M53 - Partie 2

septembre 2015

Rappels : définition espace vectoriel euclidien

Un espace vectoriel réel $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension finie est dit euclidien s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

- symétrique : $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$,
- définie : $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$,
- positive : $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$.

La structure euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Tout espace euclidien est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ (avec sa structure standard),via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels : norme euclidienne

1. La norme euclidienne de cet espace est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} \mid \vec{v} \rangle}$.
2. Et une formule inverse *(de polarisation)* est :

$$\langle \vec{v} \mid \vec{w} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 \right).$$

3. De plus la norme et la produit scalaire sont reliés par *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\left| \langle \vec{v} \mid \vec{w} \rangle \right| \leq \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \, .$$

4. On dit que l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est $\alpha \in [0, \pi]$ si

$$\langle \vec{v} \mid \vec{w} \rangle = \cos(\alpha) \, \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \, .$$

Rappels : notations

1. $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0.$
2. Soit $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$, alors $\vec{\mathcal{F}}^{\perp} = \left\{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \middle| \, \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \vec{v} \perp \vec{w} \right\}$.
3. Soit $\vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2 \subset \vec{\mathcal{E}}$, alors $\vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1 \subset \vec{\mathcal{F}}_2^{\perp}$.
4. $\vec{\mathcal{E}}$ est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $\vec{\mathcal{F}}_1$ et $\vec{\mathcal{F}}_2$, noté $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2$, si $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \oplus \vec{\mathcal{F}}_2$ et $\vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2$.
   Nous avons : $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1^{\perp} = \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_2^{\perp} = \vec{\mathcal{F}}_1$.

Définition d'un espace affine euclidien

Définition

Un ensemble $\mathcal{E}$ est métrique s'il est muni d'un application distance

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(M, N) \mapsto d(M, N)$$

- symétrique : $d(M, N) = d(N, M)$,
- séparée : $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$,
- inégalité triangulaire : $d(M, N) + d(N, P) \geq d(M, P)$.

Définition

Un espace affine $\mathcal{E}$ est dit euclidien si son espace vectoriel de directions $\vec{\mathcal{E}}$ est muni d'une structure euclidienne.
Et dans ce cas on pose la distance entre deux points

$$d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.$$

Distance entre parties

Définition

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$. On pose

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf_{(M,N)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} d(M,N).$$

1. Si $\mathcal{A}$ est compacte et $\mathcal{B}$ est fermée, alors il existe un couple de points $(M,N) \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ tel que $d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = d(M,N)$. Et pour $\mathcal{A}$ seulement fermée ?
2. La propriété précédente reste vraie pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des sous-espaces affines. De plus $\overrightarrow{MN} \perp (\vec{A} + \vec{B})$.
3. Deux hyperplans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ sont parallèles ssi $d(\mathcal{F},\mathcal{G}) > 0$. Et pour s.e.a. quelconques ?
4. Deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ sont parallèles ssi $\forall (M,N) \in \mathcal{F}\times\mathcal{G}, d(M,\mathcal{G}) = d(\mathcal{F},\mathcal{G}) = d(\mathcal{F},N)$.

Rappels : isométrie vectorielle

Définition-Proposition

L'application linéaire $\overrightarrow{\phi}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si elle satisfait une des deux conditions équivalentes

1. $\forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$,
$$\left\| \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) \right\| = \| \overrightarrow{v} \| .$$
2. $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$,
$$\langle \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{v}) | \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{w} \rangle .$$

Si une isométrie $\overrightarrow{\phi}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ préserve un s.e.v. $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ (c.-à-d. $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}) \subset \overrightarrow{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}$), alors elle préserve aussi son orthogonal, $\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$. En particulier, si $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par $\overrightarrow{\phi}$: $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \overset{\perp}{\oplus} \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$.

Rappels : Groupe des isométries vectorielles

- Le groupe des isométries de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est noté $O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.
  Et on note $O_n = O(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, alors $\det(\overrightarrow{\phi}) = \pm 1$.
  - On note $O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^+) l'ensemble des isométries à déterminant 1, dites directes, de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (resp. $\mathbb{R}^n$).
  - De même l'ensemble des isométries à déterminant -1, dites indirectes, est noté $O^-(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^-).

($O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ est un sous-groupe du groupe compact $O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, mais $O^-(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ n'en est pas un.)

Dimensions 1 et 2

- $O_1 = \{1, -1\}$.
- $O_2 = O_2^+ \sqcup O_2^-$, où
  - $O_2^+ = \left\{ \vec{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \ \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \right\}$ est le sous-groupe des rotations,
  - $O_2^- = \left\{ \vec{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \ \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \right\}$ est l'ensemble des réflexions. *($\vec{S}_\alpha$ est la symétrie par rapport à la droite d'angle $\alpha/2$.)*

Les règles de composition sont :

- $\vec{R}_\alpha \circ \vec{R}_\beta = \vec{R}_{\alpha+\beta}$,
- $\vec{S}_\alpha \circ \vec{S}_\beta = \vec{R}_{\alpha-\beta}$,
- $\vec{S}_\alpha \circ \vec{R}_\gamma = \vec{S}_{\alpha-\gamma}$ et $\vec{R}_\gamma \circ \vec{S}_\beta = \vec{S}_{\gamma+\beta}$.

Remarque : Toute isométrie de $\mathbb{R}^2$ est le produit d'au plus 2 réflexions.

Les isométries de $\mathbb{C}$ (dimension 2)

En identifiant l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$, le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z|w\rangle = \frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2}$$

Toute élément de $O(\mathbb{C})$ est de la forme

- $\rho_a : z \mapsto az$ avec $|a| = 1$, et dans ce cas c'est une rotation d'angle $\arg(a)$, ou
- $\sigma_a : z \mapsto a\bar{z}$ avec $|a| = 1$, et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par $\sqrt{a}$.

L'identification entre O_2 et $O(\mathbb{C})$ est donnée par :

- $\rho_{e^{i\theta}} = \overrightarrow{R}_\theta$,
- $\sigma_{e^{i\theta}} = \overrightarrow{S}_\theta$.

Dimension 3

Soit $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

- $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\phi}$ est sous la forme

$$\overrightarrow{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Dans ce cas $\overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{\rho}_{\vec{w},\alpha}$ est la rotation de α autour de l'axe orienté engendré par $\vec{w}$.

- $\overrightarrow{\phi} \in O^-(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\phi}$ est sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Dans ce cas $\overrightarrow{\phi}$ est la composée de la rotation $\overrightarrow{\rho}_{\vec{w},\alpha}$ avec la symétrie $\overrightarrow{\sigma}_{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$ par rapport au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on dit que $\overrightarrow{\phi}$ est une anti-rotation.

Forme standard des isométries

Proposition

Soit $\overrightarrow{\phi} \in O^+(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, *alors il existe une b.o.n. dans laquelle la matrice de* $\overrightarrow{\phi}$ *est sous la forme* ($\dim \overrightarrow{\mathcal{E}} = 2k + p$)

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{matrix}} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \cos(\alpha_k) & -\sin(\alpha_k) \\ \sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) \end{matrix}} & & \\ 0 & & & \boxed{1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} p \end{matrix}$$

Et pour $\overrightarrow{\phi} \in O^-(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, *à la place du dernier* 1 *il y a un* -1 *(donc* $p > 0$*).*

Décomposition des isométries en réflexions

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une réflexion.
(Une réflexion est une isométrie indirecte.)

Proposition

Soient $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension $\dim \vec{\mathcal{E}} = n$, et $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$.
Alors $\vec{\phi}$ est le produit de $k(\leq n)$ réflexions : $\vec{\phi} = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$.
Si k est pair $\vec{\phi} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$, si k est impair $\vec{\phi} \in O^-(\vec{\mathcal{E}})$.

Définition

Définition-Proposition

On dit qu'une application affine $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ est une isométrie si une des conditions équivalentes est satisfaite :

- $\forall A, B \in \mathcal{E},\ d(\phi(A), \phi(B)) = d(A, B)$;
- $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

On note $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$.
Ainsi que $\mathrm{Iso}^{\pm}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries dont la partie linéaire est dans $O^{\pm}(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

Premières propriétés des isométries

- $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$.
- $\mathrm{Iso}^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$.
- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ est dite symétrie (affine) orthogonale (resp. réflexion) s'il existe $\Omega \in \mathcal{E}$ telle que ϕ est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans $\mathcal{E}_\Omega$. Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Toute translation est le produit de deux réflexions.

Structure des isométries affines

Lemme

Soit $\overrightarrow{\phi} \in O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$, *alors* $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{\phi} - \mathrm{Id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\overrightarrow{\phi} - \mathrm{Id})$.

Proposition

Soit $\phi \in \mathrm{Iso}(\mathcal{E})$, *alors*

- *soit* ϕ *possède un point fixe* Ω, *et dans ce cas* $\phi \in O(\mathcal{E}_\Omega)$,
- *soit il existe un unique* $\vec{v}(\neq 0)$, *vecteur fixe de* $\overrightarrow{\phi}$, *tel que* $T_{\vec{v}} \circ \phi = \phi \circ T_{\vec{v}}$ *possède (au moins) un point fixe.*

Dimensions 1 et 2

- $\phi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b$.
  (ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \sqcup \mathrm{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$.
  - $\phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ ssi
    - $\phi = R_{\Omega,\alpha}$ est la rotation de centre Ω d'angle α, ou
    - $\phi = T_{\vec{v}}$ est une translation.
  - $\phi \in \mathrm{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$ ssi
    - $\phi = S_{\mathcal{D}}$ est la symétrie par rapport à une droite affine $\mathcal{D}$, ou
    - $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{D}}$ avec $\vec{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie $\vec{\phi}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.

  (ϕ est la composée d'au plus 3 réflexions.)

Les isométrie affines de $\mathbb{C}$

Rappel : Les application affines de l'espace euclidien $\mathbb{C}$ sont de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma$.

$\mathrm{Iso}(\mathbb{C}) = \mathrm{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \mathrm{Iso}^-(\mathbb{C})$

- $\phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{C})$ ssi $\phi(z) = az + b$ avec $|a| = 1$.
  - Si $a \neq 1$, alors ϕ est la rotation de centre $\frac{b}{1-a}$.
  - Si $a = 1$, alors ϕ est la translation de b.
- $\phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{C})$ ssi $\phi(z) = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$.
  - Si $\bar{a}b^2 \in \mathbb{R}_-$, alors ϕ est une symétrie d'axe $\sqrt{a}\mathbb{R} + b/2$.
  - Sinon ϕ est une symétrie glissée.

Dimension 3

- $\mathsf{Iso}(\mathbb{R}^3) = \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \sqcup \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$.
  - $\phi \in \mathsf{Iso}^+(\mathbb{R}^3)$ ssi
    - $\phi = R_{\mathcal{D},\alpha}$ est la rotation d'angle α autour de l'axe $\mathcal{D}$, ou
    - $\phi = T_{\vec{v}}$ est une translation, ou
    - $\phi = T_{\vec{v}} \circ R_{\mathcal{D},\alpha}$, avec $\vec{\mathcal{D}} = \langle \vec{v} \rangle$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on dit que ϕ est un vissage d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle α.
  - $\phi \in \mathsf{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$ ssi
    - $\phi = S_{\mathcal{H}}$ est la symétrie par rapport au plan affine $\mathcal{H}$, ou
    - $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\vec{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie $\vec{\phi}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.
    - $\phi = R_{\mathcal{D},\alpha} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une anti-rotation.

(ϕ est la composée d'au plus 4 réflexions.)

Décomposition des isométries en réflexions

Rappel : Une réflexion est une isométrie indirecte.

Proposition

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n, et $\phi \in \mathrm{Iso}(\mathcal{E})$.
Alors ϕ est le produit de $k(\leq n+1)$ réflexions :

$$\phi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k.$$

Si k est pair $\phi \in \mathrm{Iso}^+(\mathcal{E})$, et si k est impair $\phi \in \mathrm{Iso}^-(\mathcal{E})$.