

Rappels : espace
euclidien

Espaces affines
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

M53 - Partie 2

septembre 2015

Un espace vectoriel réel $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension finie est dit **euclidien** s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle\end{aligned}$$

- symétrique : $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$,
- définie : $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$,
- positive : $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$.

La structure euclidienne standard sur \mathbb{R}^n est définie par

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Tout espace euclidien est isomorphe à \mathbb{R}^n (avec sa structure standard), via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels : espace euclidien

Définition

Norme

Notations

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

1 La **norme euclidienne** de cet espace est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$.

2 Et une formule inverse (*de polarisation*) est :

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2).$$

3 De plus la norme et la produit scalaire sont reliés par *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

4 On dit que **l'angle** entre \vec{v} et \vec{w} est $\alpha \in [0, \pi]$ si

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \cos(\alpha) \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

Rappels : espace
euclidien

Définition

Norme

Notations

Espaces affines
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

- 1 $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0.$
- 2 Soit $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$, alors $\vec{\mathcal{F}}^\perp = \{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \mid \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \vec{v} \perp \vec{w} \}.$
- 3 Soit $\vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2 \subset \vec{\mathcal{E}}$, alors $\vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1 \subset \vec{\mathcal{F}}_2^\perp.$
- 4 $\vec{\mathcal{E}}$ est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $\vec{\mathcal{F}}_1$ et $\vec{\mathcal{F}}_2$, noté $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2$, si $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \oplus \vec{\mathcal{F}}_2$ et $\vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2$.
Nous avons : $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1^\perp = \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_2^\perp = \vec{\mathcal{F}}_1.$

Définition d'un espace affine euclidien

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Définition

Distance entre parties

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Un ensemble \mathcal{E} est **métrique** s'il est muni d'une application **distance**

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (M, N) &\longmapsto d(M, N)\end{aligned}$$

- symétrique : $d(M, N) = d(N, M)$,
- séparée : $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$,
- inégalité triangulaire : $d(M, N) + d(N, P) \geq d(M, P)$.

Définition

Un espace affine \mathcal{E} est dit **euclidien** si son espace vectoriel de directions $\vec{\mathcal{E}}$ est muni d'une structure euclidienne.

Et dans ce cas on pose la distance entre deux points

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|.$$

Rappels : espace
euclidien

Espaces affines
euclidiens

Définition

Distance entre parties

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux parties d'un espace affine euclidien \mathcal{E} . On pose

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{(M, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} d(M, N).$$

- 1 Si \mathcal{A} est compacte et \mathcal{B} est fermée, les deux non vides, alors il existe un couple de points $(M, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tel que $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(M, N)$.
Et pour \mathcal{A} seulement fermée ?
- 2 La propriété précédente reste vraie pour \mathcal{A} et \mathcal{B} des sous-espaces affines. De plus $\overrightarrow{MN} \perp (\vec{A} + \vec{B})$.
- 3 Deux hyperplans distincts \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) > 0$. Et pour s.e.a. quelconques ?
- 4 Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $\forall (M, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, d(M, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, N)$.

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Définition-Proposition

L'application linéaire $\vec{\phi}$ est une **isométrie** (dit également **orthogonale**) de $\vec{\mathcal{E}}$ si elle satisfait une des conditions équivalentes

$$1 \quad \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},$$

$$\|\vec{\phi}(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|.$$

$$2 \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{E}},$$

$$\langle \vec{\phi}(\vec{v}) | \vec{\phi}(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle.$$

$$3$$

$$\vec{\phi} \circ \vec{\phi}^t = \text{Id} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\phi}^t \circ \vec{\phi} = \text{Id} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\phi}^{-1} = \vec{\phi}^t$$

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

- 1 Si une isométrie $\vec{\phi}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ préserve un s.e.v. $\vec{\mathcal{F}}$ (c.-à-d. $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) \subset \vec{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) = \vec{\mathcal{F}}$), alors elle préserve aussi son orthogonal,

$$\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}^\perp) = \vec{\mathcal{F}}^\perp.$$

- 2 En particulier, si $\vec{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial, $\vec{\mathcal{E}}$ se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par $\vec{\phi}$:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}} \oplus \vec{\mathcal{F}}^\perp.$$

Si on note $\vec{\phi}_1 = \vec{\phi}|_{\vec{\mathcal{F}}}$ et $\vec{\phi}_2 = \vec{\phi}|_{\vec{\mathcal{F}}^\perp}$, alors $\vec{\phi}_1$ et $\vec{\phi}_2$ sont orthogonales et

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_1 \oplus \vec{\phi}_2.$$

- 3 Si λ est valeur propre (réelle) de $\vec{\phi}$ alors $\lambda = \pm 1$.

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

- Le **groupe des isométries** de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $O(\vec{\mathcal{E}})$.

Et on note $O_n = O(\mathbb{R}^n)$.

$$(O_n = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M^t M = I_n\}.)$$

- Soit $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$, alors $\det(\vec{\phi}) = \pm 1$.

- On note $O^+(\vec{\mathcal{E}})$ ou $SO(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^+ ou SO_n) l'ensemble des isométries à déterminant 1, dites **directes**, de $\vec{\mathcal{E}}$ (resp. \mathbb{R}^n).

- De même l'ensemble des isométries à déterminant -1 , dites **indirectes**, est noté $O^-(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^-).

($O^+(\vec{\mathcal{E}})$ est un sous-groupe du groupe compact $O(\vec{\mathcal{E}})$, mais $O^-(\vec{\mathcal{E}})$ n'en est pas un.)

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

- $O_1 = \{1, -1\}.$

- $O_2 = O_2^+ \sqcup O_2^-,$ où

- $O_2^+ = \{ \vec{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \}$

est le sous-groupe des rotations,

- $O_2^- = \{ \vec{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \}$

est l'ensemble des réflexions.

(\vec{S}_α est la symétrie par rapport à la droite d'angle $\alpha/2$.)

Les règles de composition sont :

- $\vec{R}_\alpha \circ \vec{R}_\beta = \vec{R}_{\alpha+\beta}$ ($\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1$),

- $\vec{S}_\alpha \circ \vec{S}_\beta = \vec{R}_{\alpha-\beta},$

- $\vec{S}_\alpha \circ \vec{R}_\gamma = \vec{S}_{\alpha-\gamma}$ et $\vec{R}_\gamma \circ \vec{S}_\beta = \vec{S}_{\gamma+\beta}.$

Remarque : Toute isométrie de \mathbb{R}^2 est le produit d'au plus 2 réflexions.

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

En identifiant l'espace euclidien \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} , le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z | w \rangle = \frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2}$$

Toute élément de $O(\mathbb{C})$ est de la forme

- $\rho_a : z \mapsto az$ avec $|a| = 1$, et dans ce cas c'est une rotation d'angle $\arg(a)$, ou
- $\sigma_a : z \mapsto a\bar{z}$ avec $|a| = 1$, et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par \sqrt{a} .

L'identification entre O_2 et $O(\mathbb{C})$ est donnée par :

- $\rho_{e^{i\theta}} = \vec{R}_\theta$,
- $\sigma_{e^{i\theta}} = \vec{S}_\theta$.

Dimension 3

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Soit $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$.

- $\vec{\phi} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\vec{\phi}$ est sous la forme

$$\vec{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $\vec{\phi} = \vec{\rho}_{\vec{w}, \alpha}$ est la rotation de α autour de l'axe orienté engendré par \vec{w} .

- $\vec{\phi} \in O^-(\vec{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\vec{\phi}$ est sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $\vec{\phi}$ est la composée de la rotation $\vec{\rho}_{\vec{w}, \alpha}$ avec la symétrie $\vec{\sigma}_{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$ par rapport au plan engendré par \vec{u} et \vec{v} , et on dit que $\vec{\phi}$ est une **anti-rotation**.

Soit $\vec{\phi} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$, alors il existe une b.o.n. dans laquelle la matrice de $\vec{\phi}$ est sous la forme ($\dim \vec{\mathcal{E}} = 2k + p$)

Diagram illustrating a quantum circuit for a 2-qubit system. The circuit starts with two qubits in the $|0\rangle$ state. The first qubit passes through a Hadamard gate (H). Then, a CNOT gate is applied with the first qubit as control and the second qubit as target. The second qubit then passes through a Hadamard gate (H). Finally, the first qubit passes through a Hadamard gate (H). The circuit is labeled with 0 at the input and p at the output of the second qubit's Hadamard gate.

Et pour $\vec{\phi} \in O^-(\vec{\mathcal{E}})$, à la place du dernier 1 il y a un -1 (donc $p > 0$).

Décomposition des isométries en réflexions

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Définition

Groupe orthogonal

Petites dimensions

Forme standard

Décomposition

Isométries affines

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une **réflexion**.

(Une réflexion est une isométrie indirecte.)

Proposition

Soient $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension $\dim \vec{\mathcal{E}} = n$, et $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$.

Alors $\vec{\phi}$ est le produit de $k (\leq n)$ réflexions : $\vec{\phi} = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$.

Si k est pair $\vec{\phi} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$, si k est impair $\vec{\phi} \in O^-(\vec{\mathcal{E}})$.

Rappels : espace
euclidien

Espaces affines
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

Définition-Proposition

*On dit qu'une application affine $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ est une **isométrie** si une des conditions équivalentes est satisfaite :*

- $\forall A, B \in \mathcal{E}, d(\phi(A), \phi(B)) = d(A, B) ;$
- $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}}).$

On note **Iso**(\mathcal{E}) l'ensemble des isométries de \mathcal{E} .

Ainsi que **Iso**[±](\mathcal{E}) l'ensemble des isométries dont la partie linéaire est dans $O^\pm(\vec{\mathcal{E}})$.

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

- $\text{Iso}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathcal{E})$.
- $\text{Iso}^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\text{Iso}(\mathcal{E})$.
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ est dite **symétrie (affine) orthogonale** (resp. **réflexion**) s'il existe $\Omega \in \mathcal{E}$ telle que ϕ est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans \mathcal{E}_Ω . Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Toute translation est le produit de deux réflexions.

Rappels : espace
euclidien

Espaces affines
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

Lemme

Soit $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$, alors $\vec{\mathcal{E}} = \text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id}) \oplus^{\perp} \text{Im}(\vec{\phi} - \text{Id})$.

Proposition

Soit $\phi \in \text{Iso}(\mathcal{E})$, alors

- *soit ϕ possède un point fixe Ω , et dans ce cas $\phi \in O(\mathcal{E}_{\Omega})$,*
- *soit il existe un unique $\vec{v} (\neq 0)$, vecteur fixe de $\vec{\phi}$, tel que $T_{\vec{v}} \circ \phi = \phi \circ T_{\vec{v}}$ possède (au moins) un point fixe.*

Rappels : espace
euclidien

Espaces affines
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

- $\phi \in \text{Iso}(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b.$
(ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- $\text{Iso}(\mathbb{R}^2) = \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{R}^2).$
 - $\phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - $\phi = R_{\Omega, \alpha}$ est la rotation de centre Ω d'angle α , ou
 - $\phi = T_{\vec{v}}$ est une translation.
 - $\phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - $\phi = S_{\mathcal{D}}$ est la symétrie par rapport à une droite affine \mathcal{D} , ou
 - $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{D}}$ avec $\vec{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie $\vec{\phi}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une **symétrie glissée**.

(ϕ est la composée d'au plus 3 réflexions.)

Rappels : espace
euclidien

Espaces affines
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

Rappel : Les application affines de l'espace euclidien \mathbb{C} sont de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma$.

$$\text{Iso}(\mathbb{C}) = \text{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{C})$$

- $\phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{C})$ ssi $\phi(z) = az + b$ avec $|a| = 1$.
 - Si $a \neq 1$, alors ϕ est la rotation de centre $\frac{b}{1-a}$.
 - Si $a = 1$, alors ϕ est la translation de b .
- $\phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{C})$ ssi $\phi(z) = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$.
 - Si $\bar{a}b^2 \in \mathbb{R}_-$, alors ϕ est une symétrie d'axe $\sqrt{a}\mathbb{R} + b/2$.
 - Sinon ϕ est une symétrie glissée.

Rappels : espace
euclidien

Espaces affines
euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

$$\blacksquare \text{ Iso}(\mathbb{R}^3) = \text{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{R}^3).$$

$$\blacksquare \phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \text{ ssi}$$

■ $\phi = R_{\mathcal{D}, \alpha}$ est la rotation d'angle α autour de l'axe \mathcal{D} , ou

■ $\phi = T_{\vec{v}}$ est une translation, ou

■ $\phi = T_{\vec{v}} \circ R_{\mathcal{D}, \alpha}$, avec $\vec{\mathcal{D}} = \langle \vec{v} \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un **vissage** d'axe \mathcal{D} et d'angle α .

$$\blacksquare \phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{R}^3) \text{ ssi}$$

■ $\phi = S_{\mathcal{H}}$ est la symétrie par rapport au plan affine \mathcal{H} , ou

■ $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\vec{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie $\vec{\phi}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une **symétrie glissée**.

■ $\phi = R_{\mathcal{D}, \alpha} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une **anti-rotation**.

(ϕ est la composée d'au plus 4 réflexions.)

Rappels : espace euclidien

Espaces affines euclidiens

Isométries vectorielles

Isométries affines

Définition

Propriétés

Structure

Petites dimensions

Décomposition

Rappel : Une réflexion est une isométrie indirecte.

Proposition

Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension n , et $\phi \in \text{Iso}(\mathcal{E})$.

Alors ϕ est le produit de $k(\leq n+1)$ réflexions :

$$\phi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k.$$

Si k est pair $\phi \in \text{Iso}^+(\mathcal{E})$, et si k est impair $\phi \in \text{Iso}^-(\mathcal{E})$.