TD1 : Espaces affines, notions de base

Espaces et sous-espaces affines

Exercice 1 (Droites)

a) On considère l'espace affine $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{D}$ la droite $\{(x, y) \mid x + 2y = 1\}$.

(i) Déterminer toutes les équations linéaires qui définissent la même droite $\mathcal{D}$.

(ii) Déterminer la direction de $\mathcal{D}$.

(iii) Déterminer toutes les équations linéaires qui définissent une droite parallèle à $\mathcal{D}$.

(iv) Déterminer les équations linéaires qui définissent la droite parallèle à $\mathcal{D}$ qui passe par $A = (2, 1)$.

(v) Déterminer une équation de la droite qui passe par les points $C = (2, 3)$ et $D = (4, -3)$. Est-elle parallèle à $\mathcal{D}$?

b) On considère le plan complexe $\mathbb{C}$ comme un espace affine réel.

(i) Montrer que toute droite réelle de $\mathbb{C}$ est définie par une équation complexe de la forme

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0\}$$

où $\beta \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

(ii) Déterminer une équation complexe de la droite $\mathcal{D}$ de la question (a).

(iii) Donner une condition sur les coefficients des équations complexes pour que deux droites soient parallèles.

c) On considère l'espace affine réel $\mathbb{R}^3$.

(i) Déterminer des équations qui définissent la droite $\mathcal{T}$ qui passe par les deux points $M = (1, 0, 1)$ et $N = (-1, 1, 1)$.

(ii) Déterminer la direction de $\mathcal{T}$

(iii) Déterminer des équations de la droite parallèle à $\mathcal{T}$ qui passe par le point $P = (-1, 2, 1)$.

(iv) Trouver une droite qui n'est ni parallèle à $\mathcal{T}$, ni sécante avec $\mathcal{T}$.

Exercice 2 (Barycentres)

On se place dans $\mathbb{R}^2$.

a) Calculer l'isobarycentre des points $A = (1, -2)$, $B = (0, -2)$, $C = (2, -4)$. Puis le barycentre des mêmes points affectés des poids suivants : $(A, 2)$, $(B, 4)$, $(C, -1)$.

b) Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

c) Discuter la position d'un point M par rapport au triangle $\triangle ABC$ en fonction des signes de ses coordonnées barycentriques $[\alpha, \beta, \gamma]$.

Exercice 3 (Exemples d'espaces affines)

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des polynômes unitaires de degré n à coefficients réels est un espace affine. Quelle est sa dimension ? En donner un repère affine.

b) Soient d un entier non nul, et $a_1, \ldots, a_d$ et b des réels. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_{n+d} = a_1 u_{n+d-1} + \cdots + a_{d-1} u_{n+1} + a_d u_n + b \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace affine.

(ii) Quelle est sa dimension ?

(iii) Décrire les éléments de $\mathcal{E}$ lorsque $d = 1$ (distinguer les cas $a_1 \neq 1$ et $a_1 = 1$).

(iv) On suppose maintenant $d = 2$. Donner une base de la direction $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$. Donner un repère affine de $\mathcal{E}$ dans le cas où $a_1 + a_2 \neq 1$.

Exercice 4 (EDO et espaces affines)

Dans ce qui suit on s'intéresse aux structures portées par les espaces de solutions des équations différentielles dans $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$y' - y = 4 \qquad (G)$$

$$y' - y = 0 \qquad (H)$$

a) Montrer que l'espace des solutions $\mathcal{S}_H$ de (H) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

b) L'espace des solutions $\mathcal{S}_G$ de (G) est-il un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$?

c) Déterminer une solution particulière de (G) que l'on notera C.

d) Montrer que toute solution de (G) s'écrit de manière unique sous la forme $f + C$ où f est une solution de (H).

e)* En déduire que les solutions $\mathcal{S}_G$ de (G) sont en bijection avec les solutions $\mathcal{S}_H$ de (H). Cette bijection est-elle unique ?

f)* Montrer que l'application

$$Act : \begin{cases} \mathcal{S}_H \times \mathcal{S}_G \to \mathcal{S}_G \\ (f, C) \mapsto f + C \end{cases}$$

est bien définie et qu'elle vérifie :

A1 : $Act(0, C) = C$;

A2 : $Act(f, Act(g, C)) = Act(f + g, C)$.

Exercice 5 (Changement de repères)

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son repère cartésien canonique $\mathcal{R} = (O, I, J, K)$. On considère le nouveau repère $\mathcal{R}' = (O' = (0, 0, 1), I' = (0, 0, 0), J' = (1, 0, 2), K' = (0, 1, 1))$.

a) Soit un point de coordonnées $X = (x, y, z)$ dans le repère $\mathcal{R}$. Donner ses coordonnées cartésiennes $X' = (x', y', z')$ dans le repère $\mathcal{R}'$ en fonction de $X = (x, y, z)$.

b) Donner la formule de changement de repère de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

où M est une matrice 3×3. Puis écrire sous la même forme la formule de changement de repère inverse, de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}$.

c) On se donne $A = (0, 0, 3)$, $B = (1, 0, 4)$, $C = (1, 1, 1)$, trois points dont les coordonnées cartésiennes sont exprimées dans $\mathcal{R}$. Donner une équation du plan $\langle A, B, C\rangle$ dans le repère $\mathcal{R}$, puis dans le repère $\mathcal{R}'$.

d) De la question b) on déduit qu'un changement de repères $P^{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}'}$ s'écrit sous la forme $X' = P^{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}'}(X) = M^{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}'}X + V^{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}'}$. Soit un troisième repère $\mathcal{R}''$, quelle formule relie les couples $(M^{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}'}, V^{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}'})$, $(M^{\mathcal{R}'}_{\mathcal{R}''}, V^{\mathcal{R}'}_{\mathcal{R}''})$ et $(M^{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}''}, V^{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}''})$?

e)* On note GA l'ensemble des couples (M, V) où $M \in GL_3(\mathbb{R})$ et $V \in \mathbb{R}^3$. On munit GA d'une opération binaire :

$$(M', V') \circ (M, V) = (M'M, M'V + V')$$

Montrer que cette opération munit GA d'une loi de groupe.

f)* On note $\mathfrak{Rep}$ l'ensemble des repères de $\mathbb{R}^3$. Montrer que l'application :

$$Act : \begin{cases} GA \times \mathfrak{Rep} \to \mathfrak{Rep} \\ ((A, V), (\Omega, P, Q, R)) \mapsto (A\Omega + V, AP + V, AQ + V, AR + V) \end{cases}$$

est bien définie et qu'elle vérifie :

A1 : $Act\left((Id, 0), (\Omega, P, Q, R)\right) = (\Omega, P, Q, R)$;

A2 : $Act\left((A',V'), Act\left((A,V),(\Omega,P,Q,R)\right)\right) = Act\left((A',V')\circ(A,V),(\Omega,P,Q,R)\right)$.

On dit que le groupe GA agit sur l'ensemble $\mathfrak{Rep}$.

g)* Déduire de la question d) que pour deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ il existe un unique (A,V) tel que $Act\left((A,V),\mathcal{R}\right) = \mathcal{R}'$.

h)* En déduire que GA est en bijection avec l'ensemble $\mathfrak{Rep}$.
Cette bijection est-elle unique ?

Exercice 6 (Exemples de sous-espaces affines)

a) Soit X un espace topologique, on considère l'espace $C(X,\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur X. Soit $a \in X$ montrer que l'ensemble

$$\mathcal{F}_{a,1} = \{f \in C(X,\mathbb{R}) : f(a) = 1\}$$

est un sous-espace affine de $C(X,\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'ensemble des matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1-a & b-2a \\ a+b & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace affine de $M_2(\mathbb{R})$. En donner un repère affine.

c) Montrer que le cercle $\{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ n'est pas un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$.

d) Montrer que $\mathcal{H} = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : f(x+1) = f(x)+1\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Déterminer un point de $\mathcal{H}$ et sa direction.

Exercice 7* (Des triangles sur un corps fini)

On se place dans l'espace affine $\mathcal{E} = (\mathbb{F}_3)^2$ sur $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

a) Combien contient-il de points et de droites ? Faire des dessins !

b) Etant donnés deux points M et N de $\mathcal{E}$, le milieu de (M,N) est le point $\frac{\overline{1}}{2}M + \frac{\overline{1}}{2}N$. On considère les points $A = (\overline{0},\overline{0})$, $B = (\overline{2},\overline{0})$, $C = (\overline{0},\overline{2})$. Déterminer les médianes du triangle ABC. Sont-elles concourantes ?

Applications affines

Exercice 8 (Projections et symétries)

On se place dans l'espace affine (euclidien) $\mathbb{R}^3$. Le but de cet exercice est de donner des expressions analytiques pour des projections et des symétries. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $\{x+y+z=1\}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équations $\{z=4,\ y=0\}$.

a) Donner l'expression analytique de la projection p sur le plan $\mathcal{P}$ suivant la direction $\mathcal{D}$.

b) Donner l'expression analytique de la symétrie s par rapport à $\mathcal{P}$ suivant la direction $\mathcal{D}$.

c) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale π sur le plan $\mathcal{P}$.

d) Calculer la distance de $A=(1,0,1)$ au plan $\mathcal{P}$.

e) Donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale σ par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 9 (Composition d'applications affines)

On se place dans un plan affine réel.

a) Soient ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de BC, CA et AB , $s_{A'}$, $s_{B'}$, $s_{C'}$ les symétries centrales par rapport à ces points. Déterminer la nature géométrique des transformations $f=s_{B'}\circ s_{A'}$ et $g=s_{C'}\circ s_{B'}\circ s_{C'}$.

b) Soient f et f' deux homothéties de même rapport quelle est la nature de la transformation $f\circ f'^{-1}$?

Exercice 10 (Polygone des milieux)

Dans cet exercice on se place dans $\mathbb{R}^2$:

a) Soit $A'B'C'$ un triangle. Montrer qu'il existe un triangle ABC, et un seul, tel que A' soit le milieu de BC, B' le milieu de CA et C' le milieu de AB. Indiquer une construction géométrique de ce triangle.

b) Soit $A'B'C'D'$ un quadrilatère. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un quadrilatère $ABCD$ tel que A' soit le milieu de AB, B' le milieu de BC, C' le milieu de CD et D' le milieu de DA. Ce quadrilatère, s'il existe, est-il unique ?

c)* Etant donnés n points $B_1,\dots,B_n$, peut-on toujours trouver n points $A_1,\dots,A_n$ tels que B_i soit, pour tout $i=1,\dots,n$, le milieu de A_iA_{i+1} (avec la convention $A_{n+1}=A_1$) ? Donner une construction géométrique des points A_i à partir des points B_i lorsque la solution existe.

Indication : Comme le montrent les deux premières questions, la solution dépend de la parité de n. On pourra considérer la composée des symétries centrales de centres $B_1,\dots,B_n$.

Exercice 11 (Homothéties)

On se place dans un plan affine réel. On rappelle que l'homothétie de centre A et de rapport λ est l'application h qui à un point M associe le point $h(M)$ vérifiant :

$$\overrightarrow{Ah(M)} = \lambda\overrightarrow{AM}$$

a) Que dire des cas particuliers $\lambda = 0, 1, -1$? A quelle condition h est-elle une bijection ? Si elle est bijective quelle est son inverse ?

b) On se place dans un repère affine $\mathcal{R} = (O, I, J)$. Donner l'expression analytique de l'homothétie h de centre $A = (u, v)_{\mathcal{R}}$ et de rapport λ.

c) Calculer le conjugué d'une homothétie par une transformation affine.

d) Calculer la composée de deux homothéties.

e) Les homothéties de rapport non nul forment-elles un groupe ?

f) Montrer que les homothéties de même centre A et de rapport non nul forment un groupe.

g) Montrer que les homothéties et les translations forment un sous-groupe $HT_2(\mathbb{R})$ du groupe affine, puis que ce sous-groupe est engendré par les homothéties. Le groupe $HT_2(\mathbb{R})$ agit-il transitivement sur le plan affine ?

h) On rappelle que *le centre* d'un groupe G est l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $gh = hg$, $\forall h \in G$. Montrer que le centre de G est un sous-groupe de G.

i) Quel est le centre du groupe linéaire $GL_2(\mathbb{R})$?

j) Quel est le centre du groupe affine $GA_2(\mathbb{R})$?

k) A quelles conditions une homothétie et une translation commutent-elles ?

Compléments

Exercice 12 (Quelques théorèmes classiques)

On se place dans un plan affine réel.

a) Montrer le **théorème de Pappus** (d'après Pappus d'Alexandrie, IV$^{\text{e}}$ siècle après J.-C.) :

« Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites et des points $A, B, C \in \mathcal{D}$ et $A', B', C' \in \mathcal{D}'$ tels que $(AB') \parallel (A'B)$ et $(BC') \parallel (B'C)$, alors $(AC') \parallel (A'C)$. »

b) Montrer le **théorème de Ceva** (d'après Giovanni Ceva, 1678, même si ce théorème était connu à la fin du XI$^{\text{e}}$ siècle de Yusuf Al-Mu'taman ibn Hűd, géomètre et roi de Saragosse.)

« Soit ABC un triangle, soient D, E et F trois points distincts des sommets et appartenant respectivement aux segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes si et seulement si $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$. »

c) Montrer le **théorème de Ménélaüs** (d'après Ménélaüs d'Alexandrie, I$^{\text{er}}$ et II$^{\text{e}}$ siècle après J.-C.)

« Si D, E et F sont trois points des côtés (BC), (AC) et (AB) d'un triangle ABC (et distincts des sommets), alors D, E et F sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1$. »

d) Montrer le **théorème de Desargues** (d'après Girard Desargues, alias S.G.D.L., XVII$^{\text{er}}$ siècle à Lyon) :

« Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommets communs et tels que $(AB) \parallel (A'B')$; $(AC) \parallel (A'C')$; $(BC) \parallel (B'C')$, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes. »

Exercice 13 (Ensembles convexes)

a) Soient C et C' deux convexes non vides d'un espace réel affine E. Montrer que l'ensemble Γ des milieux des segments MM' , où M parcourt C et M' parcourt C' est un convexe.

b) Montrer que les images directes et inverses des convexes par les applications affines sont également convexes.

Exercice 14 (Demi-espaces)

Soit E un espace affine réel de dimension n et H un hyperplan affine de E.

a) Montrer que la relation $\sim$ définie sur $E \backslash H$ par :

$$M \sim N \iff [MN] \cap H = \emptyset$$

est une relation d'équivalence qui sépare $E \backslash H$ en exactement deux classes, appelés *demi-espaces (ouverts).*

b) Montrer que les demi-espaces sont convexes.

Exercice 15 (Théorème fondamental de la géométrie affine)

On fixe un espace affine réel $\mathcal{E}$ de dimension au moins 2, on se donne une bijection ϕ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Le but de cet exercice est de montrer que ϕ est affine si et seulement si ϕ préserve les triplets de points alignés.

Dans tout ce qui suit on suppose que ϕ envoie 3 points alignés sur 3 points alignés. On note par $'$ les images par ϕ : $O' = \phi(O)$, $A' = \phi(A)$, $B' = \phi(B)$, …

a) Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, montrer que $\phi^{-1}(\mathcal{F})$ est affine.

b) Montrer que ϕ envoie un repère affine sur un repère affine.

c) En déduire que ϕ envoie k points affinement indépendants sur k points affinement indépendants.

d) En déduire que ϕ préserve droites et plans.

e) En déduire que ϕ envoie les droites parallèles sur des droites parallèles.

f) On fixe O un point de $\mathcal{E}$. Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ et soit C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, de plus on suppose que A, B et C ne sont pas alignés. En utilisant la question e) montrer que :

$$\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$$

g) Soient $\mathcal{D}$ une droite passant par O et $\mathcal{D}'$ son image par ϕ. On fixe $A \neq O$ un point de $\mathcal{D}$. Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$.
Vérifier que son image $M' = \phi(M)$ satisfait $\overrightarrow{O'M'} = \mu\overrightarrow{O'A'}$ pour un unique scalaire μ, indépendant du choix de A.

On a ainsi défini une fonction $\sigma_{\mathcal{D}} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto \mu \end{cases}$.

h) Soient M et N tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda_1\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{ON} = \lambda_2\overrightarrow{OA}$. En utilisant un point B hors de $\mathcal{D}$ et des droites parallèles, construire les points P et Q de $\mathcal{D}$ tels que

$$\overrightarrow{OP} = (\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{OA}, \qquad \overrightarrow{OQ} = (\lambda_1\lambda_2)\overrightarrow{OA}.$$

i) Montrer que $\sigma_{\mathcal{D}}$ vérifie $\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1+\lambda_2) = \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1)+\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_2)$ et que $\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1.\lambda_2) = \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1).\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_2)$. En déduire que $\sigma_{\mathcal{D}}$ est un automorphisme du corps $\mathbb{R}$.

j) Soit σ un automorphisme du corps $\mathbb{R}$. Vérifier que $\sigma(1) = 1$, que $\sigma(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$, que σ est une application croissante, puis en déduire que $\sigma = Id$.

k) Montrer que ϕ est affine.