

# M53 - Cours 1

septembre 2015

Espace affine

Définition

Exemples

Opérations

Premières propriétés

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

## Définition (heuristique)

«Un espace affine est un espace vectoriel dont on a oublié l'origine.»

Espace affine

Définition

Exemples

Opérations

Premières propriétés

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

## Définition

Soit  $\vec{\mathcal{E}}$  un espace vectoriel (*si non précisé, sur  $\mathbb{R}$* ).

Un ensemble (non vide)  $\mathcal{E}$  est muni de la structure d'**espace affine de direction  $\vec{\mathcal{E}}$**  par la donnée d'une application

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$$

$$(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$$

qui satisfait les deux conditions :

1  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  (*relation de Chasles*)

2  $\forall A \in \mathcal{E}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}, \exists ! B \in \mathcal{E} \text{ t.q. } \overrightarrow{AB} = \vec{v} \text{ (} B = A + \vec{v} \text{)}$

Espace affine

Définition

Exemples

Opérations

Premières propriétés

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

## Définition

L'espace affine  $\mathcal{E}$  est de dimension  $n$  si sa direction, l'espace vectoriel  $\vec{\mathcal{E}}$ , est de dimension  $n$ .

Espace affine

Définition

Exemples

Opérations

Premières propriétés

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

Tout espace vectoriel  $\vec{\mathcal{E}}$  peut être muni naturellement d'une structure d'espace affine, avec direction lui-même, via l'application :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\mapsto \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}\end{aligned}$$

## Convention

Dans la suite, tous les espaces vectoriels vont être considérés munis de cette structure naturelle d'espace affine.

Espace affine

Définition

Exemples

Opérations

Premières propriétés

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

Le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$  est un espace affine de direction  $\vec{\mathcal{E}} = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$ , via l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ (A, B) &\mapsto \overrightarrow{AB} = B - A\end{aligned}$$

### Question

*Comment peut-on généraliser cet exemple ?*

Espace affine

Définition

Exemples

Opérations

Premières propriétés

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

L'ensemble des solutions  $S$  de l'équation différentielle  $y' + y = \sin(x)$  est un espace affine avec direction  $S^*$ , l'ensemble des solutions de l'équation homogène ( $y' + y = 0$ ) via :

$$\begin{aligned} S \times S &\longrightarrow S^* \\ (f_1, f_2) &\mapsto f_2 - f_1 \end{aligned}$$

### Question

*Comment peut-on généraliser cet exemple ?*

## Espace affine

Définition

Exemples

Opérations

Premières propriétés

## Barycentre et repères

## Sous-espaces affines

## Applications affines

## Convexes

En fixant un point  $\Omega$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$ , on peut définir sur celui-ci une structure d'espace vectoriel via la bijection :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ B &\mapsto \overrightarrow{\Omega B}\end{aligned}$$

Cet espace vectoriel est noté  $\mathcal{E}_\Omega$  et est isomorphe (par définition) à  $\vec{\mathcal{E}}$ .

- L'origine de  $\mathcal{E}_\Omega$  est le point  $\Omega$ .
- Avec l'écriture  $\Omega + \vec{v}$ , les opérations sont :
  - $(\Omega + \vec{v}) + (\Omega + \vec{w}) = (\Omega + \vec{v} + \vec{w})$ .
  - $\lambda(\Omega + \vec{v}) = \Omega + \lambda \vec{v}$ .



## Espace affine

Définition

Exemples

Opérations

Premières propriétés

## Barycentre et repères

## Sous-espaces affines

## Applications affines

## Convexes

Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces affines, sur le même corps, de directions respectives  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{F}}$ .

On définit la structure d'espace affine *produit* sur  $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$  de direction  $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{F}}$  par :

$$\overrightarrow{(A, B)(C, D)} := (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}).$$

Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{K}$ -espace affine de direction  $\vec{\mathcal{E}}$ .

- $A \in \mathcal{E} \Rightarrow \overrightarrow{AA} = \vec{0}$  et  $A + \vec{0} = A$ .
- $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ .
- $A + \vec{v} = B \Leftrightarrow \forall (\exists) C \in \mathcal{E}, \overrightarrow{CA} + \vec{v} = \overrightarrow{CB}$ .
- $(A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$  ( $\vec{\mathcal{E}}$  agit sur  $\mathcal{E}$ ).
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  ( $ABCD$  est un parallélogramme).
- $\overrightarrow{(A + \vec{v})(B + \vec{w})} = \overrightarrow{AB} - \vec{v} + \vec{w}$ .
- Soient  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ 
  - Si  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$  alors  $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \in \vec{\mathcal{E}}$  est bien définie ( $\overrightarrow{AB} = B - A$ ).
  - Si  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  alors  $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \in \mathcal{E}$  est bien définie.
  - Si  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \notin \{0, 1\}$  alors  $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i$  n'est pas bien définie.

Espace affine

Barycentre et repères

Barycentre

Propriétés

Repère

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

## Définition-Proposition

Soient  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$  et  $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$  tels que  $\sum_{i=1}^k \mu_i \neq 0$ , alors il existe un unique point  $G$  qui satisfait une des conditions équivalentes :

- 1  $G = \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^k \mu_i} A_i.$
- 2  $\forall (\exists) M \in \mathcal{E}, (\sum_{i=1}^k \mu_i) \overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{MA_i}.$
- 3  $\sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{GA_i} = 0.$

Le point  $G$  est *le barycentre des des points pondérées*  $\{(A_1, \mu_1), \dots, (A_k, \mu_k)\}$ , et les  $\{\mu_i\}$  sont appelés les *poids*.

Espace affine

Barycentre et repères

Barycentre

Propriétés

Repère

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

## Définition

Soient  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ , leur **isobarycentre** est le barycentre de ces points pondérés du même poids non nul (*qui peut être pris égal à  $\frac{1}{k}$ , ou à 1*).

Espace affine

Barycentre et repères

Barycentre

Propriétés

Repère

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

- Si on remplace les poids  $\mu_i$  par  $\lambda\mu_i$  pour  $\lambda \neq 0$ , le barycentre ne change pas.
- Si on rajoute un point pondéré par un poids nul, le barycentre ne change pas.
- Soit  $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$  un espace affine produit.  
Le barycentre des points pondérés  $\{((A_1, B_1), \mu_1), \dots, ((A_k, B_k), \mu_k)\}$  est  $G = (G_A, G_B)$ ,  
où  $G_A$  est le barycentre de  $\{(A_1, \mu_1), \dots, (A_k, \mu_k)\}$  dans  $\mathcal{E}$ ,  
et  $G_B$  est le barycentre de  $\{(B_1, \mu_1), \dots, (B_k, \mu_k)\}$  dans  $\mathcal{F}$ .

Espace affine

Barycentre et repères

Barycentre

Propriétés

Repère

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

Soient  $\{A_i\}_{i \in I}$  des points de  $\mathcal{E}$  et  $\{\mu_i\}_{i \in I}$  des scalaires de somme non nulle, indexés par un ensemble  $I$ .

Soit une partition  $I = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_r$ , telle que  $\nu_k := \sum_{i \in J_k} \mu_i \neq 0$  pour chaque  $k \in \{1, \dots, r\}$ .

On note  $G_k$  le barycentre de  $\{(A_i, \mu_i)\}_{i \in J_k}$ .

## Proposition

*Le barycentre  $G$  des points pondérés  $\{(A_i, \mu_i)\}_{i \in I}$  est aussi le barycentre des  $\{(G_k, \nu_k)\}_{k \in \{1, \dots, r\}}$ .*

Espace affine

Barycentre et repères

Barycentre

Propriétés

Repère

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

Soit  $(A_0, \dots, A_n)$  un  $(n+1)$ -uplet de l'espace affine  $\mathcal{E}$ .

## Définition-Proposition

On dit que  $(A_0, \dots, A_n)$  est *un repère affine* de  $\mathcal{E}$  s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1  $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$  est une base de  $\vec{\mathcal{E}}$ .
- 2 Pour tout point  $B$  de  $\mathcal{E}$  il existe un unique  $(n+1)$ -uplet de poids  $(\mu_0, \dots, \mu_n)$ , avec  $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$  et  $B = \sum_{i=1}^n \mu_i A_i$ .

Espace affine

Barycentre et repères

Barycentre

Propriétés

Repère

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

Soit  $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_n)$  un repère affine de  $\mathcal{E}$ .

### Définition

Pour  $B \in \mathcal{E}$ , on dit que  $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{A}}$  sont les **coordonnées cartésiennes** de  $B$  dans le repère  $\mathcal{A}$ , si  $\overrightarrow{A_0B} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{A_0A_i}$ .

### Définition

Pour  $B \in \mathcal{E}$ , on dit que  $[\mu_0, \dots, \mu_n]_{\mathcal{A}}$  sont les **coordonnées barycentriques** de  $B$  dans le repère  $\mathcal{A}$ , si  $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$  et  $B = \sum_{i=0}^n \mu_i A_i$ .

La relation entre ces deux systèmes de coordonnées est :

$$\mu_i = x_i, \forall i = 1, \dots, n \text{ et } \mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i.$$



Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Définition

Exemples

Propriétés

Applications affines

Convexes

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine.

### Définition-Proposition

Un sous-ensemble non vide  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  est dit *sous-espace affine* s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Il existe un sous-espace vectoriel  $\vec{\mathcal{F}}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\Omega \in \mathcal{E}$  tels que  $\mathcal{F} = \Omega + \vec{\mathcal{F}}$ .
- 2  $\exists (\forall) \Omega \in \mathcal{F}, \mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}_\Omega$ .
- 3  $\mathcal{F}$  est stable par barycentres.

Un sous-espace affine  $\mathcal{F} = \Omega + \vec{\mathcal{F}}$  est un espace affine de direction  $\vec{\mathcal{F}}$ , via la restriction de l'application  $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ .

Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Définition

Exemples

Propriétés

Applications affines

Convexes

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine de dimension  $n$ .

- Les sous-espaces affines de dimension 0 sont les points  $\{M\}$  de  $\mathcal{E}$ .
- Les sous-espaces affines de dimension 1 sont appelés **des droites affines**.
- Les sous-espaces affines de dimension 2 sont appelés **des plans affines**.
- Les sous-espaces affines de dimension  $n - 1$  sont appelés **des hyperplans affines**.

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $\mathcal{E}$ . On note  $AB$  ou  $\langle A, B \rangle$  la droite affine qui passe par  $A$  et  $B$ .

Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Définition

Exemples

Propriétés

Applications affines

Convexes

Soient  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{F}}$  deux espaces vectoriels, et  $\vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}})$  une application linéaire.

Alors pour tout  $\vec{v} \in \text{Im } \vec{\phi} \subset \vec{\mathcal{F}}$ , l'image réciproque  $\vec{\phi}^{-1}(\vec{v})$  est un sous-espace affine de  $\vec{\mathcal{E}}$  de direction  $\text{Ker } \vec{\phi}$ .

- En particulier, en prenant  $\vec{\phi}(x, y) = x + y$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\vec{v} = 1$ , on retrouve le sous-espace affine  $\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$  de direction  $\vec{\mathcal{E}} = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$ .
- L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions d'un système linéaire  $AX = B$  est vide ou est un sous-espace affine de direction l'ensemble  $\mathcal{S}^*$  des solutions homogènes  $AX = 0$ . Et  $\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}'$ , où  $X_0$  est une solution particulière.

Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Définition

Exemples

Propriétés

Applications affines

Convexes

Soient  $\vec{\mathcal{E}}$  un espace vectoriel et  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

- $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel ssi  $0 \in \mathcal{F}$ .
- $\mathcal{F}$  est un hyperplan affine ssi il existe une forme linéaire non nulle  $\vec{\phi} \in \vec{\mathcal{E}}^*$  et  $a \in \mathbb{R}$ , tels que  $\mathcal{F} = \vec{\phi}^{-1}(a)$ .
- Tous les sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^n$  sont des ensembles de solutions de systèmes linéaires.

Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Définition

Exemples

Propriétés

Applications affines

Convexes

## Définition

On dit que deux (plusieurs) sous-espaces affines d'un même espace affine sont **parallèles** s'ils ont la même direction. *(C'est une relation d'équivalence.)*

Attention : «disjoints»  $\nRightarrow$  «parallèles».

## Proposition

- *Deux sous-espaces parallèles sont disjoints ou confondus.*
- *Par tout point d'un espace affine, il passe une unique droite (sous-espace) parallèle à une droite (sous-espace) donnée.*

## Proposition

*L'intersection de deux sous-espaces affines  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  est :*

- *vide, ou*
- *un sous-espace affine de direction  $\vec{\mathcal{F}} \cap \vec{\mathcal{G}}$ .*

## Proposition

*L'intersection de deux sous-espaces affines  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  est vide si et seulement si  $\exists(\forall) A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$ ,*

$$\overrightarrow{AB} \notin \vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}.$$

Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Définition

Exemples

Propriétés

Applications affines

Convexes

## Définition-Proposition

*Soit  $\mathcal{A}$  un sous-ensemble non vide d'un espace affine  $\mathcal{E}$ . Le sous-espace affine  $\langle \mathcal{A} \rangle$  engendré par  $\mathcal{A}$  est défini par une des conditions équivalentes :*

- 1**  *$\langle \mathcal{A} \rangle$  est le plus petit sous-espace affine contenant  $\mathcal{A}$ .*
- 2**  *$\langle \mathcal{A} \rangle$  est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant  $\mathcal{A}$ .*
- 3**  *$\langle \mathcal{A} \rangle$  est l'ensemble des barycentres de points de  $\mathcal{A}$ .*
- 4**  *$\forall (\exists) \Omega \in \mathcal{A}$ ,  $\langle \mathcal{A} \rangle$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{E}_\Omega$ .*

## Proposition

Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux sous-espaces affines du même espace affine, et  $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$  le sous-espace affine engendré par  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ .

- Si  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ , alors  $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$  est de direction  $\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}$ , et

$$\dim \langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle = \dim (\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}).$$

- Si  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ , alors  $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$  est de direction  $\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}} + \vec{D}$ , où  $\vec{D}$  est une droite engendrée par  $\overrightarrow{AB}$  avec  $A \in \mathcal{F}$  et  $B \in \mathcal{G}$ , et

$$\dim \langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle = \dim (\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}) + 1.$$



Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Définition

Exemples

Propriétés

Applications affines

Convexes

Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine d'un espace affine  $\mathcal{E}$ .

## Définition

Soient  $\{A_0, \dots, A_k\}$  des points de  $\mathcal{F}$ . On dit que cette famille est **affinement génératrice** pour  $\mathcal{F}$  si  $\langle A_0, \dots, A_k \rangle = \mathcal{F}$ .

## Définition

Soient  $(k+1)$  points  $\{A_0, \dots, A_k\}$  de  $\mathcal{E}$ . On dit que cette famille est **affinement libre** si  $\dim \langle A_0, \dots, A_k \rangle = k$ .

Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Définition

Exemples

Propriétés

Applications affines

Convexes

Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine d'un espace affine  $\mathcal{E}$ .

## Proposition

*Le  $(k+1)$ -uplet  $(A_0, \dots, A_k)$  est un repère affine pour  $\mathcal{F}$  si il satisfait une des trois conditions équivalentes :*

- 1**  *$\{A_0, \dots, A_k\}$  est affinement libre et génératrice pour  $\mathcal{F}$ .*
- 2**  *$\{A_0, \dots, A_k\}$  est une famille génératrice minimale pour  $\mathcal{F}$ .*
- 3**  *$\{A_0, \dots, A_k\}$  est une famille libre maximale de  $\mathcal{F}$ .*

# Définition d'une application affine

Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces affines de directions  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{F}}$ .

## Définition-Proposition

Une application  $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est dite **affine** si elle satisfait une des trois conditions équivalentes :

1  $\exists (\forall) \Omega \in \mathcal{E}, \phi \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\Omega, \mathcal{F}_{\phi(\Omega)}).$

2  $\exists \vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}})$  telle que  $\forall A, B \in \mathcal{E},$

$$\vec{\phi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

( $\vec{\phi}$  est unique et est appelée **partie linéaire** de  $\phi$ .)

3  $\phi$  préserve les barycentres, c.-à.-d. pour  $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n \mu_i A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_i \phi(A_i).$$

L'ensemble des applications affines est noté  $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ .

Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Définition

Exemples

Propriétés

GA

Convexes

- 1 Les applications constantes sont affines, de partie vectorielle 0.
- 2 Les applications affines de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  sont de la forme  $x \mapsto ax + b$ .
- 3 Les applications affines de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  sont de la forme  $X \mapsto AX + B$ , où  $M \in \mathcal{M}_{m,n}$  et  $B \in \mathbb{R}^m$ .
- 4 Les translations  $T_{\vec{v}} : M \mapsto M + \vec{v}$  (où  $\vec{v} \in \vec{E}$ ) sont des automorphismes affines de  $E$ .
- 5 Soient  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{F}}$  deux espaces vectoriels. Les applications affines sont toutes de la forme  $\vec{x} \mapsto \vec{\phi}(\vec{x}) + \vec{v} = T_{\vec{v}} \circ \vec{\phi}(\vec{x})$ , où  $\vec{\phi}$  est linéaire.

Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Définition

Exemples

Propriétés

GA

Convexes

## Proposition

*Soit  $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  et  $\psi \in \text{Aff}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ , alors  $\psi \circ \phi \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$  et a pour partie linéaire  $\vec{\psi} \circ \vec{\phi}$ .*

## Proposition

*Les images directes et inverses de sous-espaces affines par une application affine sont des sous-espaces affines ou vides. Ainsi les images de trois points alignés sont alignées.*

## Proposition

*Pour donner une application affine il suffit de donner :*

- 1** *la partie linéaire et l'image d'un point,*
- 2** *ou l'image d'un repère.*

Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Définition

Exemples

Propriétés

GA

Convexes

## Définition

Une application affine de  $\mathcal{E}$  est dite **translation** si elle est de la forme  $T_{\vec{v}} : M \mapsto M + \vec{v}$  avec  $\vec{v} \in \vec{E}$ .

- 1 Une translation qui fixe un point est l'identité.
- 2 Une application  $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  est une translation ssi sa partie linéaire est  $\text{Id} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ .
- 3  $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$  : les translations forment un groupe abélien isomorphe à  $\vec{\mathcal{E}}$ .
- 4 Soit  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{E})$  un automorphisme affine de  $\mathcal{E}$  et  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ , alors  $\phi \circ T_{\vec{v}} \circ \phi^{-1} = T_{\phi(\vec{v})}$ .

## Définition

Une application affine de  $\mathcal{E}$  est dite **homothétie affine de rapport  $\lambda$  et de centre  $\Omega \in \mathcal{E}$**  si elle est une homothétie vectorielle de  $\mathcal{E}_\Omega$  de rapport  $\lambda$ .

- 1 Une homothétie qui fixe deux points est l'identité.
- 2 Une application affine est une homothétie affine différente de l'identité ssi sa partie vectorielle est une homothétie vectorielle différente de l'identité.
- 3 La composée de deux homothéties, l'une de rapport  $\lambda$  et l'autre de rapport  $\mu$ , est :
  - 1 Une homothétie de rapport  $\lambda\mu$ , si  $\lambda\mu \neq 1$ .
  - 2 Une translation, si  $\lambda\mu = 1$ .
- 4 Soit  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{E})$  un automorphisme affine de  $\mathcal{E}$  et  $h_{\Omega,\lambda}$  une homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\lambda$ , alors
 
$$\phi \circ h_{\Omega,\lambda} \circ \phi^{-1} = h_{\phi(\Omega),\lambda}.$$

## Proposition

*Soit  $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ , alors  $\phi$  possède un unique point fixe ssi  $\vec{\phi}$  possède un unique point fixe (forcément  $0 \in \vec{\mathcal{E}}$ ), autrement dit, ssi  $1 \notin \text{Sp}(\vec{\phi})$ .*

## Proposition

*Soit  $\vec{\mathcal{E}}_1 \neq 0$  l'ensemble de points fixes de  $\vec{\phi}$ , alors*

- 1** *si  $\phi$  possède un point fixe  $\Omega$ , l'ensemble de points fixes de  $\phi$  est  $\Omega + \vec{\mathcal{E}}_1$  ;*
- 2** *si  $\phi$  n'a pas de points fixes, et*

$$\text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id}) \oplus \text{Im}(\vec{\phi} - \text{Id}) = \vec{\mathcal{E}}$$

*alors il existe un unique  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_1$  tel que  $T_{\vec{v}} \circ \phi$  possède un point fixe. Par ailleurs  $T_{\vec{v}} \circ \phi = \phi \circ T_{\vec{v}}$ .*



Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Définition

Exemples

Propriétés

GA

Convexes

## Proposition

*Soit  $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ , alors  $\phi$  est une bijection ssi  $\vec{\phi}$  l'est, et dans ce cas  $\phi^{-1}$  est une application affine avec partie linéaire  $\vec{\phi}^{-1}$ .*

## Proposition

*Les bijections affines de  $\mathcal{E}$  dans lui-même forment un groupe, le groupe affine  $GA(\mathcal{E})$ . Et l'application  $\phi \mapsto \vec{\phi}$  est un morphisme surjectif de groupes  $GA(\mathcal{E}) \twoheadrightarrow GL(\vec{\mathcal{E}})$ , de noyau le sous-groupe abélien des translations de  $\mathcal{E}$ .*

## Définition

Soient  $A$  et  $B$  deux points d'un espace affine. On note  $[AB] = \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in [0, 1]\}$  l'ensemble des barycentres à poids positifs, appelé *le segment*  $[AB]$ .

## Définition

On dit que  $\mathcal{C}$  est un ensemble *convexe*, si pour tous deux points  $A, B \in \mathcal{C}$  le segment  $[AB]$  est entièrement contenu dans  $\mathcal{C}$ .

## Proposition

*Un ensemble  $\mathcal{C}$  est convexe ssi tout barycentre de points de  $\mathcal{C}$  à poids **positifs** est dans  $\mathcal{C}$ .*

Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

Définition

**Propriétés**

Enveloppe convexe

- 1 L'intersection d'ensembles convexes est convexe.
- 2 L'ensemble vide et les ensembles à un point sont convexes.
- 3 Un sous-espace affine est convexe.
- 4 Les demi-espaces (ouverts, fermés) sont convexes.
- 5 L'image d'un convexe par une application affine est convexe.
- 6 L'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.

Espace affine

Barycentre et repères

Sous-espaces affines

Applications affines

Convexes

Définition

Propriétés

Enveloppe convexe

## Définition-Proposition

*Soit  $\mathcal{A}$  une partie d'un espace affine. L'enveloppe convexe, noté  $[\mathcal{A}]$ , est :*

- 1 Le plus petit convexe contenant  $\mathcal{A}$ .*
- 2 L'intersection de tous les convexes contenant  $\mathcal{A}$ .*
- 3 L'ensemble de barycentres de points de  $\mathcal{A}$  de poids positifs.*

Ainsi par exemple le segment  $[AB]$  est l'enveloppe convexe de  $\{A, B\}$ .