

Arthur de Souza Molina

Resolução de Alguns Cálculos:

Mukhanov capítulo 6: Instabilidade Gravitacional na teoria Newtoniana

6.1 Equações básicas

Em grandes escalas, a matéria pode ser considerada um fluido perfeito, e sua distribuição de energia pode ser caracterizada por $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, a entropia por unidade de massa $S(\mathbf{x}, t)$, e o vetor de velocidade $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$.

Se considerarmos um volume fixo não móvel, a sua variação de massa pode ser descrita como

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\Delta V} \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t} dV \quad (1)$$

A variação de Massa também pode ser descrita pelo fluxo de matéria pela superfície ao redor do volume fixo

$$\frac{dM}{dt} = - \oint \varepsilon \mathbf{V} d\sigma = - \int_{\Delta V} \nabla (\varepsilon \mathbf{V}) dV \quad (2)$$

Essas relações somente são consistentes se

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla (\varepsilon \mathbf{V}) = 0 \quad (3)$$

A aceleração gravitacional \mathbf{g} em um pequeno elemento com massa é determinada pela força gravitacional

$$\mathbf{F}_{gr} = -\Delta M \cdot \nabla \phi \quad (4)$$

onde o potencial gravitacional é dado por ϕ e pela pressão p

$$\mathbf{F}_{pr} = - \oint p \cdot d\sigma = - \int_{\Delta V} \nabla p d\sigma \approx -\nabla p \Delta V \quad (5)$$

com

$$\mathbf{g} \equiv \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x}(t), t)}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right)_x + \frac{dx^i(t)}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (6)$$

pela lei da força de Newton (Segunda Lei de Newton)

$$\Delta M \cdot \mathbf{g} = \mathbf{F}_{gr} + \mathbf{F}_{pr} \quad (7)$$

$$\Delta M \cdot \mathbf{g} - \mathbf{F}_{gr} - \mathbf{F}_{pr} = 0$$

$$\Delta M \cdot \mathbf{g} + \nabla p \Delta V + \Delta M \cdot \nabla \phi = 0$$

com $\Delta M \equiv \Delta V \cdot \varepsilon$, e portanto $\Delta V = \frac{\Delta M}{\varepsilon}$

$$\Delta M \cdot \mathbf{g} + \nabla p \frac{\Delta M}{\varepsilon} + \Delta M \cdot \nabla \phi = 0$$

$$\mathbf{g} + \frac{\nabla p}{\varepsilon} + \nabla \phi = 0$$

ao substituir a equação (6), torna-se a equação de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\varepsilon} + \nabla \phi = 0 \quad (8)$$

A conservação de entropia negligência a dissipação de energia, logo a entropia para um pequeno elemento de matéria é conservada:

$$\frac{dS(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) S = 0 \quad (9)$$

A equação que determina o potencial gravitacional é conhecida como equação de Poisson

$$\Delta \phi = 4\pi G \varepsilon \quad (10)$$

Com as equações (3), (6) \rightarrow (10) tomadas em conjunto com a equação de estado

$$p = p(\varepsilon, S) \quad (11)$$

formam um conjunto completo de sete equações que, em princípio, nos permite determinar as sete funções desconhecidas $\varepsilon, \mathbf{V}, S, \phi, p$. As equações hidrodinâmicas não são lineares, e em geral não é fácil encontrar suas soluções. No entanto, para estudar o comportamento de pequenas perturbações em torno de um fundo homogêneo e isotrópico, é apropriado torna-las lineares.

6.2 Teoria Jeans

Vamos primeiro considerar um universo não expansível estático, assumindo o homogêneo, fundo isotrópico com densidade de matéria independente do tempo constante: $\varepsilon(x, t) = \text{const.}$ Na verdade, a densidade de energia permanece inalterada apenas se a matéria estiver em repouso e a força gravitacional $F \propto \nabla \phi$, que desaparece. Logo, a equação de Poisson não é satisfeita, essa inconsistência pode, em princípio, se considerarmos um universo estático, onde a força gravitacional da matéria é compensada pela constante cosmológica apropriada escolhida.

Ao perturbar a distribuição de matéria, temos

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0 + \delta\phi(\mathbf{x}, t), \quad S(\mathbf{x}, t) = S_0 + \delta S(\mathbf{x}, t)$$

onde cada variação $\delta\varepsilon \ll \varepsilon_0$, etc..

A pressão é dada por

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon(\mathbf{x}, t), S_0 + \delta S(\mathbf{x}, t)) = p_0 + \delta p(\mathbf{x}, t) \quad (13)$$

δp pode ser escrito em termos da densidade de energia e perturbações de entropia como

$$\delta p = c_s^2 \delta\varepsilon + \sigma \delta S \quad (14)$$

onde $c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)_s$ é o quadrado da velocidade do som e $\sigma \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\varepsilon$. Para a matéria não relativística, a velocidade do som é muito menor que a velocidade da luz.

Substituindo (12) e (14) em (3), (8) - (10) e mantendo apenas os termos que são lineares nas perturbações, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla (\varepsilon \mathbf{V}) &= 0 \\ \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon_0 \nabla (\delta \mathbf{v}) &= 0\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\varepsilon} + \nabla \phi &= 0 \\ \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + \frac{\nabla \delta p}{\varepsilon_0} + \nabla \delta \phi &= 0 \\ \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla (c_s^2 \delta \varepsilon + \sigma \delta S)}{\varepsilon_0} + \nabla \delta \phi &= 0 \\ \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla c_s^2 \delta \varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{\nabla \sigma \delta S}{\varepsilon_0} + \nabla \delta \phi &= 0 \\ \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \nabla \delta \varepsilon + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \nabla \delta S + \nabla \delta \phi &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \delta S}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{17}$$

$$\Delta \phi = 4\pi G \varepsilon$$

$$\Delta \delta \phi = 4\pi G \delta \varepsilon\tag{18}$$

A equação (17) possui solução simples, dado que

$$\delta S(\mathbf{x}, t) = \delta S(\mathbf{x}),\tag{19}$$

isso indica que a entropia é invariante em relação ao tempo, mas varia em coordenadas arbitrárias.

Tomando a divergente da equação (16) e escrevendo $\nabla \delta S$ e $\Delta \delta \phi$ em termos de $\delta \varepsilon$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \nabla \delta \varepsilon + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \nabla \delta S + \nabla \delta \phi &= 0 \\ \nabla \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \nabla \delta \varepsilon + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \nabla \delta S + \nabla \delta \phi \right) &= \nabla \cdot 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \nabla \delta \varepsilon \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \nabla \delta S \right) + \nabla \cdot (\nabla \delta \phi) = 0 \\
& \frac{\partial \Delta \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \Delta \delta \varepsilon + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Delta \delta S(\mathbf{x}) + \Delta \delta \phi = 0 \\
& \text{dado que } \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon_0 \nabla \cdot (\delta \mathbf{v}) = 0 \text{ e } \frac{\partial \Delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\varepsilon_0 \partial t^2} \text{ então} \\
& -\frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\varepsilon_0 \partial t^2} + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \Delta \delta \varepsilon + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Delta \delta S(\mathbf{x}) + \Delta \delta \phi = 0 \\
& \frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta \varepsilon - \sigma \Delta \delta S(\mathbf{x}) - \varepsilon_0 \Delta \delta \phi = 0 \\
& \frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta \varepsilon - \sigma \Delta \delta S(\mathbf{x}) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon = 0 \\
& \frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta \varepsilon - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon = \sigma \Delta \delta S(\mathbf{x}) \tag{20}
\end{aligned}$$

Esta é uma equação linear fechada para $\delta \varepsilon$, onde a perturbação de entropia serve como um determinada fonte.

6.2.1 Perturbações Adiabáticas

Primeiro, podemos supor as perturbações de entropia ausentes, isto é, $\delta S = 0$. O coeficientes em (20) não dependem das coordenadas espaciais, portanto, ao tomar o Transformada de Fourier,

$$\delta \varepsilon(\mathbf{x}, t) = \int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \tag{21}$$

obtemos um conjunto de equações diferenciais ordinárias independentes para as Coeficientes de Fourier $\delta \varepsilon_k(t)$

$$\frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta \varepsilon - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon = 0$$

$$\frac{\partial^2 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right)}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G \varepsilon_0 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - c_s^2 \Delta \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k(t) \left(\int \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = 0$$

$$\text{dado que } \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \text{ logo}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - c_s^2 \left(\int \frac{\partial^2 (\delta \varepsilon_k(t))}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G \varepsilon_0 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = 0$$

pela propriedade da transformada de Fourier de derivadas, temos

$$\int \frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = (|k|i)^2 \int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}}$$

portanto

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - c_s^2 \left((ki)^2 \int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G\varepsilon_0 \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) + |k|^2 c_s^2 \int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} - 4\pi G\varepsilon_0 \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) + (|k|^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \left(\int \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = 0$$

$$\left(\int \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta\varepsilon_k(t)) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) + \int (|k|^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \delta\varepsilon_k(t) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \delta\varepsilon_k(t) \right) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = 0$$

multiplicando por $e^{ik'\mathbf{x}}$ em ambos os lados, temos

$$e^{ik'\mathbf{x}} \cdot \int \left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \delta\varepsilon_k(t) \right) \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = 0 \cdot e^{ik'\mathbf{x}}$$

$$\int \left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \delta\varepsilon_k(t) \right) e^{ik'\mathbf{x}} \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} = 0$$

$$\int \cdot \left(\int \left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \delta\varepsilon_k(t) \right) e^{ik'\mathbf{x}} \frac{e^{ik\mathbf{x}} d^3k}{(2\pi)^{2/3}} \right) d\mathbf{x} = \int (0) d\mathbf{x}$$

$$\int \left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \delta\varepsilon_k(t) \right) \cdot \left(\int \frac{e^{i(k'\mathbf{x}+k\mathbf{x})}}{(2\pi)^{2/3}} d\mathbf{x} \right) d^3k = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \delta\varepsilon_k(t) \right) \cdot \left(\int \frac{e^{i\mathbf{x}(k'+k)}}{(2\pi)^{2/3}} d\mathbf{x} \right) d^3k = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \delta\varepsilon_k(t) \right) \delta(k' + k) d^3k = 0$$

$$\int \delta(k' + k) \left(\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (|k|^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \delta\varepsilon_k(t) \right) d^3k = 0$$

para a integral definida ser equivalente a zero, o integrando deve ser igual a zero, logo

$$\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \delta\varepsilon_k(t) = 0 \quad (22)$$

sendo $k = |k|$ e uma possível solução seria $\delta\varepsilon_k = \lambda e^{\omega t}$, portanto

$$\frac{\partial^2(\lambda e^{\omega t})}{\partial t^2} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0) \lambda e^{\omega t} = 0$$

$$\lambda\omega^2 e^{\omega t} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)\lambda e^{\omega t} = 0$$

$$\omega^2 + k^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0 = 0$$

$$\omega^2 = +4\pi G\varepsilon_0 - k^2 c_s^2$$

$$\omega = \pm \sqrt{4\pi G\varepsilon_0 - k^2 c_s^2} = \pm \sqrt{(-1)(k^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0)} = \pm i \sqrt{k^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0}$$

A equação (22) tem a solução

$$\delta\varepsilon_k(t) \propto e^{(\pm\omega(t)t)} \quad (23)$$

onde $\omega(t) = \sqrt{k^2 c_s^2 - 4\pi G\varepsilon_0}$. O comportamento da perturbação adiabática depende exclusivamente pelo sinal do expoente.

Definindo o comprimento Jeans como

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \left(\frac{\pi}{G\varepsilon_0} \right)^{1/2} \quad (24)$$

de modo que $\omega(k_J) = 0$, concluimos que se $\lambda < \lambda_J$, as soluções descrevem as ondas sonoras

$$\delta\varepsilon_k \propto \sin(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x} + \alpha) \quad (25)$$

propagando com velocidade de fase

$$c_{fase} = \frac{\omega}{k} = c_s \sqrt{1 - \frac{k_J^2}{k^2}}. \quad (26)$$

No limite $k \geq k_J$ ou em escalas muito pequenas ($\lambda \leq \lambda_J$) onde a gravidade é insignificante comparado com a pressão, temos $c_{fase} \rightarrow c_s$. Em largas escalas a gravidade domina e $\lambda > \lambda_J$, temos

$$\delta\varepsilon_k \propto e^{\pm|\omega|t} \quad (27)$$

Uma dessas soluções descrevem o comportamento exponencialmente rápido e não homogêneo, enquanto outras correspondem o modo decaimento. Onde $k \rightarrow 0$, $|\omega|t \rightarrow \frac{t}{t_{gr}}$, onde $t_{gr} \equiv (4\pi G\varepsilon_0)^{-1/2}$. Onde t_{gr} é interpretado como o tempo característico de colapso para uma região com uma densidade de energia inicial ε_0 . O comprimento Jeans $\lambda_J \sim c_s t_{gr}$ é o "comunicação de som" sobre a qual a pressão consegue reagir as mudanças da densidade de energia devido ao colapso gravitacional.

Encontrando e analisando as equações para $\delta\mathbf{v}_k$ e $\delta\phi_k$ para as ondas sonoras e para as perturbações em grandes escalas para o comprimento Jeans. Problema (6.1)

6.2.2 Perturbações de Vetor

Substituindo $\delta\varepsilon = 0$ e $\delta S = 0$ na equação (20), obtemos uma solução não trivial para o sistema de equações hidrodinâmicas. Já para as equações (15)-(18) reduzimos em

$$\nabla\delta\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = 0 \quad (28)$$

Pela segunda equação, é possível notar que $\delta \mathbf{v}$ é uma função das coordenadas espaciais independente do tempo. E a primeira equação diz respeito a velocidade da perturbação de onda plana, isto é, $\delta \mathbf{v} = \mathbf{w}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ e que a velocidade é perpendicular ao vetor de onda \mathbf{k} , ou seja,

$$\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (29)$$

Essas perturbações vetoriais descrevem movimentos de cisalhamento do meio que não perturbam a densidade de energia. Porque existem duas direções perpendiculares independentes para \mathbf{k} , existem dois modos vetoriais independentes para um determinado \mathbf{k} .

6.2.2 Perturbações de Entropia

Considerando que $\delta S \neq 0$, dada a transformação de Fourier da equação (20) e dado que

$$\delta S = \int \delta S_k \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}},$$

obtendo uma solução semelhante a equação (22), temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta \varepsilon - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon = \sigma \Delta \delta S \\ & \int \left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k - c_s^2 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \Delta(e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G \varepsilon_0 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = \\ & \sigma \int \left(\delta S_k \Delta(e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k \\ & \int \left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k - c_s^2 \left(\int \frac{\partial^2 (\delta \varepsilon_k(t))}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G \varepsilon_0 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = \\ & \sigma \left(\int \frac{\partial^2 (\delta S_k)}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) \end{aligned}$$

pela propriedade da transformada de Fourier de derivadas, temos

$$\int \frac{\partial^2 (\delta \varepsilon_k(t))}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} = (|k|i)^2 \int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}}$$

e

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial^2 (\delta S_k)}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} = (|k|i)^2 \int \delta S_k \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \\ & \int \left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k - c_s^2 (|k|i)^2 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G \varepsilon_0 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = \\ & \sigma (|k|i)^2 \left(\int \delta S_k \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) \\ & \int \left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k + c_s^2 k^2 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G \varepsilon_0 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = \\ & -\sigma k^2 \left(\int \delta S_k \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) \\ & \int \left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k + c_s^2 k^2 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) - 4\pi G \varepsilon_0 \left(\int \delta \varepsilon_k(t) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) + \\ & \sigma k^2 \left(\int \delta S_k \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\int \left(\left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} + k^2 c_s^2 \delta \varepsilon_k(t) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k(t) + \sigma k^2 \delta S_k \right) \frac{e^{ik\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k = 0$$

multiplicando por $e^{i\mathbf{k}'x}$

$$e^{i\mathbf{k}'x} \left(\int \left(\left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} + k^2 c_s^2 \delta \varepsilon_k(t) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k(t) + \sigma k^2 \delta S_k \right) \frac{e^{ik\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k \right) = 0 e^{i\mathbf{k}'x}$$

$$\int \left(\left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} + k^2 c_s^2 \delta \varepsilon_k(t) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k(t) + \sigma k^2 \delta S_k \right) e^{i\mathbf{k}'x} \frac{e^{ik\mathbf{x}}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k = 0$$

$$\int \left(\left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} + k^2 c_s^2 \delta \varepsilon_k(t) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k(t) + \sigma k^2 \delta S_k \right) \frac{e^{i(\mathbf{k}'x + k\mathbf{x})}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k = 0$$

$$\int \left(\left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} + k^2 c_s^2 \delta \varepsilon_k(t) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k(t) + \sigma k^2 \delta S_k \right) \frac{e^{ix(\mathbf{k}' + k)}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k = 0$$

integrando os dois lados da igualdade em relação a x definida de $-\infty$ à ∞ , temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int \left(\left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} + k^2 c_s^2 \delta \varepsilon_k(t) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k(t) + \sigma k^2 \delta S_k \right) \frac{e^{ix(\mathbf{k}' + k)}}{(2\pi)^{2/3}} \right) d^3 k \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dx$$

$$\int \left(\left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} + k^2 c_s^2 \delta \varepsilon_k(t) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k(t) + \sigma k^2 \delta S_k \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{ix(\mathbf{k}' + k)}}{(2\pi)^{2/3}} \right) dx \right) d^3 k = 0$$

pela definição do delta de Dirac, obtemos

$$\int \left(\left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} + k^2 c_s^2 \delta \varepsilon_k(t) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k(t) + \sigma k^2 \delta S_k \right) (\delta(k' + k)) \right) d^3 k = 0$$

$$\int \left(\delta(k' + k) \left(\frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} + k^2 c_s^2 \delta \varepsilon_k(t) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k(t) + \sigma k^2 \delta S_k \right) \right) d^3 k = 0$$

dado que para a integral ser equivalente há zero, o integrando deverá ser igual há 0, logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_k(t)}{\partial t^2} + k^2 c_s^2 \delta \varepsilon_k(t) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon_k(t) + \sigma k^2 \delta S_k &= 0 \\ \frac{\partial^2 (\delta \varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G \varepsilon_0) \delta \varepsilon_k(t) &= -\sigma k^2 \delta S_k \end{aligned} \quad (30)$$

A solução geral da equação diferencial pode ser escrita como a soma da solução da equação homogênea com a solução particular independente do tempo da equação (30)

$$\frac{\partial^2 (\delta \varepsilon_k(t))}{\partial t^2} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G \varepsilon_0) \delta \varepsilon_k(t) = -\sigma k^2 \delta S_k$$

Para a solução independente do tempo $\frac{\partial^2 (\delta \varepsilon_k(t))}{\partial t^2} = 0$, então

$$(k^2 c_s^2 - 4\pi G \varepsilon_0) \delta \varepsilon_k = -\sigma k^2 \delta S_k$$

$$\delta \varepsilon_k = \frac{-\sigma k^2 \delta S_k}{k^2 c_s^2 - 4\pi G \varepsilon_0} \quad (31)$$

é chamada de perturbação de entropia. Nota-se que $k \rightarrow \infty$ quando a gravidade não é relevante,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta \varepsilon_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-\sigma k^2 \delta S_k}{k^2 c_s^2 - 4\pi G \varepsilon_0}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta \varepsilon_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-\sigma \delta S_k}{c_s^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta \varepsilon_k = -\frac{\sigma \delta S_k}{c_s^2}$$

Neste caso, a contribuição para a pressão devido à falta de homogeneidade da densidade de energia é exatamente compensada pela contribuição correspondente das perturbações de entropia, de modo que $\delta p = c_s^2 \delta \varepsilon_k + \sigma \delta S_k$ desaparece.

As perturbações de entropia podem ocorrer apenas em fluidos multicomponentes. Por exemplo, em um fluido que consiste em bárions e radiação, os bárions podem ser distribuídos de forma não homogênea em um fundo homogêneo de radiação. Nesse caso, a entropia, que é igual ao número de fótons por bárion, varia de um lugar para outro. Assim, encontramos o conjunto completo de modos - dois modos adiabáticos, dois modos de vetor e um modo de entropia - descrevendo perturbações em uma gravitação meio não expansível homogêneo. O mais interessante é o exponencialmente crescente modo adiabático que é responsável pela origem da estrutura no universo.

6.3 Instabilidade de um universo em expansão

Em um universo homogêneo e isotrópico, a densidade de energia é uma função do tempo e as velocidades obedecem a lei de Hubble

$$\varepsilon = \varepsilon_0(t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 = \mathbf{H}(t) \mathbf{x} \quad (32)$$

Substituindo essas equações na equação (3), temos

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \nabla (\varepsilon_0 \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \varepsilon_0 \nabla (\mathbf{H} \mathbf{x}) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \varepsilon_0 \mathbf{H} \nabla (\mathbf{x}) = 0$$

Para um universo homogêneo e isotrópico temos $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = 1$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \mathbf{H} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \right) \varepsilon_0 = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + 3\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} \varepsilon_0 = 0$$

$$\dot{\varepsilon}_0 + 3\mathbf{H} \varepsilon_0 = 0 \quad (33)$$

que afirma matematicamente que a massa com a massa não relativística se conserva. A divergência da equação de Euler (8) juntamente com a equação de Poisson (10) leva a equação de Friedmann

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\varepsilon} + \nabla \phi = 0$$

com $\nabla^2 \phi = 4\pi G \varepsilon_0$.

Dado que $\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\mathbf{H}(t)\mathbf{x}) = \mathbf{H}(t)(\nabla \cdot \mathbf{x}) = 3\mathbf{H}(t)$, $\frac{\nabla p}{\varepsilon} = 0$ e

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = (\mathbf{H}\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{V} = (\mathbf{H}\mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}) \mathbf{V} = \mathbf{H}\mathbf{V}, \text{ logo}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V} + \nabla \phi = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{H}(t) \mathbf{V} + \nabla \phi = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{H}(t) \mathbf{V} + \nabla \phi \right) = \nabla \cdot 0$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{H}(t) \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\mathbf{H}(t) \mathbf{V}) + \nabla^2 \phi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{H}(t) \nabla \cdot \mathbf{V} + \Delta \phi = 0$$

$$3 \frac{\partial \mathbf{H}(t)}{\partial t} + 3\mathbf{H}^2(t) + \Delta \phi = 0$$

$$3(\dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H}^2(t)) = -\Delta \phi$$

$$3(\dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H}^2(t)) = -4\pi G \varepsilon_0$$

$$\dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H}^2 = -\frac{4\pi G}{3} \varepsilon_0 \quad (34)$$

Pertubações ignorando as perturbações de entropia e substituindo as expressões, obtemos

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta \varepsilon_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \delta \mathbf{v}, \quad \phi = \phi_0 + \delta \phi \quad (35)$$

$$p = p_0 + \delta p = p_0 + c_2^2 \delta \varepsilon$$

aplicando nas equações (3), (8) e (10), encontramos as equações lineares para pequenas perturbações

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial (\varepsilon_0 + \delta \varepsilon_0)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\varepsilon_0 + \delta \varepsilon_0) (\mathbf{V}_0 + \delta \mathbf{v})) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta \varepsilon_0}{\partial t} + \nabla \cdot ((\varepsilon_0 + \delta \varepsilon_0) \mathbf{V}_0) + \nabla \cdot ((\varepsilon_0 + \delta \varepsilon_0) \delta \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta \varepsilon_0}{\partial t} + \nabla ((\varepsilon_0 + \delta \varepsilon_0) \mathbf{V}_0) + \nabla ((\varepsilon_0 + \delta \varepsilon_0) \delta \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta \varepsilon_0}{\partial t} + \varepsilon_0 \nabla \mathbf{V}_0 + \nabla (\delta \varepsilon_0 \cdot \mathbf{V}_0) + \varepsilon_0 \nabla \delta \mathbf{v} + \nabla (\delta \varepsilon_0 \cdot \delta \mathbf{v}) = 0$$

Desconsiderando os termos não relacionados há pequenas perturbações temos

$$\frac{\partial \delta \varepsilon_0}{\partial t} + \nabla (\delta \varepsilon_0 \cdot \mathbf{V}_0) + \varepsilon_0 \nabla \delta \mathbf{v} + \nabla (\delta \varepsilon_0 \cdot \delta \mathbf{v}) = 0$$

com $\nabla (\delta \varepsilon_0 \cdot \delta \mathbf{v}) \rightarrow 0$, temos

$$\frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon_0 (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) + \nabla (\delta \varepsilon \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\varepsilon} + \nabla \phi = 0$$

$$\frac{\partial (\mathbf{V}_0 + \delta \mathbf{v})}{\partial t} + ((\mathbf{V}_0 + \delta \mathbf{v}) \cdot \nabla) (\mathbf{V}_0 + \delta \mathbf{v}) + \frac{\nabla (p_0 + c_s^2 \delta \varepsilon)}{\varepsilon_0} + \nabla (\phi_0 + \delta \phi) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + ((\mathbf{V}_0 + \delta \mathbf{v}) \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + ((\mathbf{V}_0 + \delta \mathbf{v}) \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + \frac{\nabla p_0}{\varepsilon_0} + \frac{c_s^2 \nabla \delta \varepsilon}{\varepsilon_0} + \nabla \phi_0 + \nabla \delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla + \delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla + \delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + \frac{\nabla p_0}{\varepsilon_0} + \frac{c_s^2 \nabla \delta \varepsilon}{\varepsilon_0} + \nabla \phi_0 + \nabla \delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + \frac{\nabla p_0}{\varepsilon_0} + \frac{c_s^2 \nabla \delta \varepsilon}{\varepsilon_0} + \nabla \phi_0 + \nabla \delta \phi = 0$$

Desconsiderando os termos não relacionados há pequenas perturbações temos

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + \frac{c_s^2 \nabla \delta \varepsilon}{\varepsilon_0} + \nabla \delta \phi = 0$$

com $(\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \nabla \delta \varepsilon + \nabla \delta \phi = 0 \quad (37)$$

e

$$\Delta \delta \phi = 4\pi G \delta \varepsilon. \quad (38)$$

A velocidade de Hubble \mathbf{V}_0 depende explicitamente de \mathbf{x} e, portanto, da transformada de Fourier em relação às coordenadas eulerianas \mathbf{x} não reduz essas equações a um conjunto desacoplado de equações diferenciais ordinárias. É por isso que é mais conveniente para usar as coordenadas Lagrangianas (comovendo com o fluxo de Hubble) \mathbf{q} , que são relacionado com as coordenadas Eulerianas via

$$\mathbf{x} = a(t)\mathbf{q} \quad (39)$$

onde $a(t)$ é um fator de escala. A derivada parcial em relação ao tempo tomado em constante \mathbf{x} é diferente da derivada parcial tomada na constante \mathbf{q} . Para um general função $f(\mathbf{x}, t)$ que temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x} = a(t)\mathbf{q}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \dot{a} q^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_t \\ \left(\frac{\partial f(\mathbf{x} = a(t)\mathbf{q}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_t \\ \left(\frac{\partial f(\mathbf{x} = a(t)\mathbf{q}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f \\ \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}} \right) f &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) f \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (40)$$

e portanto

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}} - (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \quad (41)$$

As derivadas espaciais estão relacionadas de forma mais simples

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \quad (42)$$

Substituindo as derivadas em (36)-(38) e introduzindo a amplitude fracionária das perturbações de densidade $\delta \equiv \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_0}$, e finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon_0 (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) + \nabla (\delta \varepsilon \cdot \mathbf{V}) &= 0 \\ \left(\frac{\partial (\varepsilon_0 \delta)}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{v} + \nabla ((\varepsilon_0 \delta) \cdot \mathbf{V}) &= 0 \\ \varepsilon_0 \left(\frac{\partial (\delta)}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{v} + \varepsilon_0 \nabla ((\delta) \cdot \mathbf{V}) &= 0 \\ \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{v} &= 0 \\ \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} \right) + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \delta \mathbf{v} &= 0 \\ \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} \right) + \frac{1}{a} (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \nabla \delta \varepsilon + \nabla \delta \phi = 0$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t}\right) + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \nabla \delta \varepsilon + \nabla \delta \phi &= 0 \\
\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t}\right) + H \delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{V}_0 + \frac{c_s^2}{\varepsilon_0} \nabla_{\mathbf{x}} \delta \varepsilon + \nabla_{\mathbf{x}} \delta \phi &= 0 \\
\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t}\right) + H \delta \mathbf{v} + c_s^2 \nabla_{\mathbf{x}} \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_0} + \nabla_{\mathbf{x}} \delta \phi &= 0 \\
\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t}\right) + H \delta \mathbf{v} + \frac{c_s^2}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \delta + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \delta \phi &= 0 \\
\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t}\right) + H \delta \mathbf{v} + \frac{c_s^2}{a} \nabla \delta + \frac{1}{a} \nabla \delta \phi &= 0
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\Delta \delta \phi = 4\pi G \delta \varepsilon$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \delta \phi = 4\pi G (\varepsilon_0 \delta)$$

$$\frac{\nabla_{\mathbf{q}}^2 \delta \phi}{a^2} = 4\pi G (\varepsilon_0 \delta)$$

$$\Delta \delta \phi = 4\pi G a^2 \varepsilon_0 \delta \tag{45}$$

onde $\nabla \equiv \nabla_{\mathbf{q}}$ e Δ agora são as derivadas em relação às coordenadas de Lagrange \mathbf{q} e as derivadas de tempo são tomadas na constante \mathbf{q} . Ao derivar (43), temos usado (33) para o fundo e observou que $\nabla \cdot \mathbf{V}_0 = 3\mathbf{H}(t)$ e $(\delta \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{V}_0 = H \delta \mathbf{v}$. Tomando a divergência de (44) e usando as equações de continuidade e Poisson para expressar $(\nabla \cdot \delta \mathbf{v})$ e $\delta \phi$ em termos de δ , derivamos a equação de forma fechada.

Com as equações (43) podemos obter as seguintes relações

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right) + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \delta \mathbf{v} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right) = -\frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \delta \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \delta \mathbf{v} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \delta \mathbf{v} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \frac{\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{v}) - \frac{\partial a}{\partial t} (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{v})}{a^2} = 0$$

como $\frac{\partial a}{\partial t} = a\mathbf{H}$, portanto

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{v}) - \frac{a \mathbf{H}}{a^2} (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{v}) = -\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \frac{\mathbf{H}}{a} (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{v})$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{v}) = -\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \mathbf{H} \frac{\partial \delta}{\partial t}$$

com as relações a cima, prosseguimos dessa forma

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{H} \delta \mathbf{v} + \frac{c_s^2}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \delta + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \delta \phi \right) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot 0$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{H} \delta \mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{c_s^2}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \delta \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \delta \phi \right) = 0$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{v})}{\partial t} + \frac{\mathbf{H}}{a} (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{v}) + \frac{c_s^2}{a^2} \nabla_{\mathbf{q}}^2 \delta + \frac{1}{a^2} \nabla_{\mathbf{q}}^2 \delta \phi = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \mathbf{H} \frac{\partial \delta}{\partial t} - \mathbf{H} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{c_s^2}{a^2} \nabla_{\mathbf{q}}^2 \delta + \frac{1}{a^2} (4\pi G a^2 \varepsilon_0 \delta) = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{c_s^2}{a^2} \nabla_{\mathbf{q}}^2 \delta + 4\pi G \varepsilon_0 \delta = 0$$

$$\ddot{\delta} + 2\mathbf{H}\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2} \Delta \delta - 4\pi G \varepsilon_0 \delta = 0 \quad (46)$$

que descreve a instabilidade gravitacional em um universo em expansão.

6.3.1 Perturbações Adiabáticas

Tomando a transformada de Fourier da equação (46) para as coordenadas comoventes \mathbf{q} ,

$$\begin{aligned} \delta &= \int \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \right) &+ 2\mathbf{H} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \right) - \frac{c_s^2}{a^2} \Delta \left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \right) - \\ 4\pi G \varepsilon_0 \left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} - 4\pi G \varepsilon_0 \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{c_s^2}{a^2} \left(\int \Delta \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \right) = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} - 4\pi G \varepsilon_0 \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{c_s^2 (|k|i)^2}{a^2} \left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \right) = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} - 4\pi G \varepsilon_0 \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} + \frac{c_s^2 k^2}{a^2} \left(\int \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \right) = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + \frac{c_s^2 k^2}{a^2} \delta_{\mathbf{k}}(t) - 4\pi G \varepsilon_0 \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \varepsilon_0 \right) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} = 0$$

multiplicando por $e^{i\mathbf{k}'\mathbf{q}}$

$$e^{i\mathbf{k}'\mathbf{q}} \left(\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \varepsilon_0 \right) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \right) = 0 e^{i\mathbf{k}'\mathbf{q}}$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \varepsilon_0 \right) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} = 0$$

realizando a integral definida de \mathbf{q} , temos

$$\int \left(\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \varepsilon_0 \right) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \right) d\mathbf{q} = \int 0 d\mathbf{q}$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \varepsilon_0 \right) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) \int \left(e^{i\mathbf{q}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^{3/2}} \right) d^3 k = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \varepsilon_0 \right) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') d^3 k = 0$$

$$\int \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \left(\frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \varepsilon_0 \right) \delta_{\mathbf{k}}(t) \right) d^3 k = 0$$

sabendo que o integrando deve ser equivalente a zero para que o resultado da integração ser igual a zero, assim obtemos a equação diferencial ordinária

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2\mathbf{H}\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \varepsilon_0 \right) \delta_{\mathbf{k}} = 0 \quad (47)$$

O comportamento de cada perturbação depende crucialmente de seu tamanho espacial; a escala de comprimento crítica é o comprimento de jeans