TD2 : Espaces euclidiens, notions de base

Questions métriques

Exercice 1 (Perpendiculaire commune)

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

a) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites distinctes de l'espace. Justifier l'existence d'une perpendiculaire commune à ces deux droites. Sous quelles conditions est-elle unique ?

b) Donner des équations de la perpendiculaire commune aux droites $\mathcal{D}_1$ d'équations $\{x + y - z - 1 = 0,\ 2x + y + z = 0\}$ et $\mathcal{D}_2$ déterminée par le point A de coordonnées $(1, 0, 1)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de composantes $(1, -1, 0)$.

c) Quelle est la distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$?

Exercice 2 (Distance pondérée à un ensemble de points)

Soit $(A_i, \lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ un système pondéré de n points d'un espace affine euclidien de poids total $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ non nul. Pour tout point M on définit la fonction

$$\phi(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\overrightarrow{MA_i}|^2.$$

a) Soit G le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{1\leq i\leq n}$, montrer que :

$$\phi(M) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)|\overrightarrow{MG}|^2 + \phi(G).$$

b) Discuter des lignes de niveau de la fonction ϕ dans le plan et dans l'espace.

Exercice 3 (L'espace euclidien des matrices)

On se place dans l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$ des matrices 3×3.

a) Rappeler comment munir $M_3(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace euclidien. En donner une base orthonormée.

b) Donner une base orthonormée de l'espace des matrices antisymétriques.

c) Calculer l'orthogonal des matrices antisymétriques.

d) Calculer la distance de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ au sous-espace des matrices diagonales.

Exercice 4 (Théorème de Sylvester-Gallai)

a) Étant donné un nombre fini de points dans un plan affine (euclidien), montrer qu'on a l'alternative suivante :

— soit tous les points sont alignés,

— soit il existe une droite qui contient exactement deux points de l'ensemble.

Indication : Considérer le couple $(P, \mathcal{D})$*, où* $\mathcal{D}$ *est une droite contenant au moins deux points de l'ensemble et* $P \notin \mathcal{D}$ *est un point de l'ensemble, tel que la distance* $\mathrm{d}(P, \mathcal{D})$ *est minimale.*

b) Est-ce que la question précédente reste vraie si les points sont dans un espace de dimension quelconque ?

c) Est-ce que la première question reste vraie pour un nombre infini de points ?

Convexes

Exercice 5 (Convexes euclidiens)

Soient $\mathcal{C}$ un convexe fermé d'un espace euclidien et $P \notin \mathcal{C}$ un point de cet espace.

a) Montrer qu'il existe un unique point $Q \in \mathcal{C}$ tel que $d(P, Q) = d(P, \mathcal{C})$.
On dit que Q *est la projection de* P *sur* $\mathcal{C}$.

b) Montrer que l'hyperplan $\mathcal{H}$ passant par Q et orthogonal à $\overrightarrow{QP}$ est un *plan de support*, c'est-à-dire que $\mathcal{H}$ rencontre $\mathcal{C}$, mais pas son intérieur.

c) Montrer que tout convexe fermé peut s'écrire comme l'intersection de demi-espaces affines.

d) Est-ce que la question précédente reste vraie si on se place dans un espace affine de dimension finie, plutôt que dans un espace euclidien ?

Exercice 6 (Séparation de convexes)

Étant donnés deux convexes compacts disjoints dans un espace affine de dimension finie, montrer qu'il existe un hyperplan qui les sépare strictement (c'est-à-dire qu'il ne les rencontre pas et que les deux convexes ne sont pas dans le même demi-espace délimité par cet hyperplan).

Exercice 7 (Isométries du triangle)

a) Déterminer le groupe des isométries d'un triangle dans le plan, la discussion sera menée en fonction des propriétés métriques du triangle.

b) Même question avec un quadrilatère.

Exercice 8 (Isométries du tétraèdre)

Montrer que le groupe des isométries affines qui préserve un tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$, le groupe de permutations de 4 points.

Exercice 9 (Nature de certaines isométrie)

a) Soit l'isométrie linéaire $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Décrire la nature de cette isométrie.

b) Soient R et T une rotation et une translation de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nature de $T \circ R$?

c) Quelle est la composée de trois symétries de plans parallèles de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10 (Capes 2007, 2$^{\text{e}}$ épreuve)

Partie V. GROUPES DIÉDRAUX

1. Soit E un plan affine euclidien orienté. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. On appelle groupe diédral d'ordre $2p$, noté D_{2p}, le groupe des isométries laissant invariant un polygone régulier

$$\mathcal{P}_p = \{M_0, \dots, M_{p-1}\}$$

à p sommets, parcourus dans le sens direct. On pose $M_p = M_0$.

a) Montrer que le sous-groupe C_p de D_p constitué des isométries directes est un groupe cyclique d'ordre p engendré par la rotation ρ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{p}$, où O est le centre du polygone $\mathcal{P}_p$.

b) Préciser une symétrie orthogonale σ laissant le polygone $\mathcal{P}_p$ invariant.

c) Montrer que

$$D_{2p} = \left\{\rho^i \circ \sigma^j \, ; \, i \in \{1, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\right\}$$

et en déduire que D_{2p} est un groupe d'ordre $2p$.

d) Soit $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Montrer que $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma = \rho^{p-k}$.