M53 - Cours 1

2 septembre 2015

La définition d'un espace affine

Definition (heuristique)

«Un espace affine est un espace vectoriel dont on a oublié l'origine.»

La définition d'un espace affine

Definition

Soit $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel *(si non précisé, sur $\mathbb{R}$)*.
Un ensemble (non vide) $\mathcal{E}$ est muni de la structure d'un espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}}$ par la donnée d'une application

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ (A, B) &\mapsto \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

qui satisfait les deux conditions :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *(relation de Chasles)*
2. $\forall A \in \mathcal{E}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}, \exists! B \in \mathcal{E}$ t.q. $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ $(B = A + \vec{v})$

La dimension d'un espace affine

Definition

L'espace affine $\mathcal{E}$ est de dimension n si sa direction, l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, est de dimension n.

Les espaces vectoriels

Tout espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ peut être muni naturellement d'une structure d'espace affine, avec direction lui même, via l'application :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\mapsto \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}\end{aligned}$$

Convention

Dans la suite, tous les espaces vectoriels vont être considérés munis de cette structure naturelle d'espace affine.

Les droites (sous-espaces) affines

Le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$ est un espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}} = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ (A, B) &\mapsto \overrightarrow{AB} = B - A \end{aligned}$$

Question

Comment peut-on généraliser cette exemple ?

Les solutions des équations différentiels linéaires

L'ensemble des solutions S de l'équation $y' + y = sin(x)$ est un espace affine avec direction S', l'ensemble des solutions homogènes (de $y' + y = 0$) via :

$$S \times S \longrightarrow S'$$
$$(f_1, f_2) \mapsto f_2 - f_1$$

Question

Comment peut-on généraliser cette exemple ?

Vectorialisé d'un espace affine

En fixant un point Ω d'un espace affine $\mathcal{E}$, on peut définir sur celui-ci une structure d'espace vectoriel, noté $\mathcal{E}_\Omega$, isomorphe (par définition) à $\vec{\mathcal{E}}$ via l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ B &\mapsto \overrightarrow{\Omega B} \end{aligned}$$

- L'origine de $\mathcal{E}_\Omega$ est le point Ω.
- Avec l'écriture $\Omega + \vec{v}$, les opérations sont :
  - $(\Omega + \vec{v}) + (\Omega + \vec{w}) = (\Omega + \vec{v} + \vec{w})$.
  - $\lambda(\Omega + \vec{v}) = \Omega + \lambda\vec{v}$.

Produit d'espaces affines

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines, sur le même corps, de directions respectives $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$.
On définit la structure d'espace affine sur $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ de direction $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{F}}$ par :

$$\overrightarrow{(A, B)(C, D)} := (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}).$$

Propriétés calculatoires

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}}$.

- $A \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AA} = 0.$
- $A, B \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$
- $A + \vec{v} = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall(\exists) C \in \mathcal{E}, \overrightarrow{CA} + \vec{v} = \overrightarrow{CB}.$
- $(A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$ *($\vec{\mathcal{E}}$ agit sur $\mathcal{E}$)*.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ *($ABCD$ est un parallélogramme)*.
- $\overrightarrow{(A + \vec{v})(B + \vec{w})} = \overrightarrow{AB} - \vec{v} + \vec{w}.$
- $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ alors
  - Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \in \vec{\mathcal{E}}$ est bien définie *($\overrightarrow{AB} = B - A$)*.
  - Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \in \mathcal{E}$ est bien définie.
  - Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i \notin \{0, 1\}$ alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i$ n'est pas bien définie.

Définition du barycentre

Définition-Proposition

Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ *et* $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$ *tels que* $\sum_{i=1}^{k} \mu_i \neq 0$, *alors il existe un unique point* G *qui satisfait une des conditions équivalentes :*

1. $G = \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^{k} \mu_i} A_i$.
2. $\forall (\exists) M \in \mathcal{E},\ (\sum_{i=1}^{k} \mu_i)\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{MA_i}$.
3. $\sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{GA_i} = 0$.

L'ensemble des données $\{(A_1, \mu_1), \dots, (A_k, \mu_k)\}$ *sont appelées des points pondérées dont les* $\{\mu_i\}$ *sont les poids, et le point* G *est le barycentre.*

Définition du isobarycentre

Definition

Soient $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{E}$, leur isobarycentre est le barycentre de ces points pondérés du même poids non nul *(qui peut être pris égal à $\frac{1}{k}$, ou à 1)*.

Propriétés des barycentres

- Si on remplace les poids μ_i par $\lambda\mu_i$ pour $\lambda \neq 0$, le barycentre ne change pas.
- Si on rajoute un point pondéré par un poids nul, le barycentre ne change pas.
- Soit $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ un espace affine produit.
  Le barycentre des points pondérés $\{\big((A_1, B_1), \mu_1\big), \ldots, \big((A_k, B_k), \mu_k\big)\}$
  est $G = (G_A, G_B)$,
  où G_A est le barycentre de $\{\big(A_1, \mu_1\big), \ldots, (A_k, \mu_k)\}$ dans $\mathcal{E}$,
  et G_B est le barycentre de $\{(B_1, \mu_1), \ldots, (B_k, \mu_k)\}$ dans $\mathcal{F}$.

Associativité du barycentre

Soient $\{A_i\}_{i\in I}$ des points de $\mathcal{E}$ et $\{\mu_i\}_{i\in I}$ des scalaires de somme non nulle, indexés par un ensemble I.
Soit une partition disjointe $I = J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_r$, telle que $\nu_k := \sum_{i\in J_k} \mu_i \neq 0$ pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$.
On note G_k le barycentre de $\{(A_i, \mu_i)\}_{i\in J_k}$.

Proposition

Le barycentre G des points pondérés $\{(A_i, \mu_i)\}_{i\in I}$ est aussi le barycentre des $\{(G_k, \nu_k)\}_{k\in\{1,\dots,r\}}$.

Définition d'un repère

Soient $(A_0, \ldots, A_n)$ un $(n+1)$-uplet de l'espace affine $\mathcal{E}$.

Définition-Proposition

On dit que $(A_0, \ldots, A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ s'il satisfait une des conditions équivalentes :

1. $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ *est une base de* $\vec{\mathcal{E}}$.
2. *Pour tout point B de $\mathcal{E}$ il existe un unique $(n+1)$-uplet de poids $(\mu_0, \ldots, \mu_n)$, avec $\sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1$ et $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_i A_i$.*

Coordonnées affines

Soient $\mathcal{A} = (A_0, \ldots, A_n)$ un un repère affine de $\mathcal{E}$.

Definition

Pour $B \in \mathcal{E}$, on dit que $(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{A}}$ sont les coordonnées cartésiennes de B dans le repère $\mathcal{A}$, si $\overrightarrow{A_0B} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{A_0A_i}$.

Definition

Pour $B \in \mathcal{E}$, on dit que $[\mu_0, \ldots, \mu_n]_{\mathcal{A}}$ sont les coordonnées barycentriques de B dans le repère $\mathcal{A}$, si $\sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1$ et $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_i A_i$.

La relation entres ces deux systèmes de coordonnées est :
$\mu_i = x_i, \forall i = 1, \ldots, n$ et $\mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i$.

Définition d'un sous-espace affine

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

Définition-Proposition

Un sous-ensemble non vide $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est dit sous-espace affine s'il satisfait une des conditions équivalentes :

1. *Il existe un sous-espace vectoriel $\vec{\mathcal{F}}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ et $\Omega \in \mathcal{E}$ tels que $\mathcal{F} = a + \vec{\mathcal{F}}$.*
2. *$\exists(\forall)\Omega \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_\Omega$.*
3. *$\mathcal{F}$ est stable par barycentre.*

Un sous-espace affine $\mathcal{F} = a + \vec{\mathcal{F}}$ est un espace affine de direction $\vec{\mathcal{F}}$, via la restriction de l'application $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$.

Les sous-espaces affines de petites dimensions

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n.

- Les sous-espaces affines de dimension 0 sont les points $\{M\}$ de $\mathcal{E}$.
- Les sous-espaces affines de dimension 1 sont appelés des droites affines.
- Les sous-espaces affines de dimension 2 sont appelés des plans affines.
- Les sous-espaces affines de dimension $n-1$ sont appelés des hyperplans affines.

Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$. On note AB ou $\langle A, B\rangle$ la droite affine qui passe par A et B.

Soient $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$ deux espaces vectoriels, et une application linéaire $\vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}})$.
Alors pour tout $\vec{v} \in \operatorname{Im} \vec{\phi} \subset \vec{\mathcal{F}}$, l'image réciproque $\vec{\phi}^{-1}(\vec{v})$ est un sous-espace affine de $\vec{\mathcal{E}}$ de direction $\operatorname{Ker} \vec{\phi}$.

- En particulier, en prenant $\vec{\phi}(x, y) = x + y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $\vec{v} = 1$, on retrouve le sous-espace affine $\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$ de direction $\vec{\mathcal{E}} = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$.
- L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système linéaire $AX = B$ est vide ou est un sous-espace affine de direction l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions homogènes $AX = 0$. Et $\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}'$, où X_0 est une solution particulière.

Les sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Soient $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

- $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel ssi $0 \in \mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}$ est un hyperplan affine ssi il existe une forme linéaire non nulle $\phi \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, tels que $\mathcal{F} = \phi^{-1}(a)$.
- Tous les sous-espace affines de $\mathbb{R}^n$ sont des solutions de systèmes linéaires.

Parallélisme

Definition

On dit que deux (plusieurs) sous-espaces affines d'un même espace affine sont parallèles s'il ont la même direction. *(C'est une relation d'équivalence.)*

Attention : «disjoints» $\not\Rightarrow$ «parallèles».

Proposition

- *Deux sous-espaces parallèles sont disjoints ou confondus.*
- *Par tout point d'un espace affine, il passe une unique droite (sous-espace) parallèle à une droite (sous-espace) donnée.*

Intersection de sous-espaces affines

Proposition

L'intersection de deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est :

- *vide, ou*
- *un sous-espace affine de direction $\vec{\mathcal{F}} \cap \vec{\mathcal{G}}$.*

Proposition

L'intersection de deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est vide si et seulement si $\exists(\forall) A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$,

$$\overrightarrow{AB} \notin \vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}.$$

Sous-espace engendré

Définition-Proposition

Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble non vide d'un espace affine $\mathcal{E}$. Le sous-espace affine $\langle\mathcal{A}\rangle$ engendré par $\mathcal{A}$ est défini par une des conditions équivalentes :

1. *$\langle\mathcal{A}\rangle$ est le plus petit sous-espace affine contenant $\mathcal{A}$.*
2. *$\langle\mathcal{A}\rangle$ est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant $\mathcal{A}$.*
3. *$\langle\mathcal{A}\rangle$ est l'ensemble de barycentres de points de $\mathcal{A}$.*
4. *Pour $\forall(\exists)\Omega \in \mathcal{A}$, $\langle\mathcal{A}\rangle$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}_\Omega$.*

Somme de sous-espaces affines

Proposition

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines du même espace affine, et $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$ le sous-espace affine engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$.

- *Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$ est de direction $\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}$, et*

$$\dim \langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle = \dim \left(\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}} \right).$$

- *Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, alors $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$ est de direction $\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}} + \vec{D}$, où $\vec{D}$ est une droite engendrée par $\overrightarrow{AB}$ avec $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$, et*

$$\dim \langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle = \dim \left(\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}} \right) + 1.$$

Famille affinement libre et génératrice

Soient $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$.

Definition

Soit $\{A_0, \dots, A_k\}$ de points de $\mathcal{F}$. On dit que cette famille est affinement génératrice pour $\mathcal{F}$ si $\langle A_0, \dots, A_k \rangle = \mathcal{F}$.

Definition

Soient $(k+1)$ points $\{A_0, \dots, A_k\}$ de $\mathcal{E}$. On dit que cette famille est affinement indépendante (libre) si $\dim \langle A_0, \dots, A_k \rangle = k$.

Caractérisation d'un repère

Soient $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$.

Proposition

Le $(k+1)$-uplet $(A_0, \dots, A_k)$ est un repère affine pour $\mathcal{F}$ si il satisfait une des trois conditions équivalentes :

1. $\{A_0, \dots, A_k\}$ *est affinement libre et génératrice pour* $\mathcal{F}$.
2. $\{A_0, \dots, A_k\}$ *est une famille génératrice minimale pour* $\mathcal{F}$.
3. $\{A_0, \dots, A_k\}$ *est une famille libre maximale de* $\mathcal{F}$.

Définition d'une application affine

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines dirigés respectivement par $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$.

Définition-Proposition

Une application $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine s'il satisfait une des trois conditions équivalentes :

1. $\exists(\forall)\Omega \in E$, $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\Omega, \mathcal{F}_{\phi(\Omega)})$.
2. $\exists\vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}})$ *telle que* $\forall A, B \in E$,
$$\vec{\phi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$
3. ϕ *préserve les barycentres, c.-a.-d.*
$$\phi(\sum_{i=1}^{n} \mu_i A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \phi(A_i).$$

Exemples d'applications affines

1. Les applications constantes sont affines, de partie vectorielle 0.
2. Les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \mapsto ax + b$.
3. Les applications affines de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ sont de la forme $X \mapsto AX + B$, où $M \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B \in \mathbb{R}^m$.
4. Les translations $T_{\vec{v}} : M \mapsto M + \vec{v}$ (où $\vec{v} \in \vec{E}$) sont des automorphismes affines de E.
5. Soit $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$ deux espaces vectoriels. Les applications affines sont toutes de la forme $\vec{x} \mapsto \vec{\phi}(\vec{x}) + \vec{v} = T_{\vec{v}} \circ \vec{\phi}(\vec{x})$, où $\vec{\phi}$ est linéaire.

Premières propriétés

Proposition

Soit $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ *et* $\psi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{F},\mathcal{G})$, *alors* $\psi \circ \phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E},\mathcal{G})$ *de partie linéaire* $\overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\phi}$.

Proposition

Les images directes et inverses de sous-espaces affines par une application affine sont des sous-espaces affines ou vide. Ainsi les images de trois points alignés sont alignées.

Proposition

Pour donner une application affine il suffit de donner :

1. *la partie linéaire et l'image d'un point,*
2. *ou l'image d'un repère.*

Les translations

1. Une translation qui fixe un point est l'identité.
2. Une application $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ est une translation ssi sa partie linéaire est $0 \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.
3. $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$: les translations forme un groupe abélien isomorphe à $\vec{\mathcal{E}}$.
4. Soit $\phi \in Aut(\mathcal{E})$ un automorphisme affine de $\mathcal{E}$ et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$, alors $\phi \circ T_{\vec{v}} \circ \phi^{-1} = T_{\vec{\phi}(\vec{v})}$.

Homothéties affines

Definition

Une application affine de $\mathcal{E}$ est dite homothétie affine de centre $\Omega \in \mathcal{E}$ si elle est une homothétie vectorielle de $\mathcal{E}_\Omega$.

1. Une homothétie qui fixe deux points est l'identité.
2. Une application affine est une homothétie affine non identité ssi sa partie vectorielle est une homothétie vectorielle non identité.
3. La composée de deux homothéties, l'une de rapport λ et l'autre de rapport μ, est :
    1. Une homothétie de rapport $\lambda\mu$, si $\lambda\mu \neq 1$.
    2. Une translation, ssi $\lambda\mu = 1$.
4. Soit $\phi \in Aut(\mathcal{E})$ un automorphisme affine de $\mathcal{E}$ et $h_{\Omega,\lambda}$ une homothétie, alors $\phi \circ h_{\Omega,\lambda} \circ \phi^{-1} = h_{\phi(\Omega),\lambda}$.

Les points fixes

Proposition

Soit $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$, alors ϕ possède un unique point fixe ssi $\overrightarrow{\phi}$ possède un unique point fixe (forcement $0 \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$), autrement dit, ssi $1 \notin Sp(\overrightarrow{\phi})$.

Proposition

Soit $\overrightarrow{\mathcal{E}}_1 \neq 0$ l'ensemble de points fixes de $\overrightarrow{\phi}$, alors

1. *si ϕ possède un point fixe Ω, l'ensemble de points fixes de ϕ est $\Omega + \overrightarrow{\mathcal{E}}_1$;*
2. *si ϕ n'a pas de points fixes, et*

$$\mathrm{Ker}(\overrightarrow{\phi} - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(\overrightarrow{\phi} - \mathrm{Id}) = \overrightarrow{\mathcal{E}}$$

alors il existe unique $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}_1$ tel que $T_v \circ \phi$ possède un point fixe. Par ailleurs $T_v \circ \phi = \phi \circ T_v$.

Le groupe affine

Proposition

Soit $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$, *alors* ϕ *est une bijection ssi* $\overrightarrow{\phi}$ *l'est, et dans ce cas* ϕ^{-1} *est une application affine avec partie linéaire* $\overrightarrow{\phi}^{-1}$.

Proposition

Les bijections affines de $\mathcal{E}$ *dans lui-même forment un groupe, le groupe affine* $GA(\mathcal{E})$. *Et l'application* $\phi \mapsto \overrightarrow{\phi}$ *est un morphisme surjectif de groupe* $GA(\mathcal{E}) \twoheadrightarrow GL(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, *de noyau le sous-groupe abélien des translations de* $\mathcal{E}$.

Définition d'un convexe

Definition

Soit A et B deux points d'un espace affine. On note $[AB] = \{\lambda A + (1-\lambda)B \,|\, \lambda \in [0,1]\}$ l'ensemble des barycentres à poids positifs, appeler *le segment* $[AB]$.

Definition

On dit que $\mathcal{C}$ est un ensemble *convexe*, si pour tout deux points $A, B \in \mathcal{C}$ le segment $[AB]$ est entièrement contenu dans $\mathcal{C}$.

Proposition

Un ensemble $\mathcal{C}$ est convexe ssi tout barycentre de points de $\mathcal{C}$ à poids ***positifs*** *est dans $\mathcal{C}$.*

Propriétés

1. L'intersection d'ensembles convexes est convexe.
2. L'ensemble vide et les ensembles à un points sont convexes.
3. Les demi-espaces (ouverts, fermés) sont convexes.
4. L'image d'un convexe par une application affine est convexe.
5. L'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.

Enveloppe convexe

Définition-Proposition

Soit $\mathcal{A}$ une partie d'un espace affine. L'enveloppe convexe, noté $[\mathcal{A}]$, est :

1. *Le plus petit convexe contenant $\mathcal{A}$.*
2. *L'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{A}$.*
3. *L'intersection de tous les demi-espaces contenant $\mathcal{A}$.*
4. *L'ensemble de barycentres de points de $\mathcal{A}$ de poids positifs.*

Ainsi par exemple le segment $[AB]$ est l'enveloppe convexe de $\{A, B\}$.