Rappels : espace euclidien

Espaces affin euclidiens

netries vectorienes

Isomètries affine:

M53 - Partie 2

septembre 2015

Rappels : espace euclidien Définition

Espaces affines euclidiens

Isometries vectorielles

Isométries affines

Un espace vectoriel réel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension finie est dit euclidien s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \mapsto \langle \overrightarrow{v} \, | \overrightarrow{w} \rangle \end{array}$$

- symétrique : $\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{w} | \overrightarrow{v} \rangle$,
- $définie: \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = 0,$
- **positive** : $\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{v} \rangle \geq 0$.

La structure euclidienne standard sur \mathbb{R}^n est définie par

$$\langle (x_1,\ldots,x_n)|(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

Tout espace euclidien est isomorphe à \mathbb{R}^n (avec sa structure standard), via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels : espace euclidien Définition Norme

Espaces affines euclidiens

isometries vectorielle

Isométries affines

Un espace vectoriel réel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension finie est dit euclidien s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R} \\
(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$$

- symétrique : $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$,
- $definie: \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = 0,$
- **positive** : $\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{v} \rangle \geq 0$.

La structure euclidienne standard sur \mathbb{R}^n est définie par

$$\langle (x_1,\ldots,x_n)|(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

Tout espace euclidien est isomorphe à \mathbb{R}^n (avec sa structure standard), via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels : espace euclidien Définition Norme Notations

Espaces affines euclidiens

isometries vectorielles

Isométries affines

Un espace vectoriel réel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension finie est dit euclidien s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R} \\
(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \mapsto \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle$$

- symétrique : $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$,
- $définie: \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0,$
- **positive** : $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \ge 0$.

La structure euclidienne standard sur \mathbb{R}^n est définie par

$$\langle (x_1,\ldots,x_n)|(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

Tout espace euclidien est isomorphe à \mathbb{R}^n (avec sa structure standard),via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels : espace euclidien Définition Norme Notations

Espaces affines euclidiens

Isometries vectorielles

Isométries affines

Un espace vectoriel réel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension finie est dit euclidien s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R} \\
(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \mapsto \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle$$

- symétrique : $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$,
- $définie: \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = 0,$
- **positive** : $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \ge 0$.

La structure euclidienne standard sur \mathbb{R}^n est définie par

$$\langle (x_1,\ldots,x_n)|(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

Tout espace euclidien est isomorphe à \mathbb{R}^n (avec sa structure standard), via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels : espace euclidien Définition Norme Notations

euclidiens

Isometries vectorielles

Un espace vectoriel réel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension finie est dit euclidien s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R} \\
(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$$

- symétrique : $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$,
- $\bullet \text{ définie}: \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = 0,$
- positive : $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \ge 0$.

La structure euclidienne standard sur \mathbb{R}^n est définie par

$$\langle (x_1,\ldots,x_n)|(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

Tout espace euclidien est isomorphe à \mathbb{R}^n (avec sa structure standard),via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels : espace euclidien Définition Norme Notations

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielles

Un espace vectoriel réel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension finie est dit euclidien s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$$

- symétrique : $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$,
- $\bullet \text{ définie}: \langle \overrightarrow{\mathbf{v}} | \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{v}} = 0,$
- positive : $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \ge 0$.

La structure euclidienne standard sur \mathbb{R}^n est définie par

$$\langle (x_1,\ldots,x_n)|(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

Tout espace euclidien est isomorphe à \mathbb{R}^n (avec sa structure standard), via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels : espace euclidien Définition Norme Notations

euclidiens

Isométries vectorielles

Icométries affines

Un espace vectoriel réel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension finie est dit euclidien s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$$

- symétrique : $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$,
- $\bullet \text{ définie}: \langle \overrightarrow{\mathbf{v}} | \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{v}} = 0,$
- **positive** : $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \ge 0$.

La structure euclidienne standard sur \mathbb{R}^n est définie par

$$\langle (x_1,\ldots,x_n)|(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

Tout espace euclidien est isomorphe à \mathbb{R}^n (avec sa structure standard), via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels: norme euclidienne

- Rappels : espace euclidien
- Espaces affines
- Isométries vectorielles
- Innestries offices

- 1 La norme euclidienne de cet espace est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$.
- **2** Et une formule inverse (de polarisation) est :

$$\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = \frac{1}{2} (\| \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{w} \|^2).$$

De plus la norme et la produit scalaire sont reliés par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{w} \right\rangle \right| \leq \left\| \overrightarrow{v} \right\| \left\| \overrightarrow{w} \right\|.$$

On dit que l'angle entre \overrightarrow{v} et \overrightarrow{w} est $\alpha \in [0, \pi]$ si

$$\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = \cos(\alpha) \| \overrightarrow{v} \| \| \overrightarrow{w} \|.$$

Rappels : norme euclidienne

Rappels : espace euclidien Définition

Espaces affin

Isométries vectorielles

- 1 La norme euclidienne de cet espace est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$.
- **E**t une formule inverse (de polarisation) est

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \frac{1}{2} (\| \vec{v} + \vec{w} \|^2 - \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{w} \|^2).$$

De plus la norme et la produit scalaire sont reliés par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{w} \right\rangle \right| \leq \left\| \overrightarrow{v} \right\| \left\| \overrightarrow{w} \right\|.$$

On dit que l'angle entre \overrightarrow{v} et \overrightarrow{w} est $\alpha \in [0, \pi]$ s

$$\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = \cos(\alpha) \| \overrightarrow{v} \| \| \overrightarrow{w} \|.$$

Rappels: norme euclidienne

Rappels : espace euclidien Définition

Notations
Fenaces affin

euclidiens

Isomètries vectorielles

Isométries affine

- **1** La norme euclidienne de cet espace est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$.
- **2** Et une formule inverse (de polarisation) est :

$$\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = \frac{1}{2} (\| \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{w} \|^2).$$

De plus la norme et la produit scalaire sont reliés par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \left\langle \overrightarrow{v} \, \middle| \, \overrightarrow{w} \right\rangle \right| \le \left\| \overrightarrow{v} \right\| \left\| \overrightarrow{w} \right\|.$$

4 On dit que l'angle entre \vec{v} et \vec{w} est $\alpha \in [0, \pi]$ s

$$\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = \cos(\alpha) \| \overrightarrow{v} \| \| \overrightarrow{w} \|.$$

Rappels : norme euclidienne

Rappels : espace euclidien ^{Définition} Norme

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affine

- **1** La norme euclidienne de cet espace est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$.
- **2** Et une formule inverse (de polarisation) est :

$$\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = \frac{1}{2} (\| \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{w} \|^2).$$

De plus la norme et la produit scalaire sont reliés par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{w} \right\rangle \right| \leq \left\| \overrightarrow{v} \right\| \left\| \overrightarrow{w} \right\|.$$

On dit que l'angle entre \vec{v} et \vec{w} est $\alpha \in [0, \pi]$ s

$$\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = \cos(\alpha) \| \overrightarrow{v} \| \| \overrightarrow{w} \|.$$

Rappels : norme euclidienne

Rappels : espace euclidien ^{Définition} Norme

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affine

- **1** La norme euclidienne de cet espace est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$.
- **2** Et une formule inverse *(de polarisation)* est :

$$\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = \frac{1}{2} (\| \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{w} \|^2).$$

3 De plus la norme et la produit scalaire sont reliés par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \left\langle \overrightarrow{v} \right| \overrightarrow{w} \right\rangle \right| \leq \left\| \overrightarrow{v} \right\| \left\| \overrightarrow{w} \right\|.$$

4 On dit que l'angle entre \vec{v} et \vec{w} est $\alpha \in [0, \pi]$ si

$$\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = \cos(\alpha) \| \overrightarrow{v} \| \| \overrightarrow{w} \|.$$

Rappels : notations

Rappels : espace euclidien Définition

Espaces affines euclidiens

Notations

Isométries vectorielles

Isométries affines

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = 0.$$

- 2 Soit $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$, alors $\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp} = \{ \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \mid \forall \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}, \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \}.$
- $\exists \ \mathsf{Soit} \ \overrightarrow{\mathcal{F}}_1, \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}, \ \mathsf{alors} \ \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \perp \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}_2^\perp,$
- 4 \mathcal{E} est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, noté $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \stackrel{\leftarrow}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, si $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \perp \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$. Nous avons : $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\perp} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\perp} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1$.

Rappels : notations

Rappels : espace euclidien Définition

Espaces affines

Notations

Isométries vectorielles

Isométries affine

- $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = 0.$
- 2 Soit $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$, alors $\vec{\mathcal{F}}^{\perp} = \{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \mid \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \vec{v} \perp \vec{w} \}.$
- $\exists \ \mathsf{Soit} \ \overrightarrow{\mathcal{F}}_1, \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}, \ \mathsf{alors} \ \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \perp \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}_2^\perp,$
- 4 \mathcal{E} est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $\vec{\mathcal{F}}_1$ et $\vec{\mathcal{F}}_2$, noté $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \stackrel{\leftarrow}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2$, si $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \oplus \vec{\mathcal{F}}_2$ et $\vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2$. Nous avons : $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \oplus \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1^{\perp} = \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_2^{\perp} = \vec{\mathcal{F}}_1$.

Rappels : espace euclidien Définition Norme

Espaces affine euclidiens

Notations

Isométries vectorielles

Isométries affines

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = 0.$$

- $2 \text{ Soit } \vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}, \text{ alors } \vec{\mathcal{F}}^{\perp} = \left\{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \middle| \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \vec{v} \perp \vec{w} \right\}.$
- $egin{aligned} \mathbf{B} & \mathsf{Soit} \ \overrightarrow{\mathcal{F}}_1, \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}, \ \mathsf{alors} \ \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \perp \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}_2^\perp \end{aligned}$
- \mathcal{E} est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, noté $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \stackrel{\leftarrow}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, si $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \perp \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$. Nous avons : $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathcal{F}}_1^\perp = \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathcal{F}}_2^\perp = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1$.

Rappels : espace euclidien Définition Norme

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = 0.$$

$$2 \text{ Soit } \vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}, \text{ alors } \vec{\mathcal{F}}^{\perp} = \left\{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \middle| \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \vec{v} \perp \vec{w} \right\}.$$

$$\mbox{Soit } \vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2 \subset \vec{\mathcal{E}} \mbox{, alors } \vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1 \subset \vec{\mathcal{F}}_2^{\perp}.$$

 \mathcal{E} est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, noté $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \stackrel{\perp}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, si $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \perp \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$. Nous avons : $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \stackrel{\perp}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathcal{F}}_1^{\perp} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathcal{F}}_2^{\perp} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1$.

Rappels : notations

Rappels : espace euclidien Définition Norme

Espaces affines euclidiens

Notations

Isométries vectorielles

Isométries affines

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = 0.$$

$$2 \text{ Soit } \vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}, \text{ alors } \vec{\mathcal{F}}^{\perp} = \left\{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \middle| \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \vec{v} \perp \vec{w} \right\}.$$

$$\mbox{Soit } \vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2 \subset \vec{\mathcal{E}} \mbox{, alors } \vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1 \subset \vec{\mathcal{F}}_2^{\perp}.$$

4 $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, noté $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, si $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \perp \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$.

Nous avons :
$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \stackrel{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1^{\perp} = \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_2^{\perp} = \vec{\mathcal{F}}_1$$

Rappels : notations

Rappels : espace euclidien Définition Norme

Espaces affines euclidiens

Notations

Isométries vectorielles

Isométries affines

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = 0.$$

$$2 \text{ Soit } \vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}, \text{ alors } \vec{\mathcal{F}}^{\perp} = \left\{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \middle| \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \vec{v} \perp \vec{w} \right\}.$$

$$\mbox{Soit } \vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2 \subset \vec{\mathcal{E}} \mbox{, alors } \vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1 \subset \vec{\mathcal{F}}_2^{\perp}.$$

4 $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, noté $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, si $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \oplus \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \perp \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$.

Nous avons :
$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \stackrel{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1^{\perp} = \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_2^{\perp} = \vec{\mathcal{F}}_1$$

Rappels: notations

Notations

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = 0.$$

$$2 \text{ Soit } \vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}} \text{, alors } \vec{\mathcal{F}}^{\perp} = \big\{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \, \big| \, \, \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \, \vec{v} \perp \vec{w} \big\}.$$

$$\mbox{Soit } \vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2 \subset \vec{\mathcal{E}} \mbox{, alors } \vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1 \subset \vec{\mathcal{F}}_2^{\perp}.$$

 $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $\vec{\mathcal{F}}_1$ et $\vec{\mathcal{F}}_2$, noté $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \stackrel{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2$, si $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \oplus \vec{\mathcal{F}}_2$ et $\vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2$.

Nous avons :
$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \stackrel{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1^{\perp} = \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_2^{\perp} = \vec{\mathcal{F}}_1$$
.

Rappels : notations

Rappels : espace euclidien Définition Norme

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

- $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle = 0.$
- $2 \text{ Soit } \vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}} \text{, alors } \vec{\mathcal{F}}^{\perp} = \big\{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \, \big| \, \, \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \, \vec{v} \perp \vec{w} \big\}.$
- $\mbox{Soit } \vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2 \subset \vec{\mathcal{E}} \mbox{, alors } \vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1 \subset \vec{\mathcal{F}}_2^{\perp}.$
- 4 $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, noté $\overrightarrow{\mathcal{E}}=\overrightarrow{\mathcal{F}}_1\overset{\perp}{\oplus}\overrightarrow{\mathcal{F}}_2$, si $\overrightarrow{\mathcal{E}}=\overrightarrow{\mathcal{F}}_1\oplus\overrightarrow{\mathcal{F}}_2$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1\perp\overrightarrow{\mathcal{F}}_2$. Nous avons : $\overrightarrow{\mathcal{E}}=\overrightarrow{\mathcal{F}}_1\overset{\perp}{\oplus}\overrightarrow{\mathcal{F}}_2\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathcal{F}}_1^\perp=\overrightarrow{\mathcal{F}}_2\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathcal{F}}_2^\perp=\overrightarrow{\mathcal{F}}_1$.

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Distance entre parties

Isomètries vectorielles

Isométries affir

Définition

Un ensemble \mathcal{E} est métrique s'il est muni d'un application distance

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(M, N) \mapsto d(M, N)$$

- symétrique : d(M, N) = d(N, M),
- séparée : $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$,
- inégalité triangulaire : $d(M, N) + d(N, P) \ge d(M, P)$.

Définition

Un espace affine \mathcal{E} est dit euclidien si son espace vectoriel de directions $\overline{\mathcal{E}}$ est muni d'une structure euclidienne.

$$d(A,B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affine euclidiens

Isométries affir

Définition

Un ensemble \mathcal{E} est métrique s'il est muni d'un application distance

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(M, N) \mapsto d(M, N)$$

- symétrique : d(M, N) = d(N, M),
- séparée : $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$,
- inégalité triangulaire : $d(M, N) + d(N, P) \ge d(M, P)$.

Définition

Un espace affine \mathcal{E} est dit euclidien si son espace vectoriel de directions $\overline{\mathcal{E}}$ est muni d'une structure euclidienne.

$$d(A,B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affin euclidiens

Distance entre

Isométries vectorielle

Isométries affines

Définition

Un ensemble \mathcal{E} est métrique s'il est muni d'un application distance

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(M, N) \mapsto d(M, N)$$

- symétrique : d(M, N) = d(N, M),
- séparée : $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$,
- inégalité triangulaire : $d(M, N) + d(N, P) \ge d(M, P)$.

Définition

Un espace affine \mathcal{E} est dit euclidien si son espace vectoriel de directions $\overline{\mathcal{E}}$ est muni d'une structure euclidienne.

$$d(A,B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Définition

lsométries vectorielle

Isométries affir

Définition

Un ensemble $\mathcal E$ est métrique s'il est muni d'un application distance

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(M, N) \mapsto d(M, N)$$

- symétrique : d(M, N) = d(N, M),
- séparée : $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$,
- inégalité triangulaire : $d(M, N) + d(N, P) \ge d(M, P)$.

Définition

Un espace affine \mathcal{E} est dit euclidien si son espace vectoriel de directions $\overline{\mathcal{E}}$ est muni d'une structure euclidienne.

$$d(A,B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens Définition

Isométries vectorielle

Isométries affin

Définition

Un ensemble $\mathcal E$ est métrique s'il est muni d'un application distance

$$\begin{array}{c} \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\textit{M}, \textit{N}) \mapsto \textit{d}(\textit{M}, \textit{N}) \end{array}$$

- symétrique : d(M, N) = d(N, M),
- séparée : $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$,
- inégalité triangulaire : $d(M, N) + d(N, P) \ge d(M, P)$.

Définition

Un espace affine \mathcal{E} est dit euclidien si son espace vectoriel de directions $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est muni d'une structure euclidienne.

$$d(A,B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Définition

Isométries vectorielle

Isométries affin

Définition

Un ensemble \mathcal{E} est métrique s'il est muni d'un application distance

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(M, N) \mapsto d(M, N)$$

- symétrique : d(M, N) = d(N, M),
- séparée : $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$,
- inégalité triangulaire : $d(M, N) + d(N, P) \ge d(M, P)$.

Définition

Un espace affine \mathcal{E} est dit <u>euclidien</u> si son espace vectoriel de directions $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est muni d'une structure euclidienne.

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|.$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affine euclidiens

Définition

Distance entre parties

isomethes vectorienes

Isométries affin

Définition

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf_{(M,N)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} d(M,N).$$

- I Si \mathcal{A} est compacte et \mathcal{B} est fermée, alors il existe un couple de points $(M, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tel que $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(M, N)$. Et pour \mathcal{A} seulement fermée?
- La propriété précédente reste vraie pour A et B des sous-espaces affines. De plus $\widehat{MN} \perp (\widehat{A} + \widehat{B})$.
- Deux hyperplans \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $d(\mathcal{F},\mathcal{G}) > 0$. Et pour s.e.a. quelconques?
- Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ss $\forall (M,N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, d(M,\mathcal{G}) = d(\mathcal{F},\mathcal{G}) = d(\mathcal{F},N).$

Rappels : espace euclidien

Espaces aff euclidiens

Distance entre parties

Isométries vectorielles

Isométries affin

Définition

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf_{(M,N)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} d(M,N).$$

- I Si \mathcal{A} est compacte et \mathcal{B} est fermée, alors il existe un couple de points $(M,N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tel que $d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = d(M,N)$. Et pour \mathcal{A} seulement fermée?
- La propriété précédente reste vraie pour A et B des sous-espaces affines. De plus $\widehat{MN} \perp (\widehat{A} + \widehat{B})$.
- Deux hyperplans \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $d(\mathcal{F},\mathcal{G}) > 0$. Et pour s.e.a. quelconques?
- Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $\forall (M, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, d(M, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, N).$

Rappels : espace euclidien

Espaces affi euclidiens

Distance entre parties

Isométries vectorielles

Isométries affin

Définition

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf_{(M,N)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} d(M,N).$$

- I Si \mathcal{A} est compacte et \mathcal{B} est fermée, alors il existe un couple de points $(M,N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tel que $d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = d(M,N)$. Et pour \mathcal{A} seulement fermée?
- 2 La propriété précédente reste vraie pour A et B des sous-espaces affines. De plus $\overrightarrow{MN} \perp (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$.
- Deux hyperplans \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $d(\mathcal{F},\mathcal{G}) > 0$. Et pour s.e.a. quelconques?
- Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi: $\forall (M, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, d(M, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, N).$

Rappels : espace euclidien

Espaces affir euclidiens

Distance entre parties

Isométries affin

Définition

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf_{(M,N)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} d(M,N).$$

- I Si \mathcal{A} est compacte et \mathcal{B} est fermée, alors il existe un couple de points $(M,N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tel que $d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = d(M,N)$. Et pour \mathcal{A} seulement fermée?
- 2 La propriété précédente reste vraie pour A et B des sous-espaces affines. De plus $\overrightarrow{MN} \perp (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$.
- Deux hyperplans \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $d(\mathcal{F},\mathcal{G}) > 0$. En pour s.e.a. quelconques?
- Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $\forall (M, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, d(M, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, N).$

Rappels : espace euclidien

Espaces affir euclidiens

Distance entre parties

Isométries affin

Définition

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf_{(M,N)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} d(M,N).$$

- I Si \mathcal{A} est compacte et \mathcal{B} est fermée, alors il existe un couple de points $(M,N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tel que $d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = d(M,N)$. Et pour \mathcal{A} seulement fermée?
- 2 La propriété précédente reste vraie pour \mathcal{A} et \mathcal{B} des sous-espaces affines. De plus $\overrightarrow{MN} \perp (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$.
- Deux hyperplans \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $d(\mathcal{F},\mathcal{G}) > 0$. Et pour s.e.a. quelconques?
- Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $\forall (M, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, d(M, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, N).$

Rappels : espace euclidien

Espaces aff euclidiens

Distance entre parties

Isométries vectorielles

Isométries affin

Définition

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf_{(M,N)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} d(M,N).$$

- I Si \mathcal{A} est compacte et \mathcal{B} est fermée, alors il existe un couple de points $(M,N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tel que $d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = d(M,N)$. Et pour \mathcal{A} seulement fermée ?
- 2 La propriété précédente reste vraie pour A et B des sous-espaces affines. De plus $\overrightarrow{MN} \perp (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$.
- 3 Deux hyperplans \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $d(\mathcal{F},\mathcal{G}) > 0$. Et pour s.e.a. quelconques?
- Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $\forall (M,N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, d(M,\mathcal{G}) = d(\mathcal{F},\mathcal{G}) = d(\mathcal{F},N).$

Rappels : espace euclidien

Espaces affi euclidiens

Distance entre parties

Isométries affine

Définition

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf_{(M,N)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} d(M,N).$$

- I Si \mathcal{A} est compacte et \mathcal{B} est fermée, alors il existe un couple de points $(M,N)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ tel que $d(\mathcal{A},\mathcal{B})=d(M,N)$. Et pour \mathcal{A} seulement fermée?
- 2 La propriété précédente reste vraie pour A et B des sous-espaces affines. De plus $\overrightarrow{MN} \perp (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$.
- Deux hyperplans \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $d(\mathcal{F},\mathcal{G}) > 0$. Et pour s.e.a. quelconques?
- 4 Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $\forall (M, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, d(M, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, N).$

Rappels : isométrie vectorielle

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définit

Petites dimens

Isométries affine

Définition-Proposition

L'application linéaire $\overrightarrow{\phi}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si elle satisfait une des deux conditions équivalentes

$$1 \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},$$

$$\left\| \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) \right\| = \left\| \overrightarrow{v} \right\|$$

$$\mathbf{2} \ \forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \overline{\mathcal{E}}$$

$$\langle \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) | \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle.$$

Si une isométrie $\overrightarrow{\phi}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ préserve un s.e.v. $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ (c.-à-d. $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}) \subset \overrightarrow{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}$), alors elle préserve aussi son orthogonal, $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$. En particulier, si $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par $\overrightarrow{\phi}: \overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \stackrel{\perp}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$.

Rappels : espace euclidien

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard

Isométries affine

Définition-Proposition

L'application linéaire $\overrightarrow{\phi}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si elle satisfait une des deux conditions équivalentes

$$\left\| \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) \right\| = \left\| \overrightarrow{v} \right\|.$$

$$\mathbf{v}, \vec{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$$

$$\langle \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) | \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle.$$

Si une isométrie ϕ de \mathcal{E} préserve un s.e.v. \mathcal{F} (c.-à-d. $\phi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}$), alors elle préserve aussi son orthogonal, $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$. En particulier, si $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par $\overrightarrow{\phi}: \overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \stackrel{\perp}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$.

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Définiti

Petites dimens

Isométries affine

Définition-Proposition

L'application linéaire $\overrightarrow{\phi}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si elle satisfait une des deux conditions équivalentes

$$1 \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},$$

$$\|\vec{\phi}(\vec{\mathbf{v}})\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|.$$

$$\mathbf{v}, \vec{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}},$$

$$\langle \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) | \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle.$$

Si une isométrie ϕ de \mathcal{E} préserve un s.e.v. \mathcal{F} (c.-à-d. $\phi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}$), alors elle préserve aussi son orthogonal, $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$. En particulier, si $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par $\overrightarrow{\phi}: \overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \stackrel{\perp}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$.

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définit

Petites dimension

Isométries affine

Définition-Proposition

L'application linéaire $\overrightarrow{\phi}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si elle satisfait une des deux conditions équivalentes

$$1 \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},$$

$$\left\| \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) \right\| = \left\| \overrightarrow{v} \right\|.$$

$$\mathbf{v}, \vec{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}},$$

$$\langle \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) | \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle.$$

Si une isométrie $\vec{\phi}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ préserve un s.e.v. $\vec{\mathcal{F}}$ (c.-à-d. $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) \subset \vec{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) = \vec{\mathcal{F}}$), alors elle préserve aussi son orthogonal, $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}^\perp) = \vec{\mathcal{F}}^\perp$. En particulier, si $\vec{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial, $\vec{\mathcal{E}}$ se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par $\vec{\phi}: \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}} \stackrel{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}^\perp$.

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Définit

Groupe orthogonal Petites dimensions Forme standard

Isométries affine

Définition-Proposition

L'application linéaire $\overrightarrow{\phi}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si elle satisfait une des deux conditions équivalentes

$$\mathbf{1} \ \forall \vec{\mathbf{v}} \in \vec{\mathcal{E}},$$

$$\left\| \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) \right\| = \left\| \overrightarrow{v} \right\|.$$

$$\mathbf{2} \ \forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}},$$

$$\langle \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) | \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle.$$

Si une isométrie $\vec{\phi}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ préserve un s.e.v. $\vec{\mathcal{F}}$ (c.-à-d. $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) \subset \vec{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) = \vec{\mathcal{F}}$), alors elle préserve aussi son orthogonal, $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}^{\perp}) = \vec{\mathcal{F}}^{\perp}$. En particulier, si $\vec{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial, $\vec{\mathcal{E}}$ se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par $\vec{\phi}: \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}} \stackrel{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}^{\perp}$.

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Définit

Petites dimen

Isométries affine

Définition-Proposition

L'application linéaire $\overrightarrow{\phi}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si elle satisfait une des deux conditions équivalentes

$$1 \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},$$

$$\left\| \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) \right\| = \left\| \overrightarrow{v} \right\|.$$

$$\mathbf{2} \ \forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}},$$

$$\langle \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) | \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle.$$

Si une isométrie $\overrightarrow{\phi}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ préserve un s.e.v. $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ (c.-à-d. $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}) \subset \overrightarrow{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}$), alors elle préserve aussi son orthogonal, $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$. En particulier, si $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par $\overrightarrow{\phi}: \overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \stackrel{\perp}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$.

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielle

Définit

Petites dimens

Isométries affin

Définition-Proposition

L'application linéaire $\overrightarrow{\phi}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si elle satisfait une des deux conditions équivalentes

$$\mathbf{1} \ \forall \vec{\mathbf{v}} \in \vec{\mathcal{E}},$$

$$\left\| \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) \right\| = \left\| \overrightarrow{v} \right\|.$$

$$\mathbf{v}, \vec{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}},$$

$$\langle \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) | \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle.$$

Si une isométrie $\vec{\phi}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ préserve un s.e.v. $\vec{\mathcal{F}}$ (c.-à-d. $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) \subset \vec{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) = \vec{\mathcal{F}}$), alors elle préserve aussi son orthogonal, $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}^{\perp}) = \vec{\mathcal{F}}^{\perp}$. En particulier, si $\vec{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial, $\vec{\mathcal{E}}$ se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par $\vec{\phi}: \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}} \stackrel{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}^{\perp}$.

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définit

Petites dimens Forme standar Décomposition

Isométries affin

Définition-Proposition

L'application linéaire $\overrightarrow{\phi}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si elle satisfait une des deux conditions équivalentes

$$1 \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},$$

$$\|\vec{\phi}(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|.$$

$$\mathbf{v}, \vec{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}},$$

$$\langle \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) | \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle.$$

Si une isométrie $\overrightarrow{\phi}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ préserve un s.e.v. $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ (c.-à-d. $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}) \subset \overrightarrow{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}$), alors elle préserve aussi son orthogonal, $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$. En particulier, si $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par $\overrightarrow{\phi}: \overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \overset{\perp}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$.

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensio

Décompositio

Decompositio

Isométries affin

- Le groupe des isométries de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est noté $O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$. Et on note $O_n = O(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors $\det(\overrightarrow{\phi}) = \pm 1$.

a On note $O'(\mathcal{E})$ on $SO(\mathcal{E})$ (resp. $O'_{\mathcal{E}}$ on $SO_{\mathcal{E}}$). Passamble des

 De même l'ensemble des isométries à déterminant −1, dites indirectes, est noté O⁺(E) (resp.O⁺₊).

indirectes, est note $O_n(C)$ (resp. O_n).

 $(O^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe du groupe compact $O(\mathcal{E})$, mais $O^-(\mathcal{E})$ n'en est pas un.)

Rappels : espace euclidien

euclidiens

sométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Groupe orthogor

Forme stand

Décompositio

Isométries affin

- Le groupe des isométries de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $O(\vec{\mathcal{E}})$. Et on note $O_n = O(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors $\det(\overrightarrow{\phi}) = \pm 1$.

 \sim De même l'ensemble des somme indirectes, est noté $O^+(\mathcal{E})$ (note

 $(O^+(\bar{\mathcal{E}})$ est un sous-groupe du groupe compact $O(\bar{\mathcal{E}})$, mais $O^-(\bar{\mathcal{E}})$ n'en est pas un.)

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Forme stand

Décompositio

Isométries affin

- Le groupe des isométries de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $O(\vec{\mathcal{E}})$. Et on note $O_n = O(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors $\det(\overrightarrow{\phi}) = \pm 1$.
 - On note $O^+(\mathcal{E})$ ou $SO(\mathcal{E})$ (resp. O_n^+ ou SO_n) L'ensemble des isométries à déterminant 1, dites directes, de $\overline{\mathcal{E}}$ (resp. \mathbb{R}^n).
 - De même l'ensemble des isométries à déterminant -1, dites indirectes, est noté $O^-(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^-).

 $(O^+(\vec{\mathcal{E}}) \text{ est un sous-groupe du groupe compact } O(\vec{\mathcal{E}}), \text{ mais } O^-(\vec{\mathcal{E}})$ n'en est pas un.)

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogo

Groupe orthogonal

Forme standa

Décomposition

Isométries a

Isométries affin

- Le groupe des isométries de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est noté $O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$. Et on note $O_n = O(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors $\det(\overrightarrow{\phi}) = \pm 1$.
 - On note $O^+(\vec{\mathcal{E}})$ ou $SO(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^+ ou SO_n) l'ensemble des isométries à déterminant 1, dites directes, de $\vec{\mathcal{E}}$ (resp. \mathbb{R}^n).
 - De même l'ensemble des isométries à déterminant -1, dites indirectes, est noté $O^-(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^-).

 $(O^+(\vec{\mathcal{E}}) \text{ est un sous-groupe du groupe compact } O(\vec{\mathcal{E}}), \text{ mais } O^-(\vec{\mathcal{E}})$ n'en est pas un.)

Groupe orthogonal

- Le groupe des isométries de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $O(\vec{\mathcal{E}})$. Et on note $O_n = O(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors $\det(\overrightarrow{\phi}) = \pm 1$.
 - On note $O^+(\vec{\mathcal{E}})$ ou $SO(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^+ ou SO_n) l'ensemble des isométries à déterminant 1, dites directes, de $\widetilde{\mathcal{E}}$ (resp. \mathbb{R}^n).
 - \blacksquare De même l'ensemble des isométries à déterminant -1, dites

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Groupe orthogonal Petites dimensions

Forme standard Décomposition

laans škulaa

Isométries affin

- Le groupe des isométries de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $O(\vec{\mathcal{E}})$. Et on note $O_n = O(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors $\det(\overrightarrow{\phi}) = \pm 1$.
 - On note $O^+(\vec{\mathcal{E}})$ ou $SO(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^+ ou SO_n) l'ensemble des isométries à déterminant 1, dites directes, de $\vec{\mathcal{E}}$ (resp. \mathbb{R}^n).
 - De même l'ensemble des isométries à déterminant -1, dites indirectes, est noté $O^-(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^-).

 $(O^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe du groupe compact $O(\mathcal{E})$, mais $O^-(\mathcal{E})$ n'en est pas un.)

Groupe orthogonal

- Le groupe des isométries de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $O(\vec{\mathcal{E}})$. Et on note $O_n = O(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors $\det(\overrightarrow{\phi}) = \pm 1$.
 - On note $O^+(\vec{\mathcal{E}})$ ou $SO(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^+ ou SO_n) l'ensemble des isométries à déterminant 1, dites directes, de \mathcal{E} (resp. \mathbb{R}^n).
 - De même l'ensemble des isométries à déterminant -1, dites indirectes, est noté $O^{-}(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_{n}^{-}).

 $(O^+(\overline{\mathcal{E}}) \text{ est un sous-groupe du groupe compact } O(\overline{\mathcal{E}}), \text{ mais } O^-(\overline{\mathcal{E}})$

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal Petites dimensions

Décomposition

Isométries affir

- Le groupe des isométries de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $O(\vec{\mathcal{E}})$. Et on note $O_n = O(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors $\det(\overrightarrow{\phi}) = \pm 1$.
 - On note $O^+(\vec{\mathcal{E}})$ ou $SO(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^+ ou SO_n) l'ensemble des isométries à déterminant 1, dites directes, de $\vec{\mathcal{E}}$ (resp. \mathbb{R}^n).
 - De même l'ensemble des isométries à déterminant -1, dites indirectes, est noté $O^-(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^-).

 $(O^+(\vec{\mathcal{E}}) \text{ est un sous-groupe du groupe compact } O(\vec{\mathcal{E}}), \text{ mais } O^-(\vec{\mathcal{E}})$ n'en est pas un.)

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Définitio

roupe orthogo

Petites dimensions

- -

Decompositio

Isométries affine

$$O_1 = \{1, -1\}.$$

$$O_2 = O_2^+ \sqcup O_2^-$$
, où

$$O_2^+ = \left\{ \overrightarrow{R}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \right\}$$
 est le sous-groupe des rotations.

$$\bullet O_2^- = \{ \overrightarrow{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} | \ \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$$
 est l'ensemble des réflexions.

Les règles de composition sont :

 $=R_{\alpha}\circ R_{\beta}-R_{\alpha+\beta}\;(=20,=20),$

 $= \underline{S}_{\alpha} \circ \underline{S}_{\beta} = \underline{R}_{\alpha - \beta}$

 $=S_{\alpha}\circ R_{\gamma}=S_{\alpha-\gamma}$ et $R_{\gamma}\circ S_{\beta}=S_{\gamma+\beta}$

euclidiens

sométries vectorielles

Définition

Groupe orthogo

Petites dimensions

Forme standard

Décompositio

Isométries affine

- $O_1 = \{1, -1\}.$
- $O_2 = O_2^+ \sqcup O_2^-$, où

$$O_2^+ = \{ \overrightarrow{R}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$$
 est le sous-groupe des rotations

Les règles de composition sont

$$\begin{array}{lll} & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & \\ & & & \\$$

$$n : S_{\alpha} \circ R_{\gamma} = S_{\alpha - \gamma} \in R_{\gamma} \circ S_{\beta} = S_{\gamma + \beta}$$

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Isométries affin

$$O_1 = \{1, -1\}.$$

$$lacksquare O_2^+ \sqcup O_2^-$$
, où

$$O_2^+ = \left\{ \overrightarrow{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \ \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \right\}$$
 est le sous-groupe des rotations,

$$O_2^- = \{ \overrightarrow{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$$
 est l'ensemble des réflexions.

 $(S_lpha$ est la symétrie par rapport à la droite d'angle lpha/2.)

Les règles de composition sont :

$$\mathbf{R} \stackrel{\overrightarrow{R}}{=} \vec{R}_{\alpha} \circ \vec{R}_{\beta} = \vec{R}_{\alpha+\beta} \ (\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1),$$

$$\bullet \hat{S}_{\alpha} \circ \hat{S}_{\beta} = \hat{R}_{\alpha-\beta},$$

$$lacksquare S_lpha \circ \overline{R}_\gamma = \overline{S}_{lpha - \gamma}$$
 et $\overline{R}_\gamma \circ \overline{S}_eta = \overline{S}_{\gamma + eta}$

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard

Isométries affine

$$O_1 = \{1, -1\}.$$

$$lacksquare O_2^+\sqcup O_2^-$$
, où

$$\begin{array}{c} \bullet \quad O_2^+ = \big\{ \overrightarrow{R}_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{smallmatrix} \right) \big| \ \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \big\} \\ \text{est le sous-groupe des rotations,} \end{array}$$

$$O_2^- = \{ \overrightarrow{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$$
 est l'ensemble des réflexions.

 $(S_lpha$ est la symétrie par rapport à la droite d'angle lpha/2.

Les règles de composition sont :

$$\mathbf{R}_{\alpha} \circ \widetilde{R}_{\beta} = \widetilde{R}_{\alpha+\beta} \ (\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1),$$

$$S_{\alpha} \circ S_{\beta} = R_{\alpha-\beta}$$

$$lacksquare S_{lpha}\circ R_{\gamma}=S_{lpha-\gamma}$$
 et $R_{\gamma}\circ S_{eta}=S_{\gamma+eta}$

Rappels : espace euclidien

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard
Décomposition

Isométries affine

$$O_1 = \{1, -1\}.$$

$$lacksquare O_2^+\sqcup O_2^-$$
, où

$$O_2^- = \left\{ \overrightarrow{S}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \right\}$$
 est l'ensemble des réflexions.

$$(\overline{S}_lpha$$
 est la symétrie par rapport à la droite d'angle $lpha/2.)$

Les règles de composition sont :

- \blacksquare $R_{\alpha} \circ R_{\beta} = R_{\alpha+\beta} \ (\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1),$
- $S_{\alpha} \circ S_{\beta} = R_{\alpha-\beta},$
- $lacksquare S_{lpha} \circ R_{\gamma} = S_{lpha \gamma} \text{ et } R_{\gamma} \circ S_{eta} = S_{\gamma + \beta}$

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard
Décomposition

Isométries affine

$$O_1 = \{1, -1\}.$$

$$lacksquare O_2^+ \sqcup O_2^-$$
, où

$$O_2^- = \left\{ \overrightarrow{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \ \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \right\}$$
 est l'ensemble des réflexions.

$$(\vec{S}_{\alpha} \text{ est la symétrie par rapport à la droite d'angle } \alpha/2.)$$

Les règles de composition sont :

- $\blacksquare R_{\alpha} \circ R_{\beta} = R_{\alpha+\beta} \ (\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1),$
- $S_{\alpha} \circ S_{\beta} = R_{\alpha-\beta},$
- $S_{\alpha} \circ R_{\gamma} = S_{\alpha-\gamma} \text{ et } R_{\gamma} \circ S_{\beta} = S_{\gamma+\beta}$

Rappels : espace euclidien

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard
Décomposition

Isométries affine

$$O_1 = \{1, -1\}.$$

$$lacksquare O_2^+\sqcup O_2^-$$
, où

$$\begin{array}{c} \bullet \quad O_2^+ = \big\{ \overrightarrow{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \big| \ \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \big\} \\ \text{est le sous-groupe des rotations,} \end{array}$$

■
$$O_2^- = \{\vec{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$$
 est l'ensemble des réflexions. $(\vec{S}_\alpha$ est la symétrie par rapport à la droite d'angle $\alpha/2$.)

Les règles de composition sont :

$$\overrightarrow{R}_{\alpha} \circ \overrightarrow{R}_{\beta} = \overrightarrow{R}_{\alpha+\beta} \ (\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1),$$

 $S_{\alpha} \circ S_{\beta} = R_{\alpha-\beta}$

 $lacksquare S_{lpha} \circ R_{\gamma} = S_{lpha - \gamma} \text{ et } R_{\gamma} \circ S_{eta} = S_{\gamma + \beta}$

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard
Décomposition

Isométries affine

$$O_1 = \{1, -1\}.$$

$$lacksquare O_2^+ \sqcup O_2^-$$
, où

$$\begin{array}{c} \bullet \quad O_2^+ = \big\{ \overrightarrow{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \big| \ \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \big\} \\ \text{est le sous-groupe des rotations,} \end{array}$$

■
$$O_2^- = \{ \vec{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$$
 est l'ensemble des réflexions.
 $(\vec{S}_\alpha \text{ est la symétrie par rapport à la droite d'angle } \alpha/2.)$

Les règles de composition sont :

$$\overrightarrow{R}_{\alpha} \circ \overrightarrow{R}_{\beta} = \overrightarrow{R}_{\alpha+\beta} \ (\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1),$$

 $S_{\alpha} \circ S_{\beta} = R_{\alpha-\beta}$

$$S_{\alpha} \circ R_{\gamma} = S_{\alpha-\gamma} \text{ et } R_{\gamma} \circ S_{\beta} = S_{\gamma+\beta}$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard
Décomposition

Isométries affine

$$O_1 = \{1, -1\}.$$

$$lacksquare O_2^+\sqcup O_2^-$$
, où

$$\bullet O_2^+ = \big\{ \overrightarrow{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \big| \ \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \big\}$$
 est le sous-groupe des rotations,

■
$$O_2^- = \{ \vec{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$$
 est l'ensemble des réflexions.
 $(\vec{S}_\alpha \text{ est la symétrie par rapport à la droite d'angle } \alpha/2.)$

Les règles de composition sont :

$$lackbox{igwedge} ec{R}_{lpha} \circ ec{R}_{eta} = ec{R}_{lpha+eta} \ (\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1)$$
,

$$S_{\alpha} \circ S_{\beta} = R_{\alpha-\beta},$$

$$\overrightarrow{S}_{\alpha} \circ \overrightarrow{R}_{\gamma} = \overrightarrow{S}_{\alpha-\gamma} \text{ et } \overrightarrow{R}_{\gamma} \circ \overrightarrow{S}_{\beta} = \overrightarrow{S}_{\gamma+\beta}.$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard
Décomposition

Isométries affine

$$O_1 = \{1, -1\}.$$

$$lacksquare O_2^+ \sqcup O_2^-$$
, où

■
$$O_2^- = \{ \vec{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$$
 est l'ensemble des réflexions.
 $(\vec{S}_\alpha \text{ est la symétrie par rapport à la droite d'angle } \alpha/2.)$

Les règles de composition sont :

$$lackbox{lack} ec{R}_lpha \circ ec{R}_eta = ec{R}_{lpha+eta} \ (\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1)$$
,

$$\overrightarrow{S}_{\alpha} \circ \overrightarrow{S}_{\beta} = \overrightarrow{R}_{\alpha-\beta},$$

$$\overrightarrow{S}_{\alpha} \circ \overrightarrow{R}_{\gamma} = \overrightarrow{S}_{\alpha - \gamma} \text{ et } \overrightarrow{R}_{\gamma} \circ \overrightarrow{S}_{\beta} = \overrightarrow{S}_{\gamma + \beta}.$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard

Isométries affin

$$O_1 = \{1, -1\}.$$

$$lacksquare O_2^+ \sqcup O_2^-$$
, où

$$\begin{array}{c} \bullet \quad O_2^+ = \big\{ \overrightarrow{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \big| \ \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \big\} \\ \text{est le sous-groupe des rotations,} \end{array}$$

■
$$O_2^- = \{ \vec{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$$
 est l'ensemble des réflexions.
 $(\vec{S}_\alpha \text{ est la symétrie par rapport à la droite d'angle } \alpha/2.)$

Les règles de composition sont :

$$ightharpoonup ec{R}_{lpha} \circ ec{R}_{eta} = ec{R}_{lpha+eta} \; (\Rightarrow \mathit{SO}_2 \cong \mathbb{S}^1)$$
,

$$\overrightarrow{S}_{\alpha} \circ \overrightarrow{S}_{\beta} = \overrightarrow{R}_{\alpha-\beta},$$

$$\overrightarrow{S}_{\alpha} \circ \overrightarrow{R}_{\gamma} = \overrightarrow{S}_{\alpha - \gamma} \text{ et } \overrightarrow{R}_{\gamma} \circ \overrightarrow{S}_{\beta} = \overrightarrow{S}_{\gamma + \beta}.$$

euclidiens

Isometries vectorielles

Groupe orthogo

Forme standar Décomposition

Isométries affin

- $O_1 = \{1, -1\}.$
- $lacksquare O_2^+ \sqcup O_2^-$, où
 - $\bullet O_2^+ = \big\{ \overrightarrow{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \big| \ \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \big\}$ est le sous-groupe des rotations,
 - $O_2^- = \{ \vec{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \}$ est l'ensemble des réflexions. $(\vec{S}_\alpha \text{ est la symétrie par rapport à la droite d'angle } \alpha/2.)$

Les règles de composition sont :

$$\vec{R}_{\alpha} \circ \vec{R}_{\beta} = \vec{R}_{\alpha+\beta} \ (\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1),$$

$$\overrightarrow{S}_{\alpha} \circ \overrightarrow{S}_{\beta} = \overrightarrow{R}_{\alpha-\beta},$$

$$\overrightarrow{S}_{\alpha} \circ \overrightarrow{R}_{\gamma} = \overrightarrow{S}_{\alpha - \gamma} \text{ et } \overrightarrow{R}_{\gamma} \circ \overrightarrow{S}_{\beta} = \overrightarrow{S}_{\gamma + \beta}.$$

euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard

Isométries affin

En identifiant l'espace euclidien \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} , le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z|w\rangle = \frac{\overline{z}w + z\overline{w}}{2}$$

Toute élément de $O(\mathbb{C})$ est de la forme

- $\sigma_a: z \mapsto a\overline{z}$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par \sqrt{a} .

$$\sigma_{e^{i\theta}} = S_{\theta}$$

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Isométries affine

En identifiant l'espace euclidien \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} , le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z|w\rangle = \frac{\overline{z}w + z\overline{w}}{2}$$

Toute élément de $O(\mathbb{C})$ est de la forme

- $\mathbf{p}_a: z \mapsto az \text{ avec } |a| = 1, \text{ et dans ce cas c'est une rotation d'angle}$ $\arg(a), \text{ ou}$
- $\sigma_a: z \mapsto a\overline{z}$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par \sqrt{a} .

- $\blacksquare \ \rho_{e^{i\theta}} = R_{\theta}$
- $\sigma_{e^{i\theta}} = S_{\theta}$

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions

Isométries affine

En identifiant l'espace euclidien \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} , le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z|w\rangle = \frac{\overline{z}w + z\overline{w}}{2}$$

Toute élément de $O(\mathbb{C})$ est de la forme

- $ho_a: z \mapsto az$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une rotation d'angle arg(a), ou
- $\sigma_a: z \mapsto a\overline{z}$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par \sqrt{a} .

- $\rho_{e^{i\theta}} = R_{\theta}$
- $\sigma_{e^{i\theta}} = S_{\theta}$

Rappels : espace euclidien

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogo

Petites dimensie

Isométries affine

En identifiant l'espace euclidien \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} , le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z|w\rangle = \frac{\overline{z}w + z\overline{w}}{2}$$

Toute élément de $O(\mathbb{C})$ est de la forme

- $ho_a: z \mapsto az$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une rotation d'angle arg(a), ou
- $\sigma_a: z \mapsto a\overline{z}$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par \sqrt{a} .

- $\rho_{e^{i\theta}} = R_{\theta}$
- $\sigma_{e^{i\theta}} = S_{\theta}$

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Petites dimension

Isométries affine

En identifiant l'espace euclidien \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} , le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z|w\rangle = \frac{\overline{z}w + z\overline{w}}{2}$$

Toute élément de $O(\mathbb{C})$ est de la forme

- $ho_a: z \mapsto az$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une rotation d'angle arg(a), ou
- $\sigma_a: z \mapsto a\overline{z}$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par \sqrt{a} .

L'identification entre O_2 et $\mathit{O}(\mathbb{C})$ est donnée par :

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Petites dimension

Isométries affine

En identifiant l'espace euclidien \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} , le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z|w\rangle = \frac{\overline{z}w + z\overline{w}}{2}$$

Toute élément de $O(\mathbb{C})$ est de la forme

- $ho_a: z\mapsto az$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une rotation d'angle $\arg(a)$, ou
- $\sigma_a: z \mapsto a\overline{z}$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par \sqrt{a} .

L'identification entre \mathcal{O}_2 et $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ est donnée par :

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Groupe orthogo Petites dimension

Isométries affine

En identifiant l'espace euclidien \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} , le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z|w\rangle = \frac{\overline{z}w + z\overline{w}}{2}$$

Toute élément de $O(\mathbb{C})$ est de la forme

- $ho_a: z \mapsto az$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une rotation d'angle arg(a), ou
- $\sigma_a: z \mapsto a\overline{z}$ avec |a|=1, et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par \sqrt{a} .

L'identification entre \mathcal{O}_2 et $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ est donnée par :

Dimension 3

Rappels : espace euclidien

Espaces affines

Isométries vectorielle

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard

Isométries affine

Soit $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$.

 $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\phi}$ est sous la forme

$$\overrightarrow{R}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $\overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{\rho}_{\overrightarrow{w},\alpha}$ est la rotation de α autour de l'axe orienté engendré par \overrightarrow{w} .

 $\overline{\phi} \in O^{-}(\overline{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\overline{\phi}$ est sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas $\overline{\phi}$ est la composée de la rotation $\overline{\rho}_{\overline{w},\alpha}$ avec la symétric $\overline{\sigma}_{(\overline{u},\overline{v})}$ par rapport au plan engendré par \overline{u} et \overline{v} , et on dit que $\overline{\phi}$ est une anti-rotation.

Espaces affines

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard

Isométries affine

Soit $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$.

 $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\phi}$ est sous la forme

$$\overrightarrow{R}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $\phi = \overrightarrow{\rho}_{\overrightarrow{w},\alpha}$ est la rotation de α autour de l'axe orienté engendré par \overrightarrow{w} .

 $\phi \in O^{-}(\mathcal{E})$ ssi il existe une b.o.n $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ dans laquelle la matrice de ϕ est sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas $\overrightarrow{\phi}$ est la composée de la rotation $\overrightarrow{\rho}_{\overrightarrow{w},\alpha}$ avec la symétric $\overrightarrow{\sigma}_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$ par rapport au plan engendré par \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} , et on dit que $\overrightarrow{\phi}$ est une anti-rotation.

Dimension 3

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard
Décomposition

Soit $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$.

 $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\phi}$ est sous la forme

$$\overrightarrow{R}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $\overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{\rho}_{\overrightarrow{w},\alpha}$ est la rotation de α autour de l'axe orienté engendré par \overrightarrow{w} .

 $\phi \in O^{-}(\mathcal{E})$ ssi il existe une b.o.n $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ dans laquelle la matrice de ϕ est sous la forme

$$\begin{pmatrix}
\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\
\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\
0 & 0 & -1
\end{pmatrix}$$

Dans ce cas ϕ est la composée de la rotation $\overrightarrow{\rho}_{\overline{w},\alpha}$ avec la symétit $\overrightarrow{\sigma}_{(\overline{u},\overline{v})}$ par rapport au plan engendré par \overline{u} et \overline{v} , et on dit que ϕ est une anti-rotation

Dimension 3

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Soit $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$.

 $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\phi}$ est sous la forme

$$\overrightarrow{R}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $\overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{\rho}_{\overrightarrow{w},\alpha}$ est la rotation de α autour de l'axe orienté engendré par \overrightarrow{w} .

 $\overrightarrow{\phi} \in O^{-}(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\phi}$ est sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $\overrightarrow{\phi}$ est la composée de la rotation $\overrightarrow{\rho}_{\overrightarrow{w},\alpha}$ avec la symétri $\overrightarrow{\sigma}_{\langle \overrightarrow{u},\overrightarrow{v}_{\rangle}}$ par rapport au plan engendré par \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} , et on dit que $\overrightarrow{\phi}$ est une anti-rotation.

Dimension 3

Rappels : espace euclidien

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielle

Forme standard
Décomposition

ométries .

Soit $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

 $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\phi}$ est sous la forme

$$\overrightarrow{R}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $\overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{\rho}_{\overrightarrow{w},\alpha}$ est la rotation de α autour de l'axe orienté engendré par \overrightarrow{w} .

 $\overrightarrow{\phi} \in O^{-}(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\phi}$ est sous la forme

$$\left(\begin{array}{ccc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Dans ce cas $\overrightarrow{\phi}$ est la composée de la rotation $\overrightarrow{\rho}_{\overrightarrow{w},\alpha}$ avec la symétrie $\overrightarrow{\sigma}_{\langle \overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle}$ par rapport au plan engendré par \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} , et on dit que $\overrightarrow{\phi}$ est une anti-rotation.

Forme standard des isométries

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions

Decomposition

Isométries affine

Proposition

Soit $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors il existe une b.o.n. dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\phi}$ est sous la forme (dim $\overrightarrow{\mathcal{E}} = 2k + p$)

$$0 \\ \frac{\cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \cos(\alpha_k) - \sin(\alpha_k) \\ \sin(\alpha_k) - \cos(\alpha_k) \\ 1 \\ p \\ \vdots \\ 1$$

Et pour $\phi \in O^-(\widetilde{\mathcal{E}})$, à la place du dernier 1 il y a un -1 (donc p > 0)

Forme standard des isométries

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

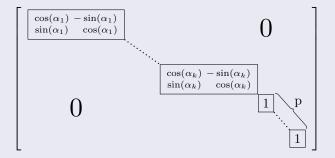
Isométries vectorielles

SOMETRIES VECTORIELLE
Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions
Forme standard

Isométries affine

Proposition

Soit $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors il existe une b.o.n. dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\phi}$ est sous la forme (dim $\overrightarrow{\mathcal{E}} = 2k + p$)



Et pour $\overrightarrow{\phi} \in O^{-}(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, à la place du dernier 1 il y a un -1 (donc p > 0).

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogo

Petites dimensi

Décomposition

Isométries affin

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une réflexion.

(Une réflexion est une isométrie indirecte.)

Proposition

Soient \mathcal{E} de dimension dim $\mathcal{E} = n$, et $\phi \in O(\mathcal{E})$. Alors ϕ est le produit de $k(\leq n)$ réflexions : $\phi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_n$

Si k est pair $\phi \in O^+(\mathcal{E})$, si k est impair $\phi \in O^-(\mathcal{E})$

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Définition

Groupe orthogo Petites dimensi

Décomposition

Isométries affin

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une réflexion.

(Une réflexion est une isométrie indirecte.)

Proposition

Soient $\overline{\mathcal{E}}$ de dimension dim $\overline{\mathcal{E}} = n$, et $\overline{\phi} \in O(\overline{\mathcal{E}})$. Alors $\overline{\phi}$ est le produit de $k(\leq n)$ réflexions : $\overline{\phi} = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_n$

Si k est pair $\overline{\phi} \in O^+(\overline{\mathcal{E}})$, si k est impair $\overline{\phi} \in O^-(\overline{\mathcal{E}})$

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Groupe orthogoretites dimensi

Décomposition

Lance Contract

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une réflexion.

(Une réflexion est une isométrie indirecte.)

Proposition

Soient $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension dim $\overrightarrow{\mathcal{E}}=n$, et $\phi\in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$. Alors $\overrightarrow{\phi}$ est le produit de $k(\leq n)$ réflexions : $\overrightarrow{\phi}=\rho_1\circ\cdots$

Si k est pair $\phi \in O^+(\mathcal{E})$, si k est impair $\phi \in O^-(\mathcal{E})$

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Définition

Groupe orthogo Petites dimensi

Décomposition

Isométries affine

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une réflexion.

(Une réflexion est une isométrie indirecte.)

Proposition

Soient $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension dim $\overrightarrow{\mathcal{E}} = n$, et $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$. Alors $\overrightarrow{\phi}$ est le produit de $k(\leq n)$ réflexions : $\overrightarrow{\phi} = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$ Si k est pair $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, si k est impair $\overrightarrow{\phi} \in O^-(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Définition

Forme standa

Décomposition

Isométries affine

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une réflexion.

(Une réflexion est une isométrie indirecte.)

Propositior

Soient $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension $\dim \overrightarrow{\mathcal{E}} = n$, et $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$. Alors $\overrightarrow{\phi}$ est le produit de $k(\leq n)$ réflexions : $\overrightarrow{\phi} = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$ Si k est pair $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, si k est impair $\overrightarrow{\phi} \in O^-(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Définition
Groupe orthogonal
Petites dimensions

Décomposition

Isométries affine

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une réflexion.

(Une réflexion est une isométrie indirecte.)

Proposition

Soient $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension $\dim \overrightarrow{\mathcal{E}} = n$, et $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

Alors ϕ est le produit de $k(\leq n)$ réflexions : $\phi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$ Si k est pair $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, si k est impair $\overrightarrow{\phi} \in O^-(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isométries vectorielles

Petites dimensi

Décomposition

Isométries affine

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une réflexion.

(Une réflexion est une isométrie indirecte.)

Proposition

 $\textit{Soient} \; \overrightarrow{\mathcal{E}} \; \textit{ de dimension } \dim \overrightarrow{\mathcal{E}} = \textit{n, et } \overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}}).$

Alors $\overrightarrow{\phi}$ est le produit de $k(\leq n)$ réflexions : $\overrightarrow{\phi} = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$.

Si k est pair $\phi \in O^+(\mathcal{E})$, si k est impair $\phi \in O^-(\mathcal{E})$

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Définition

Petites dimens

Décomposition

Isométries affin

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une réflexion.

(Une réflexion est une isométrie indirecte.)

Proposition

Soient $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension $\dim \overrightarrow{\mathcal{E}} = n$, et $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

Alors $\overrightarrow{\phi}$ est le produit de $k(\leq n)$ réflexions : $\overrightarrow{\phi} = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$.

Si k est pair $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, si k est impair $\overrightarrow{\phi} \in O^-(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

euclidiens

isomethes vectorienes

Isométries affin

Définition

Camman

Petites dime

Décomposition

Définition-Proposition

On dit qu'une application affine $\phi \in \mathsf{Aff}(\mathcal{E})$ est une isométrie si une des conditions équivalentes est satisfaite :

$$\blacksquare \ \forall A, B \in \mathcal{E}, \ d(\phi(A), \phi(B)) = d(A, B);$$

$$\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}}).$$

On note $Iso(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de \mathcal{E} . Ainsi que $Iso^{\pm}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries dont la partie lir

Ainsi que $\mathsf{Iso}^{\pm}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries dont la partie linéaire est dans $O^{\pm}(\vec{\mathcal{E}})$.

euclidiens

Isometries vectorielles

Isométries affin

Définition

Propriete

Structure

Petites dimensi

Définition-Proposition

On dit qu'une application affine $\phi \in \mathsf{Aff}(\mathcal{E})$ est une isométrie si une des conditions équivalentes est satisfaite :

$$\blacksquare$$
 $\forall A, B \in \mathcal{E}, \ d(\phi(A), \phi(B)) = d(A, B);$

$$\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}}).$$

On note $\mathsf{Iso}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de \mathcal{E} . Ainsi que $\mathsf{Iso}^{\pm}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries dont la partie linéaire est dans $O^{\pm}(\overline{\mathcal{E}})$.

euclidiens

isomethes vectorienes

Isométries affin

Définition

C

Petites dimens

Décomposition

Définition-Proposition

On dit qu'une application affine $\phi \in \mathsf{Aff}(\mathcal{E})$ est une isométrie si une des conditions équivalentes est satisfaite :

- \blacksquare $\forall A, B \in \mathcal{E}, \ d(\phi(A), \phi(B)) = d(A, B);$
- $\mathbf{P} \overrightarrow{\phi} \in \mathcal{O}(\overrightarrow{\mathcal{E}}).$

On note $\mathsf{Iso}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de \mathcal{E} . Ainsi que $\mathsf{Iso}^\pm(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries dont la partie linéaire est dans $O^\pm(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

Définition

Définition-Proposition

On dit qu'une application affine $\phi \in Aff(\mathcal{E})$ est une isométrie si une des conditions équivalentes est satisfaite :

- $\forall A, B \in \mathcal{E}, \ d(\phi(A), \phi(B)) = d(A, B);$
- $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}}).$

On note $\mathsf{Iso}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de \mathcal{E} .

euclidiens

sométries vectorielles

Isométries affine

Définition Propriétés

Structure Petites dimensi

Petites dimension

Définition-Proposition

On dit qu'une application affine $\phi \in \mathsf{Aff}(\mathcal{E})$ est une isométrie si une des conditions équivalentes est satisfaite :

- \blacksquare $\forall A, B \in \mathcal{E}, \ d(\phi(A), \phi(B)) = d(A, B);$
- $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}}).$

On note $lso(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de \mathcal{E} .

Ainsi que $\operatorname{Iso}^{\pm}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries dont la partie linéaire est dans $O^{\pm}(\vec{\mathcal{E}})$.

Rappels : espace euclidien

euclidiens

isometries vectorienes

Définition

Définition Propriétés

Structure Petites dimension

Petites dimension

- $Iso(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $Aut(\mathcal{E})$.
- lacksquare Iso $^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de Iso (\mathcal{E}) .
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ est dite symétrie (affine) orthogonale (resp. réflexion) s'ill existe $\Omega \in \mathcal{E}$ telle que ϕ est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans \mathcal{E}_{Ω} . Les symétries orthogonales sont des isométries.
- l'oute translation est le produit de deux réflexions

Propriétés

- Iso(\mathcal{E}) est un sous-groupe de Aut(\mathcal{E}).
- Iso⁺(\mathcal{E}) est un sous-groupe de Iso(\mathcal{E}).
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc

Propriétés

- Iso(\mathcal{E}) est un sous-groupe de Aut(\mathcal{E}).
- $lso^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $lso(\mathcal{E})$.
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc

Rappels : espace euclidien

euclidiens

isomethes vectorienes

Isométries affine

Définition Propriétés

Petites dimension

- $Iso(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $Aut(\mathcal{E})$. ■ $Iso^+(\mathcal{E})$ est un sous groupe de $Iso(\mathcal{E})$
- $\mathsf{Iso}^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\mathsf{Iso}(\mathcal{E})$.
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in Aff(\mathcal{E})$ est dite symétrie (affine) orthogonale (resp. réflexion) s'il existe $\Omega \in \mathcal{E}$ telle que ϕ est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans \mathcal{E}_{Ω} . Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Toute translation est le produit de deux réflexions

Propriétés

- Iso(\mathcal{E}) est un sous-groupe de Aut(\mathcal{E}).
- $lso^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $lso(\mathcal{E})$.
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc

Rappels : espace euclidien

euclidiens

isomethes vectorienes

Isometries affin

Définition Propriétés

Petites dimension

- $\mathsf{Iso}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\mathsf{Aut}(\mathcal{E})$.
- lacksquare Iso $^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de Iso (\mathcal{E}) .
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ est dite symétrie (affine) orthogonale (resp. réflexion) s'il existe $\Omega \in \mathcal{E}$ telle que ϕ est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans \mathcal{E}_{Ω} . Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Toute translation est le produit de deux réflexions

Propriétés

- Iso(\mathcal{E}) est un sous-groupe de Aut(\mathcal{E}).
- $lso^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $lso(\mathcal{E})$.
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in \mathsf{Aff}(\mathcal{E})$ est dite symétrie (affine) orthogonale (resp. réflexion) s'il existe $\Omega \in \mathcal{E}$ telle que ϕ est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans \mathcal{E}_{Ω} . Les symétries orthogonales sont des

Rappels : espace euclidien

euclidiens

Isometries affin

Propriétés

Petites dimension

- Iso(\mathcal{E}) est un sous-groupe de Aut(\mathcal{E}).
- $\mathsf{Iso}^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\mathsf{Iso}(\mathcal{E})$.
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in \mathsf{Aff}(\mathcal{E})$ est dite symétrie (affine) orthogonale (resp. réflexion) s'il existe $\Omega \in \mathcal{E}$ telle que ϕ est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans \mathcal{E}_{Ω} . Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Toute translation est le produit de deux réflexions

Propriétés

- Iso(\mathcal{E}) est un sous-groupe de Aut(\mathcal{E}).
- $lso^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $lso(\mathcal{E})$.
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in \mathsf{Aff}(\mathcal{E})$ est dite symétrie (affine) orthogonale (resp. réflexion) s'il existe $\Omega \in \mathcal{E}$ telle que ϕ est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans \mathcal{E}_{Ω} . Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Toute translation est le produit de deux réflexions.

Rappels : espace euclidien

euclidiens

laanstedan affinaa

Définition

Propriétés

Petites dimension

- Iso(\mathcal{E}) est un sous-groupe de Aut(\mathcal{E}).
- $\mathsf{Iso}^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\mathsf{Iso}(\mathcal{E})$.
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in \mathsf{Aff}(\mathcal{E})$ est dite symétrie (affine) orthogonale (resp. réflexion) s'il existe $\Omega \in \mathcal{E}$ telle que ϕ est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans \mathcal{E}_{Ω} . Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Toute translation est le produit de deux réflexions.

Structure

Lemme

Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \operatorname{Ker}(\overrightarrow{\phi} - \operatorname{Id}) \stackrel{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(\overrightarrow{\phi} - \operatorname{Id})$.

Proposition

- \blacksquare soit ϕ possède un point fixe Ω , et dans ce cas $\phi \in O(\mathcal{E}_{\Omega})$,
- \blacksquare soit il existe un unique $\vec{v} (\neq 0)$, vecteur fixe de ϕ , tel que

Structure

Lemme

Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \operatorname{Ker}(\overrightarrow{\phi} - \operatorname{Id}) \stackrel{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(\overrightarrow{\phi} - \operatorname{Id})$.

Proposition

- soit ϕ possède un point fixe Ω , et dans ce cas $\phi \in O(\mathcal{E}_{\Omega})$,
- \blacksquare soit il existe un unique $\overrightarrow{v}(\neq 0)$, vecteur fixe de ϕ , tel que

Structure

Soit
$$\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$$
, alors $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \operatorname{\mathsf{Ker}}(\overrightarrow{\phi} - \operatorname{Id}) \stackrel{\perp}{\oplus} \operatorname{\mathsf{Im}}(\overrightarrow{\phi} - \operatorname{Id})$.

Lemme

Proposition

- lacksquare soit ϕ possède un point fixe Ω , et dans ce cas $\phi \in O(\mathcal{E}_{\Omega})$,
- soit il existe un unique $\vec{v}(\neq 0)$, vecteur fixe de $\vec{\phi}$, tel que $T_{\vec{v}} \circ \phi = \phi \circ T_{\vec{v}}$ possède (au moins) un point fixe.

Rappels : espace euclidien

euclidiens

lsométries vectorielles

Isométries affin

Propriétés

Structure Petites dimension

Lemme

Soit
$$\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$$
, alors $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \operatorname{Ker}(\overrightarrow{\phi} - \operatorname{Id}) \stackrel{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(\overrightarrow{\phi} - \operatorname{Id})$.

Proposition

- soit ϕ possède un point fixe Ω , et dans ce cas $\phi \in O(\mathcal{E}_{\Omega})$,
- soit il existe un unique $\vec{v}(\neq 0)$, vecteur fixe de $\vec{\phi}$, tel que $T_{\vec{v}} \circ \phi = \phi \circ T_{\vec{v}}$ possède (au moins) un point fixe.

Petites dimensions

Espaces affines euclidiens

isomethes vectoriene

Isometries affine

Définition

Structure

Petites dimensions

 $(\phi$ est la composée d'au plus 2 réflexions.)

 $= \phi \in \operatorname{Iso}'(\operatorname{IK})$ ssi

 $\psi \in \text{ISO} (\mathbb{R}^2) \text{ SSI}$

 $(\phi$ est la composée d'au plus 3 réflexions

Espaces affine euclidiens

isomethes vectorienes

Isométries affin

Définition

Structure

Petites dimensions

- etites difficision

• $\phi \in Iso(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b$. (ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)

 $\phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ ssi

 $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$ ssi

(φ est la composée d'au plus 3 réflexions.

Espaces affine euclidiens

isometries vectorienes

Isométries affir

Définition

Propriété

Structure

Petites dimensions

• $\phi \in Iso(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b$. (ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)

 $\blacksquare \operatorname{Iso}(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \sqcup \operatorname{Iso}^-(\mathbb{R}^2).$

$$lack \phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$$
 ssi

 $m \ \phi = T_{V} \circ S_{D} \text{ avec } V$

 $(\phi \text{ est la composée d'au plus } 3 \text{ réflexions.})$

Espaces affine euclidiens

isometries vectorielles

Isométries affin

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

- $\phi \in Iso(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b$. (ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- - $\quad \bullet \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \,\, \mathrm{ssi}$

 $\phi = R_{\Omega,\alpha}$ est la rotation de centre Ω d'angle α , ou $\phi = T_{\nabla}$ est une translation.

 $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$ ssi

w $\psi = 5_{50}$ est la symétrie par rapport à une droit $\psi = T_{50}$ o S_{50} avec $\vec{V} \neq 0$ est un vecteur fixe dans re-cas on dit que a lest une symétre s'interest.

 $(\phi \text{ est la composée d'au plus } 3 \text{ réflexions.})$

- $\phi \in \mathsf{Iso}(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b.$ (ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- $\operatorname{Iso}(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \sqcup \operatorname{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$.
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - ullet $\phi = R_{\Omega,\alpha}$ est la rotation de centre Ω d'angle α , ou

Espaces affine euclidiens

isometries vectorielles

Isométries affir

Définition

Campania

Petites dimension

Petites dimension

- $\phi \in Iso(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b$. (ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- $\blacksquare \operatorname{Iso}(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \sqcup \operatorname{Iso}^-(\mathbb{R}^2).$
 - $\quad \bullet \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \,\, \mathrm{ssi}$
 - lacktriangledown $\phi=R_{\Omega,\alpha}$ est la rotation de centre Ω d'angle α , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation.
 - $\phi \in \mathrm{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$ ssi

 $(\phi \text{ est la composée d'au plus } 3 \text{ réflexions.})$

- $\phi \in \mathsf{Iso}(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b.$ (ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- \blacksquare Iso(\mathbb{R}^2) = Iso⁺(\mathbb{R}^2) \sqcup Iso⁻(\mathbb{R}^2).
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - $\phi = R_{\Omega,\alpha}$ est la rotation de centre Ω d'angle α , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation.
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$ ssi

Espaces affine euclidiens

isometries vectoriene

Isométries affir

Définition

Structure

Petites dimension

Petites dimension

- $\phi \in Iso(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b$. (ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- - $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - ullet $\phi=R_{\Omega,\alpha}$ est la rotation de centre Ω d'angle α , ou
 - ullet $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation.
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - ullet $\phi = \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ est la symétrie par rapport à une droite affine \mathcal{D}_{\cdot} ou

euclidiens

isometries vectoriene

Isométries affines

Définition

Structure

Petites dimen

Petites dimension

- $\phi \in Iso(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b$. (ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- $\blacksquare \mathsf{Iso}(\mathbb{R}^2) = \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \sqcup \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^2).$
 - $\quad \bullet \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \,\, \mathrm{ssi}$
 - ullet $\phi = R_{\Omega,\alpha}$ est la rotation de centre Ω d'angle α , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation.
 - $\phi \in \mathrm{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - $lack \phi = \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ est la symétrie par rapport à une droite affine \mathcal{D} , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ S_{\mathcal{D}}$ avec $\overrightarrow{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie $\overrightarrow{\phi}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.

 $(\phi \text{ est la composée d'au plus } 3 \text{ réflexions.})$

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielle

Isométries affines

isometries and

Propriétés

Structure

Petites dimensio

- $\phi \in Iso(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b$. (ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- $\blacksquare \operatorname{Iso}(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \sqcup \operatorname{Iso}^-(\mathbb{R}^2).$
 - $\quad \bullet \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \; \mathsf{ssi}$
 - $lack \phi = R_{\Omega,\alpha}$ est la rotation de centre Ω d'angle α , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation.
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - $lack \phi = \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ est la symétrie par rapport à une droite affine \mathcal{D} , ou
 - $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{D}}$ avec $\vec{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie $\vec{\phi}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.

 $(\phi \text{ est la composée d'au plus } 3 \text{ réflexions.})$

- $\phi \in \mathsf{Iso}(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b.$ (ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- \blacksquare Iso(\mathbb{R}^2) = Iso⁺(\mathbb{R}^2) \sqcup Iso⁻(\mathbb{R}^2).
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - $\phi = R_{\Omega,\alpha}$ est la rotation de centre Ω d'angle α , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation.
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - $\phi = S_{\mathcal{D}}$ est la symétrie par rapport à une droite affine \mathcal{D} , ou
 - $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{D}}$ avec $\vec{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie $\vec{\phi}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.

(ϕ est la composée d'au plus 3 réflexions.)

euclidiens

Isométries affine

Définition

C. .

Petites dimensions

r carees dimension

Rappel : Les application affines de l'espace euclidien $\mathbb C$ sont de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta \overline{z} + \gamma$.

$$\mathsf{Iso}(\mathbb{C}) = \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \mathsf{Iso}^-(\mathbb{C})$$

ullet $\phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{C})$ ssi $\phi(z) = az + b$ avec |a| = 1

w Si a=1, alors ϕ est la translation de

 $m{\phi} \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C})$ ssi $\phi(z) = a\overline{z} + b$ avec |a| = 1.

w 5i ab' ∈ \mathbb{R}_{-} , alors ϕ est une symétrie d'axe $\sqrt{a}\mathbb{R} + b_j$

= 51000 ϕ est une symethe glissee.

Les isométrie affines de C

$$\mathsf{Iso}(\mathbb{C}) = \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \mathsf{Iso}^-(\mathbb{C})$$

- $\phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = az + b \text{ avec } |a| = 1.$
- $\phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = a\overline{z} + b \text{ avec } |a| = 1.$

$$\mathsf{Iso}(\mathbb{C}) = \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \mathsf{Iso}^-(\mathbb{C})$$

- $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = \mathsf{a}z + \mathsf{b} \text{ avec } |\mathsf{a}| = 1.$
 - Si $a \neq 1$, alors ϕ est la rotation de centre $\frac{b}{1-a}$.
 - Si a=1, alors ϕ est la translation de b.
- $\phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = a\overline{z} + b \text{ avec } |a| = 1.$

$$\mathsf{Iso}(\mathbb{C}) = \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \mathsf{Iso}^-(\mathbb{C})$$

- $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = \mathsf{a}z + \mathsf{b} \text{ avec } |\mathsf{a}| = 1.$
 - Si $a \neq 1$, alors ϕ est la rotation de centre $\frac{b}{1-a}$.
 - Si a=1, alors ϕ est la translation de b.
- $\phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = a\overline{z} + b \text{ avec } |a| = 1.$

$$\mathsf{Iso}(\mathbb{C}) = \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \mathsf{Iso}^-(\mathbb{C})$$

- $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = az + b \text{ avec } |a| = 1.$
 - Si $a \neq 1$, alors ϕ est la rotation de centre $\frac{b}{1-a}$.
 - Si a=1, alors ϕ est la translation de b.
- $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = a\overline{z} + b \text{ avec } |a| = 1.$

euclidiens

isometries vectorielle

Isométries affine

Propriétés

Petites dimensi

Petites dimensi

$$\mathsf{Iso}(\mathbb{C}) = \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \mathsf{Iso}^-(\mathbb{C})$$

- $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = \mathsf{a}z + \mathsf{b} \text{ avec } |\mathsf{a}| = 1.$
 - Si $a \neq 1$, alors ϕ est la rotation de centre $\frac{b}{1-a}$.
 - Si a = 1, alors ϕ est la translation de b.
- $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = a\overline{z} + b \text{ avec } |a| = 1.$
 - Si $\overline{a}b^2 \in \mathbb{R}_-$, alors ϕ est une symétrie d'axe $\sqrt{a}\mathbb{R} + b/2$.
 - Sinon ϕ est une symétrie glissée.

$$\mathsf{Iso}(\mathbb{C}) = \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \mathsf{Iso}^-(\mathbb{C})$$

- $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = az + b \text{ avec } |a| = 1.$
 - Si $a \neq 1$, alors ϕ est la rotation de centre $\frac{b}{1-a}$.
 - Si a=1, alors ϕ est la translation de b.
- $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = a\overline{z} + b \text{ avec } |a| = 1.$
 - Si $\bar{a}b^2 \in \mathbb{R}_-$, alors ϕ est une symétrie d'axe $\sqrt{a}\mathbb{R} + b/2$.
 - \blacksquare Sinon ϕ est une symétrie glissée.

$$\mathsf{Iso}(\mathbb{C}) = \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \mathsf{Iso}^-(\mathbb{C})$$

- $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = az + b \text{ avec } |a| = 1.$
 - Si $a \neq 1$, alors ϕ est la rotation de centre $\frac{b}{1-a}$.
 - Si a=1, alors ϕ est la translation de b.
- $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{C}) \text{ ssi } \phi(z) = a\overline{z} + b \text{ avec } |a| = 1.$
 - Si $\bar{a}b^2 \in \mathbb{R}_-$, alors ϕ est une symétrie d'axe $\sqrt{a}\mathbb{R} + b/2$.
 - Sinon ϕ est une symétrie glissée.

Dimension 3

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

isomethes vectorienes

Isométries affin

Définition

· ·

Petites dimensions

Process dimension

 $\phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^3)$ ssi

 $\phi \in Iso^-(\mathbb{R}^3)$ sss

(φ est la composée d'au plus 4 réflexions

Dimension 3

Petites dimensions

$$\quad \bullet \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \; \mathsf{ssi}$$

■ $\operatorname{Iso}(\mathbb{R}^3) = \operatorname{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \sqcup \operatorname{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$.

Petites dimensions

- $\operatorname{Iso}(\mathbb{R}^3) = \operatorname{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \sqcup \operatorname{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$.
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^3)$ ssi

Espaces affin euclidiens

Isometries vectorielles

Isométries affii

isomicenes ann

Définition

Structure

Petites dimensions

- etites difficision

- - $\quad \blacksquare \ \phi \in \operatorname{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \ \operatorname{ssi}$
 - $lack \phi = R_{\mathcal{D}, lpha}$ est la rotation d'angle lpha autour de l'axe \mathcal{D} , ou
 - $\phi = I_{\overrightarrow{V}}$ est une translation, ou
 - $\phi = T_{\overline{V}} \circ R_{D,\alpha}$, avec $\mathcal{D} = \langle \overline{V} \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un vissage d'axe \mathcal{D} et d'angle α .
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$ ssi

a $\phi = S_{\mathcal{H}}$ est la symétrie par rapport au plan affine \mathcal{H} , ou $\phi = T_{\mathcal{H}} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $V \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie.

w $\phi=R_{D,0}$ o Sy, avec $D\perp \mathcal{H}_{c}$ et dans ce cas on dit que ϕ est une

anti-rotation.

 $(\phi \text{ est la composée d'au plus } 4 \text{ réflexions.})$

Espaces affin euclidiens

Isometries vectorielles

Isométries affii

isometries ann

Définition

Structure

Petites dimensions

retites dimension

- - $\quad \bullet \phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \,\, \mathrm{ssi}$
 - $lack \phi = R_{\mathcal{D}, lpha}$ est la rotation d'angle lpha autour de l'axe \mathcal{D} , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation, ou
 - $\phi = T_{\nabla} \circ R_{\mathcal{D},\alpha}$, avec $\mathcal{D} = \langle \nabla \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un vissage d'axe \mathcal{D} et d'angle α .
 - $\phi \in Iso^-(\mathbb{R}^3)$ ssi

 $\phi = T_{\mathcal{F}} \circ S_{\mathcal{H}} \text{ avec } \vec{V} \neq 0 \text{ est}$ dans ce cas on dit que ϕ est

 $\emptyset = K_{0,n} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$, et dans ce cas on dit que

 $(\phi$ est la composée d'au plus 4 réflexions.

Espaces affin euclidiens

Isometries vectorielle

Isométries affir

....

Delinition

Structure

Petites dimension

- - $\quad \bullet \phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \,\, \mathrm{ssi}$
 - $lack \phi = R_{\mathcal{D}, lpha}$ est la rotation d'angle lpha autour de l'axe \mathcal{D} , ou
 - ullet $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation, ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ R_{\mathcal{D},\alpha}$, avec $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{v} \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un vissage d'axe \mathcal{D} et d'angle α .
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$ ssi

 $\phi = T_{\mathcal{V}} \circ S_{\mathcal{V}} \text{ avec } \tilde{\mathcal{V}} \neq 0$ dans ce cas on dit que ϕ : $\phi = R_{-} \circ S_{-} \circ S_{$

 $(\phi \text{ est la composée d'au plus } 4 \text{ réflexions.}$

 $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^3)$ ssi

■ $\operatorname{Iso}(\mathbb{R}^3) = \operatorname{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \sqcup \operatorname{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$.

- $\phi = R_{\mathcal{D},\alpha}$ est la rotation d'angle α autour de l'axe \mathcal{D} , ou
- $\phi = T_{\vec{v}}$ est une translation, ou
- ullet $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ R_{\mathcal{D},\alpha}$, avec $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{v} \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un vissage d'axe \mathcal{D} et d'angle α .
- $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$ ssi

euclidiens

isometries vectorielle

Isométries affir

nonicence ann

Propriétée

Structure

Petites dimension

- - $\phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^3)$ ssi
 - $lack \phi = R_{\mathcal{D}, \alpha}$ est la rotation d'angle α autour de l'axe \mathcal{D} , ou
 - ullet $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation, ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ R_{\mathcal{D},\alpha}$, avec $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{v} \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un vissage d'axe \mathcal{D} et d'angle α .
 - $\quad \quad \bullet \in \mathrm{Iso}^-(\mathbb{R}^3) \,\, \mathrm{ssi}$
 - $lacktriangledown \phi = S_{\mathcal{H}}$ est la symétrie par rapport au plan affine \mathcal{H} , ou
 - $\phi = I_{\nabla} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $v \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie ϕ , et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.
 - $\phi = R_{\mathcal{D},\alpha} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une anti-rotation.

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affin

Définition

Propriétés

Structure

retites dimension

- - $\quad \bullet \phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \,\, \mathrm{ssi}$
 - $lack \phi = R_{\mathcal{D}, lpha}$ est la rotation d'angle lpha autour de l'axe \mathcal{D} , ou
 - $lack \phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation, ou
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$ ssi
 - ullet $\phi = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est la symétrie par rapport au plan affine \mathcal{H} , ou
 - $\phi = I_{\nabla} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $v \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie ϕ , et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.
 - $\phi = R_{\mathcal{D},\alpha} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une anti-rotation.

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affin

Définition

Structure

Petites dimension

- $\operatorname{Iso}(\mathbb{R}^3) = \operatorname{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \sqcup \operatorname{Iso}^-(\mathbb{R}^3).$
 - $\quad \bullet \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \mathsf{ ssi}$
 - $lack \phi = R_{\mathcal{D}, lpha}$ est la rotation d'angle lpha autour de l'axe \mathcal{D} , ou
 - ullet $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation, ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ R_{\mathcal{D},\alpha}$, avec $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{v} \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un vissage d'axe \mathcal{D} et d'angle α .
 - $\phi \in \mathrm{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$ ssi
 - $lack \phi = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est la symétrie par rapport au plan affine \mathcal{H} , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\overrightarrow{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie ϕ , et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.
 - lacksquare $\phi = \mathcal{R}_{\mathcal{D},\alpha} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ avec $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une anti-rotation.

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affin

Définition

Structure

Petites dimensio

retites dimension

- - $\quad \bullet \phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \,\, \mathrm{ssi}$
 - $lack \phi = R_{\mathcal{D}, lpha}$ est la rotation d'angle lpha autour de l'axe \mathcal{D} , ou
 - ullet $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation, ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ R_{\mathcal{D},\alpha}$, avec $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{v} \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un vissage d'axe \mathcal{D} et d'angle α .
 - $\quad \bullet \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^3) \,\, \mathsf{ssi}$
 - $lack \phi = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est la symétrie par rapport au plan affine \mathcal{H} , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\overrightarrow{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie ϕ , et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.

est la composée d'au plus 4 réflexions)

- $\mathsf{Iso}(\mathbb{R}^3) = \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \sqcup \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$.
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^3)$ ssi
 - $\phi = R_{\mathcal{D},\alpha}$ est la rotation d'angle α autour de l'axe \mathcal{D} , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation, ou
 - $\phi = T_{\vec{v}} \circ R_{\mathcal{D},\alpha}$, avec $\vec{\mathcal{D}} = \langle \vec{v} \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un vissage d'axe \mathcal{D} et d'angle α .
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$ ssi
 - ullet $\phi = S_{\mathcal{H}}$ est la symétrie par rapport au plan affine \mathcal{H} , ou
 - $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\vec{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie ϕ , et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.
 - $\phi = R_{\mathcal{D},\alpha} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affin

Définition

Structure

Petites dimensio

Petites dimension

- - $\quad \bullet \phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \,\, \mathrm{ssi}$
 - $lack \phi = R_{\mathcal{D}, lpha}$ est la rotation d'angle lpha autour de l'axe \mathcal{D} , ou
 - ullet $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation, ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ R_{\mathcal{D},\alpha}$, avec $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{v} \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un vissage d'axe \mathcal{D} et d'angle α .
 - $\quad \bullet \in \mathrm{Iso}^-(\mathbb{R}^3) \,\, \mathrm{ssi}$
 - ullet $\phi = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est la symétrie par rapport au plan affine \mathcal{H} , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\overrightarrow{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie ϕ , et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.
 - $\phi = R_{\mathcal{D},\alpha} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une anti-rotation.

Espaces affine euclidiens

Isométries vectorielle

Isométries affin

Propriétés

Detites discours

Petites dimension

- - $\quad \bullet \phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \,\, \mathrm{ssi}$
 - $lack \phi = R_{\mathcal{D}, lpha}$ est la rotation d'angle lpha autour de l'axe \mathcal{D} , ou
 - ullet $\phi = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation, ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ R_{\mathcal{D},\alpha}$, avec $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \langle \overrightarrow{v} \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un vissage d'axe \mathcal{D} et d'angle α .
 - $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$ ssi
 - ullet $\phi = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est la symétrie par rapport au plan affine \mathcal{H} , ou
 - $\phi = T_{\overrightarrow{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\overrightarrow{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie ϕ , et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.
 - $\phi = R_{\mathcal{D},\alpha} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une anti-rotation.

 $(\phi$ est la composée d'au plus 4 réflexions.)

Rappels : espace euclidien

euclidiens

isometries vectoriene

Isométries affin

Définition

Propriété

Structure

retites dimen

Décomposition

Rappel: Une réflexion est une isométrie indirecte.

Proposition

Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension n, et $\phi \in Iso(\mathcal{E})$.

Alors ϕ est le produit de $k(\leq n+1)$ réflexions

$$\phi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$$

Si k est pair $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathcal{E})$, et si k est impair $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathcal{E})$.

Rappels : espace euclidien

euclidiens

isomethes rectorient

Isométries affin

Définition

Structure

Petites dimension

Décomposition

Rappel: Une réflexion est une isométrie indirecte.

Proposition

Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension n, et $\phi \in Iso(\mathcal{E})$.

Alors ϕ est le produit de $k \leq n+1$ réflexions

$$\phi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$$

Si k est pair $\phi \in Iso^+(\mathcal{E})$, et si k est impair $\phi \in Iso^-(\mathcal{E})$.

Décomposition

Rappel: Une réflexion est une isométrie indirecte.

Proposition

Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension n, et $\phi \in Iso(\mathcal{E})$. Alors ϕ est le produit de $k(\leq n+1)$ réflexions :

$$\phi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k.$$

Rappels : espace euclidien

euclidiens

isomethes vectoriene

Isométries affine

Propriété

Petites dimens

Décomposition

Rappel : Une réflexion est une isométrie indirecte.

Proposition

Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension n, et $\phi \in Iso(\mathcal{E})$.

Alors ϕ est le produit de $k \leq n+1$ réflexions :

$$\phi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k.$$

Si k est pair $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathcal{E})$, et si k est impair $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathcal{E})$.