Arthur de Souza Molina
Resolução de Alguns Cálculos:
Mukhanov capitulo 6: Instabilidade Gravitacional na teoria Newtoniana

6.1 Equações básicas

Em grandes escalas, a matéria pode ser considerada um fluido perfeito, e sua distribuição de energia pode ser caracterizada por $\varepsilon(\mathbf{x},t)$, a entropia por unidade de massa $S(\mathbf{x},t)$, e o vetor de velocidade $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$.

Se considerarmos um volume fixo não móvel, a sua variação de massa pode ser descrita como

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\Delta V} \frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} \tag{1}$$

A variação de Massa também pode ser descrita pelo fluxo de matéria pela superfície ao redor do volume fixo

$$\frac{dM}{dt} = -\oint \varepsilon \mathbf{V} d\sigma = -\int_{\Delta V} \nabla\left(\varepsilon\, \mathbf{V}\right) dV \tag{2}$$

Essas relações somente são consistentes se

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla\left(\varepsilon\, \mathbf{V}\right) = 0 \tag{3}$$

A aceleração gravitacional $\mathbf{g}$ em um pequeno elemento com massa é determinada pela força gravitacional

$$\mathbf{F}_{gr} = -\Delta M \cdot \nabla\phi \tag{4}$$

onde o potencial gravitacional é dado por ϕ e pela pressão p

$$\mathbf{F}_{pr} = -\oint p \cdot\ d\sigma = -\int_{\Delta V} \nabla p\ d\sigma \approx -\nabla p\ \Delta V \tag{5}$$

com

$$\mathbf{g} \equiv \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x}(t),t)}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right)_x + \frac{dx^i(t)}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} \tag{6}$$

pela lei da força de Newton (Segunda Lei de Newton)

$$\Delta M \cdot \mathbf{g} = \mathbf{F}_{gr} + \mathbf{F}_{pr} \tag{7}$$

$$\Delta M \cdot \mathbf{g} - \mathbf{F}_{gr} - \mathbf{F}_{pr} = 0$$

$$\Delta M \cdot \mathbf{g} + \nabla p\ \Delta V + \Delta M \cdot \nabla\phi = 0$$

com $\Delta M \equiv \Delta V \cdot \varepsilon$, e portanto $\Delta V = \dfrac{\Delta M}{\varepsilon}$

$$\Delta M \cdot \mathbf{g} + \nabla p \frac{\Delta M}{\varepsilon} + \Delta M \cdot \nabla\phi = 0$$

$$\mathbf{g} + \frac{\nabla p}{\varepsilon} + \nabla\phi = 0$$

ao substituir a equação (6), torna-se a equação de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\varepsilon} + \nabla\phi = 0 \tag{8}$$

A conservação de entropia negligência a dissipação de energia, logo a entropia para um pequeno elemento de matéria é conservada:

$$\frac{dS(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)S = 0 \tag{9}$$

A equação que determina o potencial gravitacional é conhecida como equação de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\varepsilon \tag{10}$$

Com as equações $(3), (6) \rightarrow (10)$ tomadas em conjunto com a equação de estado

$$p = p(\varepsilon, S) \tag{11}$$

formam um conjunto completo de sete equações que, em princípio, nos permite determinar as sete funções desconhecidas $\varepsilon, \mathbf{V}, S, \phi, p$. As equações hidrodinâmicas não são lineares, e em geral não é fácil encontrar suas soluções. No entanto, para estudar o comportamento de pequenas perturbações em torno de um fundo homogêneo e isotrópico, é apropriado torna-las lineares.

6.2 Teoria Jeans

Vamos primeiro considerar um universo não expansível estático, assumindo o homogêneo, fundo isotrópico com densidade de matéria independente do tempo constante: $\varepsilon(x, t) = const$. Na verdade, a densidade de energia permanece inalterada apenas se a matéria estiver em repouso e a força gravitacional $F \propto \nabla\phi$, que desaparece. Logo, a equação de Poisson não é satisfeita, essa inconsistência pode, em principio, se considerarmos um universo estático, onde a força gravitacional da matéria é compensada pela constante cosmológica apropriada escolhida.

Ao perturbar a distribuição de matéria, temos

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \tag{12}$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0 + \delta\phi(\mathbf{x}, t), S(\mathbf{x}, t) = S_0 + \delta S(\mathbf{x}, t)$$

onde cada variação $\delta\varepsilon \ll \varepsilon_0$, etc..
A pressão é dada por

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon(\mathbf{x}, t), S_0 + \delta S(\mathbf{x}, t)) = p_0 + \delta p(\mathbf{x}, t) \tag{13}$$

δp pode ser escrito em termos da densidade de energia e pertubações de entropia como

$$\delta p = c_s^2 \delta\varepsilon + \sigma\delta S \tag{14}$$

onde $c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)_s$ é o quadrado da velocidade do som e $\sigma \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\varepsilon$. Para a matéria não relativística, a velocidade do som é muito menor que a velocidade da luz.

Substituindo (12) e (14) em (3), (8) - (10) e mantendo apenas os termos que são lineares nas perturbações, obtemos:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla\left(\varepsilon\, \mathbf{V}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon_0 \nabla(\delta \mathbf{v}) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\varepsilon} + \nabla\phi = 0$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\delta\mathbf{v}\cdot\nabla)\delta\mathbf{v} + \frac{\nabla \delta p}{\varepsilon_0} + \nabla\delta\phi = 0$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla(c_s^2\delta\varepsilon + \sigma\delta S)}{\varepsilon_0} + \nabla\delta\phi = 0$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla c_s^2\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{\nabla\sigma\delta S}{\varepsilon_0} + \nabla\delta\phi = 0$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0}\nabla\delta\varepsilon + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\nabla\delta S + \nabla\delta\phi = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \delta S}{\partial t} = 0 \tag{17}$$

$$\Delta\phi = 4\pi G\varepsilon$$

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G\delta\varepsilon \tag{18}$$

A equação (17) possui solução simples, dado que

$$\delta S(\mathbf{x}, t) = \delta S(\mathbf{x}), \tag{19}$$

isso indica que a entropia é invariante em relação ao tempo, mas varia em coordenadas arbitrárias.

Tomando a divergente da equação (16) e escrevendo $\nabla\delta S$ e $\Delta\delta\phi$ em termos de $\delta\varepsilon$, temos

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0}\nabla\delta\varepsilon + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\nabla\delta S + \nabla\delta\phi = 0$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0}\nabla\delta\varepsilon + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\nabla\delta S + \nabla\delta\phi\right) = \nabla\cdot 0$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \nabla \delta \varepsilon \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \nabla \delta S \right) + \nabla \cdot (\nabla \delta \phi) = 0$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \Delta \delta \varepsilon + \frac{\sigma}{\delta \varepsilon_0} \Delta \delta S(\mathbf{x}) + \Delta \delta \phi = 0$$

dado que $\dfrac{\partial \delta \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon_0 \nabla (\delta \mathbf{v}) = 0$ e $\dfrac{\partial \Delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\varepsilon_0 \partial t^2}$ então

$$-\frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\varepsilon_0 \partial t^2} + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \Delta \delta \varepsilon + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Delta \delta S(\mathbf{x}) + \Delta \delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta \varepsilon - \sigma \Delta \delta S(\mathbf{x}) - \varepsilon_0 \Delta \delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta \varepsilon - \sigma \Delta \delta S(\mathbf{x}) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon = 0$$

$$\frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta \varepsilon - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon = \sigma \Delta \delta S(\mathbf{x}) \tag{20}$$

Esta é uma equação linear fechada para $\delta\varepsilon$, onde a perturbação de entropia serve como um determinada fonte.

6.2.1 Pertubações Adiabáticas

Primeiro, podemos supor as pertubações de entropia ausentes, isto é, $\delta S = 0$. O coeficientes em (20) não dependem das coordenadas espaciais, portanto, ao tomar o Transformada de Fourier,

$$\delta \varepsilon (\mathbf{x}, t) = \int \delta \varepsilon_k (t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \tag{21}$$

obtemos um conjunto de equações diferenciais ordinárias independentes para as Coeficientes de Fourier $\delta\varepsilon_k(t)$

$$\frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta \varepsilon - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon = 0$$

$$\frac{\partial^2 \left(\int \delta \varepsilon_k (t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right)}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \left(\int \delta \varepsilon_k (t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G \varepsilon_0 \left(\int \delta \varepsilon_k (t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \delta \varepsilon_k (t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - c_s^2 \Delta \left(\int \delta \varepsilon_k (t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k (t) \left(\int \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = 0$$

dado que $\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, logo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \delta \varepsilon_k (t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - c_s^2 \left(\int \frac{\partial^2 (\delta \varepsilon_k (t))}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G \varepsilon_0 \left(\int \delta \varepsilon_k (t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = 0$$

pela propriedade da transformada de Fourier de derivadas, temos

$$\int \frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial \mathbf{x}^2}\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = (|k|i)^2 \int \delta\varepsilon_k(t)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}}$$

portanto

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int \delta\varepsilon_k(t)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}}\right) - c_s^2\left((ki)^2\int \delta\varepsilon_k(t)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}}\right) - 4\pi G\varepsilon_0\left(\int \delta\varepsilon_k(t)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int \delta\varepsilon_k(t)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}}\right) + |k|^2c_s^2\int \delta\varepsilon_k(t)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}} - 4\pi G\varepsilon_0\left(\int \delta\varepsilon_k(t)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int \delta\varepsilon_k(t)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}}\right) + (|k|^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\left(\int \delta\varepsilon_k(t)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}}\right) = 0$$

$$\left(\int \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta\varepsilon_k(t))\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}}\right) + \int(|k|^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = 0$$

$$\int\left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t)\right)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = 0$$

multiplicando por $e^{ik'\mathbf{x}}$ em ambos os lados, temos

$$e^{ik'\mathbf{x}}\cdot\int\left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t)\right)\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = 0\cdot e^{ik'\mathbf{x}}$$

$$\int\left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t)\right)e^{ik'\mathbf{x}}\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = 0$$

$$\int\cdot\left(\int\left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t)\right)e^{ik'\mathbf{x}}\frac{e^{ik\mathbf{x}}d^3k}{(2\pi)^{2/3}}\right)d\mathbf{x} = \int(0)\,d\mathbf{x}$$

$$\int\left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t)\right)\cdot\left(\int\frac{e^{i(k'\mathbf{x}+k\mathbf{x})}}{(2\pi)^{2/3}}d\mathbf{x}\right)d^3k = 0$$

$$\int\left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t)\right)\cdot\left(\int\frac{e^{i\mathbf{x}(k'+k)}}{(2\pi)^{2/3}}d\mathbf{x}\right)d^3k = 0$$

$$\int\left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t)\right)\delta(k'+k)d^3k = 0$$

$$\int\delta(k'+k)\left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t)\right)d^3k = 0$$

para a integral definida ser equivalente a zero, o integrando deve ser igual a zero, logo

$$\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (k^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t) = 0 \tag{22}$$

sendo $k = |k|$ e uma possível solução seria $\delta\varepsilon_k = \lambda e^{\omega t}$, portanto

$$\frac{\partial^2(\lambda e^{\omega t})}{\partial t^2} + (k^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\lambda e^{\omega t} = 0$$

$$\lambda\omega^2 e^{\omega t} + (k^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\lambda e^{\omega t} = 0$$

$$\omega^2 + k^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0 = 0$$

$$\omega^2 = +4\pi G\varepsilon_0 - k^2c_s^2$$

$$\omega = \pm\sqrt{4\pi G\varepsilon_0 - k^2c_s^2} = \pm\sqrt{(-1)(k^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)} = \pm i\sqrt{k^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0}$$

A equação (22) tem a solução

$$\delta\varepsilon_k(t) \propto e^{(\pm\omega(t)t)} \tag{23}$$

onde $\omega(t) = \sqrt{k^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0}$. O comportamento da pertubação adiabática depende exclusivamente pelo sinal do expoente.

Definindo o comprimento Jeans como

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_S\left(\frac{\pi}{G\varepsilon_0}\right)^{1/2} \tag{24}$$

de modo que $\omega(k_J) = 0$, concluímos que se $\lambda < \lambda_J$, as soluções descrevem as ondas sonoras

$$\delta\varepsilon_k \propto \sin(\omega t + \mathbf{kx} + \alpha) \tag{25}$$

propagando com velocidade de fase

$$c_{fase} = \frac{\omega}{k} = c_s\sqrt{1 - \frac{k_J^2}{k}}. \tag{26}$$

No limite $k \geq k_J$ ou em escalas muito pequenas ($\lambda \leq \lambda_J$) onde a gravidade é insignificante comparado com a pressão, temos $c_{fase} \to c_s$. Em largas escalas a gravidade domina e $\lambda > \lambda_J$, temos

$$\delta\varepsilon_k \propto e^{\pm|\omega|t} \tag{27}$$

Uma dessas soluções descrevem o comportamento exponencialmente rápido e não homogêneo, enquanto outras correspondem o modo decaimento. Onde $k \to 0, |\omega|t \to \dfrac{t}{t_{gr}}$, onde $t_{gr} \equiv (4\pi G\varepsilon_0)^{-1/2}$. Onde t_{gr} é interpretado como o tempo característico de colapso para uma região com uma densidade de energia inicial ε_0. O comprimento Jeans $\lambda_J \sim c_s t_{gr}$ é o "comunicação de som" sobre a qual a pressão consegue reagir as mudanças da densidade de energia devido ao colapso gravitacional.

Encontrando e analisando as equações para $\delta\mathbf{v}_k$ e $\delta\phi_k$ para as ondas sonoras e para as pertubações em grandes escalas para o comprimento Jeans. Problema (6.1)

6.2.2 Pertubações de Vetor

Substituindo $\delta\varepsilon = 0$ e $\delta S = 0$ na equação (20), obtemos uma solução não trivial para o sistema de equações hidrodinâmicas. Já para as equações (15)-(18) reduzimos em

$$\nabla\delta\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = 0 \tag{28}$$

Pela segunda equação, é possível notar que $\delta\mathbf{v}$ é uma função das coordenadas espaciais independente do tempo. E a primeira equação diz respeito a velocidade da pertubação de onda plana, isto é, $\delta\mathbf{v} = \mathbf{w_k}e^{i\mathbf{kx}}$ e que a velocidade é perpendicular ao vetor de onda $\mathbf{k}$, ou seja,

$$\mathbf{w_k} \cdot \mathbf{k} = 0 \tag{29}$$

Essas perturbações vetoriais descrevem movimentos de cisalhamento do meio que não perturbam a densidade de energia. Porque existem duas direções perpendiculares independentes para $\mathbf{k}$, existem dois modos vetoriais independentes para um determinado $\mathbf{k}$.

6.2.2 Pertubações de Entropia

Considerando que $\delta S \neq 0$, dada a transformação de Fourier da equação (20) e dado que

$$\delta S = \int \delta S_k \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}},$$

obtendo uma solução semelhante a equação (22), temos

$$\frac{\partial^2 \delta\varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta\delta\varepsilon - 4\pi G\varepsilon_0 \delta\varepsilon = \sigma\Delta\delta S$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3k - c_s^2 \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \Delta(e^{ik\mathbf{x}}) \frac{d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G\varepsilon_0 \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = \sigma \int \left(\delta S_k \Delta(e^{ik\mathbf{x}}) \frac{}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3k$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3k - c_s^2 \left(\int \frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G\varepsilon_0 \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = \sigma \left(\int \frac{\partial^2(\delta S_k)}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right)$$

pela propriedade da transformada de Fourier de derivadas, temos

$$\int \frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = (|k|i)^2 \int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}}$$

e

$$\int \frac{\partial^2(\delta S_k)}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = (|k|i)^2 \int \delta S_k \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}}$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3k - c_s^2 (|k|i)^2 \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G\varepsilon_0 \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = \sigma (|k|i)^2 \left(\int \delta S_k \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right)$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3k + c_s^2 k^2 \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G\varepsilon_0 \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = -\sigma k^2 \left(\int \delta S_k \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right)$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3k + c_s^2 k^2 \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G\varepsilon_0 \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) + \sigma k^2 \left(\int \delta S_k \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = 0$$

$$\int\left(\left(\frac{\partial^2\delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2}+k^2c_s^2\delta\varepsilon_k(t)-4\pi G\varepsilon_0\delta\varepsilon_k(t)+\sigma k^2\delta S_k\right)\frac{e^{ik\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}}\right)d^3k=0$$

multiplicando por $e^{i\mathbf{k}'x}$

$$e^{i\mathbf{k}'x}\left(\int\left(\left(\frac{\partial^2\delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2}+k^2c_s^2\delta\varepsilon_k(t)-4\pi G\varepsilon_0\delta\varepsilon_k(t)+\sigma k^2\delta S_k\right)\frac{e^{ik\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}}\right)d^3k\right)=0e^{i\mathbf{k}'x}$$

$$\int\left(\left(\frac{\partial^2\delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2}+k^2c_s^2\delta\varepsilon_k(t)-4\pi G\varepsilon_0\delta\varepsilon_k(t)+\sigma k^2\delta S_k\right)e^{i\mathbf{k}'x}\frac{e^{ik\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}}\right)d^3k=0$$

$$\int\left(\left(\frac{\partial^2\delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2}+k^2c_s^2\delta\varepsilon_k(t)-4\pi G\varepsilon_0\delta\varepsilon_k(t)+\sigma k^2\delta S_k\right)\frac{e^{i(\mathbf{k}'x+k\mathbf{x})}}{(2\pi)^{2/3}}\right)d^3k=0$$

$$\int\left(\left(\frac{\partial^2\delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2}+k^2c_s^2\delta\varepsilon_k(t)-4\pi G\varepsilon_0\delta\varepsilon_k(t)+\sigma k^2\delta S_k\right)\frac{e^{ix(\mathbf{k}'+k)}}{(2\pi)^{2/3}}\right)d^3k=0$$

integrando os dois lados da igualdade em relação a x defida de $-\infty$ à ∞, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int\left(\left(\frac{\partial^2\delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2}+k^2c_s^2\delta\varepsilon_k(t)-4\pi G\varepsilon_0\delta\varepsilon_k(t)+\sigma k^2\delta S_k\right)\frac{e^{ix(\mathbf{k}'+k)}}{(2\pi)^{2/3}}\right)d^3k\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}0dx$$

$$\int\left(\left(\frac{\partial^2\delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2}+k^2c_s^2\delta\varepsilon_k(t)-4\pi G\varepsilon_0\delta\varepsilon_k(t)+\sigma k^2\delta S_k\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{ix(\mathbf{k}'+k)}}{(2\pi)^{2/3}}\right)dx\right)d^3k=0$$

pela definição do delta de Dirac, obtemos

$$\int\left(\left(\frac{\partial^2\delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2}+k^2c_s^2\delta\varepsilon_k(t)-4\pi G\varepsilon_0\delta\varepsilon_k(t)+\sigma k^2\delta S_k\right)(\delta(k'+k))\right)d^3k=0$$

$$\int\left(\delta(k'+k)\left(\frac{\partial^2\delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2}+k^2c_s^2\delta\varepsilon_k(t)-4\pi G\varepsilon_0\delta\varepsilon_k(t)+\sigma k^2\delta S_k\right)\right)d^3k=0$$

dado que para a integral ser equivalente há zero, o integrando deverá ser igual há 0, logo

$$\frac{\partial^2\delta\varepsilon_k(t)}{\partial t^2}+k^2c_s^2\delta\varepsilon_k(t)-4\pi G\varepsilon_0\delta\varepsilon_k(t)+\sigma k^2\delta S_k=0$$

$$\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2}+(k^2c_s^2-4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t)=-\sigma k^2\delta S_k \tag{30}$$

A solução geral da equação diferencial pode ser escrita como a soma da solução da equação homogênea com a solução particular independente do tempo da equação (30)

$$\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2}+(k^2c_s^2-4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k(t)=-\sigma k^2\delta S_k$$

Para a solução independente do tempo $\dfrac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2}=0$, então

$$(k^2c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\delta\varepsilon_k = -\sigma k^2 \delta S_k$$

$$\delta\varepsilon_k = \frac{-\sigma k^2 \delta S_k}{k^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0} \tag{31}$$

é chamada de pertubação de entropia. Nota-se que $kto\infty$ quando a gravidade não é relevante,

$$\lim_{k\to\infty} \delta\varepsilon_k = \lim_{k\to\infty} \frac{-\sigma k^2 \delta S_k}{k^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0}$$

$$\lim_{k\to\infty} \delta\varepsilon_k = \lim_{k\to\infty} \frac{-\sigma \delta S_k}{c_s^2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \delta\varepsilon_k = -\frac{\sigma \delta S_k}{c_s^2}$$

Neste caso, a contribuição para a pressão devido à falta de homogeneidade da densidade de energia é exatamente compensada pela contribuição correspondente das perturbações de entropia, de modo que $\delta p = c_s^2 \delta\varepsilon_k + \sigma\delta S_k$ desaparece.

As perturbações de entropia podem ocorrer apenas em fluidos multicomponentes. Por exemplo, em um fluido que consiste em bárions e radiação, os bárions podem ser distribuídos de forma não homogênea em um fundo homogêneo de radiação. Nesse caso, a entropia, que é igual ao número de fótons por barião, varia de um lugar para outro. Assim, encontramos o conjunto completo de modos - dois modos adiabáticos, dois modos de vetor e um modo de entropia - descrevendo perturbações em uma gravitação meio não expansível homogêneo. O mais interessante é o exponencialmente crescente modo adiabático que é responsável pela origem da estrutura no universo.

6.3 Instabilidade de um universo em expansão

Em um universo homogêneo e isotrópico, a densidade de energia é uma função do tempo e a velocidades obedecem a lei de Hubble

$$\varepsilon = \varepsilon_0(t), \;\; \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 = \mathbf{H}(t)\mathbf{x} \tag{32}$$

Substituindo essas equações na equação (3), temos

$$\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} + \nabla\left(\varepsilon_0 \, \mathbf{V}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} + \varepsilon_0 \nabla\left(\mathbf{H}\mathbf{x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} + \varepsilon_0 \mathbf{H}\nabla(\mathbf{x}) = 0$$

Para um universo homogêneo e isotrópico temos $\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial x} = \dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial y} = \dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial z} = 1$

$$\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} + \mathbf{H}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial y} + \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}\right)\varepsilon_0 = 0$$

$$\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} + 3\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x}\varepsilon_0 = 0$$

$$\dot{\varepsilon_0} + 3\mathbf{H}\varepsilon_0 = 0 \tag{33}$$

que afirma matematicamente que a massa com a massa não relativística se conserva. A divergência da equação de Euler (8) juntamente com a equação de Poisson (10) leva a equação de Friedmann

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\varepsilon} + \nabla \phi = 0$$

com $\nabla^2 \phi = 4\pi G \varepsilon_0$.

Dado que $\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\mathbf{H}(t)\mathbf{x}) = \mathbf{H}(t)(\nabla \cdot \mathbf{x}) = 3\mathbf{H}(t)$, $\frac{\nabla p}{\varepsilon} = 0$ e

$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = (\mathbf{Hx} \cdot \nabla)\mathbf{V} = (\mathbf{Hx} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}})\mathbf{V} = \mathbf{HV}$, logo

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{V})\mathbf{V} + \nabla \phi = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{H}(t)\mathbf{V} + \nabla \phi = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{H}(t)\mathbf{V} + \nabla \phi \right) = \nabla \cdot 0$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{H}(t)\mathbf{V}) + \nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\mathbf{H}(t)\mathbf{V}) + \nabla^2 \phi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{H}(t)\nabla \cdot \mathbf{V} + \Delta \phi = 0$$

$$3\frac{\partial \mathbf{H}(t)}{\partial t} + 3\mathbf{H}^2(t) + \Delta \phi = 0$$

$$3(\dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H}^2(t)) = -\Delta \phi$$

$$3(\dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H}^2(t)) = -4\pi G \varepsilon_0$$

$$\dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H}^2 = -\frac{4\pi G}{3}\varepsilon_0 \tag{34}$$

Pertubações ignorando as pertubações de entropia e substituindo as expressões, obtemos

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \delta \mathbf{v}, \phi = \phi_0 + \delta\phi \tag{35}$$

$$p = p_0 + \delta p = p_0 + c_2^2 \delta\varepsilon$$

aplicando nas equações (3), (8) e (10), encontramos as equações lineares para pequenas pertubações

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla\left(\varepsilon\, \mathbf{V}\right) = 0$$

$$\frac{\partial(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0)}{\partial t} + \nabla\left(\left(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0\right)\left(\mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v}\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta\varepsilon_0}{\partial t} + \nabla\left(\left(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0\right)\mathbf{V}_0\right) + \nabla\left(\left(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0\right)\delta\mathbf{v}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta\varepsilon_0}{\partial t} + \nabla\left(\left(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0\right)\mathbf{V}_0\right) + \nabla\left(\left(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0\right)\delta\mathbf{v}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta\varepsilon_0}{\partial t} + \varepsilon_0 \nabla \mathbf{V}_0 + \nabla\left(\delta\varepsilon_0 \cdot \mathbf{V}_0\right) + \varepsilon_0 \nabla \delta\mathbf{v} + \nabla\left(\delta\varepsilon_0 \cdot \delta\mathbf{v}\right) = 0$$

Desconsiderando os termos não relacionados há pequenas pertubações temos

$$\frac{\partial \delta\varepsilon_0}{\partial t} + \nabla\left(\delta\varepsilon_0 \cdot \mathbf{V}_0\right) + \varepsilon_0 \nabla \delta\mathbf{v} + \nabla\left(\delta\varepsilon_0 \cdot \delta\mathbf{v}\right) = 0$$

com $\nabla\left(\delta\varepsilon_0 \cdot \delta\mathbf{v}\right) \to 0$, temos

$$\frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon_0(\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) + \nabla(\delta\varepsilon \cdot \mathbf{V}) = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\varepsilon} + \nabla\phi = 0$$

$$\frac{\partial(\mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v})}{\partial t} + ((\mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v}) \cdot \nabla)(\mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v}) + \frac{\nabla(p_0 + c_s^2\delta\varepsilon)}{\varepsilon_0} + \nabla(\phi_0 + \delta\phi) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + ((\mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v}) \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 + ((\mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v}) \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + \frac{\nabla p_0}{\varepsilon_0} + \frac{c_s^2 \nabla\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} + \nabla\phi_0 + \nabla\delta\phi = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla + \delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla + \delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + \frac{\nabla p_0}{\varepsilon_0} + \frac{c_s^2 \nabla\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} + \nabla\phi_0 + \nabla\delta\phi = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + \frac{\nabla p_0}{\varepsilon_0} + \frac{c_s^2 \nabla\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} + \nabla\phi_0 + \nabla\delta\phi = 0$$

Desconsiderando os termos não relacionados há pequenas pertubações temos

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + \frac{c_s^2 \nabla\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} + \nabla\delta\phi = 0$$

com $(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} \to 0$, obtemos

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0}\nabla\delta\varepsilon + \nabla\delta\phi = 0 \tag{37}$$

e

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G\delta\varepsilon. \tag{38}$$

A velocidade de Hubble $\mathbf{V}_0$ depende explicitamente de $\mathbf{x}$ e, portanto, da transformada de Fourier em relação às coordenadas eulerianas $\mathbf{x}$ não reduz essas equações a um conjunto desacoplado de equações diferenciais ordinárias. É por isso que é mais conveniente para usar as coordenadas Lagrangianas (comovendo com o fluxo de Hubble) $\mathbf{q}$, que são relacionado com as coordenadas Eulerianas via

$$\mathbf{x} = a(t)\mathbf{q} \tag{39}$$

onde $a(t)$ é um fator de escala. A derivada parcial em relação ao tempo tomado em constante $\mathbf{x}$ é diferente da derivada parcial tomada na constante $\mathbf{q}$. Para um general função $f(\mathbf{x}, t)$ que temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f(\mathbf{x} = a(t)\mathbf{q}\,, t)}{\partial t}\right)_{\mathbf{q}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} + \dot{a}q^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_t \\
\left(\frac{\partial f(\mathbf{x} = a(t)\mathbf{q}\,, t)}{\partial t}\right)_{\mathbf{q}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_t \\
\left(\frac{\partial f(\mathbf{x} = a(t)\mathbf{q}\,, t)}{\partial t}\right)_{\mathbf{q}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f \\
\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{q}}\right) f &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\right) f \\
\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{q}} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{40}$$

e portanto

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{q}} - (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \tag{41}$$

As derivadas espaciais estão relacionadas de forma mais simples

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \tag{42}$$

Substituindo as derivadas em (36)-(38) e introduzindo a amplitude fracionária das pertubações de densidade $\delta \equiv \dfrac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0}$, e finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon_0(\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) + \nabla(\delta\varepsilon \cdot \mathbf{V}) &= 0 \\
\left(\frac{\partial(\varepsilon_0\delta)}{\partial t}\right) + \varepsilon_0 \nabla_{\mathbf{x}} \delta\mathbf{v} + \nabla((\varepsilon_0\delta) \cdot \mathbf{V}) &= 0 \\
\varepsilon_0 \left(\frac{\partial(\delta)}{\partial t}\right) + \varepsilon_0 \nabla_{\mathbf{x}} \delta\mathbf{v} + \varepsilon_0 \nabla((\delta) \cdot \mathbf{V}) &= 0 \\
\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right) + \nabla_{\mathbf{x}} \delta\mathbf{v} &= 0 \\
\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right) + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \delta\mathbf{v} &= 0 \\
\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right) + \frac{1}{a}(\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) &= 0
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \nabla\delta\varepsilon + \nabla\delta\phi = 0$$

$$\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t}\right) + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla)\delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0}\nabla \delta\varepsilon + \nabla \delta\phi = 0$$

$$\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t}\right) + H\delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{V}_0 + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0}\nabla_{\mathbf{x}} \delta\varepsilon + \nabla_{\mathbf{x}} \delta\phi = 0$$

$$\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t}\right) + H\delta \mathbf{v} + c_s^2 \nabla_{\mathbf{x}}\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} + \nabla_{\mathbf{x}} \delta\phi = 0$$

$$\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t}\right) + H\delta \mathbf{v} + \frac{c_s^2}{a}\nabla_{\mathbf{q}}\delta + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{q}} \delta\phi = 0$$

$$\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t}\right) + H\delta \mathbf{v} + \frac{c_s^2}{a}\nabla\delta + \frac{1}{a}\nabla \delta\phi = 0 \tag{44}$$

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G\delta\varepsilon$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2\delta\phi = 4\pi G(\varepsilon_0\delta)$$

$$\frac{\nabla_{\mathbf{q}}^2\delta\phi}{a^2} = 4\pi G(\varepsilon_0\delta)$$

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G a^2\varepsilon_0\delta \tag{45}$$

onde $\nabla \equiv \nabla_{\mathbf{q}}$ e Δ agora são as derivadas em relação às coordenadas de Lagrange $\mathbf{q}$ e as derivadas de tempo são tomadas na constante $\mathbf{q}$. Ao derivar (43), temos usado (33) para o fundo e observou que $\nabla \cdot \mathbf{V}_0 = 3\mathbf{H}(t)$ e $(\delta\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{x})\mathbf{V}_0 = H\delta\mathbf{v}$. Tomando a divergência de (44) e usando as equações de continuidade e Poisson para expressar $(\nabla \cdot \delta\mathbf{v})$ e $\delta\phi$ em termos de δ, derivamos a equação de forma fechada.

Com as equações (43) podemos obter as seguintes relações

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right) + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{q}}\delta\mathbf{v} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right) = -\frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{q}}\delta\mathbf{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{q}}\delta\mathbf{v}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{q}}\delta\mathbf{v}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \frac{\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{v}) - \frac{\partial a}{\partial t}(\nabla_{\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{v})}{a^2} = 0$$

como $\dfrac{\partial a}{\partial t} = a\mathbf{H}$, portanto

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{v}) - \frac{a\mathbf{H}}{a^2}(\nabla_{\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{v}) = -\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + \frac{\mathbf{H}}{a}(\nabla_{\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{v})$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{v}) = -\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} - \mathbf{H}\frac{\partial\delta}{\partial t}$$

com as relações a cima, prosseguimos dessa forma

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{H}\delta\mathbf{v} + \frac{c_s^2}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\delta + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{q}}\delta\phi\right) = \nabla_{\mathbf{x}}\cdot 0$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t}\right) + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot(\mathbf{H}\delta\mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\frac{c_s^2}{a}\nabla_{\mathbf{q}}\delta\right) + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\delta\phi\right) = 0$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial(\nabla_{\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{v})}{\partial t} + \frac{\mathbf{H}}{a}(\nabla_{\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{v}) + \frac{c_s^2}{a^2}\nabla_{\mathbf{q}}^2\delta + \frac{1}{a^2}\nabla_{\mathbf{q}}^2\delta\phi = 0$$

$$-\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} - \mathbf{H}\frac{\partial\delta}{\partial t} - \mathbf{H}\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{c_s^2}{a^2}\nabla_{\mathbf{q}}^2\delta + \frac{1}{a^2}(4\pi G a^2\varepsilon_0\delta) = 0$$

$$-\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} - 2\mathbf{H}\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{c_s^2}{a^2}\nabla_{\mathbf{q}}^2\delta + 4\pi G\varepsilon_0\delta = 0$$

$$\ddot{\delta} + 2\mathbf{H}\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2}\Delta\delta - 4\pi G\varepsilon_0\delta = 0 \tag{46}$$

que descreve a instabilidade gravitacional em um universo em expansão.

6.3.1 Pertubações Adiabáticas

Tomando a transformada de Fourier da equação (46) para as coordenadas comoventes $\mathbf{q}$,

$$\delta = \int \delta_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{kq}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{kq}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\right) + 2\mathbf{H}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{kq}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\right) - \frac{c_s^2}{a^2}\Delta\left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{kq}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\right) - 4\pi G\varepsilon_0\left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{kq}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\right) = 0$$

$$\int\left(\frac{\partial^2\delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H}\frac{\partial\delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} - 4\pi G\varepsilon_0\delta_{\mathbf{k}}(t)\right)e^{i\mathbf{kq}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{c_s^2}{a^2}\left(\int \Delta\delta_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{kq}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\right) = 0$$

$$\int\left(\frac{\partial^2\delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H}\frac{\partial\delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} - 4\pi G\varepsilon_0\delta_{\mathbf{k}}(t)\right)e^{i\mathbf{kq}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{c_s^2(|k|i)^2}{a^2}\left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{kq}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\right) = 0$$

$$\int\left(\frac{\partial^2\delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H}\frac{\partial\delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} - 4\pi G\varepsilon_0\delta_{\mathbf{k}}(t)\right)e^{i\mathbf{kq}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} + \frac{c_s^2k^2}{a^2}\left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{kq}}\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\right) = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H}\frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + \frac{c_s^2 k^2}{a^2}\delta_{\mathbf{k}}(t) - 4\pi G\varepsilon_0 \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{kq}} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H}\frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + (\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\varepsilon_0) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{kq}} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} = 0$$

multiplicando por $e^{i\mathbf{k}'\mathbf{q}}$

$$e^{i\mathbf{k}'\mathbf{q}} \left(\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H}\frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + (\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\varepsilon_0) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{kq}} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \right) = 0 e^{i\mathbf{k}'\mathbf{q}}$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H}\frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + (\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\varepsilon_0) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} = 0$$

realizando a integral definida de $\mathbf{q}$, temos

$$\int \left(\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H}\frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + (\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\varepsilon_0) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \right) d\mathbf{q} = \int 0 d\mathbf{q}$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H}\frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + (\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\varepsilon_0) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) \int \left(e^{i\mathbf{q}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^{3/2}} \right) d^3k = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H}\frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + (\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\varepsilon_0) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') d^3k = 0$$

$$\int \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H}\frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + (\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\varepsilon_0) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) d^3k = 0$$

sabendo que o integrando deve ser equivalente a zero para que o resultado da integração ser igual a zero, assim obtemos a equação diferencial ordinária

$$\ddot{\delta_{\mathbf{k}}} + 2\mathbf{H}\dot{\delta_{\mathbf{k}}} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\varepsilon_0 \right) \delta_{\mathbf{k}} = 0 \tag{47}$$

O comportamento de cada perturbação depende crucialmente de seu tamanho espacial; a escala de comprimento crítica é o comprimento de jeans

$$\lambda_J^{ph} = \frac{2\pi a}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\varepsilon_0}} \tag{48}$$

Aqui λ^{ph} é o comprimento de onda físico, relacionado ao comprimento de onda comovente $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ via $\lambda^{ph} = a\lambda$. Em um universo plano dominado pela matéria $\varepsilon_0 = (6\pi G t^2)^{-1}$ e, portanto,

$$\lambda_J^{ph} \sim c_s t, \tag{49}$$

isto é, o comprimento do jeans está na ordem do horizonte de som. Às vezes, em vez do Comprimento de jeans, usa-se a massa de jeans, definida como $M_J \equiv \varepsilon_0 (\lambda_J^{ph})^3$. Perturbações em escalas muito menores do que o comprimento de jeans ($\lambda \ll \lambda_J$) são válidas ondas. Se c_s mudar adiabaticamente, então a solução de (47) é

$$\delta_{\mathbf{k}} \propto \frac{1}{\sqrt{c_s a}} exp \left(\pm k \int \frac{c_s dt}{a} \right) \tag{50}$$