

M53 - COURS 1

2 septembre 2015

LA DÉFINITION D'UN ESPACE AFFINE

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

DÉFINITION

EXEMPLES

OPÉRATIONS

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

DÉFINITION (HEURISTIQUE)

«Un espace affine est un espace vectoriel dont on a oublié l'origine.»

LA DÉFINITION D'UN ESPACE AFFINE

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE
DÉFINITION
EXEMPLES
OPÉRATIONS
PREMIÈRES PROPRIÉTÉS
BARYCENTRE ET
REPÈRES
SOUS-ESPACES
AFFINES
APPLICATIONS
AFFINES
CONVEXES

DÉFINITION

Soit $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel (*si non précisé, sur \mathbb{R}*).

Un ensemble (non vide) \mathcal{E} est muni de la structure d'**espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}}$** par la donnée d'une application

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$$

$$(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$$

qui satisfait les deux conditions :

1 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (*relation de Chasles*)

2 $\forall A \in \mathcal{E}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}, \exists ! B \in \mathcal{E} \text{ t.q. } \overrightarrow{AB} = \vec{v} \text{ } (B = A + \vec{v})$

LA DIMENSION D'UN ESPACE AFFINE

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

DÉFINITION

EXEMPLES

OPÉRATIONS

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

DÉFINITION

L'espace affine \mathcal{E} est de dimension n si sa direction, l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$, est de dimension n .

LES ESPACES VECTORIELS

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

DÉFINITION

EXEMPLES

OPÉRATIONS

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

Tout espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ peut être muni naturellement d'une structure d'espace affine, avec direction lui-même, via l'application :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\mapsto \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}\end{aligned}$$

CONVENTION

Dans la suite, tous les espaces vectoriels vont être considérés munis de cette structure naturelle d'espace affine.

LES DROITES (SOUS-ESPACES) AFFINES

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

DÉFINITION

EXEMPLES

OPÉRATIONS

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

Le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$ est un espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}} = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$, via l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ (A, B) &\mapsto \overrightarrow{AB} = B - A\end{aligned}$$

QUESTION

Comment peut-on généraliser cet exemple ?

LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE
DÉFINITION
EXEMPLES
OPÉRATIONS
PREMIÈRES PROPRIÉTÉS
BARYCENTRE ET
REPÈRES
SOUS-ESPACES
AFFINES
APPLICATIONS
AFFINES
CONVEXES

L'ensemble des solutions S de l'équation différentielle $y' + y = \sin(x)$ est un espace affine avec direction S^* , l'ensemble des solutions de l'équation homogène ($y' + y = 0$) via :

$$\begin{aligned} S \times S &\longrightarrow S^* \\ (f_1, f_2) &\mapsto f_2 - f_1 \end{aligned}$$

QUESTION

Comment peut-on généraliser cet exemple ?

VECTORIALISÉ D'UN ESPACE AFFINE

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

DÉFINITION

EXEMPLES

OPÉRATIONS

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

En fixant un point Ω d'un espace affine \mathcal{E} , on peut définir sur celui-ci une structure d'espace vectoriel, noté \mathcal{E}_Ω , isomorphe (par définition) à $\vec{\mathcal{E}}$ via l'application :

$$\mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$$

$$B \mapsto \overrightarrow{\Omega B}$$

- L'origine de \mathcal{E}_Ω est le point Ω .
- Avec l'écriture $\Omega + \vec{v}$, les opérations sont :
 - $(\Omega + \vec{v}) + (\Omega + \vec{w}) = (\Omega + \vec{v} + \vec{w})$.
 - $\lambda(\Omega + \vec{v}) = \Omega + \lambda \vec{v}$.

PRODUIT D'ESPACES AFFINES

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

DÉFINITION

EXEMPLES

OPÉRATIONS

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines, sur le même corps, de directions respectives $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$.

On définit la structure d'espace affine *produit* sur $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ de direction $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{F}}$ par :

$$\overrightarrow{(A, B)(C, D)} := (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}).$$

PROPRIÉTÉS CALCULATOIRES

M53 - Cours 1

ESPACE AFFINE

DÉFINITION

EXEMPLES

OPÉRATIONS

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

BARYCENTRE ET

REPÈRES

SOUS-ESPACES

AFFINES

APPLICATIONS

AFFINES

CONVEXES

Soit \mathcal{E} un \mathbb{K} -espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}}$.

- $A \in \mathcal{E} \Rightarrow \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et $A + \vec{0} = A$.
- $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
- $A + \vec{v} = B \Leftrightarrow \forall (\exists) C \in \mathcal{E}, \overrightarrow{CA} + \vec{v} = \overrightarrow{CB}$.
- $(A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$ ($\vec{\mathcal{E}}$ agit sur \mathcal{E}).
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ($ABCD$ est un parallélogramme).
- $\overrightarrow{(A + \vec{v})(B + \vec{w})} = \overrightarrow{AB} - \vec{v} + \vec{w}$.
- Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$
 - Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \in \vec{\mathcal{E}}$ est bien définie ($\overrightarrow{AB} = B - A$).
 - Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \in \mathcal{E}$ est bien définie.
 - Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i \notin \{0, 1\}$ alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i$ n'est pas bien définie.

DÉFINITION DU BARYCENTRE

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET

REPÈRES

BARYCENTRE

PROPRIÉTÉS

REPÈRE

SOUS-ESPACES

AFFINES

APPLICATIONS

AFFINES

CONVEXES

DÉFINITION-PROPOSITION

Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ et $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^k \mu_i \neq 0$, alors il existe un unique point G qui satisfait une des conditions équivalentes :

$$1 \quad G = \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^k \mu_i} A_i.$$

$$2 \quad \forall (\exists) M \in \mathcal{E}, \quad (\sum_{i=1}^k \mu_i) \overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{MA_i}.$$

$$3 \quad \sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{GA_i} = 0.$$

Le point G est *le barycentre des des points pondérées* $\{(A_1, \mu_1), \dots, (A_k, \mu_k)\}$, et les $\{\mu_i\}$ sont appelés les *poïds*.

DÉFINITION DE L'ISOBARYCENTRE

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

BARYCENTRE
PROPRIÉTÉS
REPÈRE

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

DÉFINITION

Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$, leur **isobarycentre** est le barycentre de ces points pondérés du même poids non nul (*qui peut être pris égal à $\frac{1}{k}$, ou à 1*).

PROPRIÉTÉS DES BARYCENTRES

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE
BARYCENTRE ET
REPÈRES
BARYCENTRE
PROPRIÉTÉS
REPÈRE
SOUS-ESPACES
AFFINES
APPLICATIONS
AFFINES
CONVEXES

- Si on remplace les poids μ_i par $\lambda\mu_i$ pour $\lambda \neq 0$, le barycentre ne change pas.
- Si on rajoute un point pondéré par un poids nul, le barycentre ne change pas.
- Soit $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ un espace affine produit.
Le barycentre des points pondérés $\{((A_1, B_1), \mu_1), \dots, ((A_k, B_k), \mu_k)\}$ est $G = (G_A, G_B)$,
où G_A est le barycentre de $\{(A_1, \mu_1), \dots, (A_k, \mu_k)\}$ dans \mathcal{E} ,
et G_B est le barycentre de $\{(B_1, \mu_1), \dots, (B_k, \mu_k)\}$ dans \mathcal{F} .

ASSOCIATIVITÉ DU BARYCENTRE

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE
BARYCENTRE ET
REPÈRES
BARYCENTRE
PROPRIÉTÉS
REPÈRE
SOUS-ESPACES
AFFINES
APPLICATIONS
AFFINES
CONVEXES

Soient $\{A_i\}_{i \in I}$ des points de \mathcal{E} et $\{\mu_i\}_{i \in I}$ des scalaires de somme non nulle, indexés par un ensemble I .

Soit une partition $I = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_r$, telle que $\nu_k := \sum_{i \in J_k} \mu_i \neq 0$ pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$.

On note G_k le barycentre de $\{(A_i, \mu_i)\}_{i \in J_k}$.

PROPOSITION

Le barycentre G des points pondérés $\{(A_i, \mu_i)\}_{i \in I}$ est aussi le barycentre des $\{(G_k, \nu_k)\}_{k \in \{1, \dots, r\}}$.

DÉFINITION D'UN REPÈRE

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE
BARYCENTRE ET
REPÈRES
BARYCENTRE
PROPRIÉTÉS
REPÈRE
SOUS-ESPACES
AFFINES
APPLICATIONS
AFFINES
CONVEXES

Soit (A_0, \dots, A_n) un $(n+1)$ -uplet de l'espace affine \mathcal{E} .

DÉFINITION-PROPOSITION

On dit que (A_0, \dots, A_n) est *un repère affine* de \mathcal{E} s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de $\vec{\mathcal{E}}$.
- 2 Pour tout point B de \mathcal{E} il existe un unique $(n+1)$ -uplet de poids (μ_0, \dots, μ_n) , avec $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$ et $B = \sum_{i=1}^n \mu_i A_i$.

COORDONNÉES AFFINES

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

BARYCENTRE
PROPRIÉTÉS
REPÈRE

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

Soit $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de \mathcal{E} .

DÉFINITION

Pour $B \in \mathcal{E}$, on dit que $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{A}}$ sont les **coordonnées cartésiennes** de B dans le repère \mathcal{A} , si $\overrightarrow{A_0B} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{A_0A_i}$.

DÉFINITION

Pour $B \in \mathcal{E}$, on dit que $[\mu_0, \dots, \mu_n]_{\mathcal{A}}$ sont les **coordonnées barycentriques** de B dans le repère \mathcal{A} , si $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$ et $B = \sum_{i=0}^n \mu_i A_i$.

La relation entre ces deux systèmes de coordonnées est :

$$\mu_i = x_i, \forall i = 1, \dots, n \text{ et } \mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i.$$

DÉFINITION D'UN SOUS-ESPACE AFFINE

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

DÉFINITION
EXEMPLES
PROPRIÉTÉS

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

Soit \mathcal{E} un espace affine.

DÉFINITION-PROPOSITION

Un sous-ensemble non vide $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est dit *sous-espace affine* s'il satisfait une des conditions équivalentes :

- 1 Il existe un sous-espace vectoriel $\vec{\mathcal{F}}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ et $\Omega \in \mathcal{E}$ tels que $\mathcal{F} = \Omega + \vec{\mathcal{F}}$.
- 2 $\exists(\forall)\Omega \in \mathcal{F}$, \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{E}_Ω .
- 3 \mathcal{F} est stable par barycentres.

Un sous-espace affine $\mathcal{F} = \Omega + \vec{\mathcal{F}}$ est un espace affine de direction $\vec{\mathcal{F}}$, via la restriction de l'application $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$.

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension n .

- Les sous-espaces affines de dimension 0 sont les points $\{M\}$ de \mathcal{E} .
- Les sous-espaces affines de dimension 1 sont appelés **des droites affines**.
- Les sous-espaces affines de dimension 2 sont appelés **des plans affines**.
- Les sous-espaces affines de dimension $n - 1$ sont appelés **des hyperplans affines**.

Soient A et B deux points distincts de \mathcal{E} . On note AB ou $\langle A, B \rangle$ la droite affine qui passe par A et B .

LES SOUS-ESPACES AFFINES D'UN ESPACE VECTORIEL

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

DÉFINITION

EXEMPLES

PROPRIÉTÉS

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

Soient $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$ deux espaces vectoriels, et $\vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}})$ une application linéaire.

Alors pour tout $\vec{v} \in \text{Im } \vec{\phi} \subset \vec{\mathcal{F}}$, l'image réciproque $\vec{\phi}^{-1}(\vec{v})$ est un sous-espace affine de $\vec{\mathcal{E}}$ de direction $\text{Ker } \vec{\phi}$.

- En particulier, en prenant $\vec{\phi}(x, y) = x + y$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et $\vec{v} = 1$, on retrouve le sous-espace affine $\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$ de direction $\vec{\mathcal{E}} = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$.
- L'ensemble \mathcal{S} des solutions d'un système linéaire $AX = B$ est vide ou est un sous-espace affine de direction l'ensemble \mathcal{S}^* des solutions homogènes $AX = 0$. Et $\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}'$, où X_0 est une solution particulière.

LES SOUS-ESPACES AFFINES D'UN ESPACE VECTORIEL

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

DÉFINITION

EXEMPLES

PROPRIÉTÉS

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

Soient $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel et \mathcal{F} un sous-espace affine de $\vec{\mathcal{E}}$.

- \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel ssi $0 \in \mathcal{F}$.
- \mathcal{F} est un hyperplan affine ssi il existe une forme linéaire non nulle $\vec{\phi} \in \vec{\mathcal{E}}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, tels que $\mathcal{F} = \vec{\phi}^{-1}(a)$.
- Tous les sous-espaces affines de \mathbb{R}^n sont des ensembles de solutions de systèmes linéaires.

DÉFINITION

On dit que deux (plusieurs) sous-espaces affines d'un même espace affine sont **parallèles** s'ils ont la même direction. (*C'est une relation d'équivalence.*)

Attention : «disjoints» \nRightarrow «parallèles».

PROPOSITION

- *Deux sous-espaces parallèles sont disjoints ou confondus.*
- *Par tout point d'un espace affine, il passe une unique droite (sous-espace) parallèle à une droite (sous-espace) donnée.*

INTERSECTION DE SOUS-ESPACES AFFINES

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

DÉFINITION

EXEMPLES

PROPRIÉTÉS

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

PROPOSITION

L'intersection de deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} est :

- *vide, ou*
- *un sous-espace affine de direction $\vec{\mathcal{F}} \cap \vec{\mathcal{G}}$.*

PROPOSITION

L'intersection de deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} est vide si et seulement si $\exists(\forall) A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$,

$$\overrightarrow{AB} \notin \vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}.$$

DÉFINITION-PROPOSITION

Soit \mathcal{A} un sous-ensemble non vide d'un espace affine \mathcal{E} . Le sous-espace affine $\langle \mathcal{A} \rangle$ engendré par \mathcal{A} est défini par une des conditions équivalentes :

- 1** *$\langle \mathcal{A} \rangle$ est le plus petit sous-espace affine contenant \mathcal{A} .*
- 2** *$\langle \mathcal{A} \rangle$ est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant \mathcal{A} .*
- 3** *$\langle \mathcal{A} \rangle$ est l'ensemble des barycentres de points de \mathcal{A} .*
- 4** *$\forall (\exists) \Omega \in \mathcal{A}$, $\langle \mathcal{A} \rangle$ est le sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{A} dans \mathcal{E}_Ω .*

SOMME DE SOUS-ESPACES AFFINES

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

DÉFINITION

EXEMPLES

PROPRIÉTÉS

APPLICATIONS
AFFINES

CONVEXES

PROPOSITION

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines du même espace affine, et $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$ le sous-espace affine engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$.

- *Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$ est de direction $\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}$, et*

$$\dim \langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle = \dim (\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}).$$

- *Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, alors $\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$ est de direction $\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}} + \vec{D}$, où \vec{D} est une droite engendrée par \overrightarrow{AB} avec $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$, et*

$$\dim \langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle = \dim (\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}) + 1.$$

FAMILLES AFFINEMENT LIBRES ET GÉNÉRATRICES

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE
BARYCENTRE ET
REPÈRES
SOUS-ESPACES
AFFINES
DÉFINITION
EXEMPLES
PROPRIÉTÉS
APPLICATIONS
AFFINES
CONVEXES

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine d'un espace affine \mathcal{E} .

DÉFINITION

Soient $\{A_0, \dots, A_k\}$ des points de \mathcal{F} . On dit que cette famille est **affinement génératrice** pour \mathcal{F} si $\langle A_0, \dots, A_k \rangle = \mathcal{F}$.

DÉFINITION

Soient $(k+1)$ points $\{A_0, \dots, A_k\}$ de \mathcal{E} . On dit que cette famille est **affinement libre** si $\dim \langle A_0, \dots, A_k \rangle = k$.

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine d'un espace affine \mathcal{E} .

PROPOSITION

Le $(k+1)$ -uplet (A_0, \dots, A_k) est un repère affine pour \mathcal{F} si il satisfait une des trois conditions équivalentes :

- 1** $\{A_0, \dots, A_k\}$ est affinement libre et génératrice pour \mathcal{F} .
- 2** $\{A_0, \dots, A_k\}$ est une famille génératrice minimale pour \mathcal{F} .
- 3** $\{A_0, \dots, A_k\}$ est une famille libre maximale de \mathcal{F} .

DÉFINITION D'UNE APPLICATION AFFINE

M53 - COURS 1

Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines dirigés respectivement par $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$.

DÉFINITION-PROPOSITION

Une application $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est dite *affine* si elle satisfait une des trois conditions équivalentes :

1 $\exists (\forall) \Omega \in \mathcal{E}, \phi \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\Omega, \mathcal{F}_{\phi(\Omega)}).$

2 $\exists \vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}})$ telle que $\forall A, B \in \mathcal{E},$

$$\vec{\phi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

(L'application $\vec{\phi}$ est unique et est appelée *partie linéaire* de ϕ .)

3 ϕ préserve les barycentres, c.-à.-d. pour $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n \mu_i A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_i \phi(A_i).$$

L'ensemble des applications affines de $\vec{\mathcal{E}}$ dans $\vec{\mathcal{F}}$ est noté $\text{Aff}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}}).$

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

DÉFINITION

EXEMPLES

PROPRIÉTÉS

GA

CONVEXES

EXEMPLES D'APPLICATIONS AFFINES

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

DÉFINITION

EXEMPLES

PROPRIÉTÉS

GA

CONVEXES

- 1 Les applications constantes sont affines, de partie vectorielle 0.
- 2 Les applications affines de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont de la forme $x \mapsto ax + b$.
- 3 Les applications affines de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m sont de la forme $X \mapsto AX + B$, où $M \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B \in \mathbb{R}^m$.
- 4 Les translations $T_{\vec{v}} : M \mapsto M + \vec{v}$ (où $\vec{v} \in \vec{E}$) sont des automorphismes affines de E .
- 5 Soient $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$ deux espaces vectoriels. Les applications affines sont toutes de la forme $\vec{x} \mapsto \vec{\phi}(\vec{x}) + \vec{v} = T_{\vec{v}} \circ \vec{\phi}(\vec{x})$, où $\vec{\phi}$ est linéaire.

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

DÉFINITION

EXEMPLES

PROPRIÉTÉS

GA

CONVEXES

PROPOSITION

Soit $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $\psi \in \text{Aff}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, alors $\psi \circ \phi \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ et a pour partie linéaire $\vec{\psi} \circ \vec{\phi}$.

PROPOSITION

Les images directes et inverses de sous-espaces affines par une application affine sont des sous-espaces affines ou vides. Ainsi les images de trois points alignés sont alignées.

PROPOSITION

Pour donner une application affine il suffit de donner :

- 1** *la partie linéaire et l'image d'un point,*
- 2** *ou l'image d'un repère.*

DÉFINITION

Une application affine de \mathcal{E} est dite **translation** si elle est de la forme $T_{\vec{v}} : M \mapsto M + \vec{v}$ avec $\vec{v} \in \vec{E}$.

- 1 Une translation qui fixe un point est l'identité.
- 2 Une application $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ est une translation ssi sa partie linéaire est $\text{Id} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.
- 3 $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$: les translations forment un groupe abélien isomorphe à $\vec{\mathcal{E}}$.
- 4 Soit $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{E})$ un automorphisme affine de \mathcal{E} et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$, alors $\phi \circ T_{\vec{v}} \circ \phi^{-1} = T_{\vec{\phi}(\vec{v})}$.

HOMOTHÉTIES AFFINES

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

DÉFINITION
EXEMPLES
PROPRIÉTÉS
GA

CONVEXES

DÉFINITION

Une application affine de \mathcal{E} est dite **homothétie affine de rapport λ et de centre $\Omega \in \mathcal{E}$** si elle est une homothétie vectorielle de \mathcal{E}_Ω de rapport λ .

- 1 Une homothétie qui fixe deux points est l'identité.
- 2 Une application affine est une homothétie affine différente de l'identité ssi sa partie vectorielle est une homothétie vectorielle différente de l'identité.
- 3 La composée de deux homothéties, l'une de rapport λ et l'autre de rapport μ , est :
 - 1 Une homothétie de rapport $\lambda\mu$, si $\lambda\mu \neq 1$.
 - 2 Une translation, si $\lambda\mu = 1$.
- 4 Soit $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{E})$ un automorphisme affine de \mathcal{E} et $h_{\Omega,\lambda}$ une homothétie de centre Ω et de rapport λ , alors $\phi \circ h_{\Omega,\lambda} \circ \phi^{-1} = h_{\phi(\Omega),\lambda}$.

LES POINTS FIXES

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE
BARYCENTRE ET
REPÈRES
SOUS-ESPACES
AFFINES
APPLICATIONS
AFFINES
DÉFINITION
EXEMPLES
PROPRIÉTÉS
GA
CONVEXES

PROPOSITION

Soit $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$, alors ϕ possède un unique point fixe ssi $\vec{\phi}$ possède un unique point fixe (forcément $0 \in \vec{\mathcal{E}}$), autrement dit, ssi $1 \notin \text{Sp}(\vec{\phi})$.

PROPOSITION

Soit $\vec{\mathcal{E}}_1 \neq 0$ l'ensemble de points fixes de $\vec{\phi}$, alors

- 1** *si ϕ possède un point fixe Ω , l'ensemble de points fixes de ϕ est $\Omega + \vec{\mathcal{E}}_1$;*
- 2** *si ϕ n'a pas de points fixes, et*

$$\text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id}) \oplus \text{Im}(\vec{\phi} - \text{Id}) = \vec{\mathcal{E}}$$

*alors il existe un unique $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_1$ tel que $T_{\vec{v}} \circ \phi$ possède un point fixe.
Par ailleurs $T_{\vec{v}} \circ \phi = \phi \circ T_{\vec{v}}$.*

LE GROUPE AFFINE

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE

BARYCENTRE ET
REPÈRES

SOUS-ESPACES
AFFINES

APPLICATIONS
AFFINES

DÉFINITION

EXEMPLES

PROPRIÉTÉS

GA

CONVEXES

PROPOSITION

Soit $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$, alors ϕ est une bijection ssi $\vec{\phi}$ l'est, et dans ce cas ϕ^{-1} est une application affine avec partie linéaire $\vec{\phi}^{-1}$.

PROPOSITION

Les bijections affines de \mathcal{E} dans lui-même forment un groupe, le groupe affine $GA(\mathcal{E})$. Et l'application $\phi \mapsto \vec{\phi}$ est un morphisme surjectif de groupes $GA(\mathcal{E}) \twoheadrightarrow GL(\vec{\mathcal{E}})$, de noyau le sous-groupe abélien des translations de \mathcal{E} .

DÉFINITION D'UN CONVEXE

M53 - COURS 1

ESPACE AFFINE
BARYCENTRE ET
REPÈRES
SOUS-ESPACES
AFFINES
APPLICATIONS
AFFINES
CONVEXES
DÉFINITION
PROPRIÉTÉS
ENVELOPPE CONVEXE

DÉFINITION

Soient A et B deux points d'un espace affine. On note $[AB] = \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in [0, 1]\}$ l'ensemble des barycentres à poids positifs, appelé *le segment* $[AB]$.

DÉFINITION

On dit que \mathcal{C} est un ensemble *convexe*, si pour tous deux points $A, B \in \mathcal{C}$ le segment $[AB]$ est entièrement contenu dans \mathcal{C} .

PROPOSITION

Un ensemble \mathcal{C} est convexe ssi tout barycentre de points de \mathcal{C} à poids positifs est dans \mathcal{C} .

- 1 L'intersection d'ensembles convexes est convexe.
- 2 L'ensemble vide et les ensembles à un point sont convexes.
- 3 Un sous-espace affine est convexe.
- 4 Les demi-espaces (ouverts, fermés) sont convexes.
- 5 L'image d'un convexe par une application affine est convexe.
- 6 L'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.

DÉFINITION-PROPOSITION

Soit \mathcal{A} une partie d'un espace affine. L'enveloppe convexe, noté $[\mathcal{A}]$, est :

- 1** *Le plus petit convexe contenant \mathcal{A} .*
- 2** *L'intersection de tous les convexes contenant \mathcal{A} .*
- 3** *L'ensemble de barycentres de points de \mathcal{A} de poids positifs.*

Ainsi par exemple le segment $[AB]$ est l'enveloppe convexe de $\{A, B\}$.