

Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

# M53 - Partie 2

septembre 2015

Un espace vectoriel réel  $\vec{\mathcal{E}}$  de dimension finie est dit **euclidien** s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle\end{aligned}$$

- symétrique :  $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$ ,
- définie :  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$ ,
- positive :  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$ .

La structure euclidienne standard sur  $\mathbb{R}^n$  est définie par

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Tout espace euclidien est isomorphe à  $\mathbb{R}^n$  (avec sa structure standard), via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels : espace euclidien

Définition

Norme

Notations

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

- 1 La **norme euclidienne** de cet espace est :  $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$ .
- 2 Et une formule inverse (*de polarisation*) est :

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2).$$

- 3 De plus la norme et la produit scalaire sont reliés par *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

- 4 On dit que **l'angle** entre  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est  $\alpha \in [0, \pi]$  si

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \cos(\alpha) \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

Rappels : espace  
euclidien

Définition

Norme

Notations

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

- 1  $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0.$
- 2 Soit  $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ , alors  $\vec{\mathcal{F}}^\perp = \{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \mid \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \vec{v} \perp \vec{w} \}.$
- 3 Soit  $\vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2 \subset \vec{\mathcal{E}}$ , alors  $\vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1 \subset \vec{\mathcal{F}}_2^\perp.$
- 4  $\vec{\mathcal{E}}$  est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels  $\vec{\mathcal{F}}_1$  et  $\vec{\mathcal{F}}_2$ , noté  $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2$ , si  $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \oplus \vec{\mathcal{F}}_2$  et  $\vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2$ .  
Nous avons :  $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1^\perp = \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_2^\perp = \vec{\mathcal{F}}_1.$

# Définition d'un espace affine euclidien

## Définition

Un ensemble  $\mathcal{E}$  est **metrique** s'il est muni d'une application **distance**

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (M, N) &\longmapsto d(M, N)\end{aligned}$$

- symétrique :  $d(M, N) = d(N, M)$ ,
- séparée :  $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$ ,
- inégalité triangulaire :  $d(M, N) + d(N, P) \geq d(M, P)$ .

## Définition

Un espace affine  $\mathcal{E}$  est dit **euclidien** si son espace vectoriel de directions  $\vec{\mathcal{E}}$  est muni d'une structure euclidienne.

Et dans ce cas on pose la distance entre deux points

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|.$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Définition

Distance entre parties

Isométries vectorielles

Isométries affines

Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Définition

Distance entre parties

Isométries vectorielles

Isométries affines

## Définition

Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux parties d'un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$ . On pose

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{(M, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} d(M, N).$$

- 1 Si  $\mathcal{A}$  est compacte et  $\mathcal{B}$  est fermée, alors il existe un couple de points  $(M, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  tel que  $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(M, N)$ . Et pour  $\mathcal{A}$  seulement fermée ?
- 2 La propriété précédente reste vrai pour  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  des sous-espaces affines. De plus  $\overrightarrow{MN} \perp (\vec{A} + \vec{B})$ .
- 3 Deux hyperplans  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{E}$  sont parallèles ssi  $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) > 0$ . Et pour s.e.a. quelconques ?
- 4 Deux sous-espaces affines  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{E}$  sont parallèles ssi  $\forall (M, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, d(M, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, N)$ .

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

## Définition-Proposition

L'application linéaire  $\vec{\phi}$  est une **isométrie** de  $\vec{\mathcal{E}}$  si elle satisfait une des deux conditions équivalentes

$$1 \quad \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},$$

$$\|\vec{\phi}(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|.$$

$$2 \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{E}},$$

$$\langle \vec{\phi}(\vec{v}) | \vec{\phi}(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle.$$

Si une isométrie  $\vec{\phi}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  préserve un s.e.v.  $\vec{\mathcal{F}}$  (c.-à-d.  $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) \subset \vec{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) = \vec{\mathcal{F}}$ ), alors elle préserve aussi son orthogonal,  $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}^\perp) = \vec{\mathcal{F}}^\perp$ . En particulier, si  $\vec{\mathcal{F}}$  n'est pas trivial,  $\vec{\mathcal{E}}$  se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par  $\vec{\phi}$  :  $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}} \oplus \vec{\mathcal{F}}^\perp$ .

Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

- Le **groupe des isométries** de  $\vec{\mathcal{E}}$  est noté  $O(\vec{\mathcal{E}})$ .

Et on note  $O_n = O(\mathbb{R}^n)$ .

- Soit  $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$ , alors  $\det(\vec{\phi}) = \pm 1$ .

- On note  $O^+(\vec{\mathcal{E}})$  (resp.  $O_n^+$ ) l'ensemble des isométries à déterminant 1, dites **directes**, de  $\vec{\mathcal{E}}$  (resp.  $\mathbb{R}^n$ ).

- De même l'ensemble des isométries à déterminant  $-1$ , dites **indirectes**, est noté  $O^-(\vec{\mathcal{E}})$  (resp.  $O_n^-$ ).

*( $O^+(\vec{\mathcal{E}})$  est un sous-groupe du groupe compact  $O(\vec{\mathcal{E}})$ , mais  $O^-(\vec{\mathcal{E}})$  n'en est pas un.)*



Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

- $O_1 = \{1, -1\}.$

- $O_2 = O_2^+ \sqcup O_2^-$ , où

- $O_2^+ = \{ \vec{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$

est le sous-groupe des rotations,

- $O_2^- = \{ \vec{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$

est l'ensemble des réflexions.

*( $\vec{S}_\alpha$  est la symétrie par rapport à la droite d'angle  $\alpha/2$ .)*

Les règles de composition sont :

- $\vec{R}_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha+\beta},$

- $\vec{S}_\alpha \circ S_\beta = R_{\alpha-\beta},$

- $\vec{S}_\alpha \circ R_\gamma = S_{\alpha-\gamma}$  et  $R_\gamma \circ S_\beta = S_{\gamma+\beta}.$

*Remarque : Toute isométrie de  $\mathbb{R}^2$  est le produit d'au plus 2 réflexions.*

# Les isométries de $\mathbb{C}$ (dimension 2)

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

En identifiant l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  avec  $\mathbb{C}$ , le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z | w \rangle = \frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2}$$

Toute élément de  $O(\mathbb{C})$  est de la forme

- $\rho_a : z \mapsto az$  avec  $|a| = 1$ , et dans ce cas c'est une rotation d'angle  $\arg(z)$ ,
- $\sigma_a : z \mapsto a\bar{z}$  avec  $|a| = 1$ , et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par  $\sqrt{a}$ .

L'identification entre  $O_2$  et  $O(\mathbb{C})$  est donnée par :

- $\rho_{e^{i\theta}} = \vec{R}_\theta$ ,
- $\sigma_{e^{i\theta}} = \vec{S}_\theta$ .

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Soit  $\vec{\mathcal{E}}$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$ .

- $\vec{\phi} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$  ssi il existe une b.o.n  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  dans laquelle la matrice de  $\vec{\phi}$  est sous-la forme

$$\vec{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas  $\vec{\phi} = \vec{\rho}_{\vec{w}, \alpha}$  est la rotation de  $\alpha$  autour de l'axe orienté par  $\vec{w}$ .

- $\vec{\phi} \in O^-(\vec{\mathcal{E}})$  ssi il existe une b.o.n  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  dans laquelle la matrice de  $\vec{\phi}$  est sous-la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas  $\vec{\phi}$  est la composée de la rotation  $\vec{\rho}_{\vec{w}, \alpha}$  avec la symétrie  $\vec{\sigma}_{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$  par rapport au plan engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , et on dit que  $\vec{\phi}$  est une **anti-rotation**.



# Décomposition des isométries en réflexions

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cette espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

## Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une **réflexion**.

*(Une réflexion est une isométrie indirecte.)*

## Proposition

Soient  $\vec{\mathcal{E}}$  de dimension  $\dim \vec{\mathcal{E}} = n$ , et  $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$ .

Alors  $\vec{\phi}$  est le produit de  $k (\leq n)$  réflexions :  $\vec{\phi} = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$ .

Si  $k$  est paire  $\vec{\phi} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$ , si  $k$  est impaire  $\vec{\phi} \in O^-(\vec{\mathcal{E}})$ .

Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

## Définition-Proposition

*On dit qu'une application affine  $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  est une **isométrie** si une des conditions équivalente est satisfaite.*

- $\forall A, B \in \mathcal{E}, d(\phi(A), \phi(B)) = d(A, B) ;$
- $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}}).$

On note **Iso**( $\mathcal{E}$ ) l'ensemble des isométries de  $\mathcal{E}$ .

Ainsi que **Iso**<sup>±</sup>( $\mathcal{E}$ ) l'ensemble des isométries dont la partie linéaire est dans  $O^\pm(\vec{\mathcal{E}})$ .

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

- $\text{Iso}(\mathcal{E})$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathcal{E})$ .
- $\text{Iso}^+(\mathcal{E})$  est un sous-groupe de  $\text{Iso}(\mathcal{E})$ .
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport  $\lambda$  multiplie les distances par  $|\lambda|$ , et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  est dite **symétrie (affine) orthogonale** (resp. **réflexion**) s'il existe  $\Omega \in \mathcal{E}$  telle que  $\phi$  est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans  $\mathcal{E}_\Omega$ . Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Toute translation est le produit de deux réflexions.

Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

## Lemme

*Soit  $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$ , alors  $\vec{\mathcal{E}} = \text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id}) \overset{\perp}{\oplus} \text{Im}(\vec{\phi} - \text{Id})$ .*

## Proposition

*Soit  $\phi \in \text{Iso}(\mathcal{E})$ , alors*

- *soit  $\phi$  possède un point fixe  $\Omega$ , et dans ce cas  $\phi \in O(\mathcal{E}_\Omega)$ ,*
- *soit il existe un unique  $\vec{v} (\neq 0)$ , vecteur fixe de  $\vec{\phi}$ , tel que  $T_{\vec{v}} \circ \phi = \phi \circ T_{\vec{v}}$  possède un point fixe.*



Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

- $\phi \in \text{Iso}(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b.$   
*( $\phi$  est la composé d'au plus 2 réflexions.)*
- $\text{Iso}(\mathbb{R}^2) = \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{R}^2).$ 
  - $\phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$  ssi
    - $\phi = R_{\Omega, \alpha}$  est la rotation de centre  $\Omega$  d'angle  $\alpha$ , ou
    - $\phi = T_{\vec{v}}$  est une translation.
  - $\phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$  ssi
    - $\phi = S_{\mathcal{D}}$  est la symétrie par rapport à une droite affine  $\mathcal{D}$ , ou
    - $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{D}}$  avec  $\vec{v} \neq 0$  est un vecteur fixe par la symétrie  $\vec{\phi}$ , et dans ce cas on dit que  $\phi$  est une **symétrie glissée**.

*( $\phi$  est la composé d'au plus 3 réflexions.)*

Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

*Rappelle* : Les application affines de l'espace euclidien  $\mathbb{C}$  sont de la forme  $z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma$ .

$$\text{Iso}(\mathbb{C}) = \text{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{C})$$

- $\phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{C})$  ssi  $\phi(z) = az + b$  avec  $|a| = 1$ .
  - Si  $a \neq 1$ , alors  $\phi$  est la rotation de centre  $\frac{b}{1-a}$ .
  - Si  $a = 1$ , alors  $\phi$  est la translation de  $b$ .
- $\phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{C})$  ssi  $\phi(z) = a\bar{z} + b$  avec  $|a| = 1$ .
  - Si  $\bar{a}b^2 \in \mathbb{R}_-$ , alors  $\phi$  est une symétrie d'axe  $\sqrt{a}\mathbb{R} + b/2$ .
  - Sinon  $\phi$  est une symétrie glissée.

Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

$$\blacksquare \text{ Iso}(\mathbb{R}^3) = \text{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{R}^3).$$

$$\blacksquare \phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \text{ ssi}$$

■  $\phi = R_{\mathcal{D}, \alpha}$  est la rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $\mathcal{D}$ , ou

■  $\phi = T_{\vec{v}}$  est une translation, ou

■  $\phi = T_{\vec{v}} \circ R_{\mathcal{D}, \alpha}$ , avec  $\vec{\mathcal{D}} = \langle \vec{v} \rangle$  et  $\alpha \neq 0$ . Dans ce cas on dit que  $\phi$  est un **vissage** d'axe  $\mathcal{D}$  et d'angle  $\alpha$ .

$$\blacksquare \phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{R}^3) \text{ ssi}$$

■  $\phi = S_{\mathcal{H}}$  est la symétrie par rapport au plan affine  $\mathcal{H}$ , ou

■  $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$  avec  $\vec{v} \neq 0$  est un vecteur fixe par la symétrie  $\vec{\phi}$ , et dans ce cas on dit que  $\phi$  est une **symétrie glissée**.

■  $\phi = R_{\mathcal{D}, \alpha} \circ S_{\mathcal{H}}$  avec  $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$ , et dans ce cas on dit que  $\phi$  est une **anti-rotation**.

*( $\phi$  est la composé d'au plus 4 réflexions.)*

Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

*Rappelle : Une réflexion est une isométrie indirecte.*

## Proposition

*Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine de dimension  $n$ , et  $\phi \in \text{Iso}(\mathcal{E})$ .*

*Alors  $\phi$  est le produit de  $k(\leq n+1)$  réflexions :*

$$\phi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k.$$

*Si  $k$  est paire  $\phi \in \text{Iso}^+(\mathcal{E})$ , et si  $k$  est impaire  $\phi \in \text{Iso}^-(\mathcal{E})$ .*