des cônes.

Cônes et cylindres

**Cône** Cylindre

Courbes de niveaux

Lilips

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e

- I L'espace tout entier  $\mathbb{R}^n$  est un cône de centre 0 et de base « la moitié » de la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ .
- 2 Toute réunion d'espaces vectoriels est un cône de centre 0.
- 3  $C = \{x^2 = yz\}$  est un cône de centre 0 et de base l'ellipse  $\{x^2 + (y-1)^2 = 1, y+z=2\}$ .
- 4 Les images directes et inverses d'un cône par des applications affines sont des cônes.

Cônes et cylindres

Cône

Cylindre

Ellinan

Parabo

Hyperb

Niveaux des forme quadratiques

Coniques quadriques

Soient  $\mathcal E$  un espace affine et  $\overrightarrow{\mathcal F}\subset \overrightarrow{\mathcal E}$  un sous-espace vectoriel de directions.

#### Définition

Un ensemble non vide  $\mathcal C$  est dit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal F}$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ ,  $\mathcal C$  contient le sous-espace affine  $M+\overrightarrow{\mathcal F}$ . Et on dit que  $\mathcal C$  est de base  $\mathcal B\subset\mathcal C$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ , card  $\left((M+\overrightarrow{\mathcal F})\cap\mathcal B\right)=1$ .

Le plus souvent la direction  ${\mathcal F}$  est une droite.

### Définition-Proposition

Soient  $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$  un sous-espace vectoriel de directions, et  $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$  non vide, on di que  $\mathcal{C}$  est le cylindre de direction  $\vec{\mathcal{F}}$  engendré par  $\mathcal{B}$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

 ${\color{red} \blacksquare}$   ${\color{red} {\cal C}}$  est le plus petit cylindre de direction  ${\color{red} {\cal F}}$  contenant  ${\color{red} {\cal B}}$ 

 $\mathbb{C} = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}} T_{\vec{v}}(\mathcal{B})$ , où  $T_{\vec{v}}$  est la translation par le vecteur  $\vec{v}$ 

Cônes et cylindres
Cône
Cylindre

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e

Soient  $\mathcal E$  un espace affine et  $\overrightarrow{\mathcal F}\subset \overrightarrow{\mathcal E}$  un sous-espace vectoriel de directions.

#### Définition

Un ensemble non vide  $\mathcal{C}$  est dit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}$  contient le sous-espace affine  $M + \overrightarrow{\mathcal{F}}$ . Et on dit que  $\mathcal{C}$  est de base  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C}$ , card  $((M + \overrightarrow{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}) = 1$ .

#### Définition-Proposition

- ${\color{red} { extbf{I}}} \;\; {\color{blue} { extbf{C}}} \;\; {\color{blue} { extbf{c}}}} \;\; {\color{blue} { extbf{c}}} \;\; {\color{blue} { extbf{c}}}} \;\; {\color{blue} { extbf{c}}} \;\; {\color{blue} { extbf{c}}} \;\; {\color{blue} { extbf{c}}}} \;\; {\color{blue} { extbf{c}}} \;\; {\color{blue} { extbf{c}}}} \;\; {\color{blue} { extbf{c}}} \;\; {\color{blue} { extbf$
- $\mathbb{C} = \bigcup_{\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}} T_{\overrightarrow{v}}(\mathcal{B})$ , où  $T_{\overrightarrow{v}}$  est la translation par le vecteur  $\overrightarrow{v}$ .

Cônes et cylindres
Cône
Cylindre

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

Soient  $\mathcal E$  un espace affine et  $\overrightarrow{\mathcal F}\subset \overrightarrow{\mathcal E}$  un sous-espace vectoriel de directions.

#### Définition

Un ensemble non vide  $\mathcal C$  est dit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal F}$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ ,  $\mathcal C$  contient le sous-espace affine  $M+\overrightarrow{\mathcal F}$ . Et on dit que  $\mathcal C$  est de base  $\mathcal B\subset\mathcal C$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ , card  $\left((M+\overrightarrow{\mathcal F})\cap\mathcal B\right)=1$ .

Le plus souvent la direction  ${\mathcal F}$  est une droite

#### Définition-Proposition

- ${\color{blue} \blacksquare}$   ${\color{blue} \mathcal{C}}$  est le plus petit cylindre de direction  ${\color{blue} \mathcal{F}}$  contenant  ${\color{blue} \mathcal{B}}.$
- $\mathcal{C} = \bigcup_{M \in \mathcal{B}} (M + \tilde{\mathcal{F}}).$
- $\mathbb{C} = \bigcup_{\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}} T_{\overrightarrow{v}}(\mathcal{B})$ , où  $T_{\overrightarrow{v}}$  est la translation par le vecteur  $\overrightarrow{v}$ .

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine et  $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$  un sous-espace vectoriel de directions.

#### Définition

Un ensemble non vide  $\mathcal{C}$  est dit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C}$ .  $\mathcal{C}$ contient le sous-espace affine  $M + \overline{\mathcal{F}}$ . Et on dit que  $\mathcal{C}$  est de base  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$  si pour tout  $M \in \mathcal{C}$ , card  $((M + \overrightarrow{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}) = 1$ .

Le plus souvent la direction  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  est une droite.

Cônes et cylindres

Cône
Cylindre

ourbes de nive

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques quadriques

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine et  $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$  un sous-espace vectoriel de directions.

#### Définition

Un ensemble non vide  $\mathcal C$  est dit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal F}$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ ,  $\mathcal C$  contient le sous-espace affine  $M+\overrightarrow{\mathcal F}$ . Et on dit que  $\mathcal C$  est de base  $\mathcal B\subset\mathcal C$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ , card  $\left((M+\overrightarrow{\mathcal F})\cap\mathcal B\right)=1$ .

Le plus souvent la direction  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  est une droite.

### Définition-Proposition

- $\blacksquare$   $\mathcal C$  est le plus petit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal F}$  contenant  $\mathcal B$ .
- $\mathcal{C} = \bigcup_{\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}} T_{\overrightarrow{v}}(\mathcal{B})$ , où  $T_{\overrightarrow{v}}$  est la translation par le vecteur  $\overrightarrow{v}$

Cônes et cylindres

Cône
Cylindre

Courbes de nive

Parabol

Hyperb

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine et  $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$  un sous-espace vectoriel de directions.

#### Définition

Un ensemble non vide  $\mathcal C$  est dit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal F}$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ ,  $\mathcal C$  contient le sous-espace affine  $M+\overrightarrow{\mathcal F}$ . Et on dit que  $\mathcal C$  est de base  $\mathcal B\subset\mathcal C$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ , card  $\left((M+\overrightarrow{\mathcal F})\cap\mathcal B\right)=1$ .

Le plus souvent la direction  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  est une droite.

### Définition-Proposition

- **1**  $\mathcal{C}$  est le plus petit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  contenant  $\mathcal{B}$ .
- $\mathcal{C} = \bigcup_{\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}} T_{\overrightarrow{v}}(\mathcal{B})$ , où  $T_{\overrightarrow{v}}$  est la translation par le vecteur  $\overrightarrow{v}$

Cônes et cylindres

Cône
Cylindre

ourbes de niv

Ellipse

Niveaux des forn

quadratiques

Coniques et

Soient  $\mathcal E$  un espace affine et  $\overrightarrow{\mathcal F}\subset \overrightarrow{\mathcal E}$  un sous-espace vectoriel de directions.

#### Définition

Un ensemble non vide  $\mathcal C$  est dit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal F}$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ ,  $\mathcal C$  contient le sous-espace affine  $M+\overrightarrow{\mathcal F}$ . Et on dit que  $\mathcal C$  est de base  $\mathcal B\subset\mathcal C$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ , card  $\left((M+\overrightarrow{\mathcal F})\cap\mathcal B\right)=1$ .

Le plus souvent la direction  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  est une droite.

### Définition-Proposition

- **1**  $\mathcal{C}$  est le plus petit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  contenant  $\mathcal{B}$ .
- $\mathcal{C} = \bigcup_{\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}} T_{\overrightarrow{v}}(\mathcal{B})$ , où  $T_{\overrightarrow{v}}$  est la translation par le vecteur  $\overrightarrow{v}$

Cônes et cylindres

Cône

Cylindre

Courbes de niv

Ellipse

Гагаро

Niveaux des form

Coniques of quadriques

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine et  $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$  un sous-espace vectoriel de directions.

#### Définition

Un ensemble non vide  $\mathcal C$  est dit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal F}$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ ,  $\mathcal C$  contient le sous-espace affine  $M+\overrightarrow{\mathcal F}$ . Et on dit que  $\mathcal C$  est de base  $\mathcal B\subset\mathcal C$  si pour tout  $M\in\mathcal C$ , card  $\left((M+\overrightarrow{\mathcal F})\cap\mathcal B\right)=1$ .

Le plus souvent la direction  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  est une droite.

### Définition-Proposition

- **1**  $\mathcal{C}$  est le plus petit cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  contenant  $\mathcal{B}$ .
- $\mathcal{C} = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}} T_{\vec{v}}(\mathcal{B})$ , où  $T_{\vec{v}}$  est la translation par le vecteur  $\vec{v}$ .

# Le cylindre standard

Cônes et cylindres
Cône
Cylindre
Courbes de niveaux

Ellips

Parabo

Турегроге

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cylindre standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

- ② C est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x = 1, y = 0\}$ .

Ellipse

i ai abo

Niversity des form

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cylindre standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

- 2 C est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle  $\{x^2+y^2=1,z=0\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x = 1, y = 0\}$ .

Ellipse

. .........

Niveaux des form

Coniques e quadriques On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cylindre standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

- **2** C est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x = 1, y = 0\}$ .

Ellipse

Niveaux des forme

Coniques equadriques

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cylindre standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

- **2** C est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x = 1, y = 0\}$ .

# Le cylindre standard

Cônes et cylindres
Cône
Cylindre
Courbes de niveaux

Ellipse

. -----

Niveaux des form

Coniques of quadriques

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cylindre standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

- 2 C est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x = 1, y = 0\}$ .

# Le cylindre standard

Cônes et cylindres
Cône
Cylindre
Courbes de niveaux

Ellipse

Parabo

нурегроје

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cylindre standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

- **2** C est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x = 1, y = 0\}$ .

Ellipse

rarabo

Niverny des form

Coniques et

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

### Définition-Proposition

Le cylindre standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

- **2** C est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x = 1, y = 0\}$ .

Cônes et cylindres
Cône
Cylindre
Courbes de niveaux

Ellipse

. .

Niveaux des form

Coniques e

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ , vu comme espace affine.

#### Définition-Proposition

Le cylindre standard  $\mathcal C$  de  $\mathbb R^3$  est défini par l'une des conditions équivalentes :

- **2** C est le cylindre de direction Oz engendré par le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ .
- 3 C est l'ensemble obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la droite vectorielle  $\{x = 1, y = 0\}$ .

L'intersection du cylindre standard avec un hyperplan est une ellipse, deux droites, une droite, ou bien vide.

### Définition de courbe de niveau

Cônes et cylindres <sup>Cône</sup>

Courbes de niveaux

Ellips

Parabo

Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

Soit une application  $f: A \rightarrow B$  entre ensembles.

#### Définition

Soit  $k \in B$ , l'ensemble  $\mathcal{L}_k = f^{-1}(\{k\})$  est appelé la courbe de niveau k de f. On peut également l'appeler la ligne de niveau k ou l'ensemble de niveau k de f, et des notations alternatives sont  $\mathcal{L}_k(f)$  ou  $\mathcal{L}_{f,k}$ .

La terminologie «courbe de niveau» prend tout son sens quand  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  est différentiable et k une valeur régulière.

### Définition de courbe de niveau

Cônes et cylindres

Courbes de niveaux

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

Soit une application  $f: A \rightarrow B$  entre ensembles.

#### Définition

Soit  $k \in B$ , l'ensemble  $\mathcal{L}_k = f^{-1}(\{k\})$  est appelé la courbe de niveau k de f. On peut également l'appeler la ligne de niveau k ou l'ensemble de niveau k de f, et des notations alternatives sont  $\mathcal{L}_k(f)$  ou  $\mathcal{L}_{f,k}$ .

La terminologie «courbe de niveau» prend tout son sens quand  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  est différentiable et k une valeur régulière.

### Définition de courbe de niveau

Cônes et cylindres

Cône
Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

Parabo

Турегьоге

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

Soit une application  $f: A \rightarrow B$  entre ensembles.

#### Définition

Soit  $k \in B$ , l'ensemble  $\mathcal{L}_k = f^{-1}(\{k\})$  est appelé la courbe de niveau k de f. On peut également l'appeler la ligne de niveau k ou l'ensemble de niveau k de f, et des notations alternatives sont  $\mathcal{L}_k(f)$  ou  $\mathcal{L}_{f,k}$ .

La terminologie «courbe de niveau» prend tout son sens quand  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  est différentiable et k une valeur régulière.

Cônes et cylindres

Cylindre

Courbes de niveaux

Ellipse

11.......

Niveaux des forme

Coniques et

- 1 Pour  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\mathcal{L}_k$  est un cercle, un point, ou vide, selon que k soit positif (valeur régulière), nul ou négatif
- Pour f(x, y) = ax + by, avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , les  $\mathcal{L}_k$  sont les droites affines de direction la droite vectorielle  $\mathcal{L}_0$ .
- Plus généralement tout ensemble défini par des équations  $\{x \in \mathcal{E} \mid f_1(x) = b_1, \dots, f_p(x) = b_p\}$  est la courbe de niveau  $(b_1, \dots, b_p)$  de l'application  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ .

Cônes et cylindres

Courbes de niveaux

Ellips

Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of

- 1 Pour  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\mathcal{L}_k$  est un cercle, un point, ou vide, selon que k soit positif (valeur régulière), nul ou négatif.
- 2 Pour f(x, y) = ax + by, avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , les  $\mathcal{L}_k$  sont les droites affines de direction la droite vectorielle  $\mathcal{L}_0$ .
- 3 Plus généralement tout ensemble défini par des équations  $\{x \in \mathcal{E} \mid f_1(x) = b_1, \dots, f_p(x) = b_p\}$  est la courbe de niveau  $(b_1, \dots, b_p)$  de l'application  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ .

Cônes et cylindres

Courbes de niveaux

Ellips

Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e

- Pour  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\mathcal{L}_k$  est un cercle, un point, ou vide, selon que k soit positif (valeur régulière), nul ou négatif.
- Pour f(x, y) = ax + by, avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , les  $\mathcal{L}_k$  sont les droites affines de direction la droite vectorielle  $\mathcal{L}_0$ .
- Plus généralement tout ensemble défini par des équations  $\{x \in \mathcal{E} \mid f_1(x) = b_1, \dots, f_p(x) = b_p\}$  est la courbe de niveau  $(b_1, \dots, b_p)$  de l'application  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ .

Cônes et cylindres

Cône

Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

Library and a

Niveaux des forme

Coniques e

- 1 Pour  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\mathcal{L}_k$  est un cercle, un point, ou vide, selon que k soit positif (valeur régulière), nul ou négatif.
- Pour f(x, y) = ax + by, avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , les  $\mathcal{L}_k$  sont les droites affines de direction la droite vectorielle  $\mathcal{L}_0$ .
- 3 Plus généralement tout ensemble défini par des équations  $\{x \in \mathcal{E} \mid f_1(x) = b_1, \dots, f_p(x) = b_p\}$  est la courbe de niveau  $(b_1, \dots, b_p)$  de l'application  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ .

Cône Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

Niveaux des form

Coniques e quadriques

### Proposition

Soit un isomorphisme  $\phi: A \xrightarrow{\sim} B$  et  $f: A \to C$ , alors l'image de  $\mathcal{L}_k(f)$  par  $\phi$  est  $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$ .

#### Exemples

- Soit  $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x, y) = (ax, by)$ . Alors l'image du cercle unité par  $\phi$  est l'ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{k}\right)^2 = 1$ .
- Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x,y) = (x-y,x+y)$ 
  - $\mathbb{E} \phi(\{ax + by = 1\}) = \{x(a b) + y(a b)\}$
- Soit  $\phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(x, y, z) = (x, z y, z + y)$ . Alors l'image du cône standard est le cône d'équation  $\{x^2 = yz\}$ .

### Proposition

Cône Cône

Courbes de niveaux

Ellips

I alabe

Hyperbo

Niveaux des form quadratiques

Coniques e

### Proposition

Soit un isomorphisme  $\phi: A \xrightarrow{\sim} B$  et  $f: A \to C$ , alors l'image de  $\mathcal{L}_k(f)$  par  $\phi$  est  $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$ .

### Exemples:

- Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x,y) = (ax,by)$ . Alors l'image du cercle unité par  $\phi$  est l'ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .
- Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x, y) = (x y, x + y)$ .
- Soit  $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(x, y, z) = (x, z y, z + y)$ . Alors l'image du cône standard est le cône d'équation  $\{x^2 = yz\}$ .

### Proposition

Cônes et cylindres <sup>Cône</sup> Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques quadriques

### Proposition

Soit un isomorphisme  $\phi: A \xrightarrow{\sim} B$  et  $f: A \to C$ , alors l'image de  $\mathcal{L}_k(f)$  par  $\phi$  est  $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$ .

### Exemples:

- Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x,y) = (ax,by)$ . Alors l'image du cercle unité par  $\phi$  est l'ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .
- 2 Soit  $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x, y) = (x y, x + y)$
- Soit  $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(x, y, z) = (x, z y, z + y)$ . Alors l'image du cône standard est le cône d'équation  $\{x^2 = yz\}$ .

#### Proposition

Cônes et cylindres

Cône

Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

### Proposition

Soit un isomorphisme  $\phi: A \xrightarrow{\sim} B$  et  $f: A \to C$ , alors l'image de  $\mathcal{L}_k(f)$  par  $\phi$  est  $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$ .

### Exemples:

- **1** Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x,y) = (ax,by)$ . Alors l'image du cercle unité par  $\phi$  est l'ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .
- 2 Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x, y) = (x y, x + y)$ .

Soit  $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$ . Alors l'image du cône standard est le cône d'équation  $\{x^2 = yz\}$ .

#### Proposition

Cônes et cylindres

Cône

Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e

### Proposition

Soit un isomorphisme  $\phi: A \xrightarrow{\sim} B$  et  $f: A \to C$ , alors l'image de  $\mathcal{L}_k(f)$  par  $\phi$  est  $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$ .

### Exemples:

- **1** Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x,y) = (ax,by)$ . Alors l'image du cercle unité par  $\phi$  est l'ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .
- 2 Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x, y) = (x y, x + y)$ .

Soit  $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$ . Alors l'image du cône standard est le cône d'équation  $\{x^2 = yz\}$ .

#### Proposition

Cônes et cylindres

Cône
Collindre

Courbes de niveaux

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme

Coniques of quadriques

### Proposition

Soit un isomorphisme  $\phi: A \xrightarrow{\sim} B$  et  $f: A \to C$ , alors l'image de  $\mathcal{L}_k(f)$  par  $\phi$  est  $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$ .

#### Exemples:

- Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x,y) = (ax,by)$ . Alors l'image du cercle unité par  $\phi$  est l'ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .
- 2 Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x, y) = (x y, x + y)$ .

Soit  $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(x, y, z) = (x, z - y, z + y)$ . Alors l'image du cône standard est le cône d'équation  $\{x^2 = yz\}$ .

#### Proposition

Cônes et cylindres

Courbes de niveaux

Ellips

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e

### Proposition

Soit un isomorphisme  $\phi: A \xrightarrow{\sim} B$  et  $f: A \to C$ , alors l'image de  $\mathcal{L}_k(f)$  par  $\phi$  est  $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$ .

### Exemples:

- Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x,y) = (ax,by)$ . Alors l'image du cercle unité par  $\phi$  est l'ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .
- **2** Soit  $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x, y) = (x y, x + y)$ .
- 3 Soit  $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(x, y, z) = (x, z y, z + y)$ . Alors l'image du cône standard est le cône d'équation  $\{x^2 = yz\}$ .

#### Proposition

Cônes et cylindres

Courbes de niveaux

Ellips

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques (

### Proposition

Soit un isomorphisme  $\phi: A \xrightarrow{\sim} B$  et  $f: A \to C$ , alors l'image de  $\mathcal{L}_k(f)$  par  $\phi$  est  $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$ .

### Exemples:

- **1** Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x,y) = (ax,by)$ . Alors l'image du cercle unité par  $\phi$  est l'ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .
- 2 Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x, y) = (x y, x + y)$ .
- Soit  $\phi: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(x, y, z) = (x, z y, z + y)$ . Alors l'image du cône standard est le cône d'équation  $\{x^2 = yz\}$ .

#### Proposition

Cônes et cylindres

Cône

Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques quadriques

### Proposition

Soit un isomorphisme  $\phi: A \xrightarrow{\sim} B$  et  $f: A \to C$ , alors l'image de  $\mathcal{L}_k(f)$  par  $\phi$  est  $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$ .

#### Exemples:

- **1** Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x,y) = (ax,by)$ . Alors l'image du cercle unité par  $\phi$  est l'ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .
- 2 Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x, y) = (x y, x + y)$ .
- Soit  $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(x,y,z) = (x,z-y,z+y)$ . Alors l'image du cône standard est le cône d'équation  $\{x^2 = yz\}$ .

#### Proposition

Cônes et cylindres

Cône

Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques (

### Proposition

Soit un isomorphisme  $\phi: A \xrightarrow{\sim} B$  et  $f: A \to C$ , alors l'image de  $\mathcal{L}_k(f)$  par  $\phi$  est  $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$ .

#### Exemples:

- Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x,y) = (ax,by)$ . Alors l'image du cercle unité par  $\phi$  est l'ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .
- 2 Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x, y) = (x y, x + y)$ .
- Soit  $\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(x,y,z) = (x,z-y,z+y)$ . Alors l'image du cône standard est le cône d'équation  $\{x^2 = yz\}$ .

#### Proposition

Cônes et cylindres <sup>Cône</sup> Cylindre

Courbes de niveaux

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des form quadratiques

Coniques quadrique

### Proposition

Soit un isomorphisme  $\phi: A \xrightarrow{\sim} B$  et  $f: A \to C$ , alors l'image de  $\mathcal{L}_k(f)$  par  $\phi$  est  $\mathcal{L}_k(f \circ \phi^{-1})$ .

#### Exemples:

- 1 Soit  $\phi: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x,y) = (ax,by)$ . Alors l'image du cercle unité par  $\phi$  est l'ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .
- 2 Soit  $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  définie par  $\phi(x, y) = (x y, x + y)$ .
- 3 Soit  $\phi: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(x, y, z) = (x, z y, z + y)$ . Alors l'image du cône standard est le cône d'équation  $\{x^2 = yz\}$ .

#### Proposition

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble E est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Dans un repère orthonormé, E est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ , où les constantes  $a \ge b > 0$  sont appelées les rayons.
- 2 Il existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, et a > c tels que  $E = \{ M \in \mathcal{E} \mid d(F_1, M) + d(M, F_2) = 2a \}$ .
- 3 Soit E est un cercle, soit il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé foyer, et  $\varepsilon \in ]0,1[$ , appelé excentricité, tels que  $E = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F,M) = \varepsilon \ d(M,\mathcal{D})\}.$

D'autres définitions équivalentes d'une ellipse existent.

Si 
$$d(F, \mathcal{D}) = h$$
, alors on a les relations entre les paramètres :  $a^2 = c^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ , et  $h = a(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon)$ .

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble E est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Dans un repère orthonormé, E est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ , où les constantes  $a \ge b > 0$  sont appelées les rayons.
- Il existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, e a > c tels que  $E = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F_1, M) + d(M, F_2) = 2a\}$ .
- 3 Soit E est un cercle, soit il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé foyer, et  $\varepsilon \in ]0,1[$ , appelé excentricité, tels que  $E = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F,M) = \varepsilon \ d(M,\mathcal{D})\}.$

D'autres définitions équivalentes d'une ellipse existent.

Si  $d(F, \mathcal{D}) = h$ , alors on a les relations entre les paramètres :  $a^2 = c^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ , et  $h = a(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon)$ .

Ellipse

Parab

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e quadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal{E}$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble E est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Dans un repère orthonormé, E est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ , où les constantes  $a \ge b > 0$  sont appelées les rayons.
- 2 Il existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, et a > c tels que  $E = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F_1, M) + d(M, F_2) = 2a\}$ .
- 3 Soit E est un cercle, soit il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé foyer, et  $\varepsilon \in ]0,1[$ , appelé excentricité, tels que  $E = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F,M) = \varepsilon \ d(M,\mathcal{D})\}.$

Si d(F, D) = h, alors on a les relations entre les paramètres :  $a^2 = c^2 + b^2$ 

Ellipse

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal{E}$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble E est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- Dans un repère orthonormé, E est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ , où les constantes  $a \ge b > 0$  sont appelées les rayons.
- 2 Il existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, et a > c tels que  $E = \{ M \in \mathcal{E} \mid d(F_1, M) + d(M, F_2) = 2a \}.$
- 3 Soit E est un cercle, soit il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé foyer, et  $\varepsilon \in ]0,1[$ , appelé excentricité, tels que  $E = \{ M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = \varepsilon \ d(M, \mathcal{D}) \}.$

## Définition d'une ellipse

Cônes et cylindres

Ellipse

Parab<sub>0</sub>

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e quadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble E est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Dans un repère orthonormé, E est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ , où les constantes  $a \ge b > 0$  sont appelées les rayons.
- 2 Il existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, et a > c tels que  $E = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F_1, M) + d(M, F_2) = 2a\}$ .
- 3 Soit E est un cercle, soit il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé foyer, et  $\varepsilon \in ]0,1[$ , appelé excentricité, tels que  $E = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F,M) = \varepsilon \ d(M,\mathcal{D})\}.$

D'autres définitions équivalentes d'une ellipse existent.

Si  $d(F, \mathcal{D}) = h$ , alors on a les relations entre les paramètres :  $a^2 = c^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ , et  $h = a(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon)$ .

Ellipse

Parab

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble E est dit une ellipse s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Dans un repère orthonormé, E est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ , où les constantes  $a \ge b > 0$  sont appelées les rayons.
- 2 II existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, et a > c tels que  $E = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F_1, M) + d(M, F_2) = 2a\}$ .
- 3 Soit E est un cercle, soit il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé foyer, et  $\varepsilon \in ]0,1[$ , appelé excentricité, tels que  $E = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F,M) = \varepsilon \ d(M,\mathcal{D})\}.$

D'autres définitions équivalentes d'une ellipse existent.

Si 
$$d(F, D) = h$$
, alors on a les relations entre les paramètres :  $a^2 = c^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ , et  $h = a(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon)$ .

Ellipse

Cônes et cylindres

Ellipse

Hymorbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e

- 1 Toute ellipse possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'ellipse.
- 2 Toute ellipse qui n'est pas un cercle admet exactement 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
- 3 Les cercles ont une infinité d'axes de symétrie : toute droite qui passe par le centre en est un.
- L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une ellipse est une ellipse (resp. de même excentricité, resp. de mêmes rayons).

Cônes et cylindres

Ellipse

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e quadriques

- 1 Toute ellipse possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'ellipse.
- 2 Toute ellipse qui n'est pas un cercle admet exactement 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
- 3 Les cercles ont une infinité d'axes de symétrie : toute droite qui passe par le centre en est un.
- L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une ellipse est une ellipse (resp. de même excentricité, resp. de mêmes rayons).

Cônes et cylindres

Ellipse

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques of quadriques

- 1 Toute ellipse possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'ellipse.
- 2 Toute ellipse qui n'est pas un cercle admet exactement 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
- 3 Les cercles ont une infinité d'axes de symétrie : toute droite qui passe par le centre en est un.
- 4 L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une ellipse est une ellipse (resp. de même excentricité, resp. de mêmes rayons).

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques (

- 1 Toute ellipse possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'ellipse.
- 2 Toute ellipse qui n'est pas un cercle admet exactement 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
- 3 Les cercles ont une infinité d'axes de symétrie : toute droite qui passe par le centre en est un.
- 4 L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une ellipse est une ellipse (resp. de même excentricité, resp. de mêmes rayons).

Cônes et cylindres

Ellips

#### Parabole

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e quadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble P est dit une parabole s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Dans un repère orthonormé, P est défini par une équation cartésienne de la forme  $y^2 = 2px$  avec p > 0.
- 2 Il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la directrice, et un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé le foyer, tels que  $P = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = d(M, \mathcal{D})\}.$

Les deux conditions sont reliées par l'équation  $d(F, \mathcal{D}) = p$ . Au vu de la deuxième condition, on dit que l'excentricité d'une parabole est  $\varepsilon = 1$ .

Cônes et cylindres

Ellips

#### Parabole

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e quadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble P est dit une parabole s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- **1** Dans un repère orthonormé, P est défini par une équation cartésienne de la forme  $y^2 = 2px$  avec p > 0.
- 2 Il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la directrice, et un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé le foyer, tels que  $P = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = d(M, \mathcal{D})\}.$

Les deux conditions sont reliées par l'équation  $d(F,\mathcal{D})=p$ . Au vu de la deuxième condition, on dit que l'excentricité d'une parabole est  $\varepsilon=1$ .

Cônes et cylindres

Ellips

#### Parabole

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e quadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble P est dit une parabole s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- **1** Dans un repère orthonormé, P est défini par une équation cartésienne de la forme  $y^2 = 2px$  avec p > 0.
- 2 Il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la directrice, et un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé le foyer, tels que  $P = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = d(M, \mathcal{D})\}.$

Les deux conditions sont reliées par l'équation  $d(F,\mathcal{D})=p$ . Au vu de la deuxième condition, on dit que l'excentricité d'une parabole est  $\varepsilon=1$ .

Cônes et cylindres

Ellips

#### Parabole

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e quadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble P est dit une parabole s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- **1** Dans un repère orthonormé, P est défini par une équation cartésienne de la forme  $y^2 = 2px$  avec p > 0.
- 2 Il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la directrice, et un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé le foyer, tels que  $P = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = d(M, \mathcal{D})\}.$

Les deux conditions sont reliées par l'équation d(F, D) = p.

Au vu de la deuxième condition, on dit que l'excentricité d'une parabole est  $\varepsilon = 1$ .

Cônes et cylindres

Ellips

Parabole

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e quadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble P est dit une parabole s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- **1** Dans un repère orthonormé, P est défini par une équation cartésienne de la forme  $y^2 = 2px$  avec p > 0.
- 2 Il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la directrice, et un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé le foyer, tels que  $P = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = d(M, \mathcal{D})\}.$

Les deux conditions sont reliées par l'équation  $d(F, \mathcal{D}) = p$ .

Au vu de la deuxième condition, on dit que l'excentricité d'une parabole est  $\varepsilon=1.$ 

## Propriétés des paraboles

Cönes et cylindres

Ellipse

#### Parabole

Hyperbol

quadratiques

Coniques e quadriques

- Toute parabole admet un unique axe de symétrie. Il est orthogonal à la directrice et passe par le foyer.
- 2 Les paraboles n'ont pas de centre de symétrie.
- 3 L'image par un isomorphisme affine d'une parabole est une parabole

# Propriétés des paraboles

Cones et cylindres

Ellipse

#### Parabole

Hyperbol

quadratiques

- 1 Toute parabole admet un unique axe de symétrie. Il est orthogonal à la directrice et passe par le foyer.
- 2 Les paraboles n'ont pas de centre de symétrie.
- 3 L'image par un isomorphisme affine d'une parabole est une parabole.

# Propriétés des paraboles

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabole

Hyperbo

quadratiques

- 1 Toute parabole admet un unique axe de symétrie. Il est orthogonal à la directrice et passe par le foyer.
- 2 Les paraboles n'ont pas de centre de symétrie.
- 3 L'image par un isomorphisme affine d'une parabole est une parabole.

# Propriétés des paraboles

Cones et cylindres

Ellips

Parabole

Hyperbo

quadratiques

- 1 Toute parabole admet un unique axe de symétrie. Il est orthogonal à la directrice et passe par le foyer.
- 2 Les paraboles n'ont pas de centre de symétrie.
- 3 L'image par un isomorphisme affine d'une parabole est une parabole.

Cônes et cylindres

Ellips

Parabo

#### Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

Coniques equadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble H est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- **1** Dans un repère orthonormé, H est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  avec a > 0 et b > 0.
- 2 Il existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, et  $a \in ]0, c[$  tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid |d(F_1, M) d(M, F_2)| = 2a\}.$
- Il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé foyer, et  $\varepsilon \in ]1, \infty[$ , appelée excentricité, tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = \varepsilon \ d(M, \mathcal{D})\}.$

D'autres définitions équivalentes d'une hyperbole existent.

Si d
$$(F, \mathcal{D}) = h$$
, alors on a les relations entre les paramètres :  $c^2 = a^2 + b^2$   $\varepsilon = \frac{c}{a}$ , et  $h = a(\varepsilon - \frac{1}{c})$ .

Cônes et cylindres

Ellips

Parabo

#### Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

Coniques equadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal{E}$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble H est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Dans un repère orthonormé, H est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  avec a > 0 et b > 0.
- Il existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, et  $a \in ]0, c[$  tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid |d(F_1, M) d(M, F_2)| = 2a\}.$
- Il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelée foyer, et  $\varepsilon \in ]1, \infty[$ , appelée excentricité, tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = \varepsilon \ d(M, \mathcal{D})\}.$

Si d(F, D) = h, alors on a les relations entre les paramètres :  $c^2 = a^2 + b^2$ 

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$
, et  $h = a(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon})$ .

Cônes et cylindres

Ellips

Parabo

#### Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

Coniques equadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble H est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Dans un repère orthonormé, H est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  avec a > 0 et b > 0.
- 2 Il existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, et  $a \in ]0, c[$  tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid |d(F_1, M) d(M, F_2)| = 2a\}$ .
- Il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelée foyer, et  $\varepsilon \in ]1, \infty[$ , appelée excentricité, tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = \varepsilon \ d(M, \mathcal{D})\}.$

Si d(F, D) = h, alors on a les relations entre les paramètres :  $c^2 = a^2 + b^2$ 

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$
, et  $h = a(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon})$ 

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

#### Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

Coniques equadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal{E}$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble H est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Dans un repère orthonormé, H est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  avec a > 0 et b > 0.
- 2 II existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, et  $a \in ]0, c[$  tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid |d(F_1, M) d(M, F_2)| = 2a\}.$
- 3 Il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé foyer, et  $\varepsilon \in ]1, \infty[$ , appelée excentricité, tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = \varepsilon \ d(M, \mathcal{D})\}.$

D'autres définitions équivalentes d'une hyperbole existent. Si d(F, D) = h, alors on a les relations entre les paramètres :  $c^2 = a^2 + b^2$  $\varepsilon = \frac{c}{2}$ , et  $h = a(\varepsilon - \frac{1}{2})$ .

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

#### Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

Coniques e quadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble H est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Dans un repère orthonormé, H est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  avec a > 0 et b > 0.
- 2 Il existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, et  $a \in ]0, c[$  tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid |d(F_1, M) d(M, F_2)| = 2a\}$ .
- 3 Il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelée foyer, et  $\varepsilon \in ]1, \infty[$ , appelée excentricité, tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = \varepsilon \ d(M, \mathcal{D})\}.$

#### D'autres définitions équivalentes d'une hyperbole existent.

Si d(F, D) = h, alors on a les relations entre les paramètres :  $c^2 = a^2 + b^2$   $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{a}$ , et  $h = a(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon})$ .

Cônes et cylindres

Ellips

Parabo

#### Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

Coniques equadriques

#### Définition-Proposition

Soit  $\mathcal E$  un plan affine euclidien. Un sous-ensemble H est dit une hyperbole s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Dans un repère orthonormé, H est défini par une équation cartésienne de la forme  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  avec a > 0 et b > 0.
- 2 Il existe deux points  $F_1$  et  $F_2$  à distance  $d(F_1, F_2) = 2c$ , appelés foyers, et  $a \in ]0, c[$  tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid |d(F_1, M) d(M, F_2)| = 2a\}.$
- 3 Il existe une droite  $\mathcal{D}$ , appelée la la directrice, un point  $F \notin \mathcal{D}$ , appelé foyer, et  $\varepsilon \in ]1, \infty[$ , appelée excentricité, tels que  $H = \{M \in \mathcal{E} \mid d(F, M) = \varepsilon \ d(M, \mathcal{D})\}.$

D'autres définitions équivalentes d'une hyperbole existent. Si  $d(F, \mathcal{D}) = h$ , alors on a les relations entre les paramètres :  $c^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{2}$ , et  $h = a(\varepsilon - \frac{1}{2})$ .

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

#### Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

- Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est xy = 1. Autrement dit c'est la graphe de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .
- Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
- Toute hyperbole admet 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
- Les deux droites d'équations  $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$  sont appelées les asymptotes de l'hyperbole  $\left\{ \left( \frac{x}{a} \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1 \right\}$ .
- L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

Cônes et cylindres

Ellips

Parabo

Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

- Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est xy = 1. Autrement dit c'est la graphe de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{y}$ .
- Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
- Toute hyperbole admet 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
- Les deux droites d'équations  $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$  sont appelées les asymptotes de l'hyperbole  $\left\{ \left( \frac{x}{a} \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1 \right\}$ .
- L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

Cônes et cylindres

Lilipse

Parabo

Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

- Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est xy = 1. Autrement dit c'est la graphe de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{y}$ .
- 2 Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
- 3 Toute hyperbole admet 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
- Les deux droites d'équations  $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$  sont appelées les asymptotes de l'hyperbole  $\left\{ \left( \frac{x}{a} \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1 \right\}$ .
- L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

Cônes et cylindres

Parabo

#### Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

- Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est xy = 1. Autrement dit c'est la graphe de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{y}$ .
- 2 Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
- 3 Toute hyperbole admet 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
- Les deux droites d'équations  $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$  sont appelées les asymptotes de l'hyperbole  $\left\{ \left( \frac{x}{a} \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1 \right\}$ .
- L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

Cônes et cylindres

Ellips

Parabo

Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

- Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est xy = 1. Autrement dit c'est la graphe de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{y}$ .
- 2 Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
- 3 Toute hyperbole admet 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
- 4 Les deux droites d'équations  $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$  sont appelées les asymptotes de l'hyperbole  $\left\{ \left( \frac{x}{a} \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1 \right\}$ .
- 5 L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

Cônes et cylindres

\_...psc

Parabo

Hyperbole

Niveaux des forme quadratiques

- Il existe un repère (pas forcement orthonormé, ni même orthogonal) dans lequel l'équation de l'hyperbole est xy = 1. Autrement dit c'est la graphe de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{y}$ .
- 2 Toute hyperbole possède un unique point de symétrie centrale, appelé le centre de l'hyperbole.
- 3 Toute hyperbole admet 2 axes de symétrie orthogonaux qui se coupent dans le centre.
- 4 Les deux droites d'équations  $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$  sont appelées les asymptotes de l'hyperbole  $\left\{ \left( \frac{x}{a} \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1 \right\}$ .
- L'image par un isomorphisme (resp. similitude, resp. isométrie) affine d'une hyperbole est une hyperbole (resp. de même excentricité, resp. de mêmes excentricité et distance entre les foyers).

Cônes et cylindres

\_...psc

Parabo

Hyperbol

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Étant donnée une forme quadratique Q de rang r sur un espace vectoriel euclidien  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  de dimension n, il existe une b.o.n dans laquelle

 $Q(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$ , où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $\overrightarrow{v}$  dans cette b.o.n., et  $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, r$ .

Si on note Q' la restriction de Q sur l'espace  $\mathcal{F}$  engendré par les r premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\mathbf{F} = (\operatorname{Ker} Q)^{\perp};$
- lacksquare Q' est non dégénéré sur  $\overline{\mathcal{F}}$
- La courbe de niveau  $\mathcal{L}_k(Q)$  est un cylindre de direction Ker Q et de baseeu  $\mathcal{L}_k(Q') \subset \vec{\mathcal{F}}$ .

Cônes et cylindres

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Étant donnée une forme quadratique Q de rang r sur un espace vectoriel euclidien  $\vec{\mathcal{E}}$  de dimension n, il existe une b.o.n dans laquelle

$$Q(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$$
, où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $\overrightarrow{v}$  dans cette b.o.n., et  $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, r$ .

Si on note Q' la restriction de Q sur l'espace  $\mathcal{F}$  engendré par les r premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\mathbf{F} = (\operatorname{Ker} Q)^{\perp};$
- lacksquare Q' est non dégénéré sur  $\overline{\mathcal{F}}$
- La courbe de niveau  $\mathcal{L}_k(Q)$  est un cylindre de direction Ker Q et de basee  $\mathcal{L}_k(Q') \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}$ .

Cônes et cylindres

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Etant donnée une forme quadratique Q de rang r sur un espace vectoriel euclidien  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  de dimension n, il existe une b.o.n dans laquelle

$$Q(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$$
, où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $\overrightarrow{v}$  dans cette b.o.n., et  $\lambda_i \neq 0, \forall i=1,\dots,r$ .

Si on note Q' la restriction de Q sur l'espace  $\mathcal{F}$  engendré par les r premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\mathcal{F} = (\operatorname{Ker} Q)^{\perp};$
- lacksquare Q' est non dégénéré sur  $\overline{\mathcal{F}}$
- La courbe de niveau  $\mathcal{L}_k(Q)$  est un cylindre de direction Ker Q et de baseeu  $\mathcal{L}_k(Q') \subset \vec{\mathcal{F}}$ .

Cônes et cylindres

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Étant donnée une forme quadratique Q de rang r sur un espace vectoriel euclidien  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  de dimension n, il existe une b.o.n dans laquelle  $Q(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$ , où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $\overrightarrow{v}$  dans

cette b.o.n., et  $\lambda_i \neq 0, \forall i=1,\ldots,r$ . Si on note Q' la restriction de Q sur l'espace  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  engendré par les r premiers

- $\mathbf{F} = (\operatorname{Ker} Q)^{\perp};$
- lacksquare Q' est non dégénéré sur  $\overline{\mathcal{F}}$
- La courbe de niveau  $\mathcal{L}_k(Q)$  est un cylindre de direction Ker Q et de baseeu  $\mathcal{L}_k(Q') \subset \vec{\mathcal{F}}$ .

Cônes et cylindres

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Étant donnée une forme quadratique Q de rang r sur un espace vectoriel euclidien  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  de dimension n, il existe une b.o.n dans laquelle  $Q(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{j=1}$ 

 $Q(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$ , où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $\overrightarrow{v}$  dans cette b.o.n., et  $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, r$ .

Si on note Q' la restriction de Q sur l'espace  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  engendré par les r premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\overrightarrow{\mathcal{F}} = (\operatorname{Ker} Q)^{\perp};$
- Q' est non dégénéré sur  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  ;
- La courbe de niveau  $\mathcal{L}_k(Q)$  est un cylindre de direction Ker Q et de base  $\mathcal{L}_k(Q') \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}$ .

Cônes et cylindres

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Étant donnée une forme quadratique Q de rang r sur un espace vectoriel euclidien  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  de dimension n, il existe une b.o.n dans laquelle

$$Q(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$$
, où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $\overrightarrow{v}$  dans cette b.o.n., et  $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, r$ .

Si on note Q' la restriction de Q sur l'espace  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  engendré par les r premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $\mathbf{F} = (\operatorname{\mathsf{Ker}} Q)^{\perp};$
- $lackbox{ }Q'$  est non dégénéré sur  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  ;
- La courbe de niveau  $\mathcal{L}_k(Q)$  est un cylindre de direction Ker Q et de base  $\mathcal{L}_k(Q') \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}$ .

Cônes et cylindres

. .

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Étant donnée une forme quadratique Q de rang r sur un espace vectoriel euclidien  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  de dimension n, il existe une b.o.n dans laquelle

$$Q(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$$
, où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $\overrightarrow{v}$  dans cette b.o.n., et  $\lambda_i \neq 0, \forall i=1,\dots,r$ .

Si on note Q' la restriction de Q sur l'espace  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  engendré par les r premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $ightharpoonup \vec{\mathcal{F}} = (\operatorname{\mathsf{Ker}} \mathit{Q})^{\perp}$ ;
- $lackbox{ }Q'$  est non dégénéré sur  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  ;
- La courbe de niveau  $\mathcal{L}_k(Q)$  est un cylindre de direction Ker Q et de base  $\mathcal{L}_k(Q') \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}$ .

Cônes et cylindres

Paraboli

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Étant donnée une forme quadratique Q de rang r sur un espace vectoriel euclidien  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  de dimension n, il existe une b.o.n dans laquelle

$$Q(\overrightarrow{v})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2$$
, où  $(x_1,\ldots,x_n)$  sont les coordonnées de  $\overrightarrow{v}$  dans cette b.o.n., et  $\lambda_i\neq 0, \forall i=1,\ldots,r$ .

Si on note Q' la restriction de Q sur l'espace  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  engendré par les r premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $ightharpoonup \vec{\mathcal{F}} = (\operatorname{\mathsf{Ker}} \mathit{Q})^{\perp}$ ;
- $lackbox{ }Q'$  est non dégénéré sur  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  ;
- La courbe de niveau  $\mathcal{L}_k(Q)$  est un cylindre de direction Ker Q et de base  $\mathcal{L}_k(Q') \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}$ .

Cônes et cylindres

.

i di diboli

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Étant donnée une forme quadratique Q de rang r sur un espace vectoriel euclidien  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  de dimension n, il existe une b.o.n dans laquelle

$$Q(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$$
, où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $\overrightarrow{v}$  dans cette b.o.n., et  $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, r$ .

Si on note Q' la restriction de Q sur l'espace  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  engendré par les r premiers vecteurs de cette b.o.n., alors

- $ightharpoonup \vec{\mathcal{F}} = (\operatorname{\mathsf{Ker}} \mathit{Q})^{\perp}$ ;
- $lackbox{ } Q'$  est non dégénéré sur  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  ;
- La courbe de niveau  $\mathcal{L}_k(Q)$  est un cylindre de direction Ker Q et de base  $\mathcal{L}_k(Q') \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}$ .

Ellipse

Paraho

Hyperbol

Niveaux des formes quadratiques

- Toute forme quadratique non dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est de la forme  $x \mapsto ax^2$  avec  $a \neq 0$ , et donc les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - **s** i signe(a)  $\neq$  signe(k) : vides,
  - $\blacksquare$  *si* k = 0 : le point  $\{0\}$ ,
  - $\blacksquare$  si signe(a) = signe(k) : l'ensemble de deux points  $\{\pm \sqrt{k/a}\}$
- La seule forme quadratique dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto 0$  dont les lignes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $\blacksquare$  si  $k \neq 0$ : vides,
  - $\blacksquare$  si k=0 :  $\mathbb R$  qui est un cylindre de base 0 et de direction  $\mathbb R$ .

Ellipse

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Toute forme quadratique non dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est de la forme  $x \mapsto ax^2$  avec  $a \neq 0$ , et donc les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $\blacksquare$  si signe(a)  $\neq$  signe(k) : vides,
  - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
  - $si \operatorname{signe}(a) = \operatorname{signe}(k)$ : l'ensemble de deux points  $\{\pm \sqrt{k/a}\}$ .
- La seule forme quadratique dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto 0$  dont les lignes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $\blacksquare$  si  $k \neq 0$ : vides,
  - lacksquare si k=0 :  $\mathbb R$  qui est un cylindre de base 0 et de direction  $\mathbb R$ .

Ellipse

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Toute forme quadratique non dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est de la forme  $x \mapsto ax^2$  avec  $a \neq 0$ , et donc les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $si \operatorname{signe}(a) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vides,
  - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
  - $si \text{ signe}(a) = signe(k) : l'ensemble de deux points } \{\pm \sqrt{k/a}\}.$
- La seule forme quadratique dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto 0$  dont les lignes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $\blacksquare$  si  $k \neq 0$ : vides,
  - lacksquare si k=0 :  $\mathbb R$  qui est un cylindre de base 0 et de direction  $\mathbb R$

Ellipse

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Toute forme quadratique non dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est de la forme  $x \mapsto ax^2$  avec  $a \neq 0$ , et donc les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $si \operatorname{signe}(a) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vides,
  - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
  - $si \operatorname{signe}(a) = \operatorname{signe}(k)$ : l'ensemble de deux points  $\{\pm \sqrt{k/a}\}$ .
- La seule forme quadratique dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto 0$  dont les lignes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $\blacksquare$  si  $k \neq 0$ : vides,
  - lacksquare si k=0 :  $\mathbb R$  qui est un cylindre de base 0 et de direction  $\mathbb R$

#### En dimension 1

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Toute forme quadratique non dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est de la forme  $x \mapsto ax^2$  avec  $a \neq 0$ , et donc les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $si \operatorname{signe}(a) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vides,
  - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
  - $si \operatorname{signe}(a) = \operatorname{signe}(k)$  : l'ensemble de deux points  $\{\pm \sqrt{k/a}\}$ .
- La seule forme quadratique dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto 0$  dont les lignes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $\blacksquare$  si  $k \neq 0$ : vides,
  - lacksquare si k=0 :  $\mathbb R$  qui est un cylindre de base 0 et de direction  $\mathbb R$

#### En dimension 1

Cônes et cylindres

Ellips

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Toute forme quadratique non dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est de la forme  $x \mapsto ax^2$  avec  $a \neq 0$ , et donc les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $si \operatorname{signe}(a) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vides,
  - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
  - $si \operatorname{signe}(a) = \operatorname{signe}(k)$ : l'ensemble de deux points  $\{\pm \sqrt{k/a}\}$ .
- La seule forme quadratique dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto 0$  dont les lignes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $\blacksquare$  *si*  $k \neq 0$  : vides,
  - $si \ k = 0$  :  $\mathbb{R}$  qui est un cylindre de base 0 et de direction  $\mathbb{R}$ .

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Toute forme quadratique non dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est de la forme  $x \mapsto ax^2$  avec  $a \neq 0$ , et donc les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $si \operatorname{signe}(a) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vides,
  - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
  - si signe(a) = signe(k): l'ensemble de deux points  $\{\pm \sqrt{k/a}\}$ .
- La seule forme quadratique dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto 0$  dont les lignes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $si k \neq 0$ : vides,
  - $si \ k = 0$ :  $\mathbb{R}$  qui est un cylindre de base 0 et de direction  $\mathbb{R}$ .

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Toute forme quadratique non dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est de la forme  $x \mapsto ax^2$  avec  $a \neq 0$ , et donc les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $si \operatorname{signe}(a) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vides,
  - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
  - si signe(a) = signe(k) : l'ensemble de deux points  $\{\pm \sqrt{k/a}\}$ .
- La seule forme quadratique dégénérée sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto 0$  dont les lignes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
  - $si \ k \neq 0$ : vides,
  - $si \ k = 0$  :  $\mathbb{R}$  qui est un cylindre de base 0 et de direction  $\mathbb{R}$ .

#### En dimension 2

Cônes et cylindres

Ellipse

Paraho

Hyperbol

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - lacksquare Si signe $(\lambda_1)=$  signe $(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont
  - a signe(h) / signe(h) wide,
  - = si k=0 si le point  $\{0\}$ ,
  - a standard mostly line allies d'équation  $(\xi) = (\xi) = 1$  on  $x = \sqrt{1/3}$ , of  $y = \sqrt{2/3}$ .
  - Si signe $(\lambda_1) \neq$  signe $(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont ::
  - a = b = 0 deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$ ,
    - (5)  $^{\prime}$  (7)  $^{\prime}$  = 1 on  $a=\sqrt{k/\lambda}$ , et  $b=\sqrt{-k/\lambda}$ s
- Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^2$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

Linpsc

Parabal

Hyperbol

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - Si signe( $\lambda_1$ ) = signe( $\lambda_2$ ) les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  si signe( $\lambda_i$ )  $\neq$  signe(k) : vide,
    - **s** i k = 0: le point  $\{0\}$
    - $\mathbf{s}i \operatorname{signe}(\lambda_l) = \operatorname{signe}(k)$  : une ellipse d'équation  $\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ .
  - Si signe( $\lambda_1$ )  $\neq$  signe( $\lambda_2$ ) les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - **s** i k=0: deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$
    - is  $i k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas k > 0 est  $\left(\frac{x}{k}\right)^2 \left(\frac{y}{k}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$ .
  - Les asymptotes de l'hyperbole  $\mathcal{L}_k$  sont les deux droites de  $\mathcal{L}_0$
- Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^{4}$  non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^{2}$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_{k}$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

Lilipse

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - Si  $\operatorname{signe}(\lambda_1) = \operatorname{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) = \operatorname{signe}(k)$  : une ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ .
  - Si signe( $\lambda_1$ )  $\neq$  signe( $\lambda_2$ ) les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - **s** i k=0: deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$ ,
      - si  $k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas k > 0 est  $\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$ .
    - Les asymptotes de l'hyperbole  $\mathcal{L}_k$  sont les deux droites de  $\mathcal{L}_0$
- Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^2$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

\_...psc

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - Si  $\operatorname{signe}(\lambda_1) = \operatorname{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) = \operatorname{signe}(k)$  : une ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ .
  - Si signe( $\lambda_1$ )  $\neq$  signe( $\lambda_2$ ) les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - **s** i k=0: deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$ ,
      - si  $k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas k > 0 est  $\left(\frac{\kappa}{\delta}\right)^2 \left(\frac{\kappa}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$ .
    - Les asymptotes de l'hyperbole  $\mathcal{L}_k$  sont les deux droites de  $\mathcal{L}_0$
- Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^2$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

Lilipse

Parahol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - Si  $\operatorname{signe}(\lambda_1) = \operatorname{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) = \operatorname{signe}(k)$  : une ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ .
  - Si signe( $\lambda_1$ )  $\neq$  signe( $\lambda_2$ ) les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - **s** i k=0: deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$ 
      - si  $k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas k > 0 est  $\left(\frac{s}{2}\right)^2 \left(\frac{s}{k}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$ .
    - Les asymptotes de l'hyperbole  $\mathcal{L}_k$  sont les deux droites de  $\mathcal{L}_0$
- Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^2$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

#### En dimension 2

Cônes et cylindres

Lilipse

Parahol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - Si  $\operatorname{signe}(\lambda_1) = \operatorname{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si signe( $\lambda_i$ ) = signe(k): une ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ .
  - Si signe( $\lambda_1$ )  $\neq$  signe( $\lambda_2$ ) les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - si k=0: deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda}$ 
      - si  $k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas k > 0 est  $\left(\frac{s}{a}\right)^2 \left(\frac{s}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$ .
    - Les asymptotes de l'hyperbole  $\mathcal{L}_k$  sont les deux droites de  $\mathcal{L}_0$
- Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^2$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

----

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - Si  $\operatorname{signe}(\lambda_1) = \operatorname{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si signe $(\lambda_i)$  = signe(k) : une ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ .
  - Si signe( $\lambda_1$ )  $\neq$  signe( $\lambda_2$ ) les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - si k = 0: deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$ ,
    - si  $k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas k > 0 est  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$ .

Les asymptotes de l'hyperbole  $\mathcal{L}_k$  sont les deux droites de  $\mathcal{L}_0$ 

Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^{4}$  non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^{2}$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_{k}$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

----

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - Si  $\operatorname{signe}(\lambda_1) = \operatorname{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si signe $(\lambda_i)$  = signe(k) : une ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ .
  - Si signe $(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k = 0$  : deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$ ,
    - si  $k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas k > 0 est  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$ .

Les asymptotes de l'hyperbole  $\mathcal{L}_k$  sont les deux droites de  $\mathcal{L}_0$ 

Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  non nulles s'écrivent dans unne b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^2$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - Si  $\operatorname{signe}(\lambda_1) = \operatorname{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si signe $(\lambda_i)$  = signe(k) : une ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ .
  - Si signe $(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k = 0$  : deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$ ,
    - $si \ k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas k>0 est  $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$  où  $a=\sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b=\sqrt{-k/\lambda_2}$ .

Les asymptotes de l'hyperbole  $\mathcal{L}_k$  sont les deux droites de  $\mathcal{L}_0$ 

■ Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^2$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

----

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - Si  $\operatorname{signe}(\lambda_1) = \operatorname{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si signe $(\lambda_i)$  = signe(k) : une ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ .
  - Si signe $(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k = 0$  : deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$ ,
    - $si \ k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas k > 0 est  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$ .

Les asymptotes de l'hyperbole  $\mathcal{L}_k$  sont les deux droites de  $\mathcal{L}_0$ .

Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^2$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

. ......

Пурегроїє

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - Si  $\operatorname{signe}(\lambda_1) = \operatorname{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si signe $(\lambda_i)$  = signe(k) : une ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ .
  - Si signe( $\lambda_1$ )  $\neq$  signe( $\lambda_2$ ) les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k = 0$  : deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$ ,
    - si  $k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas k > 0 est  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$ .

Les asymptotes de l'hyperbole  $\mathcal{L}_k$  sont les deux droites de  $\mathcal{L}_0$ .

Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^2$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

Parabole

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x, y) \mapsto \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$  avec  $\lambda_i \neq 0$  pour i = 1, 2.
  - Si signe( $\lambda_1$ ) = signe( $\lambda_2$ ) les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \operatorname{signe}(\lambda_i) \neq \operatorname{signe}(k)$  : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si signe $(\lambda_i)$  = signe(k) : une ellipse d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$ .
  - Si signe $(\lambda_1) \neq \text{signe}(\lambda_2)$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k = 0$  : deux droites de pentes  $\pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$ ,
    - si  $k \neq 0$ : une hyperbole dont l'équation standard dans le cas k > 0 est  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$  et  $b = \sqrt{-k/\lambda_2}$ .

Les asymptotes de l'hyperbole  $\mathcal{L}_k$  sont les deux droites de  $\mathcal{L}_0$ .

Les formes quadratiques dégénérées de  $\mathbb{R}^2$  non nulles s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y)\mapsto \lambda x^2$  avec  $\lambda\neq 0$ . Et donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont vides, une ou deux droites selon que  $k/\lambda<0$ , k=0 ou  $k/\lambda>0$ .

#### En dimension 3

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

Hyperbol

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .

= Si  $\lambda_I > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :

 $\approx$  Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_{\mathcal{L}}$  sont

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .

 $\blacksquare$  Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont

19/25

----

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e quadriques Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .

 $\blacksquare$  Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :

----

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .
  - Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  si k < 0: vide,
    - $\bullet$  *si* k = 0 : le point  $\{0\}$ ,
    - $si \ k > 0$ : un ellipsoïde d'équation  $\left(\frac{a}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{b}\right)^n + \left(\frac{c}{c}\right)^n = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ .  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$  et  $c = \sqrt{k/\lambda_3}$ .
  - Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - **s** if k=0: un cone elliptique de base l'ellipse d'equations  $\lambda_1 x^* + \lambda_2 y^* = |\lambda_3|$  et z=1,
    - est l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ .
    - $\blacksquare$  si k < 0: un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan z =

----

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .
  - Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  *si* k < 0 : vide,

    - si k > 0: un ellipsoïde d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ ,  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$  et  $c = \sqrt{k/\lambda_3}$ .
  - Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k = 0$  : un cone elliptique de base l'ellipse d'équations  $\lambda_1 x^* + \lambda_2 y^* = |\lambda_3|$  et z = 1,
    - so k > 0: un hyperboloide a une nappe dont la section avec le plan z = h est l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ .
    - **S**  $\kappa < 0$ : un hyperboloide a deux nappes

\_...psc

Paraho

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .
  - Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  *si* k < 0 : vide,

    - si k > 0: un ellipsoïde d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ ,  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$  et  $c = \sqrt{k/\lambda_3}$ .
  - Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k=0$  : un cone elliptique de base l'ellipse d'équations  $\lambda_1 x^* + \lambda_2 y^* = |\lambda_3|$  et z=1,
    - so k > 0: un hyperboloide a une nappe dont la section avec le plan z = h est l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ .
    - STR < 0 : un hyperboloide a deux happes

Linpsc

Parabol

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .
  - Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  *si* k < 0 : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si k > 0: un ellipsoïde d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ ,  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$  et  $c = \sqrt{k/\lambda_3}$ .
  - Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - si k=0 : un cone elliptique de base l'ellipse d'équations  $\lambda_1 x^* + \lambda_2 y^* = |\lambda_3|$  et z=1,
    - si k > 0: un hyperboloide a une nappe dont la section avec le plan z = h est l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ .
    - St x < 0 : un hyperboloide a deux happes

Lilipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .
  - Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  *si* k < 0 : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si k > 0: un ellipsoïde d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ ,  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$  et  $c = \sqrt{k/\lambda_3}$ .
  - Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - **I** Si K=0 : un cone elliptique de base l'ellipse d'equations  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$  et z=1,
    - so k > 0: un hyperboloide a une nappe dont la section avec le plan z = h est l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ .
    - $m{m}$  si k < 0 ; un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan z

Linpsc

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .
  - Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  *si* k < 0 : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si k > 0: un ellipsoïde d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ ,  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$  et  $c = \sqrt{k/\lambda_3}$ .
  - Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k=0$  : un cône elliptique de base l'ellipse d'équations  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$  et z=1,
    - si k > 0: un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan z = h est l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ .
    - si k < 0: un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan z = h est vide si  $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$  et est une l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$  si  $|h| > \sqrt{k/\lambda_3}$ .

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

Coniques e

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .
  - Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  *si* k < 0 : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si k > 0: un ellipsoïde d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ ,  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$  et  $c = \sqrt{k/\lambda_3}$ .
  - Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k=0$  : un cône elliptique de base l'ellipse d'équations  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$  et z=1,
    - $si \ k > 0$ : un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan z = h est l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ .
    - si k < 0 : un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan z = h est vide si  $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$  et est une l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$  si  $|h| \ge \sqrt{k/\lambda_3}$ .

Linpsc

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .
  - Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  *si* k < 0 : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si k > 0: un ellipsoïde d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ ,  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$  et  $c = \sqrt{k/\lambda_3}$ .
  - Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k=0$  : un cône elliptique de base l'ellipse d'équations  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$  et z=1,
    - $si \ k > 0$ : un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan z = h est l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ .
    - si k < 0: un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan z = h est vide si  $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$  et est une l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$  si  $|h| \ge \sqrt{k/\lambda_3}$ .

Linpsc

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .
  - Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  *si* k < 0 : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si k > 0: un ellipsoïde d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ ,  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$  et  $c = \sqrt{k/\lambda_3}$ .
  - Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k=0$  : un cône elliptique de base l'ellipse d'équations  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$  et z=1,
    - $si \ k > 0$  : un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan z = h est l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ .
    - si k < 0: un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan z = h est vide si  $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$  et est une l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$  si  $|h| \ge \sqrt{k/\lambda_3}$ .

----

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .
  - Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  *si* k < 0 : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si k > 0: un ellipsoïde d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ ,  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$  et  $c = \sqrt{k/\lambda_3}$ .
  - Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k=0$  : un cône elliptique de base l'ellipse d'équations  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$  et z=1,
    - $si \ k > 0$ : un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan z = h est l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ .
    - si k < 0: un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan z = h est vide si  $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$  et est une l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$  si  $|h| \ge \sqrt{k/\lambda_3}$ .

Linpsc

Parabo

Hyperbo

Niveaux des formes quadratiques

- Les formes quadratiques non dégénérées de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $(x,y,z)\mapsto \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$  avec  $\lambda_i\neq 0$  pour i=1,2,3. Comme  $\mathcal{L}_k(Q)=\mathcal{L}_{-k}(-Q)$  on peut restreindre notre étude au cas de 2 ou 3 valeurs propres positives, et quitte à échanger les coordonnées on peut supposer  $\lambda_1,\lambda_2>0$ .
  - Si  $\lambda_i > 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $\blacksquare$  *si* k < 0 : vide,
    - $si \ k = 0$  : le point  $\{0\}$ ,
    - si k > 0: un ellipsoïde d'équation  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$  où  $a = \sqrt{k/\lambda_1}$ ,  $b = \sqrt{k/\lambda_2}$  et  $c = \sqrt{k/\lambda_3}$ .
  - Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 < 0$  les courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont :
    - $si \ k=0$  : un cône elliptique de base l'ellipse d'équations  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = |\lambda_3|$  et z=1,
    - $si \ k > 0$ : un hyperboloïde à une nappe dont la section avec le plan z = h est l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$ .
    - si k < 0: un hyperboloïde à deux nappes dont la section avec le plan z = h est vide si  $|h| < \sqrt{k/\lambda_3}$  et est une l'ellipse  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = k + |\lambda_3| h^2$  si  $|h| \ge \sqrt{k/\lambda_3}$ .

### Fonctions polynomiales

Cônes et cylindres

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

#### Définition-Proposition

On dit que f est une fonction polynomiale de degré n sur l'espace affine  $\mathcal E$  si dans un repère (dans tout repère) la valeur de  $f(x_1,\ldots,x_n)$  est un polynôme de degré n en les coordonnées  $(x_1,\ldots,x_n)$ .

Dans le suite de ce cours on va étudier les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré 2.

### Fonctions polynomiales

Cônes et cylindres

Ellips

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

#### Définition-Proposition

On dit que f est une fonction polynomiale de degré n sur l'espace affine  $\mathcal E$  si dans un repère (dans tout repère) la valeur de  $f(x_1,\ldots,x_n)$  est un polynôme de degré n en les coordonnées  $(x_1,\ldots,x_n)$ .

Dans le suite de ce cours on va étudier les courbes de niveaux des fonctions polynomiales de degré 2.

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- 1 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
- 2 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
- 3 On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
- 4 Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
- 5 On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes

Cônes et cylindres

Ellipse

Paraho

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- 1 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
- 2 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
- 3 On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
- 4 Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
- 5 On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
- 2 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
- 3 On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
- 4 Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
- 5 On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Cônes et cylindres

Ellips

Paraho

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- 1 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
- 2 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
- On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
- 4 Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
- 5 On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes

Cônes et cylindres

Linpsc

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- 1 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
- 2 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
- 3 On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
- 4 Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
- 5 On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Cônes et cylindres

Lilipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- 1 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
- 2 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
- On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
- 4 Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
- 5 On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- 1 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 0 sont : vide ou tout l'espace.
- 2 Les courbes de niveaux des polynômes de degré 1 sont les hyperplans affines.
- 3 On vient de discuter les courbes de niveaux des polynômes homogènes de degré 2, qui sont les courbes de niveaux des formes quadratiques.
- 4 Une fonction qui est un polynôme homogène de degré 2 dans un repère n'est pas forcement homogène dans un autre repère.
- 5 On ne retrouve pas la parabole si on se limite aux polynômes homogènes.

Cônes et cylindres

Lilipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

#### Proposition

Soit f est une fonction polynomiale de degré 2 sur l'espace affine  $\mathcal E$  de dimension n, alors il existe une b.o.n. dans laquelle soit

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2+\mu$$

avec  $\lambda_i \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, r$ , soit

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2+\mu x_{r+1}$$

avec  $\mu \neq 0$  et  $\lambda_i \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, r$ .

Dans le premier cas on se retrouve dans le cas déjà discuté des formes quadratiques.

Dans le deuxième cas, en notant  $\mathcal{F} = \{(x_1, \dots, x_{r+1}, 0, \dots, 0)\}$  et

 $\mathcal{F}^{\perp} = \{(0, \dots, 0, x_{r+2}, \dots, x_n)\}$ , vu que  $\mathcal{L}_k(f)$  est un cylindre de direction  $\overline{\mathcal{F}^{\perp}}$  et de base  $\mathcal{L}_k(f|_{\mathcal{F}}) \subset \mathcal{F}$ , on peut se restreindre à l'étude du cas où n = r + 1.

Cônes et cylindres

. .

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

#### Proposition

Soit f est une fonction polynomiale de degré 2 sur l'espace affine  $\mathcal E$  de dimension n, alors il existe une b.o.n. dans laquelle soit

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2+\mu$$

avec  $\lambda_i \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, r$ , soit

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2+\mu x_{r+1}$$

avec  $\mu \neq 0$  et  $\lambda_i \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, r$ .

Dans le premier cas on se retrouve dans le cas déjà discuté des formes quadratiques.

Dans le deuxième cas, en notant  $\mathcal{F} = \{(x_1, \dots, x_{r+1}, 0, \dots, 0)\}$  et

 $\mathcal{F}^{\perp} = \{(0, \dots, 0, x_{r+2}, \dots, x_n)\}$ , vu que  $\mathcal{L}_k(f)$  est un cylindre de direction  $\mathcal{F}^{\perp}$  et de base  $\mathcal{L}_k(f|_{\mathcal{F}}) \subset \mathcal{F}$ , on peut se restreindre à l'étude du cas où n = r + 1.

Cônes et cylindres

\_...psc

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

#### Proposition

Soit f est une fonction polynomiale de degré 2 sur l'espace affine  $\mathcal E$  de dimension n, alors il existe une b.o.n. dans laquelle soit

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2+\mu$$

avec  $\lambda_i \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, r$ , soit

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2+\mu x_{r+1}$$

avec  $\mu \neq 0$  et  $\lambda_i \neq 0$  pour  $i = 1, \ldots, r$ .

Dans le premier cas on se retrouve dans le cas déjà discuté des formes quadratiques.

Dans le deuxième cas, en notant  $\mathcal{F} = \{(x_1, \dots, x_{r+1}, 0, \dots, 0)\}$  et  $\mathcal{F}^{\perp} = \{(0, \dots, 0, x_{r+2}, \dots, x_n)\}$ , vu que  $\mathcal{L}_k(f)$  est un cylindre de direction  $\mathcal{F}$ 

et de base  $\mathcal{L}_k(f|_{\mathcal{F}})\subset \mathcal{F}$ , on peut se restreindre à l'étude du cas où n=r+1

Cônes et cylindres

\_...psc

Parabole

Hyperbol

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

#### Proposition

Soit f est une fonction polynomiale de degré 2 sur l'espace affine  $\mathcal E$  de dimension n, alors il existe une b.o.n. dans laquelle soit

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2+\mu$$

avec  $\lambda_i \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, r$ , soit

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2+\mu x_{r+1}$$

avec  $\mu \neq 0$  et  $\lambda_i \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, r$ .

Dans le premier cas on se retrouve dans le cas déjà discuté des formes quadratiques.

Dans le deuxième cas, en notant  $\mathcal{F} = \{(x_1, \dots, x_{r+1}, 0, \dots, 0)\}$  et

 $\mathcal{F}^{\perp} = \{(0, \dots, 0, x_{r+2}, \dots, x_n)\}$ , vu que  $\mathcal{L}_k(f)$  est un cylindre de direction  $\overrightarrow{\mathcal{F}^{\perp}}$  et de base  $\mathcal{L}_k(f|_{\mathcal{F}}) \subset \mathcal{F}$ , on peut se restreindre à l'étude du cas où n = r + 1.

### polynômes de degré 2, en dimension 1

Cônes et cylindres

Ellipse

Paraho

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

En dimension 1 il n'y a pas de polynômes de degré 2 qui ne soient pas dans une base de la forme déjà étudiée  $AX^2-C$ .

Calcul avec  $a \neq 0$ :

$$ax^{2} + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^{2} - \frac{b^{2}}{4a} + c = AX^{2} - C$$

avec 
$$A = a$$
,  $X = x + \frac{b}{2a}$  et  $C = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ .

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

Hyperbol

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

En dimension 1 il n'y a pas de polynômes de degré 2 qui ne soient pas dans une base de la forme déjà étudiée  $AX^2-{\it C}.$ 

Calcul avec  $a \neq 0$ :

$$ax^{2} + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^{2} - \frac{b^{2}}{4a} + c = AX^{2} - C,$$

avec 
$$A = a$$
,  $X = x + \frac{b}{2a}$  et  $C = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ .

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

En dimension 2 les polynômes qui manquent dans notre étude s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $ax^2 + by$  avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

Donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont des paraboles  $X^2=2pY$ , avec X=x,  $p=-\frac{b}{2a}$  et  $Y=y-\frac{k}{b}$ .

#### Proposition

L'intersection du cône standard avec un plan qui ne passe pas par 0 est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole).

Cônes et cylindres

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

En dimension 2 les polynômes qui manquent dans notre étude s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $ax^2 + by$  avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

Donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont des paraboles  $X^2=2pY$ , avec X=x,  $p=-\frac{b}{2a}$  et  $Y=y-\frac{k}{b}$ .

#### Proposition

L'intersection du cône standard avec un plan qui ne passe pas par 0 est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole).

Cônes et cylindres

Lilipse

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

En dimension 2 les polynômes qui manquent dans notre étude s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $ax^2 + by$  avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

Donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont des paraboles  $X^2=2pY$ , avec X=x,  $p=-\frac{b}{2a}$  et  $Y=y-\frac{k}{b}$ .

#### Proposition

L'intersection du cône standard avec un plan qui ne passe pas par 0 est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole).

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

En dimension 2 les polynômes qui manquent dans notre étude s'écrivent dans une b.o.n. sous la forme  $ax^2 + by$  avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

Donc leurs courbes de niveaux  $\mathcal{L}_k$  sont des paraboles  $X^2=2pY$ , avec X=x,  $p=-\frac{b}{2a}$  et  $Y=y-\frac{k}{b}$ .

#### Proposition

L'intersection du cône standard avec un plan qui ne passe pas par 0 est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole).

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- 1  $ax^2 + by^2 + cz$ , avec a et b de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une ellipse, un point ou vide. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.
- $ax^2 by^2 + cz$ , avec a > 0 et b > 0. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une hyperbole ou deux droites Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.

Cônes et cylindres

Ellipse

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- 1  $ax^2 + by^2 + cz$ , avec a et b de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une ellipse, un point ou vide. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.
- $= ax^2 by^2 + cz$ , avec a > 0 et b > 0. Ces courbes de niveaux son appelées des paraboloïdes hyperboliques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une hyperbole ou deux droites Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.

Cônes et cylindres

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- **1**  $ax^2 + by^2 + cz$ , avec a et b de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une ellipse, un point ou vide. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.
- appelées des paraboloïdes hyperboliques. Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une hyperbole ou deux droites Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.

Cônes et cylindres

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- **1**  $ax^2 + by^2 + cz$ , avec a et b de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une ellipse, un point ou vide.
- appelées des paraboloïdes hyperboliques. Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une hyperbole ou deux droites Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.

Cônes et cylindres

. .

Parabo

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- I  $ax^2 + by^2 + cz$ , avec a et b de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une ellipse, un point ou vide.
  - Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole
- appelées des paraboloïdes hyperboliques.

  Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une hyperbole ou deux droites la properties avec un plan  $\{z = h\}$  or  $\{y = h\}$  est une parabole.

Cônes et cylindres

\_...psc

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

- **1**  $ax^2 + by^2 + cz$ , avec a et b de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une ellipse, un point ou vide. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.
- $2ax^2 by^2 + cz$ , avec a > 0 et b > 0. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une hyperbole ou deux droite Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.

Cônes et cylindres

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

En dimension 3 il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

- **1**  $ax^2 + by^2 + cz$ , avec a et b de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une ellipse, un point ou vide. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.
- 2  $ax^2 by^2 + cz$ , avec a > 0 et b > 0. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.

Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une hyperbole ou deux droites. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.

Cônes et cylindres

----

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

En dimension 3 il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

- **1**  $ax^2 + by^2 + cz$ , avec a et b de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une ellipse, un point ou vide. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.
- 2  $ax^2 by^2 + cz$ , avec a > 0 et b > 0. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.

Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une hyperbole ou deux droites Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.

Cônes et cylindres

----

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

En dimension 3 il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

- **1**  $ax^2 + by^2 + cz$ , avec a et b de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une ellipse, un point ou vide. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.
- 2  $ax^2 by^2 + cz$ , avec a > 0 et b > 0. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.

Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une hyperbole ou deux droites. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.

Cônes et cylindres

----

Parabol

Hyperbo

Niveaux des forme quadratiques

Coniques et quadriques

En dimension 3 il y a deux types de polynômes qu'il faut étudier en plus des formes quadratiques déjà étudiées :

- I  $ax^2 + by^2 + cz$ , avec a et b de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une ellipse, un point ou vide. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.
- 2  $ax^2 by^2 + cz$ , avec a > 0 et b > 0. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.

Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une hyperbole ou deux droites.

Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole

Cônes et cylindres

Niveaux des forme

Coniques et quadriques

- I  $ax^2 + by^2 + cz$ , avec a et b de même signe. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes elliptiques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une ellipse, un point ou vide. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.
- 2  $ax^2 by^2 + cz$ , avec a > 0 et b > 0. Ces courbes de niveaux sont appelées des paraboloïdes hyperboliques.
  - Leur intersection avec un plan  $\{z = h\}$  est une hyperbole ou deux droites. Leur intersection avec un plan  $\{x = h\}$  ou  $\{y = h\}$  est une parabole.