

---

## TD1 : ESPACES AFFINES, NOTIONS DE BASE

---

Espaces et sous-espaces affines

### Exercice 1 (Droites)

- a) On considère l'espace affine  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\mathcal{D}$  la droite  $\{(x, y) \mid x + 2y = 1\}$ .
- (i) Déterminer toutes les équations linéaires qui définissent la même droite  $\mathcal{D}$ .
  - (ii) Déterminer la direction de  $\mathcal{D}$ .
  - (iii) Déterminer toutes les équations linéaires qui définissent une droite parallèle à  $\mathcal{D}$ .
  - (iv) Déterminer les équations linéaires qui définissent la droite parallèle à  $\mathcal{D}$  qui passe par  $A = (2, 1)$ .
  - (v) Déterminer une équation de la droite qui passe par les points  $C = (2, 3)$  et  $D = (4, -3)$ . Est-elle parallèle à  $\mathcal{D}$  ?
- b) On considère le plan complexe  $\mathbb{C}$  comme un espace affine réel.
- (i) Montrer que toute droite réelle de  $\mathbb{C}$  est définie par une équation complexe de la forme
$$\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0\}$$
où  $\beta \in \mathbb{C}^*$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$ .
  - (ii) Déterminer une équation complexe de la droite  $\mathcal{D}$  de la question (a).
  - (iii) Donner une condition sur les coefficients des équations complexes pour que deux droites soient parallèles.
- c) On considère l'espace affine réel  $\mathbb{R}^3$ .
- (i) Déterminer des équations qui définissent la droite  $\mathcal{T}$  qui passe par les deux points  $M = (1, 0, 1)$  et  $N = (-1, 1, 1)$ .
  - (ii) Déterminer la direction de  $\mathcal{T}$ .
  - (iii) Déterminer des équations de la droite parallèle à  $\mathcal{T}$  qui passe par le point  $P = (-1, 2, 1)$ .
  - (iv) Trouver une droite qui n'est ni parallèle à  $\mathcal{T}$ , ni sécante avec  $\mathcal{T}$ .

### Exercice 2 (Barycentres)

On se place dans  $\mathbb{R}^2$ .

- a) Calculer l'isobarycentre des points  $A = (1, -2)$ ,  $B = (0, -2)$ ,  $C = (2, -4)$ . Puis le barycentre des mêmes points affectés des poids suivants :  $(A, 2)$ ,  $(B, 4)$ ,  $(C, -1)$ .
- b) Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.
- c) Discuter la position d'un point  $M$  par rapport au triangle  $\triangle ABC$  en fonction des signes de ses coordonnées barycentriques  $[\alpha, \beta, \gamma]$ .

### Exercice 3 (Exemples d'espaces affines)

- a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'ensemble  $\mathcal{E}_n$  des polynômes unitaires de degré  $n$  à coefficients réels est un espace affine. Quelle est sa dimension ? En donner un repère affine.
- b) Soient  $d$  un entier non nul, et  $a_1, \dots, a_d$  et  $b$  des réels. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des suites réelles  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant

$$u_{n+d} = a_1 u_{n+d-1} + \dots + a_{d-1} u_{n+1} + a_d u_n + b \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- (i) Montrer que  $\mathcal{E}$  est un espace affine.
- (ii) Quelle est sa dimension ?
- (iii) Décrire les éléments de  $\mathcal{E}$  lorsque  $d = 1$  (distinguer les cas  $a_1 \neq 1$  et  $a_1 = 1$ ).
- (iv) On suppose maintenant  $d = 2$ . Donner une base de la direction  $\vec{\mathcal{E}}$  de  $\mathcal{E}$ . Donner un repère affine de  $\mathcal{E}$  dans le cas où  $a_1 + a_2 \neq 1$ .

### Exercice 4 (EDO et espaces affines)

Dans ce qui suit on s'intéresse aux structures portées par les espaces de solutions des équations différentielles dans  $C^\infty(\mathbb{R})$  :

$$y' - y = 4 \quad (G)$$

$$y' - y = 0 \quad (H)$$

- a) Montrer que l'espace des solutions  $\mathcal{S}_H$  de  $(H)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dont on déterminera la dimension.
- b) L'espace des solutions  $\mathcal{S}_G$  de  $(G)$  est-il un sous-espace vectoriel de  $C^\infty(\mathbb{R})$  ?
- c) Déterminer une solution particulière de  $(G)$  que l'on notera  $C$ .
- d) Montrer que toute solution de  $(G)$  s'écrit de manière unique sous la forme  $f + C$  où  $f$  est une solution de  $(H)$ .
- e)\* En déduire que les solutions  $\mathcal{S}_G$  de  $(G)$  sont en bijection avec les solutions  $\mathcal{S}_H$  de  $(H)$ . Cette bijection est-elle unique ?

f)\* Montrer que l'application

$$Act : \begin{cases} \mathcal{S}_H \times \mathcal{S}_G \rightarrow \mathcal{S}_G \\ (f, C) \mapsto f + C \end{cases}$$

est bien définie et qu'elle vérifie :

$$\mathbf{A1} : Act(0, C) = C ;$$

$$\mathbf{A2} : Act(f, Act(g, C)) = Act(f + g, C).$$

### Exercice 5 (Changement de repères)

L'espace  $\mathbb{R}^3$  est muni de son repère cartésien canonique  $\mathcal{R} = (O, I, J, K)$ . On considère le nouveau repère  $\mathcal{R}' = (O' = (0, 0, 1), I' = (0, 0, 0), J' = (1, 0, 2), K' = (0, 1, 1))$ .

- a) Soit un point de coordonnées  $X = (x, y, z)$  dans le repère  $\mathcal{R}$ . Donner ses coordonnées cartésiennes  $X' = (x', y', z')$  dans le repère  $\mathcal{R}'$  en fonction de  $X = (x, y, z)$ .
- b) Donner la formule de changement de repère de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

où  $M$  est une matrice  $3 \times 3$ . Puis écrire sous la même forme la formule de changement de repère inverse, de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$ .

- c) On se donne  $A = (0, 0, 3)$ ,  $B = (1, 0, 4)$ ,  $C = (1, 1, 1)$ , trois points dont les coordonnées cartésiennes sont exprimées dans  $\mathcal{R}$ . Donner une équation du plan  $\langle A, B, C \rangle$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , puis dans le repère  $\mathcal{R}'$ .
- d) De la question b) on déduit qu'un changement de repères  $P_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}}$  s'écrit sous la forme  $X' = P_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}}(X) = M_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}}X + V_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}}$ . Soit un troisième repère  $\mathcal{R}''$ , quelle formule relie les couples  $(M_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}}, V_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}})$ ,  $(M_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}'}, V_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}'})$  et  $(M_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}}, V_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}})$  ?
- e)\* On note  $GA$  l'ensemble des couples  $(M, V)$  où  $M \in GL_3(\mathbb{R})$  et  $V \in \mathbb{R}^3$ . On munit  $GA$  d'une opération binaire :

$$(M', V') \circ (M, V) = (M'M, M'V + V')$$

Montrer que cette opération munit  $GA$  d'une loi de groupe.

- f)\* On note  $\mathfrak{Rep}$  l'ensemble des repères de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que l'application :

$$Act : \begin{cases} GA \times \mathfrak{Rep} \rightarrow \mathfrak{Rep} \\ ((A, V), (\Omega, P, Q, R)) \mapsto (A\Omega + V, AP + V, AQ + V, AR + V) \end{cases}$$

est bien définie et qu'elle vérifie :

$$\mathbf{A1} : Act((Id, 0), (\Omega, P, Q, R)) = (\Omega, P, Q, R) ;$$

**A2 :**  $Act((A', V'), Act((A, V), (\Omega, P, Q, R))) = Act((A', V') \circ (A, V), (\Omega, P, Q, R)).$

On dit que le groupe  $GA$  agit sur l'ensemble  $\mathfrak{Rep}$ .

- g)\* Dédurre de la question d) que pour deux repères  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  il existe un unique  $(A, V)$  tel que  $Act((A, V), \mathcal{R}) = \mathcal{R}'$ .
- h)\* En déduire que  $GA$  est en bijection avec l'ensemble  $\mathfrak{Rep}$ .  
 Cette bijection est-elle unique ?

### Exercice 6 (Exemples de sous-espaces affines)

- a) Soit  $X$  un espace topologique, on considère l'espace  $C(X, \mathbb{R})$  des fonctions réelles continues sur  $X$ . Soit  $a \in X$  montrer que l'ensemble

$$\mathcal{F}_{a,1} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f(a) = 1\}$$

est un sous-espace affine de  $C(X, \mathbb{R})$ .

- b) Montrer que l'ensemble des matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1-a & b-2a \\ a+b & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace affine de  $M_2(\mathbb{R})$ . En donner un repère affine.

- c) Montrer que le cercle  $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$  n'est pas un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^2$ .
- d) Montrer que  $\mathcal{H} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x+1) = f(x) + 1\}$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .  
 Déterminer un point de  $\mathcal{H}$  et sa direction.

### Exercice 7\* (Des triangles sur un corps fini)

On se place dans l'espace affine  $\mathcal{E} = (\mathbb{F}_3)^2$  sur  $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

- a) Combien contient-il de points et de droites ? Faire des dessins !
- b) Etant donnés deux points  $M$  et  $N$  de  $\mathcal{E}$ , le milieu de  $(M, N)$  est le point  $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}N$ .  
 On considère les points  $A = (\bar{0}, \bar{0})$ ,  $B = (\bar{2}, \bar{0})$ ,  $C = (\bar{0}, \bar{2})$ . Déterminer les médianes du triangle  $ABC$ . Sont-elles concourantes ?

## Applications affines

### Exercice 8 (Projections et symétries)

On se place dans l'espace affine (euclidien)  $\mathbb{R}^3$ . Le but de cet exercice est de donner des expressions analytiques pour des projections et des symétries. On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $\{x + y + z = 1\}$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équations  $\{z = 4, y = 0\}$ .

- a) Donner l'expression analytique de la projection  $p$  sur le plan  $\mathcal{P}$  suivant la direction  $\mathcal{D}$ .
- b) Donner l'expression analytique de la symétrie  $s$  par rapport à  $\mathcal{P}$  suivant la direction  $\mathcal{D}$ .
- c) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale  $\pi$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .
- d) Calculer la distance de  $A = (1, 0, 1)$  au plan  $\mathcal{P}$ .
- e) Donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale  $\sigma$  par rapport à  $\mathcal{P}$ .

### Exercice 9 (Composition d'applications affines)

On se place dans un plan affine réel.

- a) Soient  $ABC$  un triangle,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  les milieux respectifs de  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$ ,  $s_{A'}$ ,  $s_{B'}$ ,  $s_{C'}$  les symétries centrales par rapport à ces points. Déterminer la nature géométrique des transformations  $f = s_{B'} \circ s_{A'}$  et  $g = s_{C'} \circ s_{B'} \circ s_{C'}$ .
- b) Soient  $f$  et  $f'$  deux homothéties de même rapport quelle est la nature de la transformation  $f \circ f'^{-1}$  ?

### Exercice 10 (Polygone des milieux)

Dans cet exercice on se place dans  $\mathbb{R}^2$  :

- a) Soit  $A'B'C'$  un triangle. Montrer qu'il existe un triangle  $ABC$ , et un seul, tel que  $A'$  soit le milieu de  $BC$ ,  $B'$  le milieu de  $CA$  et  $C'$  le milieu de  $AB$ . Indiquer une construction géométrique de ce triangle.
- b) Soit  $A'B'C'D'$  un quadrilatère. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un quadrilatère  $ABCD$  tel que  $A'$  soit le milieu de  $AB$ ,  $B'$  le milieu de  $BC$ ,  $C'$  le milieu de  $CD$  et  $D'$  le milieu de  $DA$ . Ce quadrilatère, s'il existe, est-il unique ?
- c)\* Etant donnés  $n$  points  $B_1, \dots, B_n$ , peut-on toujours trouver  $n$  points  $A_1, \dots, A_n$  tels que  $B_i$  soit, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , le milieu de  $A_i A_{i+1}$  (avec la convention  $A_{n+1} = A_1$ ) ? Donner une construction géométrique des points  $A_i$  à partir des points  $B_i$  lorsque la solution existe.

*Indication : Comme le montrent les deux premières questions, la solution dépend de la parité de  $n$ . On pourra considérer la composée des symétries centrales de centres  $B_1, \dots, B_n$ .*

### Exercice 11 (Homothéties)

On se place dans un plan affine réel. On rappelle que l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\lambda$  est l'application  $h$  qui à un point  $M$  associe le point  $h(M)$  vérifiant :

$$\overrightarrow{Ah(M)} = \lambda \overrightarrow{AM}$$

- a) Que dire des cas particuliers  $\lambda = 0, 1, -1$  ? A quelle condition  $h$  est-elle une bijection ? Si elle est bijective quelle est son inverse ?
- b) On se place dans un repère affine  $\mathcal{R} = (O, I, J)$ . Donner l'expression analytique de l'homothétie  $h$  de centre  $A = (u, v)_{\mathcal{R}}$  et de rapport  $\lambda$ .
- c) Calculer le conjugué d'une homothétie par une transformation affine.
- d) Calculer la composée de deux homothéties.
- e) Les homothéties de rapport non nul forment-elles un groupe ?
- f) Montrer que les homothéties de même centre  $A$  et de rapport non nul forment un groupe.
- g) Montrer que les homothéties et les translations forment un sous-groupe  $HT_2(\mathbb{R})$  du groupe affine, puis que ce sous-groupe est engendré par les homothéties. Le groupe  $HT_2(\mathbb{R})$  agit-il transitivement sur le plan affine ?
- h) On rappelle que le centre d'un groupe  $G$  est l'ensemble des éléments  $g \in G$  tels que  $gh = hg, \forall h \in G$ . Montrer que le centre de  $G$  est un sous-groupe de  $G$ .
- i) Quel est le centre du groupe linéaire  $GL_2(\mathbb{R})$  ?
- j) Quel est le centre du groupe affine  $GA_2(\mathbb{R})$  ?
- k) A quelles conditions une homothétie et une translation commutent-elles ?

### Compléments

### Exercice 12 (Quelques théorèmes classiques)

On se place dans un plan affine réel.

- a) Montrer le **théorème de Pappus** (d'après Pappus d'Alexandrie, IV<sup>e</sup> siècle après J.-C.) :  
« Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites et des points  $A, B, C \in \mathcal{D}$  et  $A', B', C' \in \mathcal{D}'$  tels que  $(AB') \parallel (A'B)$  et  $(BC') \parallel (B'C)$ , alors  $(AC') \parallel (A'C)$ . »
- b) Montrer le **théorème de Ceva** (d'après Giovanni Ceva, 1678, même si ce théorème était connu à la fin du XI<sup>e</sup> siècle de Yusuf Al-Mu'taman ibn Hūd, géomètre et roi de Saragosse.)  
« Soit  $ABC$  un triangle, soient  $D, E$  et  $F$  trois points distincts des sommets et appartenant respectivement aux segments  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$ . Les droites  $(AD)$ ,  $(BE)$  et  $(CF)$  sont concourantes si et seulement si  $\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB} = -1$ . »

c) Montrer le **théorème de Ménélaüs** (d'après Ménélaüs d'Alexandrie, I<sup>er</sup> et II<sup>e</sup> siècle après J.-C.)

« Si  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont trois points des côtés  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$  d'un triangle  $ABC$  (et distincts des sommets), alors  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont alignés si et seulement si  $\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB} = 1$ . »

d) Montrer le **théorème de Desargues** (d'après Girard Desargues, alias S.G.D.L., XVII<sup>e</sup> siècle à Lyon) :

« Soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles sans sommets communs et tels que  $(AB) \parallel (A'B')$ ;  $(AC) \parallel (A'C')$ ;  $(BC) \parallel (B'C')$ , alors les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont parallèles ou concourantes. »

### Exercice 13 (Ensembles convexes)

- a) Soient  $C$  et  $C'$  deux convexes non vides d'un espace réel affine  $E$ . Montrer que l'ensemble  $\Gamma$  des milieux des segments  $MM'$ , où  $M$  parcourt  $C$  et  $M'$  parcourt  $C'$  est un convexe.
- b) Montrer que les images directes et inverses des convexes par les applications affines sont également convexes.

### Exercice 14 (Demi-espaces)

Soit  $E$  un espace affine réel de dimension  $n$  et  $H$  un hyperplan affine de  $E$ .

- a) Montrer que la relation  $\sim$  définie sur  $E \setminus H$  par :

$$M \sim N \iff [MN] \cap H = \emptyset$$

est une relation d'équivalence qui sépare  $E \setminus H$  en exactement deux classes, appelés *demi-espaces (ouverts)*.

- b) Montrer que les demi-espaces sont convexes.

### Exercice 15 (Théorème fondamental de la géométrie affine)

On fixe un espace affine réel  $\mathcal{E}$  de dimension au moins 2, on se donne une bijection  $\phi$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ . Le but de cet exercice est de montrer que  $\phi$  est affine si et seulement si  $\phi$  préserve les triplets de points alignés.

Dans tout ce qui suit on suppose que  $\phi$  envoie 3 points alignés sur 3 points alignés. On note par ' les images par  $\phi$  :  $O' = \phi(O)$ ,  $A' = \phi(A)$ ,  $B' = \phi(B)$ , ...

- a) Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ , montrer que  $\phi^{-1}(\mathcal{F})$  est affine.
- b) Montrer que  $\phi$  envoie un repère affine sur un repère affine.
- c) En déduire que  $\phi$  envoie  $k$  points affinement indépendants sur  $k$  points affinement indépendants.

- d) En déduire que  $\phi$  préserve droites et plans.
- e) En déduire que  $\phi$  envoie les droites parallèles sur des droites parallèles.
- f) On fixe  $O$  un point de  $\mathcal{E}$ . Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{E}$  et soit  $C$  tel que  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ , de plus on suppose que  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés. En utilisant la question e) montrer que :

$$\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$$

- g) Soient  $\mathcal{D}$  une droite passant par  $O$  et  $\mathcal{D}'$  son image par  $\phi$ . On fixe  $A \neq O$  un point de  $\mathcal{D}$ . Pour tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on considère le point  $M$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA}$ . Vérifier que son image  $M' = \phi(M)$  satisfait  $\overrightarrow{O'M'} = \mu \overrightarrow{O'A'}$  pour un unique scalaire  $\mu$ , indépendant du choix de  $A$ .

$$\text{On a ainsi défini une fonction } \sigma_{\mathcal{D}} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto \mu \end{cases}.$$

- h) Soient  $M$  et  $N$  tels que  $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{ON} = \lambda_2 \overrightarrow{OA}$ . En utilisant un point  $B$  hors de  $\mathcal{D}$  et des droites parallèles, construire les points  $P$  et  $Q$  de  $\mathcal{D}$  tels que

$$\overrightarrow{OP} = (\lambda_1 + \lambda_2) \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = (\lambda_1 \lambda_2) \overrightarrow{OA}.$$

- i) Montrer que  $\sigma_{\mathcal{D}}$  vérifie  $\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1 + \lambda_2) = \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1) + \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_2)$  et que  $\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1) \cdot \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_2)$ . En déduire que  $\sigma_{\mathcal{D}}$  est un automorphisme du corps  $\mathbb{R}$ .
- j) Soit  $\sigma$  un automorphisme du corps  $\mathbb{R}$ . Vérifier que  $\sigma(1) = 1$ , que  $\sigma(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$ , que  $\sigma$  est une application croissante, puis en déduire que  $\sigma = Id$ .
- k) Montrer que  $\phi$  est affine.