

## TD3 : NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

### Géométrie élémentaire

#### Exercice 1 (Conditions géométriques)

- Étant donnés deux points  $A$  et  $B$  du plan complexe d'affixes  $a$  et  $b$ , donner une condition sur  $a\bar{b}$  pour que la droite  $AB$  passe par  $O$  d'affixe 0. Préciser quand  $O$  est entre  $A$  et  $B$ , et quand il ne l'est pas.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur les affixes  $a, b, c$  de trois points  $A, B, C$  du plan complexe pour que le triangle  $ABC$  soit équilatéral.

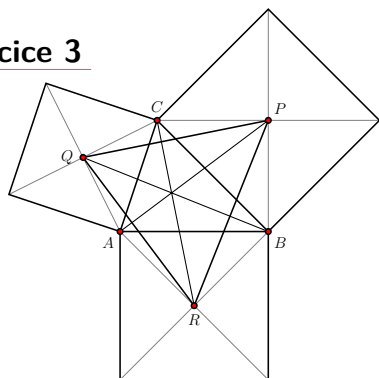
#### Exercice 2 (Bac C – 1991)

Le plan complexe  $P$  est identifié avec  $\mathbb{C}$ . Soit  $f$  l'application de  $P$  vers  $P$  définie par

$$f(z) = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

- Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de  $f$ .
- Montrer que le triangle  $\Omega M f(M)$  est rectangle, en supposant que  $\Omega$  est un point fixe de  $f$ .

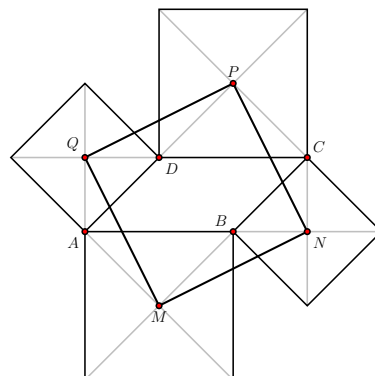
#### Exercice 3



À l'extérieur d'un triangle  $ABC$ , on construit trois carrés de bases les côtés et de centres  $P, Q$  et  $R$ . Montrer que les segments  $AP$  et  $QR$  (resp.  $BQ$  et  $RP, CR$  et  $PQ$ ) sont orthogonaux et de même longueur. En déduire que les droites  $AP, BQ$  et  $CR$  sont concourantes.

#### Exercice 4

On construit à l'extérieur d'un parallélogramme  $ABCD$  quatre carrés de bases les côtés et de centres  $M, N, P$  et  $Q$ . Montrer que  $MNPQ$  est un carré.



## Équations

### Exercice 5 (Polygone des milieux)

Reprendre l'exercice 9.c) de la feuille de td n°1 en traduisant le problème en un système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues dans  $\mathbb{C}$ . Discuter le rang de ce système selon la parité de  $n$ .

### Exercice 6 (Équation d'une droite)

On se place dans  $\mathbb{C}$  que l'on considère comme un plan affine réel. On se propose de retrouver la formule d'une droite affine

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0, \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{C} \text{ et } \gamma \in \mathbb{R}. \quad (\dagger)$$

en donnant une équation complexe de la droite  $\mathcal{D}$  passant par deux points  $A$  et  $B$ .

- a) Montrer que si  $M$  est aligné avec  $A$  et  $B$  alors  $(z - a)(\bar{z} - \bar{b})$  est réel, où  $z$  est l'affixe de  $M$ ,  $a$  celle de  $A$  et  $b$  celle de  $B$ .
- b) Montrer que  $(z - a)(\bar{z} - \bar{b})$  est réel est équivalent à  $z$  satisfait

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{b}) = (\bar{z} - \bar{a})(z - b),$$

puis en posant  $\beta = i(a - b)$  en déduire que c'est équivalent à  $z$  satisfait  $(\dagger)$  pour un certain  $\gamma \in \mathbb{R}$  à préciser.

### Exercice 7 (Équation d'un cercle)

Montrer que tout cercle du plan complexe est défini par une équation de la forme

$$z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + c = 0,$$

où  $a$  est un nombre complexe et  $c$  un réel vérifiant  $c \leq |a|^2$ . Montrer que réciproquement toute équation de ce type est celle d'un cercle.

### Exercice 8 (Encore des équations)

- a) Discuter selon les valeurs de  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{C}$  quel est le sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  défini par l'équation

$$\alpha.z\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + \gamma = 0.$$

- b) Soit  $\lambda$  un nombre réel positif, décrire géométriquement l'ensemble

$$E_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \lambda|z - b|\}.$$

- c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes tels que  $|z - 1| = |z - iz| = |z - i|$ .

## Géométrie projective sans le dire

### Exercice 9 (points cocycliques et le théorème de Ptolémée)

On se donne 4 points distincts  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes  $a, b, c$  et  $d$  respectivement.

a) Montrer que l'on a toujours

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$$

avec égalité si et seulement si il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que  $(b-a)(d-c) = \lambda(d-a)(c-b)$ .

b) Dédurre de la question précédente que le cas d'égalité est équivalent à

$$\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) - \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) = \pm\pi.$$

c) Montrer le théorème de Ptolémée :

*Un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle si et seulement si le produit des longueurs de ses diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.*

### Exercice 10 (Birapports)

Soit 4 points du plan distincts deux à deux avec affixes  $a, b, c, d$ . On définit leur birapport comme étant la quantité :

$$[a, b, c, d] = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{C}.$$

- a) Montrer que si 4 points sont alignés alors leur birapport est un nombre réel. Dans quel cas ce birapport est positif?
- b) Montrer que si 4 points sont cocycliques alors leur birapport est un nombre réel. Dans quel cas ce birapport est positif?
- c) Montrer que le birapport de 4 points est réel si et seulement si les 4 points sont alignés ou cocycliques.
- d) Prouver que si 4 points d'affixes non nuls sont alignés alors leurs images par  $1/\bar{z}$  sont alignées ou cocycliques.
- e) Montrer que les homothéties non nulles, les rotations et les translations préservent les birapports, et que les symétries les transforment en leurs conjugués.
- f) Montrer que les points d'affixes  $-2 + 6i, 1 + 7i, 4 + 6i, 6 + 2i$  sont cocycliques.

### Exercice 11 (Inversions)

Une inversion  $i(\Omega, r)$  de centre  $\Omega$  et de rapport  $r \in \mathbb{R}_+^*$  est une application du plan  $P$  privé de  $\Omega$  dans  $P$  qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que

- $M'$  soit sur la droite  $\Omega M$ ,
- $\overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M'} = r^2$ .

- a) Déterminer l'image de  $i(\Omega, r)$ .
- b) Montrer que l'inversion est une involution.
- c) En identifiant le plan  $P$  avec  $\mathbb{C}$ , donner l'expression analytique de l'inversion  $i(0, 1)$ , puis, plus généralement, de  $i(\omega, r)$  avec  $\omega \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ .
- d) Montrer que chaque point du cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  est invariant par l'inversion.
- e) Montrer qu'une inversion transforme un birapport en son conjugué.
- f) Montrer que l'inversion préserve les droites qui passent par  $\Omega$ .
- g) Montrer qu'elle envoie une droite qui ne passe pas par  $\Omega$  sur un cercle qui passe par  $\Omega$ .
- h) Montrer aussi qu'elle envoie tout cercle qui ne passe pas par  $\Omega$  sur un cercle qui ne passe pas par  $\Omega$ .

### Exercice 12 (Homographies)

Une homographie est une application

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec  $a, b, c, d$  réels tels que  $ad - bc \neq 0$ .

- a) Montrer que toute homographie est la composée de translations, d'homothéties et au plus d'une inversion et d'une réflexion.
- b) Montrer que toute homographie envoie droites ou cercles sur droites ou cercles.
- c) Montrer que les homographies forment un groupe.

### Exercice 13

Deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont tangents intérieurement en  $O$ . On considère une famille de cercles deux à deux tangents entre eux et tangents à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . Montrer que les points de contact de ces cercles entre eux sont situés sur un même cercle tangent en  $O$  aux deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .

