

Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Similitudes

# M53 - Partie 2

octobre 2015

Un espace vectoriel réel  $\vec{\mathcal{E}}$  de dimension finie est dit **euclidien** s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle\end{aligned}$$

- symétrique :  $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$ ,
- définie :  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$ ,
- positive :  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$ .

La structure euclidienne standard sur  $\mathbb{R}^n$  est définie par

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Tout espace euclidien est isomorphe à  $\mathbb{R}^n$  (avec sa structure standard), via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels : espace euclidien

Définition

Norme

Notations

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Similitudes

1 La **norme euclidienne** de cet espace est :  $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$ .

2 Et une formule inverse (*de polarisation*) est :

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2).$$

3 De plus la norme et la produit scalaire sont reliés par *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

4 On dit que **l'angle** entre  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est  $\alpha \in [0, \pi]$  si

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \cos(\alpha) \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

Rappels : espace euclidien

Définition

Norme

Notations

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Similitudes

$$1 \quad \vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0.$$

$$2 \quad \text{Soit } \vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}, \text{ alors } \vec{\mathcal{F}}^\perp = \{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \mid \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \vec{v} \perp \vec{w} \}.$$

$$3 \quad \text{Soit } \vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2 \subset \vec{\mathcal{E}}, \text{ alors } \vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1 \subset \vec{\mathcal{F}}_2^\perp.$$

$$4 \quad \vec{\mathcal{E}} \text{ est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels } \vec{\mathcal{F}}_1 \text{ et } \vec{\mathcal{F}}_2, \text{ noté } \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2, \text{ si } \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \oplus \vec{\mathcal{F}}_2 \text{ et } \vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2.$$

$$\text{Nous avons : } \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1^\perp = \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_2^\perp = \vec{\mathcal{F}}_1.$$

# Définition d'un espace affine euclidien

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Définition

Distance entre parties

Isométries vectorielles

Isométries affines

Similitudes

## Définition

Un ensemble  $\mathcal{E}$  est **métrique** s'il est muni d'une application **distance**

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (M, N) &\longmapsto d(M, N)\end{aligned}$$

- symétrique :  $d(M, N) = d(N, M)$ ,
- séparée :  $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$ ,
- inégalité triangulaire :  $d(M, N) + d(N, P) \geq d(M, P)$ .

## Définition

Un espace affine  $\mathcal{E}$  est dit **euclidien** si son espace vectoriel de directions  $\vec{\mathcal{E}}$  est muni d'une structure euclidienne.

Et dans ce cas on pose la distance entre deux points

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|.$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Définition

Distance entre parties

Isométries vectorielles

Isométries affines

Similitudes

## Définition

Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux parties d'un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$ . On pose

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{(M, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} d(M, N).$$

- 1 Si  $\mathcal{A}$  est compacte et  $\mathcal{B}$  est fermée, les deux non vides, alors il existe un couple de points  $(M, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  tel que  $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(M, N)$ .  
Et pour  $\mathcal{A}$  seulement fermée ?
- 2 La propriété précédente reste vraie pour  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  des sous-espaces affines. De plus  $\overrightarrow{MN} \perp (\vec{A} + \vec{B})$ .
- 3 Deux hyperplans distincts  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{E}$  sont parallèles ssi  $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) > 0$ . Et pour s.e.a. quelconques ?
- 4 Deux sous-espaces affines  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{E}$  sont parallèles ssi  $\forall (M, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, d(M, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, N)$ .

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Similitudes

## Définition-Proposition

L'application linéaire  $\vec{\phi}$  est une **isométrie** (dit également **orthogonale**) de  $\vec{\mathcal{E}}$  si elle satisfait une des conditions équivalentes

1  $\forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},$

$$\|\vec{\phi}(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|.$$

2  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{E}},$

$$\langle \vec{\phi}(\vec{v}) | \vec{\phi}(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle.$$

3

$$\vec{\phi} \circ \vec{\phi}^t = \text{Id} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\phi}^t \circ \vec{\phi} = \text{Id} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\phi}^{-1} = \vec{\phi}^t$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Similitudes

- 1 Si une isométrie  $\vec{\phi}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  préserve un s.e.v.  $\vec{\mathcal{F}}$  (c.-à-d.  $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) \subset \vec{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) = \vec{\mathcal{F}}$ ), alors elle préserve aussi son orthogonal,

$$\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}^\perp) = \vec{\mathcal{F}}^\perp.$$

- 2 En particulier, si  $\vec{\mathcal{F}}$  n'est pas trivial,  $\vec{\mathcal{E}}$  se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par  $\vec{\phi}$  :

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}} \oplus \vec{\mathcal{F}}^\perp.$$

Si on note  $\vec{\phi}_1 = \vec{\phi}|_{\vec{\mathcal{F}}}$  et  $\vec{\phi}_2 = \vec{\phi}|_{\vec{\mathcal{F}}^\perp}$ , alors  $\vec{\phi}_1$  et  $\vec{\phi}_2$  sont orthogonales et

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_1 \oplus \vec{\phi}_2.$$

- 3 Si  $\lambda$  est valeur propre (réelle) de  $\vec{\phi}$  alors  $\lambda = \pm 1$ .



Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Similitudes

- Le **groupe des isométries** de  $\vec{\mathcal{E}}$  est noté  $O(\vec{\mathcal{E}})$ .

Et on note  $O_n = O(\mathbb{R}^n)$ .

$$(O_n = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M^t M = I_n\}.)$$

- Soit  $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$ , alors  $\det(\vec{\phi}) = \pm 1$ .

- On note  $O^+(\vec{\mathcal{E}})$  ou  $SO(\vec{\mathcal{E}})$  (resp.  $O_n^+$  ou  $SO_n$ ) l'ensemble des isométries à déterminant 1, dites **directes**, de  $\vec{\mathcal{E}}$  (resp.  $\mathbb{R}^n$ ).

- De même l'ensemble des isométries à déterminant  $-1$ , dites **indirectes**, est noté  $O^-(\vec{\mathcal{E}})$  (resp.  $O_n^-$ ).

*( $O^+(\vec{\mathcal{E}})$  est un sous-groupe du groupe compact  $O(\vec{\mathcal{E}})$ , mais  $O^-(\vec{\mathcal{E}})$  n'en est pas un.)*

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Similitudes

- $O_1 = \{1, -1\}.$

- $O_2 = O_2^+ \sqcup O_2^-$ , où

- $O_2^+ = \{ \vec{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \}$

est le sous-groupe des rotations,

- $O_2^- = \{ \vec{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \}$

est l'ensemble des réflexions.

*( $\vec{S}_\alpha$  est la symétrie par rapport à la droite d'angle  $\alpha/2$ .)*

Les règles de composition sont :

- $\vec{R}_\alpha \circ \vec{R}_\beta = \vec{R}_{\alpha+\beta}$  ( $\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1$ ),

- $\vec{S}_\alpha \circ \vec{S}_\beta = \vec{R}_{\alpha-\beta},$

- $\vec{S}_\alpha \circ \vec{R}_\gamma = \vec{S}_{\alpha-\gamma}$  et  $\vec{R}_\gamma \circ \vec{S}_\beta = \vec{S}_{\gamma+\beta}.$

*Remarque : Toute isométrie de  $\mathbb{R}^2$  est le produit d'au plus 2 réflexions.*

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Similitudes

En identifiant l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  avec  $\mathbb{C}$ , le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z | w \rangle = \frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2}$$

Toute élément de  $O(\mathbb{C})$  est de la forme

- $\rho_a : z \mapsto az$  avec  $|a| = 1$ , et dans ce cas c'est une rotation d'angle  $\arg(a)$ , ou
- $\sigma_a : z \mapsto a\bar{z}$  avec  $|a| = 1$ , et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par  $\sqrt{a}$ .

L'identification entre  $O_2$  et  $O(\mathbb{C})$  est donnée par :

- $\rho_{e^{i\theta}} = \vec{R}_\theta$ ,
- $\sigma_{e^{i\theta}} = \vec{S}_\theta$ .

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Similitudes

Soit  $\vec{\mathcal{E}}$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$ .

- $\vec{\phi} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$  ssi il existe une b.o.n  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  dans laquelle la matrice de  $\vec{\phi}$  est sous la forme

$$\vec{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas  $\vec{\phi} = \vec{\rho}_{\vec{w}, \alpha}$  est la rotation de  $\alpha$  autour de l'axe orienté engendré par  $\vec{w}$ .

- $\vec{\phi} \in O^-(\vec{\mathcal{E}})$  ssi il existe une b.o.n  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  dans laquelle la matrice de  $\vec{\phi}$  est sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas  $\vec{\phi}$  est la composée de la rotation  $\vec{\rho}_{\vec{w}, \alpha}$  avec la symétrie  $\vec{\sigma}_{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$  par rapport au plan engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , et on dit que  $\vec{\phi}$  est une **anti-rotation**.



# Décomposition des isométries en réflexions

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Similitudes

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

## Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une **réflexion**.

*(Une réflexion est une isométrie indirecte.)*

## Proposition

Soient  $\vec{\mathcal{E}}$  de dimension  $\dim \vec{\mathcal{E}} = n$ , et  $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$ .

Alors  $\vec{\phi}$  est le produit de  $k (\leq n)$  réflexions :  $\vec{\phi} = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$ .

Si  $k$  est pair  $\vec{\phi} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$ , si  $k$  est impair  $\vec{\phi} \in O^-(\vec{\mathcal{E}})$ .

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

Similitudes

## Définition-Proposition

*On dit qu'une application affine  $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  est une **isométrie** si une des conditions équivalentes est satisfaite :*

- $\forall A, B \in \mathcal{E}, d(\phi(A), \phi(B)) = d(A, B) ;$
- $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}}).$

On note **Iso**( $\mathcal{E}$ ) l'ensemble des isométries de  $\mathcal{E}$ .

Ainsi que **Iso**<sup>±</sup>( $\mathcal{E}$ ) l'ensemble des isométries dont la partie linéaire est dans  $O^\pm(\vec{\mathcal{E}})$ .

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

Similitudes

- $\text{Iso}(\mathcal{E})$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathcal{E})$ .
- $\text{Iso}^+(\mathcal{E})$  est un sous-groupe de  $\text{Iso}(\mathcal{E})$ .
- Les translations sont des isométries (directes).
- Une homothétie de rapport  $\lambda$  multiplie les distances par  $|\lambda|$ , et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$  est dite **symétrie (affine) orthogonale** (resp. **réflexion**) s'il existe  $\Omega \in \mathcal{E}$  telle que  $\phi$  est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans  $\mathcal{E}_\Omega$ . Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Toute translation est le produit de deux réflexions.



Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

Similitudes

## Lemme

Soit  $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$ , alors  $\vec{\mathcal{E}} = \text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id}) \oplus^{\perp} \text{Im}(\vec{\phi} - \text{Id})$ .

## Proposition

Soit  $\phi \in \text{Iso}(\mathcal{E})$ , alors

- soit  $\phi$  possède un point fixe  $\Omega$ , et dans ce cas  $\phi \in O(\mathcal{E}_{\Omega})$ ,
- soit il existe un unique  $\vec{v} (\neq 0)$ , vecteur fixe de  $\vec{\phi}$ , tel que  $T_{\vec{v}} \circ \phi = \phi \circ T_{\vec{v}}$  possède (au moins) un point fixe.

Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

Similitudes

- $\phi \in \text{Iso}(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b.$   
( $\phi$  est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- $\text{Iso}(\mathbb{R}^2) = \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{R}^2).$ 
  - $\phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$  ssi
    - $\phi = R_{\Omega, \alpha}$  est la rotation de centre  $\Omega$  d'angle  $\alpha$ , ou
    - $\phi = T_{\vec{v}}$  est une translation.
  - $\phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$  ssi
    - $\phi = S_{\mathcal{D}}$  est la symétrie par rapport à une droite affine  $\mathcal{D}$ , ou
    - $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{D}}$  avec  $\vec{v} \neq 0$  un vecteur fixe par la symétrie  $\vec{\phi}$  (c.-à-d.  $\vec{\phi} \in \vec{\mathcal{D}}$ ), et dans ce cas on dit que  $\phi$  est une **symétrie glissée**.

( $\phi$  est la composée d'au plus 3 réflexions.)

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

Similitudes

*Rappel* : Les applications affines de l'espace euclidien  $\mathbb{C}$  sont de la forme  $z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma$ .

$$\text{Iso}(\mathbb{C}) = \text{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{C})$$

- $\phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{C})$  ssi  $\phi(z) = az + b$  avec  $|a| = 1$ .
  - Si  $a \neq 1$ , alors  $\phi$  est la rotation de centre  $\frac{b}{1-a}$ .
  - Si  $a = 1$ , alors  $\phi$  est la translation de  $b$ .
- $\phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{C})$  ssi  $\phi(z) = a\bar{z} + b$  avec  $|a| = 1$ .
  - Si  $\bar{a}b^2 \in \mathbb{R}_-$ , alors  $\phi$  est une symétrie d'axe  $\sqrt{a}\mathbb{R} + b/2$ .
  - Sinon  $\phi$  est une symétrie glissée.

Rappels : espace  
euclidien

Espaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

Similitudes

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^3) = \text{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{R}^3).$$

■  $\phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^3)$  ssi

■  $\phi = R_{\mathcal{D},\alpha}$  est la rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $\mathcal{D}$ , ou bien

■  $\phi = T_{\vec{v}} \circ R_{\mathcal{D},\alpha}$ , avec  $\vec{\mathcal{D}} = \langle \vec{v} \rangle$

■ si  $\alpha = 0$ , c.-à-d.  $\phi = T_{\vec{v}}$ , c'est une translation,

■ si  $\alpha \neq 0$ , on dit que  $\phi$  est un **vissage** d'axe  $\mathcal{D}$  et d'angle  $\alpha$ .

■  $\phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$  ssi

■  $\phi = R_{\mathcal{D},\alpha} \circ S_{\mathcal{H}}$  avec  $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$

■ si  $\alpha = 0$ , c.-à-d.  $\phi = S_{\mathcal{H}}$ , est la symétrie par rapport au plan affine  $\mathcal{H}$

■ si  $\alpha \neq 0$ , on dit que  $\phi$  est une **anti-rotation**.

■  $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$  avec  $\vec{v} \neq 0$  est un vecteur fixe par la symétrie  $\vec{\phi}$ , et dans ce cas on dit que  $\phi$  est une **symétrie glissée**.

*( $\phi$  est la composée d'au plus 4 réflexions.)*

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

Similitudes

*Rappel : Une réflexion est une isométrie indirecte.*

## Proposition

*Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine de dimension  $n$ , et  $\phi \in \text{Iso}(\mathcal{E})$ .*

*Alors  $\phi$  est le produit de  $k(\leq n+1)$  réflexions :*

$$\phi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k.$$

*Si  $k$  est pair  $\phi \in \text{Iso}^+(\mathcal{E})$ , et si  $k$  est impair  $\phi \in \text{Iso}^-(\mathcal{E})$ .*

Rappels : espace  
euclidienEspaces affines  
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Similitudes

Définition

Propriétés

## Définition

- Une application linéaire  $\vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}})$  est dite **similitude vectorielle** si elle multiplie les normes par une constante  $k > 0$  :

$$\|\vec{\phi}(\vec{v})\| = k \|\vec{v}\|, \quad \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}.$$

- Une application affine  $\phi \in \text{Aff}(E)$  est dite **similitude affine** si elle multiplie les distances par une constante  $k > 0$  :

$$d(\phi(A), \phi(B)) = k \cdot d(A, B), \quad \forall A, B \in \mathcal{E}.$$

Le nombre strictement positif  $k$  est dit **rapport de la similitude**.

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Similitudes

Définition

Propriétés

- Une application affine est une similitude ssi sa partie linéaire est une similitude vectorielle.
- Les isométries sont des similitudes ( $k = 1$ ).
- Toute similitude vectorielle se décompose de façon unique en  $\vec{\phi} = \vec{h}_k \circ \vec{\psi}$ , où  $\vec{h}_k$  est une homothétie de rapport  $k > 0$  et  $\vec{\psi}$  est une isométrie.
- Une similitude est dite **directe** (resp. **indirecte**) si son déterminant est positif (resp. négatif).
- Les similitudes sont des automorphismes (vectoriels, affines).  
L'inverse d'une similitude de rapport  $k$  est une similitude de rapport  $1/k$ .
- Les similitudes vectorielles (resp. affines, resp. directes) forment un groupe.

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Similitudes

Définition

Propriétés

- Toute similitude affine, qui n'est pas une isométrie, possède un unique point fixe, dit **le centre de la similitude**.
- Les similitudes préservent les angles.
- En particulier :
  - Les similitudes préservent les sous-espaces parallèles.
  - Les similitudes préservent les sous-espaces orthogonaux (perpendiculaires).
- L'image d'une sphère par une similitude est une sphère.